

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

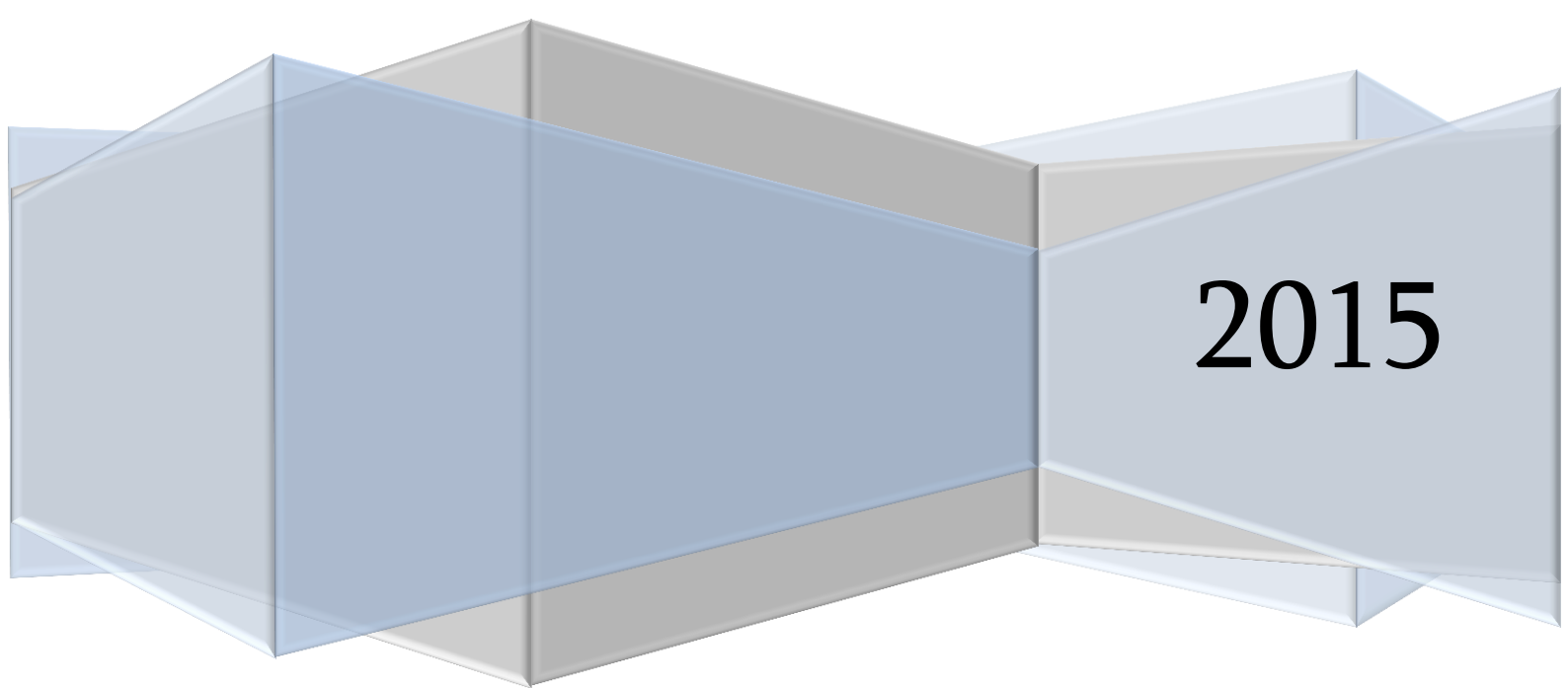
საინჟინრო სტატიკა

ლექციების კურსი „**Engineering Mechanics: Statics. 6th**

Edition – International Edition, January 2, 2008, by J. L.

Meriam, L. G. Kraige“ წიგნის მიხედვით

ნიადაგისა და წყლის რესურსების ინჟინერიის
სპეციალობის სტუდენტებისთვის



2015

სარჩევი

თავი 1. სტატიკის შესავალი.....	4
1.1. მექანიკა.....	4
1.2. ძირითადი ცნებები.....	4
1.3. სკალარები და ვექტორები	5
1.4. ნიუტონის კანონები	9
1.5. ერთეულები	10
1.6. გრავიტაციის კანონები	11
1.7. პრობლემების ამოხსნის მეთოდები	12
1.8. რიცხვითი მნიშვნელობები და სიმბოლოები.....	13
თავი 2. ძალთა სისტემები.....	15
2.1. შესავალი.....	15
2.2. ძალა.....	15
2.3. მართკუთხა კომპონენტები.....	19
2.4. მომენტი	21
2.5. წყვილი.....	25
2.6. ტოლქმედები	27
თავი 3. ძალთა სამგანზომილებიანი სისტემები	30
3.1. მართკუთხა კომპონენტები.....	30
3.2. მომენტი და წყვილი.....	34
3.3. ტოლქმედები	39
თავი 4. წონასწორობა	44
4.1. შესავალი.....	44
4.2. სისტემის იზოლირება და თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა	44
4.3. წონასწორობის პირობები.....	53
თავი 5. წონასწორობა სამი განზომილების შემთხვევაში	60
5.1. წონასწორობის პირობები.....	60
თავი 6. კონსტრუქციები	67
6.1. შესავალი.....	67
6.2. ბრტყელი წამწები (ფერმები)	67

6.3. შეერთებების მეთოდი	70
6.4. გაკვეთის მეთოდი	74
6.5. სივრცითი წამწეები	77
თავი 7. კარკასები და მექანიზმები.....	81
თავი 8. განაწილებული ძალები	87
8.1. შესავალი.....	87
8.2. მასების ცენტრები	89
8.3. წრფეების, ფართობების და მოცულობების ცენტროიდები	92
8.4. შედგენილი სხეულები და ფიგურები; მიახლოებები	95
8.5. პაპუსის თეორემა.....	97
თავი 9. ძელები (კოჭები).....	99
9.1. ძელები - გარე ეფექტები	99
9.2. ძელები - შიდა ეფექტები.....	101
თავი 10. ელასტიკური კაბელები	106
თავი 11. დენადი მასების სტატიკა.....	115
თავი 12. ხახუნი	124
12.1. შესავალი.....	124
12.2. ხახუნის სახეები.....	125
12.3. მშრალი ხახუნი	126
თავი 13. ხახუნის გამოყენება მექანიზმებში.....	132
13.1. სოლები	132
13.2. ხრახნები.....	134
13.3. საყრდენი საკისრები	136
13.4. ბჯენითი საკისრები. დისკოს ხახუნი	137
13.5. მოქნილი ღვედები.....	139
13.6 ბრუნვისადმი წინააღმდეგობა	141
თავი 14. შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობა	143
14.1. შესავალი.....	143
14.2. მუშაობა.....	143
14.3. წონასწორობა	147

14.4. პოტენციური ენერგია და სტაბილურობა.....	155
თავი 15. ინერციის ფართოთი მომენტები.....	164
15.1. შესავალი.....	164
15.2. განსაზღვრებები.....	165
15.3. შედგენილი ფართობები.....	169
15.4. ინერციის ნამრავლი და ღერძების ბრუნვა.....	170

თავი 1. სტატიკის შესავალი

1.1. მექანიკა

მექანიკა ფიზიკური მეცნიერებაა, რომელიც შეისწავლის ძალთა მოქმედებას ობიექტებზე. არც ერთ საგანს არ უთამაშია იმაზე უფრო დიდი როლი საინჟინრო ანალიზში, ვიდრე მექანიკას. თუმცა მექანიკის პრინციპები მცირერიცხოვანია, მაგრამ ისინი ფართოდ გამოიყენება ინჟინერიაში. მექანიკის პრინციპებს ცენტრალური ადგილი უკავიათ კონსტრუქციების და მექანიზმების ვიზუალიზაციის, სტაბილურობისა და სიმტკიცის დარგში, რობოტოტექნიკაში, სარაკეტო და კოსმოსური აპარატების დაპროექტებაში, საინჟინრო ექსპლუატაციაში, ჰიდროდინამიკაში, ელექტრულ მანქანებსა და აპარატურაში და მოლეკულურ, ატომურ და სუბატომურ ქცევაში. მექანიკის გულდასმით შესწავლა მნიშვნელოვანი წინაპირობაა ამ დარგებში წარმატებით მუშაობისათვის.

მექანიკა უძველესი ფიზიკური მეცნიერებაა. ამ საგნის ადრეული ისტორია სათავეს იღებს ინჟინერიის საწყისებიდან. კერძოდ, არქიმედეს (287-212 წ.წ.) ბერკეტის და ტივტივადობის პრინციპებიდან. ძალთა ვექტორთა შეკრების კანონები ჩამოაყალიბა სტეფანიუსმა (1548-1620); მანვე ჩამოაყალიბა სტატიკის პრინციპების უმრავლესობა. დინამიკის პრობლემების პირველი კვლევა ჩაატარა გალილეიმ (1564-1642) თავისი ექსპერიმენტებით ვარდნილ ქვასთან დაკავშირებით. მოძრაობის, ისევე როგორც გრავიტაციის კანონების ზუსტი ფორმულირება მოგვცა ნიუტონმა (1642-1727). მან ასევე შემოიტანა უსასრულოდ მცირეთა იდეა მათემატიკურ ანალიზში. მექანიკის განითარებაში მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანეს და ვინჩი, ვარინიონმა, ეილერმა, დალამბერმა, ლაგრანჟმა, ლაპლასმა და სხვ.

მექანიკის საგანი ლოგიკურად იყოფა ორ ნაწილად: **სტატიკად**, რომელიც შეისწავლის სხეულების წონასწორობას მათზე ძალთა მოქმედებისას და **დინამიკად**, რომელიც ეხება სხეულების მოძრაობას. **საინჟინრო მექანიკაც** ზუსტად ამ ორ ნაწილად იყოფა.

1.2. ძირითადი ცნებები

სივრცე არის გეომეტრიული უბანი, დაკავებული სხეულების მიერ, რომელთა მდებარეობა აღიწერება წრფივი და კუთხოვანი გაზომვებით კოორდინატთა სისტემის მიმართ. სამგანზომილებიანი პრობლემისათვის მოითხოვება მხოლოდ

სამი დამოუკიდებელი კოორდინატი, ორგანოზომილებიანი პრობლემისათვის კი – მხოლოდ ორი.

დრო არის მოვლენათა თანმიმდევრობის ზომა და დინამიკის ძირითადი ერთეული. დრო პირდაპირ არ არის ჩართული სტატიკის პრობლემების ანალიზში.

მასა არის სხეულის ინერციის ზომა და წარმოადგენს მის წინააღმდეგობას სიჩქარის ცვლილებისადმი. მასა ასევე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნივთიერების ან სხეულის რაოდენობა. სხეულის მასა გრავიტაციული ურთიერთქმედების ძალით მოქმედებს სხვა სხეულებზე. ამ ძალას მრავალი გამოყენება აქვს სტატიკაში.

ძალა არის ერთი სხეულის მეორეზე ქმედება. ძალა აიძულებს სხეულს იმოძრაოს მისი ქმედების მიმართულებით. ძალა ხასიათდება **სიდიდით**, ქმედების **მიმართულებით** და **მოდების წერტილით**. ასე რომ, ძალა ვექტორული სიდიდეა.

ნაწილაკი არის უმნიშვნელო ზომის სხეული. მათემატიკური თვალთახედვით, ნაწილაკი არის სხეული, რომლის ზომაც განიხილება როგორც ნულთან ახლო, ასე რომ, მისი ანალიზი შეიძლება როგორც წერტილში კონცენტრირებული მასის. სხეული შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნაწილაკი, როდესაც მისი ზომა უმნიშვნელოა მისი მდებარეობის ნებისმიერ აღწერაში ან მასზე მოდებული ძალების მიმართ.

მყარი სხეული. სხეული განიხილება როგორც მყარი, როდესაც მის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის მანძილის ცვლილება უმნიშვნელოა. მაგალითად, ძაბვაზე კაბელში, რომელიც იჭერს ამწეს ისარს, არ მოქმედებს მნიშვნელოვნად ისრის კონსტრუქციულ ელემენტებში მცირე შიდა დეფორმაციები. ისარზე მოქმედი გარე ძალების განსაზღვრის მიზნით იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ხისტი მყარი სხეული. სტატიკა, პირველ რიგში, ეხება გარე ძალების გამოთვლას, რომლებიც მოქმედებენ ხისტ მყარ სხეულზე წონასწორობის დროს. შიდა დეფორმაციების განსაზღვრა იწვევს დეფორმირებადი სხეულების მექანიკის შესწავლას.

1.3. სკალარები და ვექტორები

მექანიკაში გამოიყენება ორი სახის სიდიდეები - სკალარები და ვექტორები. **სკალარულ სიდიდეებს** უკავშირდება მხოლოდ მნიშვნელობა. ასეთებია დრო, მოცულობა, სიმკვრივე, ენერგია და მასა. მეორე მხრივ, **ვექტორულ სიდიდეებს** ახასიათებთ როგორც სიჩქარე, ასევე მიმართულება და ისინი ემორჩილებიან შეკრების პარალელოგრამის წესს. ვექტორული სიდიდეების მაგალითებია გადაადგილება, აჩქარება, სიჩქარე, ძალა, მომენტი და ძალის იმპულსი.

ვექტორები, რომლებიც გამოსახავენ ფიზიკურ სიდიდეებს, კლასიფიცირდება როგორც თავისუფალი, სრიალა და ფიქსირებული.

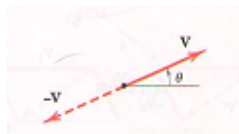
თავისუფალი ვექტორის ქმედება არ არის შეზღუდული ან არ არის დაკავშირებული სივრცის ერთადერთ წრფესთან. მაგალითად, თუ სხეული ბრუნავს, მაშინ სხეულის ნებისმიერი წერტილის მოძრაობა ან გადაადგილება შეიძლება განვიხილოთ როგორც ვექტორი. ვექტორი ასეთივე წარმატებით აღწერს სხეულის ყველა წერტილის გადაადგილების მიმართულებას და სიდიდეს. ამრიგად, ასეთი სხეულის გადაადგილება შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც თავისუფალი ვექტორი.

სრიალა ვექტორი ხასიათდება სივრცეში ქმედების ერთი წრფით, მაგრამ არა ძალის მოდების ერთადერთი წერტილით. მაგალითად, როდესაც გარე ძალა მოქმედებს ხისტ მყარ სხეულზე, ძალის მოდება შესაძლებელია მისი ქმედების ნებისმიერი წრფის გასწვრივ მთელ სხეულზე მისი ქმედების ცვლილების გარეშე (ეს არის ტრანსმისიის პრინციპი) და, ამდენად, ის არის სრიალა ვექტორი.

ფიქსირებული ვექტორისათვის განსაზღვრულია მოდების ერთადერთი წერტილი. ძალის ქმედება დეფორმირებად ან არახისტ მყარ სხეულზე განისაზღვრება ფიქსირებული ვექტორით ძალის მოდების წერტილში. ამ შემთხვევაში ძალები და დეფორმაციები სხეულში დამოკიდებულია ძალის მოდების წერტილზე, ისევე როგორც მის სიდიდეზე და მოქმედების მიმართულებაზე.

შეთანხმებები განტოლებებისა და დიაგრამებისათვის

ვექტორული სიდიდე $\vec{V}$ წარმოიდგინება წრფის სეგმენტით (ნახ. 1.1.), რომელსაც აქვს ვექტორის მიმართულება და თავზე აქვს მაჩვენებელი ისარი. სეგმენტის მიმართული წრფის სიგრძე წარმოადგენს ვექტორის სიდიდეს $|\vec{V}|$ რაღაც არჩეული სკალით. მაგალითად, ვირჩევთ ისეთ სკალას, რომ 2.5 სანტიმეტრი სიგრძის ისარი აჩვენებდეს 0.9კგ ძალას.



ნახ. 1.1.

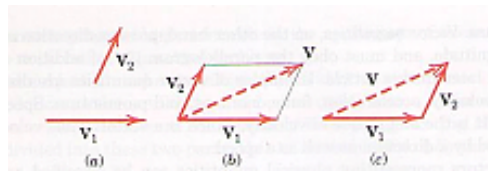
სკალარულ განტოლებებში და ხშირად დიაგრამებზეც, სადაც აღნიშნულია მხოლოდ ვექტორის სიდიდე, სიმბოლო ნაჩვენებია ღია შრიფტით. მუქი შრიფტი გამოიყენება ვექტორული სიდიდეებისათვის, როდესაც ვექტორის მიმართულების ასპექტი მისი მათემატიკური წარმოდგენის ნაწილია. ვექტორული განტოლების ჩაწერისას ყოველთვის დარწმუნდით, რომ დაცულია განსხვავება ვექტორულ და

სკალარულ სიდიდეებს შორის. კერძოდ, გამოიყენეთ ისეთი აღნიშვნები, როგორიცაა $\underline{V}$ ან $\vec{V}$.

ვექტორებით ოპერირება

ვექტორის მიმართულება შეიძლება გაიზომოს θ კუთხით გარკვეულ ცნობილ ამოსავალ მიმართულებიდან (ნახ. 1.1.). უარყოფითი $\vec{V}$ არის $-\vec{V}$, რომელსაც აქვს იგივე სიდიდე, რაც $\vec{V}$ -ს, მაგრამ საწინააღმდეგო მიმართულება.

ვექტორები ემორჩილება შეკრების პარალელოგრამის წესს, რომლის თანახმადაც ორი ვექტორი $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$, რომლებიც განიხილება როგორც თავისუფალი ვექტორები (ნახ. 1.2.ა.), შეიძლება ჩანაცვლებულ იქნან მათი ეკვივალენტური ვექტორით, $\vec{V}$, $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ -ით წარმოქმნილი პარალელოგრამის დიაგონალით (ნახ. 1.2.ბ.).



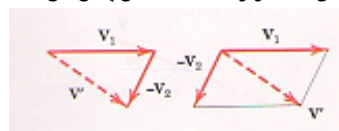
ნახ. 1.2. ა, ბ, გ.

ამ კომბინაციას **ვექტორული ჯამი** ეწოდება. იგი წარმოდგენილია განტოლებით:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

სადაც პლუს ნიშანი აღნიშნავს **ვექტორულ** და არა **სკალარულ** შეკრებას. ვექტორების სიდიდეების სკალარული ჯამი, ჩვეულებრივ, ასე ჩაიწერება: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$. პარალელოგრამის გეომეტრია აჩვენებს, რომ $V \neq V_1 + V_2$.

ორი თავისუფალი ვექტორი $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ასევე შეიძლება შეიკრიბოს ერთი ვექტორის თავის მეორის ბოლოსთან შეერთებით სამკუთხედის წესით (ნახ. 1.2.გ.), რათა მიიღოთ ცალკეულ ვექტორთა ჯამი $\vec{V}$. დიაგრამიდან ცხადია, რომ ვექტორთა შეკრების თანმიმდევრობა არ მოქმედებს მათ ჯამზე. ასე რომ, $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$.



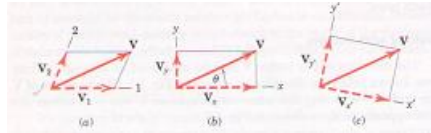
ნახ. 1.3.

ორ ვექტორს შორის სხვაობა $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ ადვილად მიიღება $-\vec{V}_2$ -სა და $\vec{V}_1$ -ის შეკრებით (ნახ. 1.3.), სადაც გამოიყენება როგორც პარალელოგრამის, ასევე სამკუთხედის წესი. ორ ვექტორს შორის სხვაობა $\vec{V}'$ გამოისახება განტოლებით:

$$\vec{V}' = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

აქ მინუს ნიშანი აღნიშნავს ვექტორთა გამოკლებას.

ნებისმიერი ორი ან მეტი ვექტორი, რომელთა ჯამი გარკვეული $\vec{V}$ ვექტორის ტოლია, განიხილება როგორც ამ ვექტორის კომპონენტები. ამრიგად, $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ვექტორები $\vec{V}$ ვექტორის კომპონენტებია 1 და 2 მიმართულებით (ნახ. 1.4.ა).



ნახ. 1.4. ა, ბ, გ.

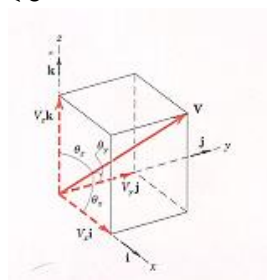
ჩვეულებრივ, უფრო მოსახერხებელია ისეთი კომპონენტებით ოპერირება, რომლებიც ურთიერთპერპენდიკულარულია. მათ მართკუთხა კომპონენტები ეწოდება. ვექტორები $\vec{V}_x$ და $\vec{V}_y$ (ნახ. 1.4.ბ) $\vec{V}$ ვექტორის x - და y - კომპონენტებია. მართკუთხა კომპონენტებით გამოსახვისას ვექტორის მიმართულება მკაფიოდ ხასიათდება θ კუთხით, სადაც:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\vec{V}_y}{\vec{V}_x}$$

მათემატიკურად $\vec{V}$ ვექტორის გამოსახვა შეიძლება მისი სიდიდის V გამრავლებით $\vec{n}$ ვექტორზე, რომელიც ერთის ტოლია და რომლის მიმართულებაც ემთხვევა $\vec{V}$ -ს მიმართულებას. ასეთ ვექტორს **ერთეულოვანი ვექტორი** ეწოდება, ასე რომ:

$$\vec{V} = V \cdot \vec{n}$$

ასეთი გზით ვექტორის როგორც სიდიდე, ასევე მიმართულება მოცემულია ერთი მათემატიკური გამოსახულებით.



ნახ. 1.5.

მრავალი პრობლემისათვის, კერძოდ, სამი განზომილების შემთხვევაში, ხელსაყრელია $\vec{V}$ -ს მართკუთხა კომპონენტების გამოსახვა ერთეული ვექტორებით $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ (ნახ. 1.5.), რომლებიც ვექტორებია x -, y - და z - მიმართულებებით და რომელთა სიდიდეები ერთის ტოლია. რადგან $\vec{V}$ არის კომპონენტების ვექტორული ჯამი, შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

აქ გამოვიყენებთ მიმართველ კოსინუსებს l, m და n : $l = \cos\theta_x$; $m = \cos\theta_y$;
 $n = \cos\theta_z$

მაშინ: $V_x = lV$, $V_y = mV$ და $V_z = nV$,

საიდანაც, პითაგორას თეორემით: $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$

აღსანიშნავია, რომ ეს დამოკიდებულება გულისხმობს, რომ: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

1.4. ნიუტონის კანონები

1-ლი კანონი. ნაწილაკი უძრავია ან განაგრძობს თანაბარ მოძრაობას წრფეზე მუდმივი სიჩქარით, თუ მასზე არ მოქმედებს რაიმე არადაბალანსებული ძალა.

მე-2 კანონი. ნაწილაკის აჩქარება მასზე მოქმედი ძალების ვექტორული ჯამის პროპორციულია და თანხვედრა ამ ჯამის მიმართულებას.

მე-3 კანონი. ურთიერთქმედ სხეულებს შორის ქმედების და უკუქმედების ძალები ტოლია სიდიდით, საწინააღმდეგოა მიმართულებით და კოლინეარულია (ისინი ერთ წრფეზე იმყოფებიან).

ამ სამი კანონის სისწორე დადასტურებულია უამრავი ზუსტი ფიზიკური ექსპერიმენტით. მეორე კანონი დინამიკის უმრავლესი ანალიზების საფუძველია. იგი ასე გამოისახება:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1.1)$$

სადაც $\vec{F}$ არის ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ვექტორული ჯამი და $\vec{a}$ არის ნაკრები აჩქარება, m -ნაწილაკის მასაა. ეს არის ვექტორული განტოლება, რადგან $\vec{F}$ -ის მიმართულება უნდა ემთხვეოდეს $\vec{a}$ -ს მიმართულებას და $\vec{F}$ -ის და $m\vec{a}$ -ს სიდიდეები უნდა იყოს ტოლი.

პირველი კანონი გამოსახავს ძალთა წონასწორობის პრინციპს, რომელსაც ძირითადი ადგილი უკავია სტატიკაში. რეალურად, ეს არის პირველი კანონის შედეგი, რადგან არ არის აჩქარება ნულოვანი ძალის შემთხვევაში და ნაწილაკი ან უძრავია, ან მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით.

მეორე კანონი ძირითადია ძალის გაგებისათვის. მის თანახმად, ძალები ყოველთვის მოქმედებენ როგორც ტოლი და საწინააღმდეგო ძალთა წყვილი. ასე რომ, ფანქრის მიერ მერხზე ქვევით მიმართულ ძალას თან სდევს იმავე სიდიდის ზევით მიმართული ძალა, რომელსაც მერხი ანიჭებს ფანქარს. ეს პრინციპი სამართლიანია ყველა ძალისათვის, ცვლადის თუ მუდმივის, მათი წყაროს მიუხედავად და სამართლიანია ძალთა ქმედების დროის ყველა მომენტისათვის.

ძალთა ქმედებისას სხეულების ანალიზის დროს აუცილებელია იმის გააზრება, თუ რომელი ძალა განიხილება ყოველი ქმედება-უკუქმედების წყვილის შემთხვევაში. პირველ რიგში აუცილებელია განსაზღვრული სხეულის იზოლირება და შემდეგ ერთი ძალის განხილვა წყვილიდან, რომელიც მოქმედებს სხეულზე.

1.5. ერთეულები

მექანიკაში გამოიყენება ოთხი ფუნდამენტური სიდიდე, რომელსაც **განზომილება** ეწოდება. ესენია სიგრძე, მასა, ძალა და დრო. ერთეულები ამ სიდიდეების გასაზომად არ შეიძლება შეირჩეს დამოუკიდებლად, რადგან ისინი უნდა ეთანხმებოდნენ ნიუტონის მეორე კანონს (განტოლება 1.1)

SI ერთეულები

ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა (SI) მიღებულია აშშ-ში და მთელ მსოფლიოში. SI სისტემაში მასის ერთეულია კილოგრამი (კგ), სიგრძის - მეტრი (მ), დროის - წამი (წმ). ესენი ითვლება ძირითად ერთეულებად. ძალის ერთეული-ნიუტონი (ნ) გამოიყვანება (1.1.) განტოლებიდან. ამრიგად, ძალა $(\text{ნ}) = \text{მასა}(\text{კგ}) \times \text{აჩქარება}(\text{მ/წმ}^2)$ ანუ:

$$1\text{ნ} = \text{კგ} \cdot \text{მ/წმ}^2$$

ამრიგად, 1 ნიუტონი არის ძალა, რომელიც აუცილებელია 1 კგ მასისათვის 1 მ/წმ² აჩქარების მისანიჭებლად.

განვიხილოთ m მასის სხეული, რომელიც თავისუფლად ვარდება დედამიწის ზედაპირის მახლობლად. თუ სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ მიზიდულობის ძალა, ის ვარდება g აჩქარებით დედამიწის ცენტრისკენ. ეს მიზიდულობის ძალა არის სხეულის წონა W და მიიღება (1.1.) განტოლებიდან:

$$W(\text{ნ}) = m(\text{კგ}) \times g(\text{მ/წმ}^2)$$

ძირითადი სტანდარტები

მასა. კილოგრამი განისაზღვრება როგორც პლატინა-ირიდიუმის ცილინდრის მასა, რომელიც ინახება წონების და ზომების საერთაშორისო ბიუროში (პარიზთან, საფრანგეთი).

სიგრძე. მეტრი, რომელიც თავიდან განისაზღვრება როგორც ერთი ათმემილიონედი მანძილისა ეკვატორიდან პოლუსამდე პარიზზე გამავალი მერიდიანის

გასწვრივ, მოგვიანებით განისაზღვრა როგორც პლატინა-ირიდიუმის ცილინდრის სიგრძე. ასევე ინახება აღნიშნულ ბიუროში.

დრო. წამი თავდაპირველად განისაზღვრება როგორც საშუალო მზიანი დღის 1/86400-ე ნაწილი. მაგრამ დედამიწის ბრუნვის უთანაბრობამ გამოიწვია გარკვეული სიძნელეები. ახლა წამი განისაზღვრება როგორც ცეზიუმ-133 ატომის გარკვეული მდგომარეობის გამოსხივების 9 192 631 770 პერიოდის ხანგრძლივობა.

გრავიტაციული აჩქარების, g -ს სტანდარტულ მნიშვნელობად მიღებულია მისი მნიშვნელობა ზღვის დონეზე 45° გრძედზე. SI ერთეულებში $g = 9.80665 \text{ მ/წმ}^2$

1.6. გრავიტაციის კანონები

სტატიკაში და დინამიკაში ხშირად აუცილებელია სხეულის წონის გამოთვლა, რომელიც არის მასზე მოქმედი გრავიტაციული ძალა. ეს გამოთვლა ეფუძნება **გრავიტაციის კანონს**, რომელიც ასევე ჩამოყალიბებულია ნიუტონის მიერ:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.2)$$

სადაც F - ორ ნაწილაკს შორის ურთიერთმიზიდულობის ძალაა, G - უნივერსალური მუდმივა, ე. წ. გრავიტაციული მუდმივაა, m_1, m_2 - ორი ნაწილაკის მასებია, r - მანძილი ნაწილაკების ცენტრებს შორის.

ურთიერთქმედების ძალები F ემორჩილება ქმედების და უკუქმედების კანონს, რადგან ისინი ტოლია და ურთიერთსაწინააღმდეგო და მიმართულია ნაწილაკების ცენტრების შემაერთებელი წრფის გასწვრივ. ექსპერიმენტულად დადგენილია, რომ გრავიტაციული მუდმივა:

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ მ}^3/(\text{კგ} \cdot \text{წმ}^2)$$

დედამიწის გრავიტაციული მიზიდულობა

გრავიტაციული ძალები არსებობენ სხეულების ნებისმიერ წყვილში. დედამიწის ზედაპირზე ერთადერთი საგრძნობი სიდიდის გრავიტაციული ძალა არის დედამიწის მიზიდულობის ძალა. მაგალითად, 100 მმ დიამეტრის ტყვიის ორი სფეროდან თითოეული დედამიწისკენ მიიზიდება 37,15 მიზიდულობის ძალით, რაც მათ წონას წარმოადგენს. მეორე მხრივ, ამ სფეროებს შორის ურთიერთქმედების ძალა მათი შეხებისას შეადგენს 0,00000009515. ეს ძალა, ცხადია, უმნიშვნელოა, 37,15-თან შედარებით. შესაბამისად, დედამიწის გრავიტაციული მიზიდულობა ერთადერთი გრავიტაციული ძალაა, რომელიც

შეიძლება გათვალისწინებულ იქნას საინჟინრო გამოყენებისათვის დედამიწის ზედაპირზე.

სხეულზე დედამიწის გრავიტაციულ მიზიდულობას (სხეულის წონა) ადგილი აქვს ნებისმიერ შემთხვევაში, უძრავია სხეული თუ მოძრაობს. სხეულის წონა SI ერთეულებში გამოისახება ნიუტონებში (ნ). სამწუხაროდ, მასის ერთეული - კილოგრამი (კგ) ხშირად გამოიყენება როგორც წონის საზომი.

დედამიწის ზედაპირთან ახლოს მდებარე m მასის სხეულისათვის გრავიტაციული მიზიდულობის ძალა F განისაზღვრება (1.2.) განტოლებით. ჩვეულებრივ, გრავიტაციული ძალის სიდიდეს, ანუ წონას, აღნიშნავენ W -თი. რადგან სხეული ვარდება g აჩქარებით, (1.1.) განტოლებიდან ვიღებთ:

$$W = mg \quad (1.3)$$

წონა იქნება ნიუტონებში (ნ), მასა - კილოგრამებში (კგ) და გრავიტაციული აჩქარება g - მეტრი/სმ²-ში.

ნამდვილი წონა (გრავიტაციული მიზიდულობა) და მოჩვენებითი წონა (გაზომილი ზამბარიანი სასწორით) მცირედ განსხვავდება ერთმანეთისგან. სხვაობა, გამოწვეული დედამიწის ბრუნვით, საკმაოდ მცირეა და შეიძლება მისი უგულებელყოფა.

1.7. პრობლემების ამოხსნის მეთოდები

სტატიკაში, ისევე როგორც ყველა საინჟინრო პრობლემის შემთხვევაში, აუცილებელია ზუსტი და ლოგიკური მეთოდი პრობლემის ჩამოყალიბებისათვის და მისი ამოხსნის მისაღებად.

გრაფიკების გამოყენება მნიშვნელოვანია სამი მიზეზის გამო:

1. გრაფიკებს იყენებენ ფიზიკური სისტემის ქაღალდზე წარმოსადგენად სქემის ან დიაგრამის სახით. პრობლემის გეომეტრიული წარმოდგენა გვეხმარება მის ფიზიკურ ინტერპრეტირებაში, კერძოდ, როდესაც აუცილებელია სამგანზომილებიანი პრობლემის ვიზუალიზება.
2. ხშირად პრობლემის ამოხსნა ბევრად უფრო ადვილია გრაფიკულად, ვიდრე პირდაპირი მათემატიკური გზით. გრაფიკული ამოხსნა არის როგორც შედეგების მიღების პრაქტიკული ხერხი, ასევე გვეხმარება პროცესების გააზრებაში. რადგან გრაფიკი ერთდროულად ასახავს ფიზიკურ სიტუაციას და მის მათემატიკურ გამოსახულებას, გრაფიკი გვეხმარება ამ ორ მეთოდს შორის გადასვლაში.
3. სქემები ან გრაფიკები მნიშვნელოვანია შედეგების იმ სახით წარმოდგენისათვის, რომლებიც გასააზრებლად ადვილია.

თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა

სხეულზე მოქმედი ძალების ანალიზისათვის მნიშვნელოვანია სხეულის იზოლირება სხვა სხეულებისგან, რათა გავითვალისწინოთ სხეულზე მოქმედი ყველა ძალის სრული და ზუსტი სიდიდე. ასეთი იზოლირებული სხეულის დიაგრამას მასზე მოქმედი ყველა გარე ძალის ჩვენებით ეწოდება **თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა**.

ეს მეთოდი გადამწყვეტია მექანიკისათვის, რადგან სხეულის იზოლირება მკაფიოდ განასხვავებს **მიზეზს** და **შედეგს**.

1.8. რიცხვითი მნიშვნელობები და სიმბოლოები

სტატიკის კანონების გამოყენებისას ვსარგებლობთ რიცხვითი მნიშვნელობებით ან ალგებრული სიმბოლოებით და პასუხს ფორმულით გამოვსახავთ. რიცხვითი მნიშვნელობების გამოყენებისას თითოეული პარამეტრის სიდიდე, გამოსახული შესაბამისი ერთეულებით, ცხადია გამოთვლის ნებისმიერ საფეხურზე.

მაგრამ სიმბოლურ ამოხსნას აქვს გარკვეული უპირატესობები რიცხვით ამოხსნასთან შედარებით. უპირველეს ყოვლისა, სიმბოლოები საშუალებას იძლევა გავამახვილოთ ყურადღება ფიზიკურ მდგომარეობასა და მის შესაბამის მათემატიკურ აღწერას შორის კავშირზე. მეორე, სიმბოლური ამოხსნის გამოყენება შეიძლება მრავალჯერადად ერთი და იმავე ტიპის პრობლემისათვის, რომლებსაც აქვთ განსხვავებული ერთეულები ან რიცხვითი მნიშვნელობები. მესამე, სიმბოლური ამოხსნის საშუალებით შეიძლება ყოველი საფეხურის ზომების კონტროლი, რაც გაძნელებულია რიცხვითი მეთოდით. ფიზიკური მდგომარეობის ამსახველ ნებისმიერ განტოლებაში თითოეული წევრის განზომილება განტოლების ორივე მხარეს უნდა იყოს ერთი და იგივე. ამ თვისებას **განზომილების ერთგვაროვნება** ეწოდება.

სტატიკის პრობლემების ამოხსნების მიღება შეიძლება შემდეგი გზებით:

1. ალგებრული სიმბოლოების ან რიცხვითი მნიშვნელობების გამოყენებით მათემატიკური ამონახსნების მიღება.
2. ცალკეული პრობლემისათვის გრაფიკული ამოხსნების მიღება.
3. პრობლემების ამოხსნა კომპიუტერის საშუალებით. ეს მეთოდი სასარგებლოა, როცა საქმე გვაქვს განტოლებათა დიდ რიცხვთან, როდესაც საჭიროა პარამეტრების ვარიაციის შესწავლა ან ძნელად ამოხსნადი განტოლების ამოხსნა.

რეზიუმე

ამ თავის შესწავლის შემდეგ სტუდენტი შეძლებს:

1. გამოსახოს ვექტორები ერთეულოვანი ვექტორების და პერპენდიკულარული კომპონენტების საშუალებით და ჩაატაროს ვექტორთა შეკრება და გამოკლება.
2. ჩამოაყალიბოს ნიუტონის მოძრაობის კანონები.
3. ჩაატაროს გამოთვლები SI ერთეულების გამოყენებით შესაბამისი სიზუსტით.

თავი 2. ძალთა სისტემები

2.1. შესავალი

აქ შევისწავლით ძალების ეფექტებს, რომლებიც მოქმედებენ საინჟინრო კონსტრუქციებზე და მექანიზმებზე. აქ მიღებული გამოცდილება დაეხმარება სტუდენტს შეისწავლოს მექანიკა და სხვა ისეთი საგნები, როგორიცაა ძაბვების ანალიზი, კონსტრუქციების და მექანიზმების დაპროექტება, დენადი მასები. ეს თავი არა მარტო სტატიკის, არამედ მთელი მექანიკის საგნის საფუძველია.

2.2. ძალა

სანამ განვიხილავთ ძალთა სისტემას, აუცილებელია ცალკეული ძალის დეტალური ანალიზი. 1-ლ თავში ძალა განისაზღვრა როგორც ერთი სხეულის მეორეზე ქმედება. დინამიკაში ძალა განმარტებულია როგორც ქმედება, რომელიც იწვევს სხეულის აჩქარებას. ძალა **ვექტორული სიდიდეა**, რადგან მისი ეფექტი დამოკიდებულია ქმედების როგორც მიმართულებაზე, ასევე სიდიდეზე. ასე რომ, შესაძლებელია ძალთა შეკრება ვექტორთა შეკრების პარალელოგრამის წესის გამოყენებით. ძალის ქმედების სრული დახასიათება მოიცავს მის **სიდიდეს**, **მიმართულებას** და **მოდების წერტილს** და ამიტომ ის განიხილება როგორც ფიქსირებული ვექტორი.

გარე და შიდა ეფექტები

ძალის ქმედება სხეულზე იყოფა გარე და შიდა ეფექტებად. სხეულზე მოქმედი გარე ძალა შეიძლება იყოს როგორც მოდებული, ასევე რეაქტიული ძალა. შიდა ძალის ეფექტი შედგება ნაკრები შიდა ძალებისგან და მათ მიერ გამოწვეული დეფორმაციებისგან. მათ შორის ურთიერთკავშირი დამოკიდებულია სხეულის მატერიალურ თვისებებზე და შეისწავლება მასალათა გამძლეობაში, დრეკადობასა და პლასტიკურობაში.

გადაცემის პრინციპი

ეს პრინციპი ადგენს, რომ ძალის მოდება შეიძლება მისი ქმედების წრფის ნებისმიერ წერტილში გარე ძალის მყარ სხეულზე მოქმედების ნაკრები ეფექტის შეცვლის გარეშე. ასე რომ, თუ გვავსებთ მხოლოდ ძალის საერთო ეფექტს, ეს

ძალა შეიძლება განვიხილოთ როგორც **მცოცავი** და უნდა განვსაზღვროთ მხოლოდ მისი **სიდიდე**, **მიმართულება** და **ქმედების წრფე** და არა **მოდების წერტილი**.

ძალების კლასიფიკაცია

ძალები იყოფა **საკონტაქტო** და **მასობრივ** ძალებად. საკონტაქტო ძალა წარმოიქმნება პირდაპირი ფიზიკური კონტაქტის დროს. ასეთია, მაგალითად, ძალა, რომელიც მოქმედებს სხეულზე საყრდენი ზედაპირით. მეორე მხრივ, მასობრივი ძალა აღიძვრება სხეულის მდებარეობით ძალთა ველში, როგორიცაა გრავიტაციული, ელექტრული ან მაგნიტური ველი. ამ ძალის მაგალითია თქვენი წონა.

ძალები ასევე კლასიფიცირდება როგორც ჩაწერტებული ან განაწილებული. ყოველი საკონტაქტო ძალა რეალურად მოდებულია სასრულო ფართობზე და, ამდენად, ის რეალურად არის განაწილებული. მაგრამ როდესაც ფართობის ზომები ძალზედ მცირეა სხეულის სხვა ზომებთან შედარებით, ძალას დიდი სიზუსტით განვიხილავთ როგორც კონცენტრირებულს ერთ წერტილში. ძალა შეიძლება იყოს განაწილებული **ფართობზე**, როგორც მექანიკური კონტაქტის შემთხვევაში, და **მოცულობაში**, როდესაც მოქმედებს მასობრივი ძალა, როგორც წონა, ან წრფის გასწვრივ, როგორიცაა, მაგალითად, დაკიდული კაბელის წონა.

სხეულის **წონა** არის გრავიტაციული მიზიდულობის ძალა, განაწილებული მის მოცულობაში და შეიძლება განხილულ იქნას როგორც ჩაწერტებული ძალა, რომელიც მოქმედებს გრავიტაციის ცენტრის გამჭოლად. გრავიტაციის ცენტრის მდებარეობა, ხშირ შემთხვევაში, აშკარაა, თუ სხეული სიმეტრიულია. მაგრამ თუ მდებარეობა არ არის ცხადი, მაშინ აუცილებელია სპეციალური გამოთვლები გრავიტაციის ცენტრის მდებარეობის დასადგენად.

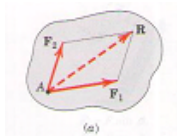
ძალის გაზომვა შეიძლება როგორც სხვა ცნობილ ძალასთან შედარებით, მექანიკური სასწორის გამოყენებით, ასევე დრეკადი ელემენტის დაკალიბრებული მოძრაობით. ყველა ამ შედარების ან დაკალიბრების საფუძველია ძირითადი სტანდარტი. *SI* სისტემაში ძალის სტანდარტული ერთეულია ნიუტონი (ნ).

ქმედება და უკუქმედება

ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, ძალის **ქმედებას** ყოველთვის თან სდევს **ტოლი და საწინააღმდეგო მიმართულების უკუქმედება**. ქმედებასა და უკუქმედებას შორის განსხვავება მნიშვნელოვანია ძალთა წყვილის შემთხვევაში. ამისათვის პირველ რიგში უნდა მოხდეს სხეულის **იზოლირება** და შემდეგ ამ სხეულზე მოდებული ძალის (და არა სხეულის მიერ მინიჭებული ძალის) იდენტიფიცირება.

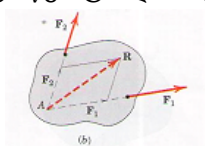
ერთი წერტილისკენ მიმართული ძალები

ამბობენ, რომ ორი ან მეტი ძალა მიმართულია წერტილისკენ, თუ მათი მოქმედების ხაზები გადაიკვეთება ამ წერტილში. ძალებს, $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ აქვს მოდების საერთო წერტილი და იკვეთება A წერტილში (ნახ. 2.1.). ამდენად, მათი შეფასება შეიძლება პარალელოგრამის წესით მათ საერთო სიბრტყეში, რათა მივიღოთ ნაკრები $\vec{R}$ (ნახ. 2.1.ა.), რომელიც ძევს იმავე სიბრტყეში, რაც $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$.



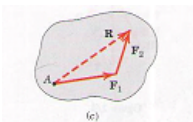
ნახ. 2.1.ა.

განვიხილოთ ორი ასეთი ძალა, რომლებიც ერთი და იმავე სიბრტყეშია, მაგრამ მოდებულია ორ სხვადასხვა წერტილში (ნახ. 2.1.ბ.).



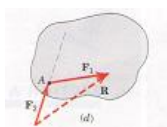
ნახ. 2.1.ბ.

გადაცემის პრინციპის თანახმად, შესაძლებელია მათი მოძრაობა მათი ქმედების წრფეების გასწვრივ და მათი ვექტორული ჯამის $\vec{R}$ დასრულება გადაკვეთის A წერტილში (ნახ. 2.1.ბ.). $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ – ის ჩანაცვლება შეიძლება $\vec{R}$ ნაკრებით სხეულზე გარე ეფექტების შეცვლის გარეშე.



ნახ. 2.1.გ.

ასევე შეიძლება სამკუთხედის წესის გამოყენება $\vec{R}$ -ის მისაღებად, მაგრამ ამ შემთხვევაში აუცილებელია ერთ-ერთი ძალის ქმედების წრფის გადაადგილება (ნახ. 2.1.გ.).



ნახ. 2.1.დ.

ამ ორი ძალის შეკრებით (ნახ. 2.1.დ.) შენარჩუნებული იქნება $\vec{R}$ -ის სიდიდე და მიმართულება, მაგრამ ამით იკარგება ქმედების სწორი წრფე, რადგან ამ გზით მიღებული $\vec{R}$ არ გადის A წერტილს. ამიტომ შეკრების ეს გზა მიუღებელია.

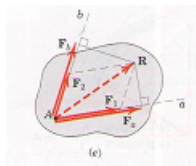
მათემატიკურად ორი ძალის ჯამი შეიძლება გამოისახოს ვექტორული განტოლებით:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

ვექტორული კომპონენტები

ტოლქმედის მისაღებად ძალების შეკრების გარდა ხშირად აუცილებელია ძალის ჩანაცვლება მისი ვექტორული კომპონენტებით შესაბამისი მიმართულებებით. კომპონენტების ვექტორული ჯამი უნდა იყოს საწყისი ვექტორის ტოლი. ასე რომ, ძალა $\vec{R}$ შეიძლება შეიცვალოს ან დაიშალოს ორ ვექტორულ კომპონენტად $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$, მათი სიდიდეების მისაღებად გარკვეული მიმართულებით პარალელოგრამის დასრულებით (ნახ. 2.1.ა.).

დამოკიდებულება ძალასა და გარკვეული ღერძების მიმართ მის ვექტორულ კომპონენტებს შორის არ უნდა აურიოთ დამოკიდებულებაში ძალაზე და იმავე ღერძებზე მის პერპენდიკულარულ (ორთოგონალურ) პროექციებს შორის.



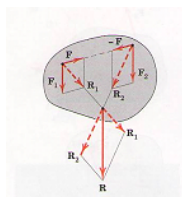
ნახ. 2.1.ე.

ნახ. 2.1.ე.-ზე მოტანილია მოცემული ძალის, $\vec{R}$, a და b ღერძებზე პერპენდიკულარული პროექციები $\vec{F}_a$ და $\vec{F}_b$, რომლებიც $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ვექტორული კომპონენტების პარალელურია (ნახ. 2.1.ა.). ნახ. 2.1.ე. გვიჩვენებს, რომ არ არის აუცილებელი, რომ ვექტორის კომპონენტები იმავე ღერძებზე ვექტორის პროექციების ტოლი იყოს. მეტიც, რადგან ამ ჯამის მისაღებად გამოიყენება ვექტორთა შეკრების პარალელოგრამის წესი. $\vec{R}$ -ის კომპონენტები და პროექციები ტოლია მხოლოდ მაშინ, როდესაც a და b ღერძები პერპენდიკულარულია.

ვექტორთა შეკრების კერძო შემთხვევა

ტოლქმედის მისაღებად, როდესაც ორი ძალა $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ პარალელურია (ნახ. 2.2.) გამოიყენება შეკრების კერძო შემთხვევა. თავდაპირველად, ორი ვექტორი იკრიბება შესაბამისი მნიშვნელობის ორ ტოლ, საწინააღმდეგო და კოლინეარულ ძალებად $\vec{F}$ და $-\vec{F}$, რომლებიც ერთად აღებული არ ახდენენ არავითარ გარე

ეფექტს სხეულზე. $\vec{F}_1$ -ის და $\vec{F}_2$ -ის შეკრებით $\vec{R}_1$ -ის მისაღებად და $\vec{F}_2$ და $-\vec{F}_1$ -ის გაერთიანებით $\vec{R}_2$ -ში მიიღება ნაკრები $\vec{R}$, რომელიც ემთხვევა ქმედების სიდიდეს, მიმართულებას და წრფეს.



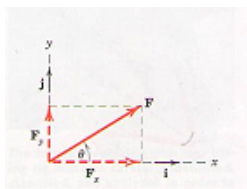
ნახ. 2.2.

ეს პროცედურა ასევე სასარგებლოა ორი ძალის გრაფიკული შეკრებისათვის, რომლებსაც აქვთ დაშორებული და მიუწვდომელი გადაკვეთის წერტილი, რადგან ისინი პარალელურია.

ორგანზომილებიანი ძალთა სისტემები

2.3. მართკუთხა კომპონენტები

ყველაზე გავრცელებულია ძალის ვექტორის ორგანზომილებიანი დაშლა მის მართკუთხა კომპონენტად.



ნახ. 2.3.

პარალელოგრამის წესიდან გამომდინარეობს, რომ ვექტორი $\vec{F}$ (ნახ. 2.3.) შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \quad (2.1)$$

სადაც $\vec{F}_x$ და $\vec{F}_y$ $\vec{F}$ -ის ვექტორული კომპონენტებია x და y მიმართულებით. თითოეული ამ ვექტორული კომპონენტაგანი შეიძლება ჩაიწეროს როგორც სკალარი გამრავლებული შესაბამის ერთეულოვან ვექტორზე. $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ერთეულოვანი ვექტორების გამოყენებით $\vec{F}_x = F_x \vec{i}$ და $\vec{F}_y = F_y \vec{j}$. ასე რომ,

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \quad (2.2)$$

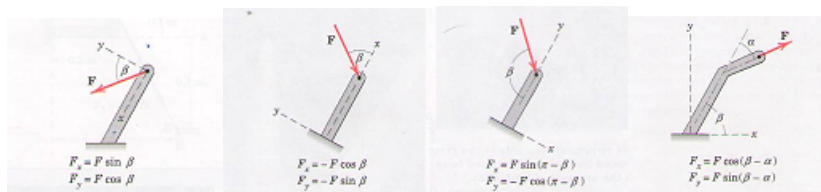
სადაც სკალარები F_x და F_y ვექტორ $\vec{F}$ -ის x და y სკალარული კომპონენტებია, სკალარული კომპონენტები შეიძლება იყოს დადებითი ან უარყოფითი, იმ სექტორზე დამოკიდებულებით, რომელშიც $\vec{F}$ მდებარეობს. ძალის ვექტორი-

სათვის (ნახ. 2.3.) ორივე x და y სკალარული კომპონენტი დადებითია და შემდეგნაირადაა დაკავშირებული $\vec{F}$ -თან სიდიდით და მიმართულებით:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \theta, & F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ F_y &= F \sin \theta, & \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{F_y}{F_x} \end{aligned} \quad (2.3)$$

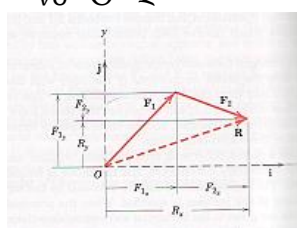
ძალის კომპონენტების განსაზღვრა

ზომები ყოველთვის არ მოიცემა ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მიმართულებით. კუთხეები არ იზომება x ღერძიდან საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით და არ არის აუცილებელი, რომ კოორდინატთა სათავე იყოს ძალთა ქმედების წრფეზე, ამიტომ მნიშვნელოვანია ძალის კომპონენტების ზუსტი განსაზღვრა, იმისდა მიუხედავად, თუ როგორ არის ორიენტირებული ღერძები ან როგორ არის გაზომილი კუთხეები. ნახ. 2.4.-ზე მოტანილია ორ განზომილებაში ვექტორული დაშლის რამდენიმე ტიპური მაგალითი.



ნახ. 2.4.

მართკუთხა კომპონენტები მოსახერხებელია ორი პარალელური ძალის ტოლქმედის, $\vec{R}$, საპოვნელად. განვიხილოთ ორი ძალა $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$, რომლებიც თავდაპირველად მოდებულია O წერტილში.



ნახ. 2.5.

ნახ. 2.5.-ის თანახმად, $\vec{F}_2$ -ის ქმედების წრფე წანაცვლებულია O -თან $\vec{F}_1$ -ის წვეროსკენ. სამკუთხედის წესის თანახმად, $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ვექტორების შეკრების შედეგად მიიღება:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}) + (F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j}) \\ R_x\vec{i} + R_y\vec{j} &= (F_{1x} + F_{2x})\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y})\vec{j} \end{aligned}$$

ან

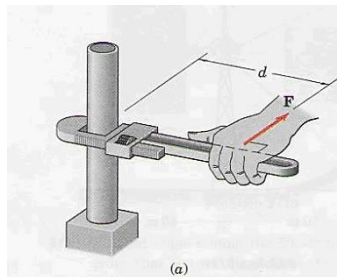
აქედან მიიღება გამოსახულებები:

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} = \sum F_x \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} = \sum F_y \end{aligned} \quad (2.4)$$

წევრი $\sum F_x$ ნიშნავს “ x სკალარული კომპონენტების ალგებრულ ჯამს“. აღსანიშნავია, რომ ნახ. 2.5. მოტანილი მაგალითისათვის F_{2y} სკალარული კომპონენტი იქნება უარყოფითი.

2.4. მომენტი

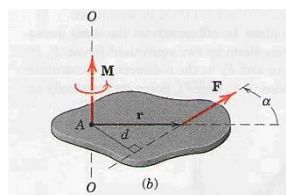
ძალას, გარდა სწრაფვისა გადაადგილოს სხეული მისი მოდების მიმართულებით, ასევე აქვს სწრაფვა აბრუნოს სხეული ღერძის გარშემო, ღერძი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ხაზი, რომელიც არც კვეთს და არც ძალის ქმედების წრფის პარალელურია. ეს ბრუნვის ტენდენცია ცნობილია როგორც ძალის მომენტი M . ის ასევე აღიქმება როგორც ბრუნვის მომენტი.



ნახ. 2.6.ა.

მომენტის ცნების თვალსაჩინო მაგალითია მილის ამოხრახნა (ნახ. 2.6.ა.). ერთი ეფექტი ძალისა, რომელიც ქანჩის პერპენდიკულარულია, არის მილის ბრუნვა ვერტიკალური ღერძის ირგვლივ. მისი სიდიდე დამოკიდებულია როგორც ძალის სიდიდეზე F , ასევე ქანჩის ეფექტურ სიგრძეზე d . გამოცდილება აჩვენებს, რომ ამოხრახნა, რომელიც არ არის ქანჩის პერპენდიკულარული, ნაკლებ ეფექტურია, ვიდრე მარჯვენა კუთხით ამოხრახნა.

მომენტი წერტილის მიმართ

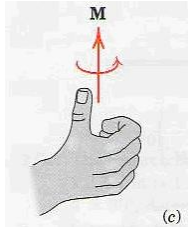


ნახ.2.6.ბ.

ნახ. 2.6.ბ.-ზე ნაჩვენებია ორგანზომილებიანი სხეული, რომელზეც მის სიბრტყეში მოქმედებს $\vec{F}$ ძალა. მომენტის სიდიდე ან ძალის სწრაფვა აბრუნოს სხეული $O-O$ ღერძის გარშემო, რომელიც სხეულის სიბრტყის პერპენდიკულარულია, როგორც ძალის სიდიდის, ასევე **მომენტის მხარის d** პროპორციულია, რომელიც პერპენდიკულარული მანძილია ღერძიდან ძალის ქმედების წრფემდე. ამიტომ მომენტის სიდიდე ასე განისაზღვრება:

$$M = Fd \quad (2.5)$$

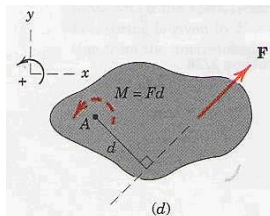
მომენტი არის სხეულის სიბრტყის პერპენდიკულარული $\vec{M}$ ვექტორი. $\vec{M}$ -ის ნიშანი დამოკიდებულია მიმართულებაზე, რომლითაც $\vec{F}$ ისწრაფვის აბრუნოს სხეული. მარჯვენა ხელის წესი (ნახ. 2.6.გ.) გამოიყენება ამ ნიშნის დასადგენად. $O-O$ ღერძის მიმართ $\vec{F}$ მომენტი წარმოიდგინება როგორც ვექტორი, მიმართული ხელისკენ, რომლის თითები ემთხვევა ბრუნვის მიმართულებას.



ნახ. 2.6.გ.

მომენტი $\vec{M}$ ემორჩილება ვექტორთა შეკრების ყველა წესს და შეიძლება განხილულ იქნას როგორც მცოცავი ვექტორი, რომლის ქმედების წრფე ემთხვევა მომენტის ღერძს. მომენტის ძირითადი SI ერთეულია ნიუტონ-მეტრი (ნ-მ).

როდესაც განიხილავენ ძალებს, რომლებიც მოქმედებენ მოცემულ სიბრტყეში, იგულისხმება მომენტი **წერტილის მიმართ**. ამ ცნების ქვეშ იგულისხმება მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც სიბრტყის ნორმალურია და გადის A წერტილში. ამრიგად, A წერტილის მიმართ ძალის მომენტის, $\vec{F}$, (ნახ. 2.6.დ.) სიდიდე $M = Fd$ და ის საათის ისრის საწინააღმდეგოა.



ნახ. 2.6.დ.

მომენტის მიმართულებების დადგენა შეიძლება ნიშნების წესით, როგორიცაა პლუს (+) ნიშანი საათის ისრის საწინააღმდეგო მომენტისათვის და მინუს (-)

ნიშანი საათის ისრის მიმართულების მომენტისათვის ან პირიქით. ნიშნების წესის მიხედვით (ნახ. 2.6.დ.), $\vec{F}$ მომენტი A წერტილის მიმართ (ან z -ღერძის მიმართ, რომელიც გადის A წერტილში) დადებითია. მოღუნული ისარი, ჩვეულებრივ, აჩვენებს მომენტს ორგანზომილებიანი ანალიზის შემთხვევაში.

ვექტორული ნამრავლი

მთელი რიგი ორგანზომილებიანი და მრავალი სამგანზომილებიანი პრობლემისათვის მოსახერხებელია ვექტორული მიახლოების გამოყენება მომენტის გამოსათვლელად. მომენტი $\vec{F}$ A წერტილის მიმართ შეიძლება გამოისახოს როგორც ვექტორული ნამრავლი:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.6)$$

სადაც $\vec{r}$ არის იმ ვექტორის მდებარეობა, რომელიც მიმართულია მომენტის ათვლის წერტილიდან, A , $\vec{F}$ ძალის ქმედების წრფის ნებისმიერი წერტილისკენ. ამ გამოსახულების სიდიდე ასეთია

$$M = Fr \sin \alpha = Fd \quad (2.7)$$

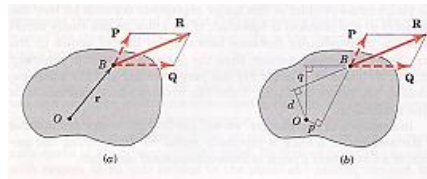
ეს თანხმობაშია (2.5.) განტოლებასთან. აღსანიშნავია, რომ მომენტის მხარი $d = r \sin \alpha$ არ არის დამოკიდებული $\vec{F}$ ძალის ქმედების წრფის გარკვეულ წერტილზე, რომლისკენაც ვექტორი $\vec{r}$ არის მიმართული. $\vec{M}$ -ის მიმართულებას და მნიშვნელობას ადგენენ მარჯვენა ხელის წესით $\vec{r} \times \vec{F}$ თანმიმდევრობით. თუ მარჯვენა ხელის თითები შემოხვეულია ბრუნვის მიმართულებაზე $\vec{r}$ -ის დადებითი მნიშვნელობიდან დადებითი $\vec{F}$ -სკენ, მაშინ დიდი თითი მიმართულია $\vec{M}$ -ის დადებითი მნიშვნელობისკენ.

უნდა შევინარჩუნოთ $\vec{r} \times \vec{F}$ თანმიმდევრობა, რადგან $\vec{r} \times \vec{F}$ თანმიმდევრობამ შეიძლება წარმოქმნას ვექტორი, რომლის ნიშანი სწორი მომენტის საწინააღმდეგოა. ისევე როგორც სკალარული მიახლოების შემთხვევაში, მომენტი $\vec{M}$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც მომენტი A წერტილის მიმართ ან როგორც მომენტი $O - O$ წრფის მიმართ, რომელიც გადის A წერტილში და $\vec{r}$ და $\vec{F}$ ვექტორების შემცველი სიბრტყის პერპენდიკულარულია. როდესაც ითვლიან მოცემულ წერტილში ძალის მომენტს, არჩევანი ვექტორულ ნამრავლსა და სკალარულ გამოსახულებას შორის დამოკიდებულია პრობლემის გეომეტრიაზე. თუ ცნობილია, ან ადვილად განისაზღვრება პერპენდიკულარული მანძილი ძალის ქმედების წრფესა და მომენტის ცენტრს შორის, მაშინ მოსახერხებელია

სკალარული მიახლოების გამოყენება. მაგრამ თუ $\vec{F}$ და $\vec{r}$ არ არიან პერპენდიკულარული და ადვილად გამოისახება ვექტორებით, მაშინ უპირატესობა ენიჭება ვექტორულ ნამრალს.

ვარინიონის თეორემა

მექანიკის ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი პრინციპია ვარინიონის თეორემა, რომლის თანახმად, ძალის მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართ იმავე წერტილის მიმართ ძალის კომპონენტების მომენტების ჯამის ტოლია.



ნახ. 2.7.ა, ბ.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ძალა $\vec{R}$, რომელიც მოქმედებს სხეულის სიბრტყეზე (ნახ. 2.7.ა.). ძალები $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ წარმოადგენენ $\vec{R}$ -ის ორ ნებისმიერ არამართკუთხა კომპონენტებს. O წერტილის მიმართ მომენტი $\vec{R}$ ასე გამოისახება:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{R}$$

$$\text{რადგან } \vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}, \quad \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{P} + \vec{Q})$$

$$\text{და } \vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{Q} \quad (2.8)$$

ამ გამოსახულების თანახმად, მომენტი $\vec{R}$ Q-ს მიმართ მომენტების ჯამის ტოლია. ეს ამტკიცებს თეორემას.

ვარინიონის თეორემა არ არის შეზღუდული ორი კომპონენტის შემთხვევით, არამედ გამოიყენება სამი და მეტი კომპონენტის შემთხვევაშიც.

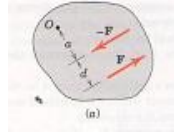
ნახ. 2.7.ბ. აჩვენებს ვარინიონის თეორემის ვარგისიანობას. მომენტი $\vec{R}$ O წერტილის მიმართ არის Rd . მაგრამ თუ d -ს განსაზღვრა უფრო ძნელია, ვიდრე p -ს და q -ს, შეიძლება $\vec{R}$ -ს დაშლა $\vec{p}$ და $\vec{Q}$ კომპონენტებად და მომენტის გამოთვლა ასეთი გზით:

$$\vec{M}_0 = Rd = -pP + qQ$$

სადაც იგულისხმება, რომ საათის ისრის მიმართულებით მომენტის ნიშანი დადებითია.

2.5. წყვილი

მომენტს, რომელიც წარმოქმნილია ორი ტოლი, საწინააღმდეგო და არაკოლინეარული ძალით, ეწოდება წყვილი. წყვილები ხასიათდება გარკვეული უნიკალური თვისებებით და ფართოდ გამოიყენება მექანიკაში.



ნახ. 2.8.ა.

განვიხილოთ ორი ტოლი საწინააღმდეგო ძალის $\vec{F}$ და $-\vec{F}$ ქმედება d მანძილზე (ნახ. 2.8.ა.). ეს ორი ძალა არ შეიკრიბება ერთ ძალად, რადგან მათი ჯამი ყველა მიმართულებით იქნება ნულის ტოლი. მათი ერთადერთი ეფექტია ბრუნვის წარმოქმნა. ამ ორი ძალის საერთო მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც მათი სიბრტყის ნორმალურია და გადის ნებისმიერ O წერტილში, არის წყვილი $\vec{M}$, რომლის სიდიდე ტოლია:

$$M = F(a + d) - Fa$$

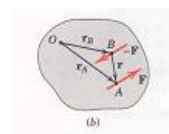
ან

$$M = Fd$$

მისი მიმართულება საათის ისრის საწინააღმდეგოა. განსაკუთრებით აღსანიშნავია, რომ წყვილის სიდიდე არ არის დამოკიდებული a მანძილზე, რომელზეც განლაგებულია ძალები მომენტის ცენტრის O მიმართ. აქედან გამომდინარეობს, რომ წყვილის მომენტს აქვს იგივე მნიშვნელობა, რაც ყველა მომენტის ცენტრს.

ვექტორული ალგებრის მეთოდი

წყვილის მომენტის გამოსახვა ასევე შესაძლებელია ვექტორული ალგებრის საშუალებით.



ნახ. 2.8.ბ.

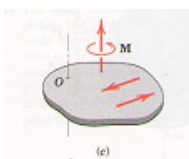
წყვილის წარმომქმნელი ძალების საერთო მომენტი O წერტილის მიმართ (ნახ. 2.8.ბ.) ასეთია:

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

სადაც $\vec{r}_A$ და $\vec{r}_B$ მდებარეობის ვექტორებია, რომლებიც მიმართულია O წერტილიდან $\vec{F}$ და $-\vec{F}$ ძალების ქმედების წრფის ნებისმიერი A და B წერტილებისკენ. რადგან $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

და ისევ, მომენტის გამოსახულებაში არ არის მინიშნება მომენტის ცენტრზე O და ამიტომ ის ერთი და იგივეა ყველა მომენტის ცენტრისათვის. ამდენად, $\vec{M}$ შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც თავისუფალი ვექტორი (ნახ. 2.8.გ.), სადაც $\vec{M}$ -ის მიმართულება წყვილის სიბრტყის ნორმალურია და $\vec{M}$ -ის ნიშანი დგინდება მარჯვენა ხელის წესით.

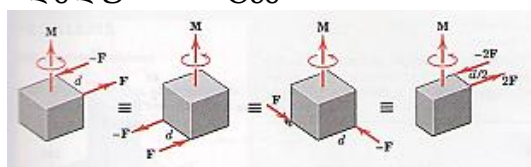


ნახ. 2.8.გ.

რადგან წყვილის ვექტორი $\vec{M}$ ყოველთვის წყვილის შემადგენელი ძალების სიბრტყის პერპენდიკულარულია, ორგანზომილებიანი ანალიზის შემთხვევაში ვექტორული წყვილის ნიშანს აჩვენებენ როგორც საათის ისრის მიმართულებით, ისევე მის საწინააღმდეგოდ.

ეკვივალენტური წყვილები

F -ს და d -ს მნიშვნელობების შეცვლა არ ცვლის მოცემულ წყვილს, რადგან ნამრავლი Fd რჩება იგივე. ასევე წყვილი არ იცვლება თუ ძალები მოქმედებენ სხვადასხვა, მაგრამ პარალელურ სიბრტყეში.

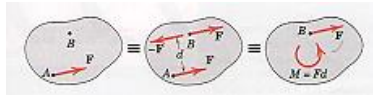


ნახ. 2.9.

ნახ. 2.9.-ზე ნაჩვენებია ერთი და იგივე $\vec{M}$ წყვილის ოთხი სხვადასხვა კონფიგურაცია. თითოეულ ამ შემთხვევაში წყვილები ეკვივალენტურია და აღიწერება ერთი და იმავე თავისუფალი ვექტორით, რომელიც ამჟღავნებს იდენტურ სწრაფვას დააბრუნოს სხეული.

ძალთა წყვილის სისტემები

სხეულზე მოქმედი ძალის ეფექტი არის სწრაფვა აამოძრავოს სხეული ძალის მიმართულებით ან დააბრუნოს სხეული ნებისმიერი ფიქსირებული ღერძის ირგვლივ, რომელიც არ გადაკვეთს ძალის წრფეს. ამ ეფექტის წარმოდგენა უფრო მარტივად შეიძლება თუ მოცემულ ძალას შევცვლით ტოლი პარალელური ძალით და წყვილით ძალის მომენტის შეცვლის კომპენსირების მიზნით.



ნახ. 2.10.

ძალის ჩანაცვლება ძალით და წყვილით ნაჩვენებია ნახ. 2.10.-ზე, რომელზეც A წერტილზე მოქმედი ძალა $\vec{F}$ ჩანაცვლებულია ტოლი ძალით $\vec{F}$ რაღაც B წერტილში და საათის ისრის საწინააღმდეგო წყვილით $M = Fd$. გადასვლა ნაჩვენებია ნახაზის ცენტრში, სადაც ტოლი და საწინააღმდეგო ძალები $\vec{F}$ და $-\vec{F}$ მოდებულია B წერტილში სხეულზე სხვა გარე ეფექტების შემოტანის გარეშე. ჩანს, რომ საწყისი ძალა A -ში და ტოლი და საწინააღმდეგო ძალა B -ში შეადგენენ წყვილს $M = Fd$, რომელიც არჩეული ნიშუშისათვის საათის ისრის საწინააღმდეგოა, რაც ცხადია ნახაზის მარჯვენა ნაწილში. ამრიგად, საწყისი ძალა A -ში ჩანაცვლებულია იმავე ძალით, რომელიც მოქმედებს განსხვავებულ B წერტილში, და წყვილით სხეულზე საწყისი ძალის მოქმედების შეუცვლელად. ძალის და წყვილის გაერთიანება (ნახ. 2.10.-ის მარჯვენა ნაწილი) განიხილება როგორც **ძალა-წყვილის სისტემა**.

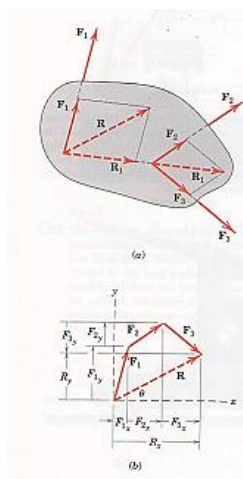
ამ პროცესის შემობრუნებით შეიძლება მოცემული წყვილის და ძალის გაერთიანება ერთ ეკვივალენტურ ძალად. ძალის ჩანაცვლება ეკვივალენტური ძალა – წყვილის სისტემით და შებრუნებული პროცედურა ფართოდ გამოიყენება მექანიკაში.

2.6. ტოლქმედები

ჩინა ნაწილებში განვიხილეთ ძალა, მომენტი და წყვილი. აქ აღწერილი იქნება ძალების ჯგუფის ან **სისტემის** საერთო ქმედება. მექანიკაში მრავალი პრობლემა დაკავშირებულია ძალთა სისტემებთან და ჩვეულებრივ აუცილებელია სისტემის დაყვანა მარტივ სახემდე მისი ქმედების აღსაწერად. ძალთა სისტემის **ტოლქმედი** წარმოადგენს ძალთა უმარტივეს კომბინაციას, რომელმაც შეიძლება ჩაანაცვლოს საწყისი ძალები სხეულზე გარე ეფექტების გარეშე.

სხეულის წონასწორობა არის მდგომარეობა, რომელშიც სხეულზე მოქმედი ყველა ძალის ტოლქმედი ნულის ტოლია. ამ მდგომარეობას შეისწავლის სტატიკა. როდესაც ასეთი ტოლქმედი არ უდრის ნულს, მიიღება სხეულის აჩქარება ძალთა ტოლქმედის გატოლებით სხეულის მასის და აჩქარების ნამრავლთან. ამ მდგომარეობას შეისწავლის დინამიკა. ასე რომ, ტოლქმედების განსაზღვრა მნიშვნელოვანია როგორც სტატიკის, ასევე დინამიკისათვის.

ძალთა სისტემის ყველაზე გავრცელებული სახეა ისეთი სისტემა, როდესაც ყველა ძალა მოქმედებს ერთ სიბრტყეში, მაგალითად, x სიბრტყეში, რაც კარგად ჩანს სამი ძალის, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ სისტემაში (ნახ. 2.11.ა.).



ნახ. 2.11.ა, ბ.

ნაკრები ძალის $\vec{R}$ სიდიდე და მიმართულება მიიღება ძალის პოლიგონის აგებით (ნახაზის ბ ნაწილი), სადაც ძალები იკრებება “თავის კუდთან” წესით ნებისმიერი თანმიმდევრობით. ამრიგად, კომპლანარული ძალების ნებისმიერი სისტემისათვის შეიძლება დაიწეროს:

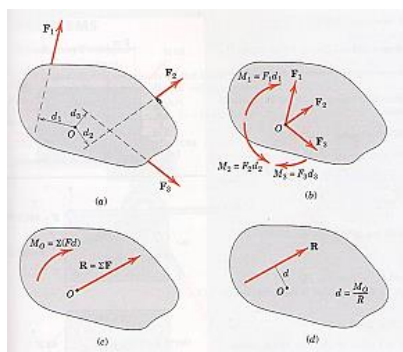
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \sum \vec{F}$$

$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y, \quad R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

(2.9)

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

გრაფიკულად, $\vec{R}$ -ის ქმედების ზუსტი წრფე მიიღება ძალების ქმედების ზუსტი წრფეების შენარჩუნებით და მათი შეკრებით პარალელოგრამის წესის გამოყენებით. ეს, ცხადია, ნახ. 2.11.-ის ა - ნაწილიდან სამი ძალისათვის, სადაც $\vec{F}_2$ -ის და $\vec{F}_3$ -ის ჯამი, $\vec{R}_1$, ემატება $\vec{F}_1$ -ს და მიიღება $\vec{R}$. ამ პროცესში გამოყენებულია გადაცემის პრინციპი.



ნახ. 2.12.ა, ბ, გ, დ.

ალგებრული მეთოდი

ალგებრული მეთოდის არსი, რომელიც გამოიყენება ნაკრები ძალის და მისი ქმედების წრფის მისაღებად, ასეთია:

1. შესაბამისი საწყისი წერტილის არჩევა და ყველა ძალის მიყვანა ამ წერტილში. ეს პროცესი ნაჩვენებია სამი ძალის სისტემისათვის (ნახ. 2.12.ა. და 2.12.ბ.), სადაც M_1 , M_2 და M_3 წყვილებია, რომლებიც მიიღება $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$ ძალების გადატანით მათი

ქმედების საწყისი წრფეებიდან O წერტილის მიმართ ქმედების წრფეებისკენ.

- ყველა ძალის შეკრება O -ში ძალთა ტოლქმედის $\vec{R}$ მისაღებად და ყველა წყვილის შეკრება ნაკრები წყვილის M_0 -ს მისაღებად. ახლა არსებობს ერთი ძალა-წყვილის სისტემა (2.12.გ.)
- ნახ. 2.12.დ.-ზე $\vec{R}$ -ს ქმედების წრფის პოვნა, იმის მოთხოვნით, რომ არის M_0 მომენტი O წერტილის მიმართ. აღსანიშნავია, რომ ძალების სისტემები 2.12.ა. და 2.12.დ. ნახაზებზე ეკვივალენტურია და $\sum(Fd)$ (ნახ. 2.12.ა.) Rd -ის (ნახ. 2.12.დ.) ტოლია.

მომენტების პრინციპი

ამ პროცესის შეჯამება შეიძლება განტოლებით:

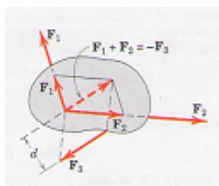
$$\vec{R} = \sum \vec{F} \quad (a)$$

$$M_0 = \sum M = \sum(Fd) \quad (b)$$

$$Rd = M_0 \quad (c) \quad (2.10)$$

(2.10) განტოლებიდან a და b -ს დაყავს მოცემული ძალთა სისტემა ძალა-წყვილის სისტემაზე ნებისმიერ O წერტილზე. ბოლო განტოლება განსაზღვრავს d მანძილს O წერტილიდან $\vec{R}$ -ის ქმედების წრფემდე და ადგენს, რომ ნაკრები ძალის მომენტი ნებისმიერი O წერტილის მიმართ იმავე წერტილის მიმართ სისტემის საწყისი ძალების მომენტების ჯამის ტოლია. ეს განავრცობს ვარინიონის თეორემას არაგადამკვეთ ძალთა სისტემებზე. ამ გავრცობას მომენტის პრინციპი ეწოდება.

ძალთა გადამკვეთი სისტემისათვის, რომელშიც ყველა ძალის ქმედების წრფე გადის საერთო O წერტილში, მომენტების ჯამი $\sum M_0$ ამ წერტილის მიმართ ნულის



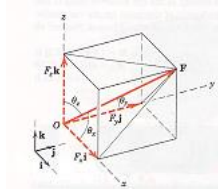
ნახ. 2.13.

ტოლია. ამრიგად, ტოლქმედის $\vec{R} = \sum \vec{F}$ ქმედების წრფე გადის O წერტილში. პარალელურ ძალთა სისტემისათვის არჩევენ კოორდინატთა ღერძს ძალების მიმართულებით. თუ მოცემულ ძალთა სისტემისთვის ნაკრები ძალა $\vec{R}$ ნულის ტოლია, სისტემის ტოლქმედი შეიძლება არ იყოს ნულის ტოლი, რადგან ტოლქმედი იქნება წყვილი. მაგალითად, სამი ძალის (ნახ. 2.13.) ტოლქმედი ნულოვანი ძალაა, მაგრამ ხასიათდება საათის ისრის მიმართულების ნაკრები წყვილით $M = F_3 d$.

თავი 3. ძალთა სამგანზომილებიანი სისტემები

3.1. მართკუთხა კომპონენტები

მექანიკის ბევრი პრობლემა მოითხოვს სამი განზომილების ანალიზს და ასეთი პრობლემებისათვის ხშირად აუცილებელია ძალის დაშლა სამ ურთიერთპერპენდიკულარულ კომპონენტად.



ნახ. 3.1.

0 წერტილზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალა (ნახ. 3.1.) შედგება მართკუთხა კომპონენტებიდან F_x, F_y, F_z

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \theta_x & F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ F_y &= F \cos \theta_y & \vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ F_z &= F \cos \theta_z & \vec{F} &= F(\vec{i} \cos \theta_x + \vec{j} \cos \theta_y + \vec{k} \cos \theta_z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ერთეულოვანი ვექტორები $\vec{i}, \vec{j}$ და $\vec{k}$ შესაბამისად, განლაგებულია x, y და z მიმართულებებით. მიმართველი კონუსების გამოყენებით: $l = \cos \theta_x$ და $m = \cos \theta_y$ და $n = \cos \theta_z$ სადაც $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

ძალა ასე ჩაიწერება

$$\vec{F} = F(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}) \quad (3.2)$$

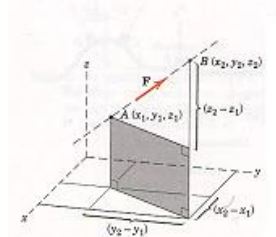
(3.2)-ის მარჯვენა მხარე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ძალის სიდიდე F გამრავლებული ერთეულოვან ვექტორზე, $\vec{n}_F$, რომელიც ახასიათებს $\vec{F}$ -ის მიმართულებას :

$$\vec{F} = F\vec{n}_F \quad (3.2.a)$$

(3.2) და (3.2.a) განტოლებებიდან ცხადია, რომ $\vec{n}_F = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, რაც აჩვენებს, რომ ერთეულოვანი ვექტორის, $\vec{n}_F$, სკალარული კომპონენტები არის $\vec{F}$ ძალის ქმედების ხაზის მიმართველი კოსინუსები.

სამგანზომილებიანი პრობლემის გადასაჭრელად, ჩვეულებრივ, განსაზღვრავენ ძალის x , y და z სკალარულ კომპონენტებს. უპირატესად, ძალის მიმართულება განისაზღვრება: ა) ძალის ქმედების წრფის ორი წერტილით და ბ) ქმედების წრფისკენ ორიენტირებული ორი კუთხით.

ა) ძალის ორი წერტილით განსაზღვრა ქმედების წრფეზე



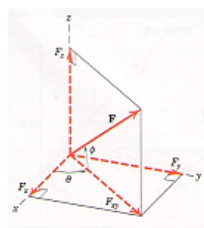
ნახ. 3.2.

თუ ცნობილია A და B წერტილების კოორდინატები (ნახ. 3.2.), ძალა $\vec{F}$ ასე ჩაიწერება:

$$\vec{F} = F\vec{n}_F = F\frac{\overline{AB}}{AB} = F \frac{(X_2 - X_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

ამრიგად, $\vec{F}$ -ის x, y და z სკალარული კომპონენტები, შესაბამისად, წარმოადგენენ $\vec{i}, \vec{j}$ და $\vec{k}$, ერთეულოვანი ვექტორების სკალარულ კოეფიციენტებს.

ბ) განსაზღვრა ორი კუთხით, რომლებიც ორიენტირებულია ძალის ქმედების წრფეზე



ნახ. 3.3.

განვიხილოთ შემდეგი გეომეტრია (ნახ. 3.3.). დაუშვათ, θ და ϕ კუთხეები ცნობილია. ჯერ დავშალოთ $\vec{F}$ ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ კომპონენტებად:

$$F_{xy} = F \cos \phi; F_z = F \sin \phi$$

შემდეგ დავშალოთ ჰორიზონტალური კომპონენტი F_{xy} x და y კომპონენტებად:

$$F_x = F_{xy} \cos\theta = F \cos\varphi \cos\theta$$

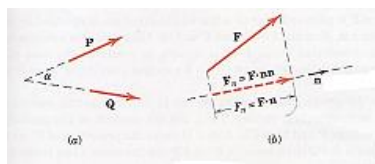
$$F_y = F_{xy} \sin\theta = F \cos\varphi \sin\theta$$

სიდიდეები F_x , F_y და $\vec{F}$, სამიებული სკალარული კომპონენტებია.

კოორდინატა სისტემის ორიენტაციის არჩევა ნებისმიერია. მაგრამ სამგანზომილებიანი ანალიზის დროს უნდა გამოვიყენოთ ღერძების მარჯვენა ხელის სისტემა, რაც თანხვედრაში უნდა იყოს ვექტორული ნამრავლის მარჯვენა ხელის წესით განსაზღვრასთან. როდესაც x ღერძს ვაბრუნებთ 90° -ით y ღერძისკენ, z ღერძის დადებითი მიმართულება მარჯვენა ხელის სისტემაში არის ხრახნის მარჯვენა მიმართულებით ბრუნვა. ეს მარჯვენა ხელის წესის ეკვივალენტურია.

სკალარული ნამრავლი

$\vec{F}$ ძალის (ან ნებისმიერი სხვა ვექტორის) მართკუთხა კომპონენტების ჩაწერა შეიძლება ვექტორული ოპერაციით, რომელიც ცნობილია, როგორც **სკალარული ნამრავლი**.



ნახ. 3.4.ა, ბ.

ეს ნამრავლი განისაზღვრება როგორც $\vec{p}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების (ნახ. 3.4.ა.) სიდიდეები გამრავლებული მათ შორის α კუთხის კონუსზე.

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \alpha$$

ეს ნამრავლი შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\vec{P}$ -ს ორთოგონალური პროექცია $\vec{Q}$ -ს მიმართულებით, გამრავლებული Q -ზე ან როგორც $\vec{Q}$ -ს $Q \cos \alpha$ პროექცია $\vec{P}$ -ს მიმართულებით, გამრავლებული P -ზე. ორივე შემთხვევაში ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი სკალარული სიდიდეა. მაგალითად, $\vec{F}$ ძალის სკალარული კომპონენტი $F_x = F \cos\theta$ (ნახ. 3.4.) შეიძლება გამოვსახოთ როგორც $F_x = \vec{F} \cdot \vec{i}$, სადაც $\vec{i}$ ერთეულოვანი ვექტორია x მიმართულებით.

უფრო ზოგადი ტერმინებით, თუ $\vec{n}$ არის ერთეულოვანი ვექტორი გარკვეული მიმართულებით, მაშინ $\vec{F}$ -ს პროექციის $\vec{n}$ მიმართულებით (ნახ. 3.4.ბ.) სიდიდე იქნება $F_n = \vec{F} \cdot \vec{n}$ თუ საჭიროა პროექციის როგორც ვექტორული სიდიდის, გამოსახვა $\vec{n}$ მიმართულებით, სკალარული ნამრავლი $\vec{F} \cdot \vec{n}$ უნდა გავამრავლოთ ერთეულოვან ვექტორზე $\vec{F}_n = (\vec{F} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ ან $\vec{F}_n = \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}$ ყოველგვარი ორაზროვნების გარეშე, რადგან წევრი $\vec{n} \cdot \vec{n}$ არ არის განსაზღვრული და მთელი

გამოსახულება არ შეიძლება შეცდომით ინტერპრეტირებული იყოს როგორც $\vec{F} \cdot (\vec{n}\vec{n})$

თუ $\vec{n}$ -ს მიმმართველი კოსინუსებია α, β და γ , მაშინ $\vec{n}$ შეიძლება ჩაიწეროს ვექტორული ფორმით.

$$\vec{n} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

სადაც მისი მნიშვნელობა ერთის ტოლია. თუ $\vec{F}$ -ს მიმმართველი კოსინუსები x-y-z ღერძების მიმართ არის l, m, n , მაშინ $\vec{F}$ -ის პროექცია $\vec{n}$ -ის მიმართულებით იღებს შემდეგ სახეს:

$$F_n = \vec{F} \cdot \vec{n} = F(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}) \cdot (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) = F(l\alpha + m\beta + n\gamma)$$

$$\text{რადგან } \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k}$$

$$\text{და } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

განტოლებათა ბოლო ორი სისტემა სამართლიანია, რადგან $\vec{i}, \vec{j}$ და $\vec{k}$ ერთეული სიგრძისაა და ურთიერთპერპენდიკულარულია.

კუთხე ორ ვექტორს შორის

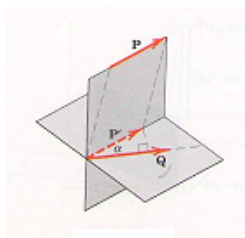
თუ კუთხე $\vec{F}$ ძალასა და ერთეულოვანი ვექტორით $\vec{n}$ განსაზღვრულ მიმართულებას შორის არის θ , მაშინ სკალარული ნამრავლის თანახმად $\vec{F} \cdot \vec{n} = F_n \cos\theta = F \cos\theta$, სადაც $|\vec{n}|=n=1$. ამდენად, კუთხე ასე ჩაიწერება:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{F} \quad (3.3)$$

ზოგადად, კუთხე ნებისმიერ ორ ვექტორს $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ შორის ტოლია:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ} \quad (3.3a)$$

თუ ძალა $\vec{F}$ პერპენდიკულარულია წრფისა, რომლის მიმართულებაც განისაზღვრება ერთეულოვანი ვექტორით $\vec{n}$, მაშინ $\cos\theta=0$ და $\vec{F} \cdot \vec{n}=0$. აღსანიშნავია, რომ ეს დამოკიდებულება არ ნიშნავს, რომ როგორც $\vec{F}$, ასევე $\vec{n}$ ნულის ტოლია, როგორც ეს იქნებოდა სკალარული გამრავლების დროს, სადაც $(A)(B)=0$ მოითხოვს, რომ ან A ან B (ან ორივე) იყოს ნულის ტოლი.



ნახ. 3.5.

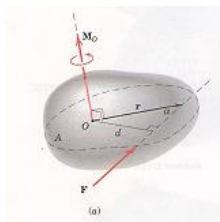
სკალარული ნამრავლის დამოკიდებულება გამოიყენება როგორც არაგადამკვეთი, ასევე გადამკვეთი ვექტორებისათვის. ამდენად, არაგადამკვეთი ვექტორების $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ სკალარული ნამრავლი (ნახ. 3.5.) არის Q გამრავლებული $\vec{P}$ -ს $\vec{Q}$ -ზე პროექციაზე ანუ $P' \cos \alpha$, რადგან $\vec{P}'$ და $\vec{P}$ ერთი და იგივეა, როდესაც ისინი განიხილება როგორც თავისუფალი ვექტორები.

3.2. მომენტი და წყვილი

ორგანზომილებიანი სისტემის ანალიზის დროს ხშირად მოსახერხებელია მომენტის სიდიდის განსაზღვრა სკალარული გამრავლებით მომენტ-მხარის წესის გამოყენებით. მაგრამ სამი განზომილების შემთხვევაში პერპენდიკულარული მანძილის განსაზღვრა წერტილსა ან წრფეს და ძალის ქმედების წრფეს შორის მოითხოვს ხანგრძლივ და დამღლელ გამოთვლებს. უფრო ხელსაყრელია ვექტორული გამრავლების გამოყენება.

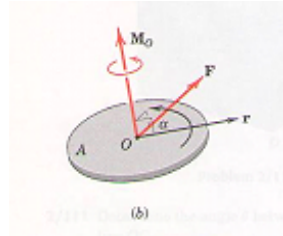
მომენტი სამი განზომილების შემთხვევაში

განვიხილოთ $\vec{F}$ ძალა, რომელიც მოქმედებს სხეულის მოცემული წრფის მიმართულებით (ნახ. 3.6.ა.) და ნებისმიერი O წერტილი, რომელიც არ ძევს ამ წრფეზე. O წერტილი და $\vec{F}$ -ს წრფე შეადგენენ A სიბრტყეს. $\vec{F}$ -ს $\vec{M}_O$ მომენტი O -ში გამავალი ღერძის მიმართ, რომელიც სიბრტყის პერპენდიკულარულია, ხასიათდება სიდიდით $M_O = Fd$, სადაც d არის პერპენდიკულარული მანძილი O -დან $\vec{F}$ -ის წრფემდე.



ნახ. 3.6.ა.

ვექტორი $\vec{M}_0$ სიბრტყის ნორმალურია და მიმართულია O-ში გამავალი ღერძისაკენ. M_0 -ის როგორც სიდიდე, ასევე მიმართულება აღიწერება ვექტორული ნამრავლით. ვექტორი $\vec{r}$ გადის O-ან $\vec{F}$ -ს ქმედების წრფის ნებისმიერი წერტილისაკენ. როგორც 2-ე თავში აღწერილი, $\vec{r}$ -ს და $\vec{F}$ -ს ვექტორული ნამრავლი ჩაიწერება როგორც $\vec{r} \times \vec{F}$ და მისი სიდიდეა $(r \sin \alpha)F$; ეს იგივეა რაც Fd , M_0 -ს სიდიდე.



ნახ. 3.6.ბ.

მომენტის სწორი მიმართულება და ნიშანი დგინდება მარჯვენა ხელის წესით. ასე რომ, თუ $\vec{r}$ -ს და $\vec{F}$ -ს განვიხილავთ როგორც O-ან ამომავალ თავისუფალ ვექტორებს (ნახ. 3.6.ბ.), დიდი თითი მიმართულია M_0 -ს მიმართულებით, თუ მარჯვენა ხელის თითები მოხვეულია $\vec{r}$ -ან $\vec{F}$ -კენ α კუთხით ბრუნვის მიმართულებით. ამიტომ $\vec{F}$ -ს მომენტი O-ში გამავალი ღერძის მიმართ შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.4)$$

ვექტორების თანმიმდევრობა $\vec{r} \times \vec{F}$ უნდა იყოს შენარჩუნებული, რადგან $\vec{F} \times \vec{r}$ წარმოქმნის M_0 -ის საწინააღმდეგო ნიშნის ვექტორს, ე.ი., $\vec{F} \times \vec{r} = -\vec{M}_0$

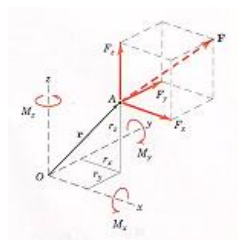
ვექტორული ნამრავლის გამოთვლა

$\vec{M}_0$ -ს ვექტორული ნამრავლის გამოსახულება შეიძლება ჩაიწეროს დეტერმინანტის სახით:

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

ყურადსაღებია წევრების სიმეტრია და თანმიმდევრობა, ასევე ის, რომ გამოყენებულ უნდა იქნეს მარჯვენა კოორდინატთა სისტემა. დეტერმინანტი შეიძლება ჩაიწეროს გაშლილი სახით:

$$\vec{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y) \vec{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k}$$



ნახ. 3.7.

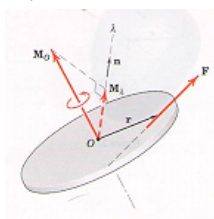
ვექტორული ნამრავლის დამოკიდებულებაში მეტი უტყუარობის მისაღწევად განვიხილოთ ძალის მომენტის სამი კომპონენტი (ნახ. 3.7.), სადაც ნაჩვენებია $\vec{F}$ ძალის ქმედება $\vec{r}$ ვექტორით A წერტილზე. ამ ძალების მომენტების სკალარული სიდიდეები დადებითი x, y და z ღერძების მიმართ მიიღება მომენტ-მხარის წესით. კერძოდ,

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y \quad M_y = r_z F_x - r_x F_z \quad M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

რაც ემთხვევა $\vec{r} \times \vec{F}$ ვექტორული ნამრავლის დეტერმინანტის გაშლის შესაბამის წევრებს.

მომენტი ნებისმიერი ღერძის მიმართ

ახლა მივიღოთ $\vec{F}$ -ს გამოსახულება M მომენტისათვის 0-ში გამავალი ნებისმიერი ღერძის მიმართ (ნახ 3.8).



ნახ. 3.8.

თუ $\vec{n}$ -ი ერთეულოვანი ვექტორია λ მიმართულებით, მაშინ ვიყენებთ სკალარულ ნამრავლს ვექტორის კომპონენტისათვის $\vec{M}_0 \cdot \vec{n}$ -ს მისაღებად, ე.ი $\vec{M}_0$ -ს კომპონენტისათვის λ მიმართულებით. ეს სკალარი არის $\vec{F}$ -ს და $\vec{M}_\lambda$ -ს მომენტი A-ს მიმართ.

$\vec{F}$ -ს λ -ს მიმართ $\vec{M}_\lambda$ მომენტის მისაღებად გავამრავლოთ სიდიდე მიმართულების ერთეულოვან ვექტორზე $\vec{n}$

$$\vec{M}_\lambda = (\vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (3.6)$$

სადაც $\vec{r} \times \vec{F}$ ჩაწერილია $\vec{M}_0$ -ს ნაცვლად. გამოსახულება $\vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{n}$ ცნობილია როგორც სამმაგი სკალარული ნამრავლი. ის არ უნდა ჩაიწეროს როგორც $(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}$, რადგან ვექტორული ნამრავლი არ მიიღება ვექტორით და სკალარით. ამდენად ჩაწერას: $\vec{r} \times (\vec{F} \cdot \vec{n})$ არა აქვს აზრი.

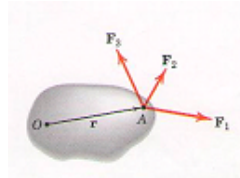
სამმაგი სკალარული ნამრავლის წარმოდგენა შეიძლება დეტერმინანტის სახით

$$|M_\lambda| = M_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

სადაც α, β და γ ერთეულოვანი ვექტორის, $\vec{n}$, მიმართველი კოსინუსებია.

ვარინიონის თეორემა სამი განზომილების შემთხვევისათვის

წინა თავში განხილული იყო ვარინიონის თეორემა ორი განზომილებისათვის. მისი გავრცელება ადვილია სამი განზომილებისათვის.



ნახ. 3.9.

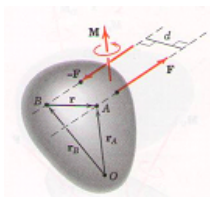
ნახ. 3.9.-ზე ნაჩვენებია გადამკვეთი ძალების $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$ სისტემა. ამ ძალების 0-ს მიმართ მომენტების ჯამი ასეთია

$$\vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots = \vec{r}_x (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) = \vec{r} \times \Sigma \vec{F}$$

სადაც გამოყენებულია განაწილების კანონი ვექტორული ნამრავლებისათვის, $\vec{M}_0$ -ს გამოყენებით განტოლების მარცხენა მხარეს მომენტების ჯამის გამოსახატად ვიღებთ:

$$\vec{M}_0 = \Sigma (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{r} \times \vec{R}$$

ამ განტოლების თანახმად გადამკვეთი ძალების მომენტების ჯამი მოცემული წერტილის მიმართ მათი ჯამის მომენტის ტოლია იგივე წერტილისათვის.



ნახ. 3.10.

წყვილები სამი განზომილების შემთხვევაში

ნახ. 3.10.-ზე ნაჩვენებია სხეულზე მოქმედი ორი ტოლი და საწინააღმდეგო ძალა $\vec{F}$ და $-\vec{F}$. $\vec{r}$ ვექტორი გამოდის $-\vec{F}$ ძალის ქმედების წრფის ნებისმიერი წერტილიდან $\vec{F}$ -ს ქმედების

ნებისმიერი წერტილისაკენ A და B წერტილები განლაგებულია მდებარეობის ვექტორებით $\vec{r}_A - \vec{r}_B$ ნებისმიერი 0 წერტილიდან. სრული მომენტი ასეთია:

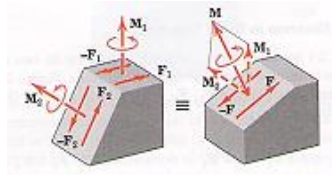
$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

მაგრამ $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$, ამიტომ წყვილის მომენტი ასე გამოისახება:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.9)$$

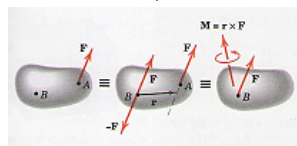
ამრიგად, წყვილის მომენტი ერთი და იგივეა ყველა წერტილისათვის. $\vec{M}$ -ს სიდიდე $M=Fd$, სადაც d არის პერპენდიკულარული მანძილი ამ ორი ძალის ქმედების წრფეებს შორის.

წყვილის მომენტი არის თავისუფალი ვექტორი, მაშინ როცა ძალის ვექტორი წერტილის მიმართ (რომელიც ასევე არის მომენტი წერტილში გამავალი განსაზღვრული ღერძის მიმართ) არის სრიალა ვექტორი, რომელიც მიმართულია წერტილში გამავალი ღერძის გასწვრივ. ისევე როგორც ორი განზომილების შემთხვევაში, წყვილი ისწრაფვის გამოიწვიოს სხეულის ბრუნვა იმ ღერძის ირგვლივ, რომელიც წყვილის შემადგენელი ძალების სიბრტყის ნორმალურია.



ნახ. 3.11.

წყვილის ვექტორები ემორჩილება ყველა იმ წესს, რასაც ვექტორული სიდიდეები. ამდენად, წყვილის ვექტორი $\vec{M}_1$, გამოწვეული $\vec{F}_1$ -ით და $-\vec{F}_1$ -ით, შეიძლება შეიკრიბოს წყვილის ვექტორთან $\vec{M}_2$, და შექმნას წყვილი $\vec{M}$, რომელიც, თავის მხრივ, შეიძლება მივიღოთ $\vec{F}$ -ით და $-\vec{F}$ -ით. (ნახ. 3.11.)



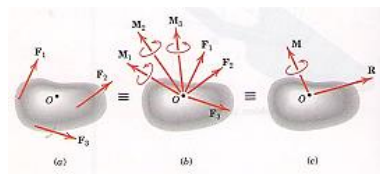
ნახ. 3.12.

წინა თავში ნაჩვენებია, თუ როგორ შეიძლება ძალის ჩანაცვლება ეკვივალენტური ძალა-წყვილის სისტემით. ეს ასევე შესაძლებელია სამი განზომილებისათვის. პროცედურა წარმოდგენილია ნახ. 3.12.-ზე, სადაც A წერტილში სხეულზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალა ჩანაცვლებულია B წერტილში ტოლი

ძალით და წყვილით $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. B-ში ტოლი და საწინააღმდეგო $\vec{F}$ და $-\vec{F}$ ძალების დამატებით ვიღებთ წყვილს, შედგენილს $-\vec{F}$ -ან და საწყისი $\vec{F}$ -ან. ამდენად, ცხადია, რომ წყვილის ვექტორი უზრალოდ არის საწყისი ძალის მომენტი იმ წერტილის მიმართ, რომლისკენაც ძალა მოძრაობს. ხაზს უსვამთ იმას, რომ $\vec{r}$ არის ვექტორი, რომელიც B-ან გამოდის A-ში გამავალი საწყისი ძალის ქმედების წრფის ნებისმიერი წერტილისკენ.

3.3. ტოლქმედები

ტოლქმედი განისაზღვრება როგორც ძალთა უმარტივესი კომბინაცია, რომელსაც შეუძლია ჩაანაცვლოს ძალთა მოცემული სისტემა სხეულზე მოქმედი ძალების ეფექტის ცვლილების გარეშე. (2.6.)-ში ჩვენ დავადგინეთ ჯამური ძალის სიდიდე და მიმართულება ორგანზომილებიანი ძალთა სისტემის ძალების ვექტორული შეკრებით (განტოლება 2.9.) და მოვათავსეთ ჯამური ძალის ქმედების წრფე მომენტის პრინციპის გამოყენებით (განტოლება 2.10.). იგივე პრინციპები ვრცელდება სამი განზომილების შემთხვევაზეც.



ნახ. 3.13.ა, ბ, გ.

ადრე ნაჩვენები იყო, რომ ძალა შეიძლება მოძრაობდეს პარალელური მიმართულებით შესაბამისი წყვილის დამატებით. კერძოდ, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \dots$ ძალების შემცველი სისტემისათვის, რომელიც მოქმედებს სხეულზე (ნახ. 3.13.ა.), თითოეული მათგანის გადაადგილება შეიძლება რიგ-რიგობით ნებისმიერი 0 წერტილისკენ, თუ შემოგვაქვს წყვილი თითოეული გადატანილი ძალისათვის. მაგალითად, გადაგვაქვს ძალა $\vec{F}$ 0-კენ და შემოგვაქვს წყვილი $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$, სადაც $\vec{r}_1$ არის ვექტორი 0-ან $\vec{F}_1$ -ს ქმედების წრფის ნებისმიერი წერტილისკენ. როდესაც ასეთი გზით ყველა ძალა გადაინაცვლებს 0-სკენ, ვიღებთ 0-ში გადამკვეთ ძალთა სისტემას და წყვილ ვექტორთა სისტემას, რაც წარმოდგენილია ნახაზის ბ ნაწილში, მაშინ შესაძლებელია გადამკვეთი ძალების ვექტორული შეკრება ნაკრები ძალის $\vec{R}$ წარმოქმნით და წყვილები ასევე იკრიბება ნაკრები წყვილის $\vec{M}$ წარმოქმნით (ნახ. 2.26.). მაშინ ძალთა ზოგადი სისტემა ასე გამოისახება:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \Sigma \vec{F} \\ \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \Sigma (\vec{r} \times \vec{F}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

წყვილი ვექტორები ნაჩვენებია 0 წერტილის გავლით, მაგრამ, რადგან ისინი თავისუფალი ვექტორებია, მათი წარმოდგენა შეიძლება ნებისმიერ პარალელურ პოზიციაში. ტოლქმედის და მათი კომპონენტების სიდიდეები ასე გამოისახება:

$$\begin{aligned} R_x &= \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \\ R &= \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2} \\ \vec{M}_x &= \Sigma(\vec{r} \times \vec{F})_x \quad \vec{M}_y = \Sigma(\vec{r} \times \vec{F})_y \quad \vec{M}_z = \Sigma(\vec{r} \times \vec{F})_z \\ M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \end{aligned}$$

0 წერტილი, არჩეული როგორც ძალების გადაკვეთის წერტილი, ნებისმიერია და $\vec{M}$ -ს სიდიდე და მიმართულება დამოკიდებულია 0 წერტილის არჩევაზე. მაგრამ $\vec{R}$ -ს სიდიდე და მიმართულება იგივეა, წერტილის არჩევისგან დამოუკიდებლად.

ზოგადად, შესაძლებელია ძალთა ნებისმიერი სისტემის ჩანაცვლება მათი ნაკრები ძალით $\vec{R}$ და ნაკრები წყვილით $\vec{M}$. დინამიკაში საწყის წერტილად, როგორც წესი, ირჩევენ მასების ცენტრს. სხეულის წრფივი მოძრაობის ცვლილება განპირობებულია ნაკრები ძალით და კუთხოვანი მოძრაობის ცვლილება - ნაკრები წყვილით. სტატიკაში სხეული **სრულ წონასწორობაშია**, როდესაც ნაკრები ძალა $\vec{R} = 0$ და ნაკრები წყვილი $\vec{M} = 0$. ამდენად, ტოლქმედის განსაზღვრა მნიშვნელოვანია როგორც სტატიკაში, ასევე დინამიკაში.

ახლა განვიხილოთ სხვადასხვა ძალთა სისტემების განსაკუთრებული შემთხვევები.

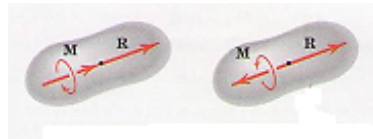
გადამკვეთი ძალები. როდესაც ძალები იკვეთება წერტილში, საჭიროა მხოლოდ 3.10. გამოსახულების 1-ლი განტოლება, რადგან გადაკვეთის წერტილში არ არსებობს მომენტები.

პარალელური ძალები. პარალელური ძალების სისტემისათვის, რომელთაგან ყველა არ არის ერთი და იგივე სიბრტყეში, პარალელური ნაკრები ძალის, $\vec{R}$, სიდიდე უბრალოდ არის მოცემული ძალების ალგებრული ჯამი. მისი ქმედების წრფის მდებარეობა მიიღება მომენტის კანონებიდან იმის მოთხოვნით, რომ $\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O$. აქ $\vec{r}$ არის ვექტორის მდებარეობა, რომელიც გავრცობილია ძალა-წყვილის საწყისი 0 წერტილიდან $\vec{R}$ -ს ქმედების საბოლოო წრფემდე და $\vec{M}_O$ არის 0-ს მიმართ ცალკეული ძალების მომენტების ჯამი.

კოპლანარული ძალები. განხილულია 2.6-ში.

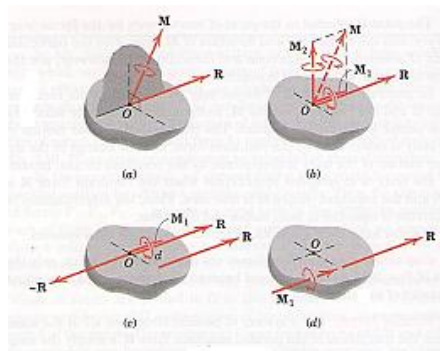
ბრუნვის მომენტი. როდესაც ნაკრები წყვილი ვექტორი $\vec{M}$ ნაკრები ძალის $\vec{R}$ პარალელურია, (ნახ. 3.14.), ტოლქმედს ეწოდება ბრუნვის მომენტი. განმარტებით,

ბრუნვა დადებითია, თუ წყვილის და ძალის ვექტორები ერთნაირადაა მიმართული და უარყოფითია, თუ ისინი საწინააღმდეგო მიმართულებებისაა.



ნახ. 3.14.

დადებითი ბრუნვის კარგად ცნობილი მაგალითია სახრახნისის გამოყენება, კერძოდ, ხრახნის მარჯვენა ხელის წესით ამოღება. ნებისმიერი ზოგადი ძალთა სისტემა შეიძლება წარმოვადგინოთ ბრუნვის მომენტით, რომელიც მოდებულია ქმედების ერთადერთ წრფეზე. ამის ილუსტრაციაა ნახ. 3.15, რომელზეც ა-ნაწილი წარმოადგენს, ძალთა ზოგადი სისტემისთვის, ნაკრებ ძალას $\vec{R}$, რომელიც მოქმედებს გარკვეულ 0 წერტილზე და შესაბამის ნაკრებ წყვილს $\vec{M}$. თუმცა $\vec{M}$ არის თავისუფალი ვექტორი, მოხერხებულობისათვის მას განვიხილავთ, როგორც 0-ს გავლით მოქმედს.



ნახ. 3.15.ა, ბ, გ, დ.

ნახაზის ბ-ნაწილში $\vec{M}$ დაშლილია კომპონენტებად: $\vec{M}_1$ -ად $\vec{R}$ -ის მიმართულების გასწვრივ და $\vec{M}_2$ -ად, რომელიც $\vec{R}$ -ს ნორმალურია. ნახაზის გ-ნაწილში $\vec{M}_2$ წყვილი ჩანაცვლებულია მისი ეკვივალენტური ორი ძალით $\vec{R}$ და $-\vec{R}$, რომლებიც დაცილებულია ერთმანეთს $d = M_2/R$ მანძილით და $-\vec{R}$ -ით, რომელიც მოდებულია 0-ზე საწყისი $\vec{R}$ -ს გასაბათილებლად. ეს საფეხური იძლევა ტოლქმედს $\vec{R}$, რომელიც მოქმედებს ახალი და ერთადერთი წრფის გასწვრივ, და პარალელურ წყვილს $\vec{M}_1$, რომელიც თავისუფალი ვექტორია (ნახაზის დ-ნაწილი). ამრიგად, შესაძლებელია საწყისი ძალების სისტემის ტოლქმედების გარდაქმნა ბრუნვად (ამ შემთხვევაში დადებითია) მისი ერთადერთი ღერძით, რაც განსაზღვრულია $\vec{R}$ -ს ახალი მდებარეობით.

3.15. ნახაზიდან ცხადია, რომ ბრუნვის ნაკრები მომენტის ღერძი მდებარეობს 0-ში გამავალ სიბრტყეში, რომელიც $\vec{R}$ -ით და $\vec{M}$ -ით განსაზღვრული სიბრტყის ნორმალურია. ბრუნვა არის უმარტივესი ფორმა, რომლითაც შეიძლება ძალთა

ზოგადი სისტემის ტოლქმედის გამოხატვა. მაგრამ ტოლქმედის ასეთი ფორმა შეზღუდული გამოყენებისაა, რადგან ჩვეულებრივ, უფრო მოსახერხებელია რაღაც 0 წერტილის ათვლის წერტილად გამოყენება, როგორცაა მასების ცენტრი ან კოორდინატთა სხვა მოსახერხებელი სათავე და არა ბრუნვის ღერძი.

მე-2 და მე-3 თავების რეზიუმე

ძალები

ამ თავების შესწავლის შემდეგ სტუდენტი შეძლებს:

1. დაშალოს მოცემული ძალის ვექტორი მის კომპონენტებად მოცემული მიმართულებებით და გამოსახოს ვექტორი ერთეულოვანი ვექტორების საშუალებით მოცემული ღერძების გასწვრივ.
2. გამოსახოს ძალა როგორც ვექტორი, როდესაც მოცემულია მისი სიდიდე და ქმედების წრფის მიმართულება. ეს ინფორმაცია შეიძლება იყოს მოცემული როგორც ორი წერტილი ქმედების წრფეზე ან როგორც ქმედების წრფეზე ორიენტირებული კუთხეები.
3. გამოიყენოს სკალარული ნამრავლი გარკვეულ წრფეზე ვექტორის პროექციისა და ორ ვექტორს შორის კუთხის გამოსათვლელად.
4. გამოთვალოს წერტილში გადაკვეთილი ორი ან მეტი ძალის ნაკრები.

მომენტები

1. განსაზღვროს მომენტი მომენტ-მხარის წესის გამოყენებით.
2. გამოიყენოს ვექტორების ვექტორული ნამრავლი მომენტის ვექტორის გამოსათვლელად ძალის ვექტორის და მდებარეობის ვექტორის საშუალებით.
3. გამოიყენოს ვარინიონის თეორემა მომენტების გამოთვლის გასამარტივებლად, როგორც სკალარული, ასევე ვექტორული ფორმის შემთხვევაში.
4. გამოიყენოს სამმაგი სკალარული ნამრავლი ძალის ვექტორის მომენტის გამოსათვლელად, მოცემულ წერტილში გამავალი ღერძის მიმართ

წყვილები

სტუდენტი შეძლებს:

1. გამოთვალოს წყვილის მომენტი, მოცემული ძალთა წყვილები და მათი დაშორების მანძილი ან მათი მდებარეობის ვექტორები.
2. ჩაანაცვლოს მოცემული ძალა ეკვივალენტური ძალა-წყვილის სისტემით და პირიქით.

ტოლქმედები

სტუდენტი შეძლებს:

1. გამოთვალოს კოპლანარულ ძალთა სისტემის ტოლქმედის სიდიდე, მიმართულება და ქმედების წრფე, თუ ეს ტოლქმედი არის ძალა, წინააღმდეგ შემთხვევაში, გამოთვალოს ნაკრები წყვილის მომენტი.
2. გამოიყენოს მომენტების პრინციპი კოპლანარული ძალების სისტემის მომენტის გამოსათვლელად მოცემული წერტილის მიმართ.
3. გადაადგილოს მოცემული ძალთა ზოგადი სისტემა ქმედების გარკვეული წრფის გასწვრივ.

წონასწორობა

1. როდესაც სხეულზე მოქმედი ნაკრები ძალა $\Sigma \vec{F} = 0$, სხეული იმყოფება გადატანით წონასწორობაში. ეს ნიშნავს, რომ მისი მასების ცენტრი უძრავია ან მოძრაობს წრფეზე მუდმივი სიჩქარით.
2. მეტიც, თუ ნაკრები წყვილი $\Sigma \vec{F} = 0$, სხეული იმყოფება ბრუნვით წონასწორობაში, არ ბრუნავს ან ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით.
3. როდესაც ორივე ტოლქმედი უდრის ნულს, სხეული იმყოფება სრულ წონასწორობაში.

თავი 4. წონასწორობა

4.1. შესავალი

სტატიკა, პირველ რიგში, ეხება ძალების პირობებს, რაც საკმარისი და აუცილებელია საინჟინრო კონსტრუქციის წონასწორობის შესანარჩუნებლად. ამიტომ ამ თავში მოცემულია სტატიკის ყველაზე მნიშვნელოვანი ნაწილი და აქ დამუშავებული პროცედურები შეადგენს როგორც სტატიკის, ასევე დინამიკის პრობლემების გადაჭრის საფუძველს.

როდესაც სხეული წონასწორობაშია, ყველა მოქმედი ძალის ტოლქმედი ნულის ტოლია. ამრიგად, როგორც ნაკრები ძალა $\vec{R}$, ასევე ნაკრები წყვილი $\vec{M}$ ნულის ტოლია და ვიღებთ წონასწორობის განტოლებებს.

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F} = 0 \quad \vec{M} = \Sigma \vec{M} = 0 \quad (4.1)$$

ეს მოთხოვნები წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობებია. ყველა ფიზიკური სხეული სამგანზომილებიანია, მაგრამ ბევრი მათგანი განიხილება როგორც ორგანზომილებიანი, როდესაც ძალები მოქმედებენ მათზე ერთ სიბრტყეში ან როდესაც შესაძლებელია ამ ძალების ერთ სიბრტყეზე პროექცირება. როდესაც ასეთი გამარტივება შეუძლებელია, პრობლემა უნდა გადაიჭრას როგორც სამგანზომილებიანი.

წონასწორობა ორი განზომილების შემთხვევაში

4.2. სისტემის იზოლირება და თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა

სანამ გამოვიყენებთ 4.1. განტოლებებს, აუცილებელია საანალიზო სხეულის ან მექანიკური სისტემის ერთმნიშვნელოვნად განსაზღვრა და სხეულზე მოქმედი ყველა ძალის ცხადად და სრულად წარმოდგენა. იმ ძალის გამოტოვება, რომელიც სხეულზე მოქმედებს ან იმ ძალის შემოტანა, რომელიც სხეულზე არ მოქმედებს, მცდარ შედეგს იძლევა.

მექანიკური სისტემა განისაზღვრება როგორც სხეული ან სხეულთა ჯგუფი, რომელიც, პრაქტიკულად იზოლირებულია ყველა სხვა სხეულისგან. სისტემა შეიძლება იყოს ცალკეული სხეული ან შეერთებული სხეულების ერთიანობა. სხეულები შეიძლება იყოს მედეგი და არამედეგი სისტემა, ასევე შეძლება იყოს იდენტიფიცირებადი დენადი მასა - აირი ან სითხე ან სითხის და მყარი სხეულის

ერთიანობა. სტატისტიკა, პირველ რიგში, შეისწავლის ძალებს, რომლებიც მოქმედებენ უძრავ ხისტ სხეულებზე, თუმცა სწავლობს ძალებსაც, რომლებიც მოქმედებენ სითხეებზე წონასწორობის დროს.

როდესაც განისაზღვრება შესასწავლი სხეული ან სხეულების ერთიანობა, შემდეგ ეს სხეული ან ერთიანობა უნდა განვიხილოთ, როგორც ცალკეული სხეული, **იზოლირებული** ყველა სხვა სხეულისაგან. ამ იზოლირების გააზრება მიიღება **თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამის გამოყენებით**, რომელიც იზოლირებული სისტემის დიაგრამით წარმოდგენაა. დიაგრამა აჩვენებს, სისტემაზე მოდებულ ძალას სხვა სხეულებთან მექანიკური კონტაქტის საშუალებით. თუ წარმოდგენილია ისეთი ძალები, როგორიცაა გრავიტაციული ან მაგნიტური მიზიდულობა, მაშინ ეს ძალები აუცილებლად უნდა იყოს გამოსახული ამ დიაგრამაზე. როდესაც დიაგრამა ზუსტად აიგება, დაიწერება წონასწორობის განტოლებები. მათი განსაკუთრებული მნიშვნელობის გამოვამტკიცებთ, რომ:

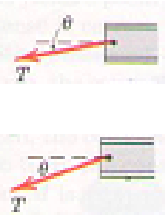
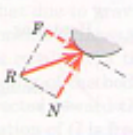
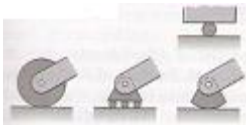
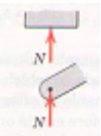
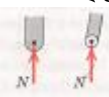
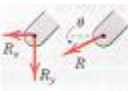
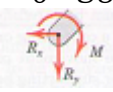
თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა ყველაზე მნიშვნელოვანი პირველი საფეხურია მექანიკის პრობლემების ამოხსნისთვის

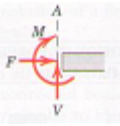
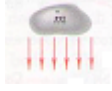
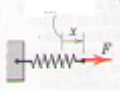
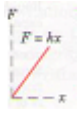
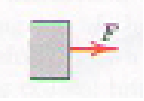
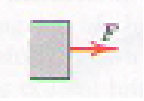
აღნიშნული დიაგრამის დახაზვისას უნდა გამოვიყენოთ ადრე მოტანილი ძალების მახასიათებლები იზოლირებული მექანიკური სისტემის კონცეპტუალური მოდელის შესაქმნელად, რომლებიც წონასწორობის შესაბამისი განტოლებების ჩაწერის საშუალებას მოგვცემენ.

ძალების ქმედების მოდელირება

ნახ. 4.1.-ზე ნაჩვენებია მექანიკურ სისტემებზე ძალების მოდების ცნობილი სახეები ორგანოზომილებიანი ანალიზისთვის. თითოეული მაგალითი აჩვენებს იზოლირებულ სხეულზე მოძრავი სხეულის მიერ მოდებულ ძალას. ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, ყოველ ქმედებას თან სდევს ტოლი და საწინააღმდეგო უკუქმედება. სხეულზე კონტაქტში შემავალი ან საყრდენი ელემენტით მინიჭებული ძალა ყოველთვის იზოლირებული სხეულის მოძრაობის საწინააღმდეგოა, რასაც ადგილი უნდა ჰქონდეს, როდესაც კონტაქტში შემავალი ან მზიდ სხეული გადაადგილდება.

ძალთა ქმედების მოდელირება ორგანოზომილებიან ანალიზში

კონტაქტის ან ძალის სათავეს ტიპი	ქმედება იზოლირებულ სხეულზე	
1. დრეკადი კაბელი, ღვედი, ჯაჭვი ან თოკი კაბელის წონა უმნიშვნელოა. კაბელის წონა საგრძნობია 	დრეკადი კაბელით მინიჭებული ძალა ყოველთვის სხეულიდან კაბელისკენაა მიმართული. 	
2. გლუვი ზედაპირები 	საკონტაქტო ძალა შეკუმშვადია და ნორმალურია ზედაპირის მიმართ 	
3. ხორკლიანი ზედაპირები 	ხორკლიან ზედაპირს შეუძლია ტანგენციალური კომპონენტის F (ხახუნის ძალა), ისევე როგორც ნაკრები საკონტაქტო ძალის R ნორმალური კომპონენტის N შენარჩუნება 	
4. მგორავი საყრდენი 	მგორავი, მოქანავე ან ბურთულოვანი საყრდენი გადაცემს მკუმშვ ძალას საყრდენი ზედაპირის ნორმალურად 	
5. თავისუფლად მოსრიალე მიმმართველი 	ცალული ან ცოცია თავისუფლად მოძრაობს გლუვი ზედაპირის გასწვრივ; შეუძლია დაიჭიროს მხოლოდ მიმმართველის ნორმალური ძალა 	
6. შტიფტიანი შეერთება 	შტიფტი თავისუფლად ბრუნავს  შტიფტი არ ბრუნავს თავისუფლად 	თავისუფალ სახსრიან შტიფტიან შეერთებას შეუძლია შეინარჩუნოს ძალა ნებისმიერი მიმართულებით შტიფტის ღერძის ნორმალურ სიბრტყეში. ჩვენ შეგვიძლია ვაჩვენოთ როგორც R_x და R_y კომპონენტები, ასევე სიდიდე R და მიმართულება Q. შტიფტს არ შეუძლია თავისუფლად ბრუნვა და ერთდროულად წყვილის M ზიდვა.

7. ჩაშენებული ან ფიქსირებული საყრდენი 	ჩაშენებულ ან ფიქსირებულ საყრდენს შეუძლია ზიდოს ღერძული ძალა F, განივი ძალა (წანაცვლების ძალა) V და წვეილი M (მდუნავი მომენტი) ბრუნვის თავიდან აცილების მიზნით 
8. გრავიტაციული მიზიდულობა 	m მასის მქონე სხეულის ყველა ელემენტზე გრავიტაციული მიზიდულობის ტოლქმედი არის წონა და მოქმედებს დედამიწის ცენტრისკენ $W=mg$ მასების ცენტრის G გავლით. 
9. ზამბარას ქმედება ნეიტრალური მდგომარეობა  წრფივი არაწრფივი   გამყარება დარბილება 	ზამბარას ძალა დრეკადია, თუ ზამბარა დაჭიმულია და კუმშვადი, თუ შეკუმშულია. წრფივად დრეკადი ზამბარასათვის სიხისტე k არის ძალა, აუცილებელი ერთეულოვან მანძილზე ზამბარას დეფორმირებისათვის 

ნახ. 4.1. თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამის მაგალითები

1-ლ მაგალითზე ასახულია დრეკადი კაბელის, ღვედის, თოკის ან ჯაჭვის ქმედება მიერთებულ სხეულზე. დრეკადობის გამო თოკს ან კაბელს არ შეუძლიათ რაიმე წინააღმდეგობის გაწევა გაღუნვის, წანაცვლების და შეკუმშვისადმი და ამიტომ აღძრავენ მხოლოდ ძაბვის ძალას კაბელის მხები მიმართულებით მისი მიერთების წერტილში. კაბელის მიერ სხეულზე აღძრული ძალა ყოველთვის მიმართულია სხეულიდან. როდესაც T დამაბულობა დიდია კაბელის წონასთან შედარებით, შეიძლება დაუშვათ, რომ კაბელი წარმოქმნის წრფეს. როდესაც კაბელის წონა არ არის უგულებელსაყოფი ძაბვასთან შედარებით, კაბელის ჩაკიდულობა მნიშვნელოვანია და კაბელის ძაბვა ცვლის სიდიდეს და მიმართულებას მისი სიგრძის გასწვრივ.

როდესაც ორი სხეულის გლუვი ზედაპირები ერთმანეთთან კონტაქტშია (მაგალითი 2), ერთის მიერ მეორეზე მინიჭებული ძალა ზედაპირების მხების ნორმალურია და კუმშვადია. თუმცა რეალური ზედაპირები არ არის მთლიანად გლუვი, ჩვენ არ შეიძლება ეს არ ვივარაუდოთ პრაქტიკული მოსაზრებების გამო.

როდესაც კონტაქტში შემავალი ზედაპირები ხორკლიანია (მაგალითი 3), არ არის აუცილებელი რომ კონტაქტის ძალა იყოს ზედაპირების მხების ნორმალური,

მაგრამ ის შეიძლება დაიშალოს ტანგენციალურ ან ხახუნის კომპონენტად $\vec{F}$ და ნორმალურ კომპონენტად N .

მე-4 მაგალითში მოტანილია მექანიკური საყრდენის რამდენიმე სახეობა, რომლებიც ეფექტურად გამოირიცხავენ ტანგენციალური ხახუნის ძალებს. ამ შემთხვევაში საერთო უკუქმედება ნორმალურია საყრდენი ზედაპირის მიმართ.

მე-5 მაგალითი აჩვენებს გლუვი მიმმართველის მოქმედებას სხეულზე, რომელსაც ის ეყრდნობა. ამ შემთხვევაში არ არის მიმმართველის პარალელური არავითარი წინააღმდეგობა.

მე-6 მაგალითში ნაჩვენებია შტიფტიანი შეერთების მოქმედება, ასეთი შეერთება უძლებს ძალას ნებისმიერი მიმართულებით, რომელიც ნორმალურია შტიფტის ღერძის მიმართ. ამ ქმედებას, ჩვეულებრივ, წარმოადგენენ ორი მართკუთხა კომპონენტის საშუალებით. ამ კომპონენტის სწორი ორიენტაცია კონკრეტული პრობლემებისათვის დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორ არის დატვირთული ელემენტი. თუ თავიდან არ არის ცნობილი, აიღება ნებისმიერი ორიენტაცია და შემდეგ იწერება წონასწორობის განტოლებები. თუ ამ განტოლებების ამოხსნა ძალის კომპონენტებისთვის იძლევა დადებით ალგებრულ ნიშანს, არჩეული ორიენტაცია სწორია. უარყოფითი ნიშანი მიუთითებს რომ ორიენტაცია თავიდან არჩეულის საწინააღმდეგოა.

თუ შეერთება არ ბრუნავს შტიფტის გარშემო, ის შეინარჩუნებს მხოლოდ R ძალას. თუ ეს ასე არ არის, შეერთება ასევე შეინარჩუნებს მედეგ წყვილს M . აქ M -ის ორიენტაცია ნებისმიერია, მაგრამ რეალური მიმართულება დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორ არის ელემენტი დატვირთული.

მე-7 მაგალითში მოტანილია ძალის უფრო რთული განაწილების ტოლქმედები წვრილი ღეროს ან ძელის განივკვეთის ზემოთ ჩაშენებულ ან ფიქსირებულ საყრდენზე. უკუქმედებების F და V და მღუნავი წყვილის M მიმართულება დამოკიდებულია, რასაკვირველია, იმაზე, თუ როგორ არის დატვირთული ელემენტი.

გრავიტაციული მიზიდულობა ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი ძალაა (მაგალითი 8), რომელიც მოქმედებს სხეულის მასის ყველა ელემენტზე და ამიტომ ყველგანაა გავრცელებული. ყველა ელემენტზე მოქმედი გრავიტაციული ძალების ტოლქმედი არის წონა $W = mg$, რომელიც გადის მასების ცენტრში G და მიმართულია დედამიწის ცენტრისკენ. G -ს მდებარეობა ხშირად ცხადია სხეულის გეომეტრიიდან გამომდინარე, კერძოდ, როდესაც ადგილი აქვს სიმეტრიას. თუ მდებარეობა არ არის ცხადი, ის განისაზღვრება ექსპერიმენტით ან გამოთვლებით.

ანალოგიური შენიშვნები შეიძლება გამოითქვას მაგნიტური და ელექტრული ძალების შორს ქმედებაზე. ეს ძალები ახდენენ იგივე საერთო ეფექტს ხისტ მყარ სხეულზე, როგორც ტოლი სიდიდის და მიმართულების ძალები, რომლებიც მოდებულია პირდაპირ გარე კონტაქტის დროს.

მაგალითი 9 აჩვენებს დრეკადი წრფივი ზამბარას და არაწრფივი ზამბარას მოქმედებას, როგორც გამაგრების, ასევე დარბილების მახასიათებლებით. გაჭიმვისას და შეკუმშვისას წრფივი ზამბარას მიერ მინიჭებული ძალა მოიცემა როგორც $F = kx$, სადაც k არის ზამბარას სიხისტე და x - მისი დეფორმაცია, რომელიც იზომება ნეიტრალური ან არადეფორმირებული მდებარეობიდან.

4.1. ნახაზზე წარმოდგენილი მაგალითები არ არის თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა, მაგრამ არის ელემენტები მის ასაგებად. ამ ცხრა პირობის შესწავლა და მათი იდენტიფიცირება სწორი დიაგრამის აგების საშუალებას იძლევა.

თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამის აგება

ეს პროცედურა შედგება ოთხი საფეხურისაგან.

საფეხური 1. საიზოლაციო სისტემის შერჩევა. ასეთი სისტემა, ჩვეულებრივ უნდა შეიცავდეს ერთ ან რამდენიმე საჭირო უცნობ სიდიდეს.

საფეხური 2. შემდეგ ხდება არჩეული სისტემის იზოლირება იმ დიაგრამის დახაზვით, რომელიც წარმოადგენს მის მთლიან გარე საზღვარს, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის იზოლირებას ყველა სხვა სხეულიდან, რომლებიც განიხილება როგორც მოძრავი. ეს საფეხური ხშირად ყველაზე მნიშვნელოვანია. დარწმუნდით, რომ სისტემა მთლიანად იზოლირებულია შემდეგ საფეხურზე გადასვლამდე.

საფეხური 3. მოახდინეთ ყველა იმ ძალის იდენტიფიცირება, რომლებიც მოქმედებენ იზოლირებულ სისტემაზე და მოდებულია კონტაქტში შემავალი და ურთიერთმიმზიდველი და წარმოადგინეთ ისინი სწორ პოზიციებში იზოლირებული სისტემის დიაგრამაზე. ჩაატარეთ მთელი საზღვრის სისტემატური ტრავერსი ყველა საკონტაქტო ძალის იდენტიფიცირებისათვის. ჩართეთ მასური ძალები, როგორიცაა წონა. აღნიშნეთ ყველა ცნობილი ძალა ვექტორის ისრებით, თითოეული სწორი სიდიდით და მიმართულებით და მიუთითეთ ორიენტაცია. თითოეული უცნობი ძალა უნდა აღინიშნოს ვექტორის ისრით უცნობი სიდიდით და მიმართულებით, რაც ნაჩვენებია იქნება სიმბოლოთი. თუ ვექტორის ორიენტაცია ასევე უცნობია, ის უნდა შეირჩეს როგორც ნებისმიერი. შემდგომი გამოთვლები წონასწორობის განტოლებების საშუალებით მოგცემთ დადებით სიდიდეს, თუ არჩეულია სწორი ორიენტაცია და უარყოფითს - თუ ორიენტაცია არასწორია. აუცილებელია, რომ ეს იყოს თავსებადი უცნობის ძალებისათვის მინიჭებულ მახასიათებლებთან გამოთვლებისას. თუ ეს ასეა, წონასწორობის განტოლებების ამოხსნა იძლევა სწორ ორიენტაციებს.

საფეხური 4. დიაგრამაზე პირდაპირ უჩვენეთ კოორდინატთა ღერძის არჩევანი. შესაბამისი ზომები ასევე უნდა იყოს ნაჩვენები. მაგრამ აღსანიშნავია,

რომ დიაგრამის მიზანია ყურადღების გამახვილება გარე ძალების ქმედებაზე და ამიტომ დიაგრამა არ უნდა იყოს გადატვირთული ჭარბი გარე ინფორმაციით. ცხადად გამოყავით ძალის ისრები სხვა სიდიდეების ისრებისაგან.

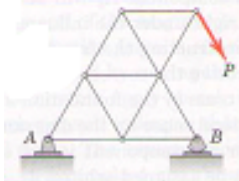
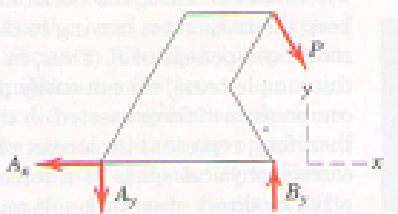
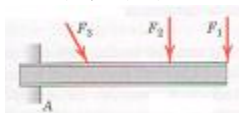
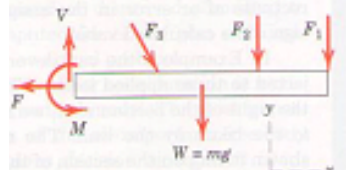
ამ ოთხი საფეხურის შესრულება იძლევა თავისუფალი სხეულის ძალთა სწორ დიაგრამას, რომელიც გამოიყენება განტოლებების კონტროლისათვის როგორც სტატიკაში, ასევე დინამიკაში. იყავით ფრთხილად, რათა ამ დიაგრამაში არ გამოტოვოთ გარკვეული ძალები, რომლებიც, ერთი შეხედვით, არ ჩანან, მაგრამ აუცილებელია გამოთვლებისას. მხოლოდ **სრული** იზოლირებით და **ყველა** გარე ძალის სისტემატური წარმოდგენით შესაძლებელია ყველა მოდებული და უკუქმედების ძალების ეფექტების გათვალისწინება. ძალიან ხშირად ძალა, რომელიც, ერთი შეხედვით, არ ახდენს გავლენას შედეგზე, სინამდვილეში ამას აკეთებს. ამდენად, თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამაზე უნდა აისახოს ყველა ძალა, რომელთა სიდიდის უგულებელყოფა არ შეიძლება.

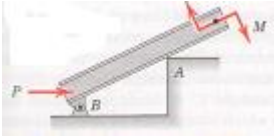
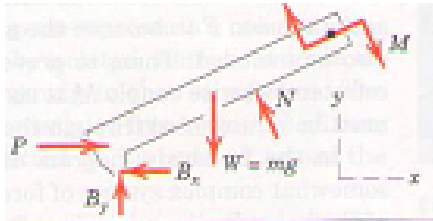
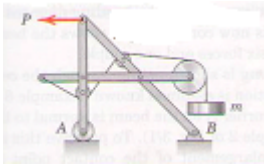
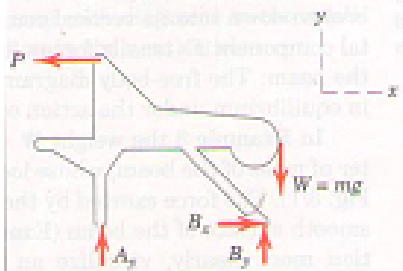
ეს მეთოდი უაღრესად მნიშვნელოვანია მექანიკაში, რადგან ის უზრუნველყოფს მექანიკური სისტემის ზუსტ განსაზღვრას და ყურადღებას ამახვილებს სტატიკის და დინამიკის ძალთა კანონების ზუსტ მნიშვნელობაზე და გამოყენებაზე.

თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამის მაგალითები

4.2. ნახაზზე მოტანილია მექანიზმების და კონსტრუქციების ოთხი მაგალითი მათი თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამებთან ერთად. სიცხადისათვის გამოტოვებულია ზომები და სიდიდეები. თითოეულ შემთხვევაში მთლიანი სისტემა განიხილება როგორც ცალკეული სხეული, ასე რომ, შიდა ძალები არ არის ნაჩვენები.

თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამის ნიმუშები

მექანიკური სისტემა	იზოლირებული სხეულის ძალთა დიაგრამა
1. ბრტყელი წამწე (ფერმა). წამწეს წონა უმნიშვნელოა P -თან შედარებით 	
2. კონსოლური ძელი (კოჭი) 	

მასა, m	
3. ძელი(კოჭი) გლუვი ზედაპირი კონტაქტშია A-სთან 	
4. ურთიერთშეერთებული სხეულების ხისტი სისტემა განიხილება როგორც ერთი ბლოკი, მექანიზმის წონა უგულებელყოფილია 	

ნახ.4.2.

1-ელ მაგალითში წამწე შედგენილია კონსტრუქციული ელემენტებიდან, რომლებიც ერთად აღებული იძლევა ხისტ ჩარჩოს. ამრიგად, შეიძლება მთელი წამწეს გადაადგილება მისი საყრდენი ფუძიდან და მისი, როგორც ცალკე სხეულის განხილვა. მოდებული გარე დატვირთვის, P -ს გარდა, დიაგრამა უნდა შეიცავდეს მხოლოდ წამწეზე A -ს და B -ს უკუქმედებას. ბარბაცა B -ში ინარჩუნებს მხოლოდ ვერტიკალურ ძალას და ეს ძალა გადაეცემა კონსტრუქციას B -ში. შტიფტიან შეერთებას A -ში შეუძლია ძალის როგორც ჰორიზონტალური, ასევე ვერტიკალური კომპონენტის წამწეზე გადაცემა. თუ წამწეს ელემენტების მთლიანი წონა საგრძნობლად შედარებადია P -ან და ძალებთან A -ში და B -ში, მაშინ ელემენტების წონა შეტანილი უნდა იქნას დიაგრამაში როგორც გარე ძალები.

ამ შედარებით მარტივი მაგალითიდან ცხადია, რომ ვერტიკალური კომპონენტი A_y ქვევით უნდა იყოს მიმართული, რათა თავიდან იქნას აცილებული B -ს გარშემო წამწეს ბრუნვა საათის ისრის მიმართულებით. ასევე, ჰორიზონტალური კომპონენტი A_x უნდა იყოს მარცხნივ, რათა წამწე არ გადაადგილდეს მარჯვნივ P -ს ჰორიზონტალური კომპონენტის ზემოქმედებით. ამრიგად, მარტივი წამწესათვის დიაგრამის აგებისას ადვილია წამწეზე მოდებული ძალის თითოეული კომპონენტის ორიენტაციის დადგენა A -ში დაფუძნებით და, ამდენად, მისი სწორი ფიზიკური ორიენტაციის ჩვენება დიაგრამაზე. თუ ძალის ან მისი კომპონენტის სწორი ორიენტაციის დადგენა

შეუძლებელია პირდაპირი დაკვირვებით, ის უნდა შეირჩეს როგორც ნებისმიერი და ამ არჩევის სისწორე ან მცდარობა დგინდება მისი გამოთვლილი მნიშვნელობის ალგებრული ნიშნით.

მე-2 მაგალითში კონსოლური კოჭი დამაგრებულია კედელზე და განიცდის სამი მოდებული დატვირთვის ზემოქმედებას. კოჭის ამ ნაწილის იზოლირებით A -ს მარჯვენა ნაწილიდან, აუცილებელია კოჭზე კედლის მიერ მოქმედი ძალების გათვალისწინება. ასეთი ძალების ტოლქმედები ნაჩვენებია ნახ. 4.1.-ზე (მაგალითი 7), ვერტიკალური ძალა V , ანეიტრალებს ქვევით მოქმედ ჭარბ ძალას და დაძაბულობა F , რომელიც აწონასწორებს მოდებულ ჭარბ ძალას მარჯვნივ, ასევე უნდა იყოს გათვალისწინებული. ამდენად, კოჭის A -ს გარშემო ბრუნვის თავიდან აცილების მიზნით საჭიროა საათის ისრის საწინააღმდეგოდ მიმართული წყვილი M . კოჭის წონა mg უნდა იყოს წარმოდგენილი მასების ცენტრის გავლით (ნახ 4.1. მაგალითზე).

დიაგრამაზე (მაგალითი 2) წარმოდგენილია ძალთა უფრო რთული სისტემა, რომელიც რეალურად მოქმედებს კოჭის ამოჭრილ ნაწილზე ეკვივალენტური ძალა-წყვილის სისტემით, რომელშიც ძალა იშლება მის ვერტიკალურ კომპონენტად V (მძვრელი ძალა) და ჰორიზონტალურ F კომპონენტებად (გამჭიმვი ძალა). წყვილი M არის კოჭის ღუნვის მომენტი. ახლა დიაგრამა დასრულებულია და აჩვენებს კოჭს, რომელიც წონასწორობაშია ექვსი ძალის და ერთი წყვილის ქმედების ქვეშ.

მე-3 მაგალითში ნაჩვენებია წონა $W = mg$, რომელიც მოქმედებს კოჭის მასების ცენტრის გავლით, რომლის მდებარეობა ცნობილია ნახ. 4.1.-ის მე-8 მაგალითიდან. კოჭის A კუთხეზე მოდებული ძალა კოჭის გლუვი ზედაპირის ნორმალურია. ამ ქმედების უფრო ცხადად გააზრებისათვის წარმოვიდგინოთ საკონტაქტო წერტილის A გავრცელება, გარკვეულწილად დამრგვალებულად, და განვიხილოთ ძალა, მოდებული ამ დამრგვალებულ კუთხეზე კოჭის სწორ ზედაპირზე, რომელიც განიხილება როგორც გლუვი. თუ კუთხეში კონტაქტში შემავალი ზედაპირები არ არის გლუვი, იქნება ძალის ტანგენციალური ხახუნის კომპონენტი. მოდებული P ძალის და M წყვილის გარდა, B -ზე იქნება შტიფტიანი შეერთება, რომელიც კოჭზე მოქმედებს ძალის როგორც x ასევე y კომპონენტებით. ამ კომპონენტების დადებითი ორიენტაციები აირჩევა ნებისმიერი გზით.

მე-4 მაგალითში მთლიანად იზოლირებული მექანიზმის ძალთა დიაგრამაში შედის სამი უცნობი ძალა, თუ ცნობილია mg და P დატვირთვები. მრავალი შიდა კონფიგურაციიდან შესაძლებელი იქნება ნებისმიერი მათგანი კაბელის დასაცავად m მასისგან მექანიზმზე, როგორც მთელზე, გარე ზემოქმედების გარეშე და ეს ფაქტი გამომდინარეობს დიაგრამიდან. ეს ჰიპოთეტური მაგალითი მოტანილია იმის საჩვენებლად, რომ ელემენტების ხისტ ბლოკზე არ მოქმედებს შიდა უკუქმედების სიდიდეები.

თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა გამოიყენება წონასწორობის განტოლებების დასაწერად, რომელთა ამოხსნის შემდეგ ზოგიერთი გამოთვლილი ძალების სიდიდეები აღმოჩნდება ნულის ტოლი. ეს ნიშნავს, რომ ასეთი ძალა არ არსებობს. ნახ. 4.2.-ის 1-ელ მაგალითში ნებისმიერი უკუქმედება A_x , A_y და B_y იქნება ნული წამწეს გეომეტრიის გარკვეული მნიშვნელობებისთვის და დატვირთვის P სიდიდის, მიმართულების და ნიშნისათვის. ნულოვანი უკუქმედების ძალა ძნელი დასადგენია, მაგრამ მისი განსაზღვრა შეიძლება წონასწორობის განტოლებების ამოხსნით.

განხილული მექანიკური სისტემის იზოლირება გადამწყვეტი საფეხურია მათემატიკური მოდელის ჩამოყალიბებისათვის. სწორი აგების ყველაზე მნიშვნელოვანი ასპექტია ცხადი და ერთმნიშვნელოვანი გადაწყვეტა იმისა, თუ რა უნდა იყოს გათვალისწინებული და რა გამორიცხული. ეს გადაწყვეტილება იქნება ერთმნიშვნელოვანი მხოლოდ მაშინ, როდესაც დიაგრამის საზღვარი წარმოადგენს იზოლირებული სხეულის ან სხეულთა სისტემის სრულ ტრავერსს, საზღვრის რომელიმე ნებისმიერი წერტილიდან დაწყებული და იგივე წერტილით დამთავრებული. სისტემა ამ ჩაკეტილ საზღვარში არის იზოლირებული თავისუფალი სხეული და ყველა საკონტაქტო ძალა და ყველა სხეულის ძალა, გადაცემული სისტემაზე საზღვრის გავლით, უნდა იყოს გათვალისწინებული.

4.3. წონასწორობის პირობები

4.1.-ში წონასწორობა განისაზღვრა როგორც მდგომარეობა, რომელშიც სხეულზე მოქმედი ყველა ძალის და მომენტის ტოლქმედი ნულის ტოლია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სხეული წონასწორობაშია, თუ სხეულზე მოქმედი ყველა ძალა და მომენტი დაბალანსებულია. ეს მოთხოვნები შედის წონასწორობის განტოლებებში (4.1.), რომელიც ორი განზომილების შემთხვევაში შეიძლება ჩაიწეროს სკალარული ფორმით:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_o = 0 \quad (4.2)$$

მესამე განტოლებით წარმოდგენილია ნებისმიერი 0 წერტილის მიმართ ყველა ძალის მომენტის ნულოვანი ჯამი, რომელიც მოქმედებს სხეულზე ან სხეულიდან. 4.2. განტოლებები აუცილებელი და საკმარისი პირობაა სრული წონასწორობისათვის ორი განზომილების შემთხვევაში. ისინი აუცილებელია, რადგან თუ ისინი არ კმაყოფილდება, არ იქნება ძალის ან მომენტის ბალანსი და საკმარისია, რადგან თუ ისინი კმაყოფილდება, ადგილი არ ექნება დისბალანსს და მიიღწევა წონასწორობა.

განტოლებები, რომლებიც აკავშირებს ძალას და სხეულის მოძრაობას, გამოყვანილია დინამიკაში, ნიუტონის მეორე კანონიდან გამომდინარე. ამ განტოლებებიდან ცხადია, რომ სხეულის მასების ცენტრის აჩქარება სხეულზე მოქმედი ნაკრები ძალის $\Sigma \vec{F}$ პროპორციულია. შესაბამისად, თუ სხეული მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით (ნულოვანი აჩქარებით), ნაკრები ძალა უნდა იყოს ნულის ტოლი და შეიძლება დავასკვნათ, რომ სხეული იმყოფება ტრანსლაციურ (გადატანით) წონასწორობაში.

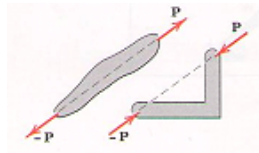
ორი განზომილების შემთხვევისათვის სრული წონასწორობის მისაღწევად სამივე 4.2. განტოლება უნდა იყოს დაცული. მაგრამ ეს პირობები დამოუკიდებელი მოთხოვნებია და შეიძლება დაცული იყოს ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად. მაგალითად, განვიხილოთ სხეული, რომელიც მიცოცავს ჰორიზონტალურ ზედაპირზე ზრდადი სიჩქარით მოდებული ძალების ზემოქმედებით. ძალა-წონასწორობის განტოლებები დაკმაყოფილდება ვერტიკალური მიმართულებით, როდესაც აჩქარება ნულის ტოლია, მაგრამ არა ჰორიზონტალური მიმართულებით. ასევე სხეული, როგორცაა მქნევარა, რომელიც მოძრაობს ფიქსირებული მასების ცენტრის გარშემო ზრდადი კუთხური სიჩქარით, არ იმყოფება ბრუნვით წონასწორობაში, მაგრამ ორი ძალა-წონასწორობის განტოლება კმაყოფილდება.

წონასწორობის სახეები

1. კოლინეარული ძალების წონასწორობა ცხადად მოითხოვს ძალის მხოლოდ ერთ განტოლებას ძალების მიმართულებით (x - მიმართულება), რადგან სხვა დანარჩენი განტოლებები ავტომატურად კმაყოფილდება.
2. ძალების წონასწორობა, რომლებიც მდებარეობენ სიბრტყეში ($x - y$ სიბრტყე) და იკვეთებიან 0-წერტილში, მოითხოვს მხოლოდ ორ განტოლებას, რადგან 0-ის მიმართ მომენტების ჯამი, ე.ი. 0-ში გამავალი z -ღერძის მიმართ, აუცილებლად ნულის ტოლია. წონასწორობის ასეთი სახეა ნაწილაკის წონასწორობა.
3. პარალელურ ძალთა წონასწორობა სიბრტყეში, მოითხოვს ძალის ერთ განტოლებას ძალების მიმართულებით (x -მიმართულება) და მომენტის ერთ განტოლებას ღერძის (z -ღერძი) მიმართ, რომელიც ძალთა სიბრტყის ნორმალურია.
4. ძალების ზოგადი სისტემის წონასწორობა სიბრტყეში ($x - y$), მოითხოვს ძალის ორ განტოლებას სიბრტყეში და მომენტის ერთ განტოლებას ღერძის (z -ღერძი) მიმართ, რომელიც სიბრტყის ნორმალურია.

ორი და სამძალიანი ელემენტები

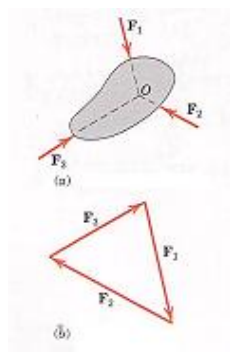
თქვენ უნდა ყურადღებით იყოთ ხშირად არსებული ორი წონასწორობის მდგომარეობის განხილვისას. პირველი – ეს არის მხოლოდ ორი ძალის ქმედებით გამოწვეული სხეულის წონასწორობა.



ორძალიანი ელემენტები

ნახ. 4.3.

ორი მაგალითი მოტანილია ნახ. 4.3.-ზე, საიდანაც ცხადია, რომ ასეთი **ორძალიანი ელემენტის** წონასწორობისათვის ძალები უნდა იყოს **ტოლი, საწინააღმდეგო და კოლინეარული**. ელემენტის ფორმა არ ახდენს გავლენას ამ მარტივ მოთხოვნაზე. ამ შემთხვევაში ითვლება, რომ ელემენტების წონა უმნიშვნელოა მოდებულ ძალებთან შედარებით.



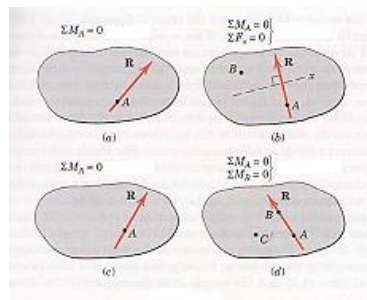
ნახ. 4.4.

ა. სამძალიანი
ელემენტი
ბ. ჩაკეტილი
პოლიგონი
აკმაყოფილებს
 $\Sigma F=0$

მეორე მდგომარეობაა **სამძალიანი წევრი**, როდესაც სხეული იმყოფება სამი ძალის ზემოქმედების ქვეშ (ნახ. 4.4.ა.) ამ შემთხვევაში წონასწორობა მოითხოვს ამ სამი ძალის ქმედების წრფეების გადაკვეთას, თუ ისინი არ იკვეთება, ერთ-ერთი მათგანი ანიჭებს ნაკრებ მომენტს ორ დანარჩენს გადაკვეთის წერტილში, რაც არღვევს ნებისმიერ წერტილში ნულოვანი მომენტის მოთხოვნას. ერთადერთი გამონაკლისია შემთხვევა, როდესაც სამი ძალა ერთმანეთის პარალელურია. ამ დროს იგულისხმება, რომ გადაკვეთის წერტილი უსასრულოა.

წონასწორობისას სამი ძალის გადაკვეთის პრინციპს დიდი მნიშვნელობა აქვს ძალის განტოლებების გრაფიკული ამოხსნისას, ამ შემთხვევაში ხაზავენ ძალთა პოლიგონს და მას ჩაკეტავენ (ნახ. 4.4.ბ.). ხშირად, სამზე მეტი ძალის ქმედების ქვეშ მყოფი წონასწორობა დაიყვანება სამძალიან ელემენტზე ორი ან მეტი ცნობილი ძალის გაერთიანებით.

წონასწორობის ალტერნატიული განტოლებები



ნახ. 4.5.ა, ბ, გ, დ.

გარდა 4.2. განტოლებებისა, არ არის სხვა გზა ძალთა წონასწორობის ზოგადი პირობების გამოსახატავად ორი განზომილების შემთხვევაში პირველი გზა ნაჩვენებია 4.5.ა. ნახაზზე. თუ $\Sigma M_A = 0$, მაშინ ტოლქმედი არ იქნება წყვილი, მაგრამ იქნება A -ში გამავალი ძალა $\vec{R}$. თუ დაცულია $\Sigma F_x = 0$ განტოლება, სადაც x – მიმართულება ნებისმიერია, 4.5.ბ. ნახაზიდან გამომდინარეობს, რომ ნაკრები ძალა $\vec{R}$, თუ ის საერთოდ არსებობს, არა მარტო უნდა გადიოდეს A -ში, არამედ უნდა იყოს x – მიმართულების პერპენდიკულარულიც. თუ $\Sigma M_B = 0$, სადაც B არის ისეთი ნებისმიერი წერტილი, რომ AB ხაზი არ არის x – მიმართულების პერპენდიკულარული, დავინახავთ, რომ $\vec{R}$ უნდა იყოს ნულის ტოლი და, ამდენად, სხეული იქნება წონასწორობაში. ამიტომ, წონასწორობის განტოლებათა ალტერნატიულ სისტემას ექნება სახე:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0$$

სადაც A და B წერტილები შეიძლება არ მდებარეობდნენ x – მიმართულების პერპენდიკულარულ ხაზზე.

წონასწორობის პირობების მესამე ფორმულირება ეხება კოპლანარულ ძალთა სისტემას. (ნახ 4.5.გ, დ.). აქ თუ $\Sigma M_A = 0$, ტოლქმედი, თუ ასეთი არსებობს, უნდა იყოს A -ში გამავალი ძალა $\vec{R}$. გარდა ამისა, თუ $\Sigma M_B = 0$, მაშინ ტოლქმედი, თუ ასეთი არსებობს, უნდა გადიოდეს B -ში. მაგრამ ასეთი ძალა არ იარსებებს, თუ $\Sigma M_C = 0$, სადაც C არ არის A -ს და B -ს კოლინეარული. ამრიგად, წონასწორობის განტოლებები ასეთი სახით ჩაიწერება:

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

სადაც სამი წერტილი A, B და C არ მდებარეობს ერთი და იგივე წრფეზე.

როდესაც დაწერილია წონასწორობის განტოლებები, რომლებიც არ არიან დამოუკიდებელი განტოლებები, მიიღება ჭარბი ინფორმაცია და განტოლებების

სწორი ამოხსნა იძლევა $0=0$. მაგალითად, სამუცნობიანი ორი განზომილების ზოგადი პრობლემისათვის დაწერილი მომენტის სამი განტოლება სამი წერტილის მიმართ, რომლებიც ერთ წრფეზე მდებარეობენ, არ არის დამოუკიდებელი განტოლებები. ასეთი განტოლებები შეიცავს დუბლირებულ ინფორმაციას და ორი მათგანის ამოხსნა, უკეთეს შემთხვევაში, განსაზღვრავს ორ უცნობს მესამე განტოლებით, რომელიც ადვილად იძლევა $0=0$ -ს იდენტურობას.

შეზღუდვები და სტატიკური განსაზღვრულობა

ზემოთ მოტანილი წონასწორობის განტოლებები სხეულის წონასწორობის როგორც აუცილებელი, ასევე საკმარისი პირობაა, მაგრამ ისინი არ იძლევა ყველა ინფორმაციას, რაც აუცილებელია წონასწორობის დროს სხეულზე მოქმედი ყველა უცნობი ძალის გამოსათვლელად. საკმარისია განტოლებები ყველა უცნობის დასადგენად თუ არა, ისინი დამოკიდებულია შეზღუდვების მახასიათებლებზე საყრდენის მიერ გამოწვეული სხეულის შესაძლო მოძრაობით, **შეზღუდვის** ქვეშ იგულისხმება მოძრაობის შეზღუდვა.

4.1. ნახაზის მე-4 მაგალითში გორგოლაჭი, ლილვი ან ბარბაცა წარმოადგენს შემზღუდველს, რომელიც საკონტაქტო ზედაპირის ნორმალურია, მაგრამ არ წარმოადგენს ზედაპირის მხებს. ამდენად, ტანგენციალური ძალა არ არის შენარჩუნებული. ცალულისა და ცოციასთვის (მაგალითი 5) შემზღუდველი მხოლოდ მიმმართველის ნორმალურია. ფიქსირებული შტიფტიანი შეერთება (მაგალითი 6) იძლევა შეზღუდვას ორივე მიმართულებით, მაგრამ არ უწევს წინააღმდეგობას შტიფტის გარშემო ბრუნვას, თუ შტიფტს არ შეუძლია თავისუფლად ბრუნვა. მაგრამ ფიქსირებული საყრდენი (მაგალითი 7) ზღუდავს ბრუნვას, ისევე როგორც განიცდის მოძრაობას.

თუ წამწეს საყრდენი ბარბაცა (ნახ 4.2., მაგალითი 1) ჩანაცვლებულია შტიფტიანი შეერთებით, როგორც A -ში, იქნება დამატებითი შეზღუდვა გარდა იმ შეზღუდვებისა, რომლებიც აუცილებელია წონასწოვრული კონფიგურაციის შესანარჩუნებლად მოძრაობის თავისუფლების გარეშე. 4.2. განტოლებები არ იძლევა საკმარის ინფორმაციას ყველა ოთხი უცნობის დასადგენად, რადგან A_x და B_x არ ამოიხსნება ცალცალკე. განისაზღვრება მხოლოდ მათი ჯამი, ძალის ეს ორი კომპონენტი იქნება წამწეს ელემენტების დეფორმაციისაგან დამოუკიდებელი, როდესაც ადგილი აქვს მათი სიხისტის თვისებების შესაბამის ზემოქმედებას. ჰორიზონტალური უკუქმედებები A და B ასევე იქნება დამოკიდებული ნებისმიერ საწყის დეფორმაციაზე, რაც უნდა აკმაყოფილებდეს კონსტრუქციის ზომებს. ამრიგად, შეუძლებელია A_x -ის და B_x -ის განსაზღვრა ხისტი მყარი სხეულის ანალიზისათვის.

ნახ 4.2.-დან ცხადია, რომ თუ შტიფტ B-ს (მაგალითი 3) არ შეუძლია თავისუფლად ბრუნვა, საყრდენს გადააქვს წყვილი კოჭისაკენ შტიფტის გავლით. ამიტომ ამ შემთხვევაში იქნება შტიფტზე მოქმედი ოთხი უცნობი უკუქმედება, კერძოდ, ძალა A, B ძალის ორი კომპონენტი და წყვილი C. შესაბამისად, წონასწორობის სამი დამოუკიდებელი სკალარული განტოლება ვერ იძლევა საკმარის ინფორმაციას ოთხივე უცნობის გამოსათვლელად.

ხისტი მყარი სხეული ან ელემენტების ხისტი კომბინაცია, რომელიც განიხილება როგორც მთლიანი სხეული და შეიცავს უფრო მეტ გარე საყრდენებს ან შემზღუდვეებს, ვიდრე ეს საჭიროა წონასწორობის მდგომარეობის შესანარჩუნებლად, **განიხილება როგორც სტატიკურად განუსაზღვრელი**. საყრდენები რომელთა გადანაცვლება შესაძლებელია წონასწორობის დარღვევის გარეშე, განიხილება როგორც **ჭარბი**.

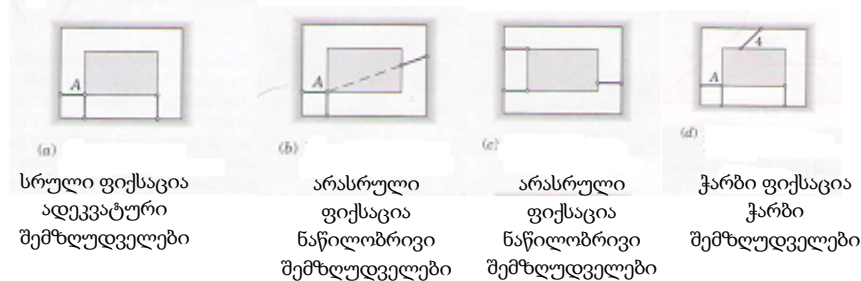
მთელი რიგი ჭარბი საყრდენი ელემენტები შეესაბამება **სტატიკური განუსაზღვრელობის ხარისხს** და ტოლია უცნობი გარე ძალების საერთო რაოდენობისა მინუს არსებული წონასწორობის დამოუკიდებელი განტოლებების რიცხვი. მეორეს მხრივ, სხეულები, რომლებიც ეყრდნობა შემზღუდველების მინიმალურ რაოდენობას, რაც აუცილებელია წონასწორობის შესანარჩუნებლად, განიხილება როგორც **სტატიკურად განსაზღვრადი** და ასეთი სხეულებისათვის წონასწორობის განტოლებები საკმარისია უცნობი გარე ძალების დასადგენად.

წონასწორობის პრობლემები, ძირითადად, შემოიფარგლება სტატიკურად განსაზღვრადი სხეულებით, სადაც შემზღუდველები საკმარისია სტაბილური წონასწორობის კონფიგურაციის შესანარჩუნებლად და სადაც უცნობი საყრდენი ძალები სრულად იქნება განსაზღვრული არსებული დამოუკიდებელი წონასწორობის განტოლებებით.

აუცილებელია ვიცოდეთ შემზღუდველების ბუნება, სანამ შეუდგებით წონასწორობის პრობლემების გადაჭრას. სხეული შეიძლება განვიხილოთ როგორც სტატიკურად განუსაზღვრელი, თუ საქმე გვაქვს უფრო მეტ უცნობ გარე უკუქმედებებთან, ვიდრე წონასწორობის დამოუკიდებელი განტოლებების რიცხვია მოცემული ძალთა სისტემისათვის. ყოველთვის სასარგებლოა მოცემულ სხეულზე უცნობი ცვლადების რაოდენობის ცოდნა და იმაში დარწმუნება, რომ შეიძლება დამოუკიდებელი განტოლებების ტოლი რაოდენობის ჩაწერა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, მხოლოდ წონასწორობის განტოლებებით შეუძლებელია ამოცანის ამოხსნა. უცნობი ცვლადი შეიძლება იყოს ძალები, წყვილები, მანძილები ან კუთხეები.

შემზღუდვების ადეკვატურობა

სამი შემზღუდველი ორგანოზომილებიანი პრობლემის განხილვისას ყოველთვის არ იძლევა სტაბილური წონასწორული კონფიგურაციის გარანტიას.



ნახ. 4.6.ა, ბ, გ, დ.

ნახ. 4.6.-ზე ნაჩვენებია შემზღუდველების ოთხი სხვადასხვა სახე. ა - ნაწილში ხისტი მყარი სხეულის A წერტილი დაფიქსირებულია ორი ბმით და უძრავია და მესამე ბმა გამორიცხავს A-ს ირგვლივ რაიმე ბრუნვას. ამდენად სხეული მთლიანად არის დაფიქსირებული ადეკვატური შემზღუდველებით.

ბ - ნაწილში მესამე ბმა ისეა განლაგებული, რომ მის მიერ გადაცემული ძალა გადის A წერტილში, მაშინ როცა ორი სხვა შემზღუდველი ძალა ახდენს ქმედებას. ამდენად, შემზღუდველების ეს კონფიგურაცია არ უწევს საწყის წინააღმდეგობას A-ს ირგვლივ ბრუნვას, რაც ადგილი აქვს თუ სხეულზე მოდებულია გარე დატვირთვები. ამრიგად, ვასკვნით, რომ ეს სხეული ნაწილობრივ არის დაფიქსირებული არასრული შემზღუდველებით.

კონფიგურაცია ნახაზის გ - ნაწილში იძლევა არასრული ფიქსირების ანალოგიურ მდგომარეობას, რადგან სამი პარალელური ბმა არ უწევს საწყის წინააღმდეგობას სხეულის მცირე ვერტიკალურ გადაადგილებას ამავე მიმართულებით მოქმედი გარე დატვირთვის გამო. ამ ორი მაგალითის შემთხვევაში შემზღუდველებზე ამბობენ, რომ ისინი უვარგისია.

ნახაზის დ - ნაწილში ნაჩვენებია სრული ფიქსირების შემთხვევა ბმით 4, რომელიც მოქმედებს როგორც მეოთხე შემზღუდველი და არ არის აუცილებელი, რომ მან შეინარჩუნოს ფიქსირებული მდგომარეობა. მაშინ ბმა 4 არის ჭარბი შემზღუდველი და სხეული სტატიკურად განუზღვრადია.

ისევე როგორც ნახ. 4.6.-ის ოთხი მაგალითისას, ზოგადად შესაძლებელია პირდაპირი დაკვირვებით იმის დასკვნა, არის თუ არა ორგანოზომილებიანი წონასწორობისას შემზღუდველი ადეკვატური, არასრული თუ ჭარბი.

თავი 5. წონასწორობა სამი განზომილების შემთხვევაში

5.1. წონასწორობის პირობები

მეოთხე თავის 4.1.-ში დადგენილია სხეულის წონასწორობის ზოგადი პირობები ორგანზომილებიანი შემთხვევისათვის (განტოლება 4.1), რომელიც მოითხოვს, რომ წონასწორობისას სხეულზე მოქმედი ნაკრები ძალა და ნაკრები მომენტი უდრიდეს ნულს. წონასწორობის ეს ორვექტორიანი განტოლებები და მათი სკალარული კომპონენტები ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned}\vec{\Sigma F} = 0 \quad \text{ან} \quad \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases} \\ \vec{\Sigma M} = 0 \quad \text{ან} \quad \begin{cases} \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}\end{aligned} \quad (5.1)$$

პირველი სამი სკალარული განტოლების თანახმად, წონასწორობისას არ არსებობს სხეულზე მოქმედი ნაკრები ძალა არცერთი კოორდინატის მიმართულებით. მეორე სამი განტოლება გამოხატავს წონასწორობის იმ მოთხოვნას, რომ არ არის სხეულზე მოქმედი ნაკრები მომენტი კოორდინატთა ღერძების ან იმ ღერძების ირგვლივ, რომლებიც კოორდინატთა ღერძების პარალელურია. ეს ექვსი განტოლება სრული წონასწორობისას აუცილებელი და საკმარისი პირობაა. ათვლის ღერძები შეიძლება შეირჩეს ნებისმიერი სახით როგორც შეთანხმების საგანი. ერთადერთი შეზღუდვაა ის, რომ უნდა შეირჩეს მარჯვენა კოორდინატთა სისტემა ვექტორული ჩაწერის გამოყენებისას.

4.1. განტოლებები დამოუკიდებელი პირობებია, რადგან შესაძლებელია ნებისმიერი მათგანის ცალკე გამოყენება. მაგალითად, მანქანისათვის, რომელიც მოძრაობს აჩქარებულად წრფეზე და ჰორიზონტალურად გზაზე, ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად მანქანაზე მოქმედი ნაკრები ძალა მისი მასის და აჩქარების ნამრავლის ტოლია. ამრიგად, $\Sigma F_x \neq 0$, მაგრამ დარჩენილი ორი განტოლება კმაყოფილდება, რადგან აჩქარების ყველა სხვა კომპონენტი ნულის ტოლია, ანალოგიურად, თუ აჩქარებული მანქანის ძრავას მქნევარა ბრუნავს ზრდადი კუთხური სიჩქარით x - ღერძის ირგვლივ, ის არ იმყოფება ბრუნვით წონასწორობაში ამ ღერძის მიმართ. ამრიგად, მხოლოდ მქნევარასათვის $\Sigma M_x \neq 0$ და ამასთან ერთად $\Sigma F_x \neq 0$, მაგრამ დარჩენილი ოთხი განტოლება კმაყოფილდება მათი მასების ცენტრის ღერძებისათვის.

განტოლებების 5.1. ვექტორული ფორმის გამოყენებისას, პირველ რიგში, თითოეულ ძალას გამოსახვენ კოორდინატთა ერთეულოვანი ვექტორებით $\vec{i}, \vec{j}$ და $\vec{k}$. პირველი განტოლების შემთხვევაში $\Sigma \vec{F} = 0$, ვექტორული ჯამი იქნება ნულის ტოლი მხოლოდ მაშინ, თუ კოეფიციენტები $\vec{i}, \vec{j}$ და $\vec{k}$, შესაბამისად, იქნება ნულის ტოლი. ეს სამი ჯამი, რომელთაგან თითოეული ნულის ტოლია, სავსებით ზუსტად გამოსახავს წონასწორობის სამ სკალარულ განტოლებას: $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0$

მეორე განტოლებისათვის $\Sigma \vec{M} = 0$, სადაც მომენტების ჯამის აღება შეიძლება ნებისმიერი 0 წერტილისთვის, თითოეული ძალის მომენტი გამოისახება როგორც ვექტორული ნამრავლი $\vec{r} \times \vec{F}$. აქ $\vec{r}$ არის ვექტორის მდებარეობა 0-დან ნებისმიერი წერტილისკენ $\vec{F}$ ძალის ქმედების წრფეზე. ამდენად, $\Sigma \vec{M} = \Sigma (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$. როდესაც $\vec{i}, \vec{j}$ და $\vec{k}$ კოეფიციენტები ნულის ტოლია, მიიღება მომენტის სამი სკალარული განტოლება: $\Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0$

თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა

5.1. განტოლებების შეჯამება იძლევა სხეულზე მოქმედი ყველა ძალის ეფექტს. როგორც ზევით აღინიშნა, თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა ერთადერთი საიმედო გზაა ყველა ძალის და მომენტის დასადგენად, რომლებიც შედის წონასწორობის განტოლებებში. სამი განზომილების შემთხვევაში ძალთა დიაგრამა ისეთივე მნიშვნელოვან როლს თამაშობს, როგორც ორი განზომილების შემთხვევაში. და ყოველთვის აუცილებელია მისი აგება. არჩევანი ასეთია: დავხაზოთ იზოლირებული სხეული ყველა გარე ძალის გათვალისწინებით ან დავხაზოთ ძალთა დიაგრამის ორიგინალური პროექციები.

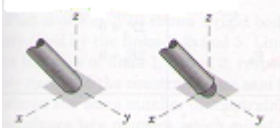
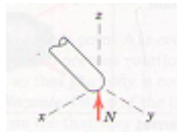
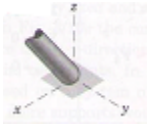
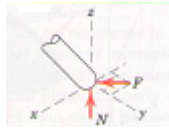
ძალთა დიაგრამაზე ძალების ზუსტი წარმოდგენა მოითხოვს საკონტაქტო ზედაპირების მახასიათებლების ცოდნას, რომლებიც სამი განზომილების შემთხვევაში მოტანილია 5.1. ნახაზზე ძალთა გადატანის ყველაზე ცნობილი შემთხვევებისთვის.

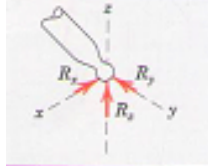
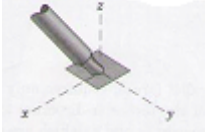
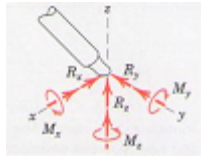
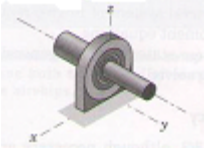
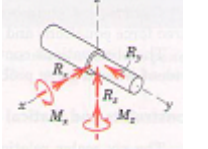
თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამის ძირითადი მიზანია სხეულზე მოქმედი ყველა ძალის (ან წყვილის) ფიზიკური მოქმედების საიმედო სურათის დადგენა. ასე რომ, სასარგებლოა ძალების წარმოდგენა მათი სწორი ფიზიკური არსით. ამ გაგებით ძალთა დიაგრამა ყველაზე ახლოსაა რეალურ ფიზიკურ პრობლემასთან, ვიდრე იმ შემთხვევაში, როდესაც ადგილი აქვს ძალების თვითნებურ მინიჭებას იგივე მათემატიკური აზრით, როგორც კოორდინატთა ღერძის შემთხვევაში.

მაგალითად, ნახაზი 5.1.-ის მე-4 ნაწილში, ცნობილია R_x და R_y უცნობების სწორი ორიენტაცია ან იგულისხმება, რომ ისინი არჩეული კოორდინატთა ღერძების საწინააღმდეგოა. ანალოგიური პირობები გამოიყენება ვექტორთა

წყვილის შემთხვევაში (ნაწილები 5 და 6), სადაც მათი ნიშანი, მარჯვენა ხელის წესის თანახმად, შეიძლება შეირჩეს როგორც შესაბამის კოორდინატთა მიმართულების საწინააღმდეგო. ამ დროისათვის თქვენ გეცოდინებათ, რომ უარყოფითი პასუხი უცნობი ძალის ან წყვილის შესახებ მიუთითებს იმაზე, რომ მათი ფიზიკური ქმედება თავისუფალ ძალთა დიაგრამაზე აღნიშნულის საწინააღმდეგოა. რასაკვირველია, ხშირად თავიდან არ არის ცნობილი სწორი ფიზიკური არსი, მაგრამ აუცილებელია ნებისმიერი მინიჭება ძალთა დიაგრამაზე.

ძალთა ქმედების მოდელირება სამგანზომილებიანი ანალიზის დროს

კონტაქტის და ძალის სათავეს ტიპი	სხეულზე ქმედება იზოლირებულია
1. ელემენტი კონტაქტშია გლუვ ზედაპირთან ან ბურთულოვან-საყრდენ ელემენტთან 	 ძალა უნდა იყოს ზედაპირის ნორმალური და მიმართული ელემენტისაკენ
2. ელემენტი კონტაქტშია ხორკლიან ზედაპირთან 	არის იმის შესაძლებლობა, რომ F ძალა, ტანგენციალური ზედაპირისადმი (ხახუნის ძალა), მოქმედებს ელემენტზე ისევე როგორც ნორმალური ძალა N 
3. სახსრიანი ან ბორბლის ტიპის საყრდენი განივი შემზღუდველით 	ნორმალური N ძალის გარდა არის მიმართველის მიერ ბორბალზე მოდებული განივი ძალა P 
4. ბურთულა- სახსრიანი შეერთება 	ბურთულა - სახსრიანი შეერთება, თავისუფალი ბურთულის ცენტრის გარშემო ბრუნვისაგან, ინარჩუნებს R ძალის სამივე კომპონენტს

	
5. ფიქსირებული შეერთება (ჩასმული ან მიდუღებული) 	ძალის სამი კომპონენტის გარდა, ფიქსირებული შეერთება ინარჩუნებს M მომენტს, რომელიც წარმოდგენილია სამი კომპონენტით 
6. საბჯენ საკისრიანი საყრდენი 	საბჯენ საკისარს შეუძლია აქსიალური ძალის R_y, ისევე როგორც რადიალური ძალების R_x და R_z შენარჩუნება. რიგ შემთხვევებში შეიძლება M_x და M_y წყვილების ნულის ტოლად მიღება სტატიკური განსაზღვრადობის მისაღებად. 

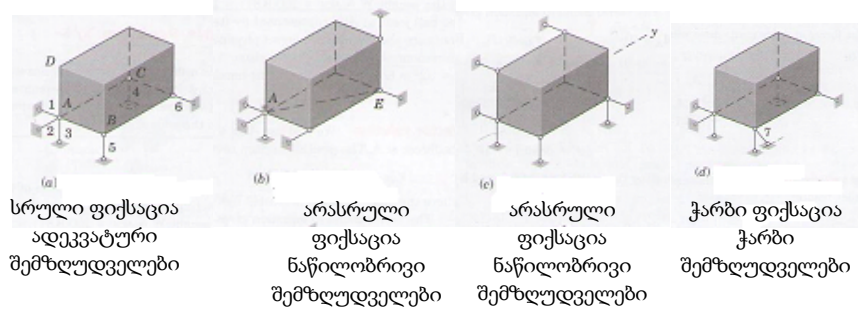
ნახ. 5.1.

წონასწორობის სახეები

1. ძალთა წონასწორობა, რომლებიც გადაიკვეთება 0 წერტილში, მოითხოვს ძალების ყველა სამ განტოლებას, მაგრამ არა მომენტის განტოლებებს, რადგან ძალთა მომენტი 0-ში გამავალი ნებისმიერი ღერძის მიმართ ნულის ტოლია.
2. ძალთა წონასწორობა, რომლებიც გადაიკვეთება წრფეზე, მოითხოვს ყველა განტოლებას, გარდა მომენტის განტოლებისა, იმავე წრფის მიმართ, და რომელიც ავტომატურად კმაყოფილდება.
3. პარალელურ ძალთა წონასწორობა მოითხოვს მხოლოდ ერთ განტოლებას ძალების ერთი მიმართულებით (x - მიმართულებით) და მომენტის ორ განტოლებას ღერძების (y და z) მიმართ, რომლებიც ძალების მიმართულების ნორმალურია.
4. ძალთა ზოგადი სისტემის წონასწორობა, მოითხოვს ძალების ყველა სამ და მომენტების ყველა სამ განტოლებას.

შემზღუდვები და სტატიკური განსაზღვრულობა

ექვსი სკალარული განტოლება (5.1.), თუმცა აუცილებელი და საკმარისი პირობაა წონასწორობის დასადგენად, მაგრამ სულაც არ იძლევა მთელ ინფორმაციას სამგანზომილებიან წონასწორობაზე მოქმედი უცნობი ძალების გამოსათვლელად. ისევე როგორც ორგანზომილებიანი შემთხვევისათვის, ინფორმაციის ადეკვატურობის საკითხი გადაიჭრება საყრდენებით განპირობებული შემზღუდველების მახასიათებლებით. ცნობილია ანალიზური კრიტერიუმი შემზღუდველების ადეკვატურობის განსაზღვრისათვის. ნახ 5.2.-ზე მოტანილია შემზღუდვის პირობების ოთხი მაგალითი.



ნახ. 5.2.ა, ბ, გ, დ.

ნახ 5.2.ა.-ზე ნაჩვენებია ხისტი მყარი სხეული, რომლის კუთხის წერტილი A მთლიანად დაფიქსირებულია 1,2 და 3 ბმებით. ბმები 4,5 და 6 ხელს უშლის 1,2 და 3 ბმების ღერძების ირგვლივ ბრუნვას; ასე რომ, სხეული მთლიანად არის დაფიქსირებული და ითვლება, რომ შემზღუდველები **ადეკვატურია**. ნახაზის ბ-ნაწილი აჩვენებს შემზღუდველთა იგივე რაოდენობას, მაგრამ ისინი არ უწყვენ წინააღმდეგობას მომენტს, რომელიც შეიძლება იქნას მოდებული AE ღერძის ირგვლივ. აქ სხეული **არასრულადაა დაფიქსირებული** და მხოლოდ **ნაწილობრივ არის შეზღუდული**.

ანალოგიურად, გ - ნაწილში, თუ მეშვიდე შემზღუდვა ბმა მოდებულია ექვს შემზღუდველიან სისტემაზე, რომლებიც სწორადაა განლაგებული სრული ფიქსირებისათვის, აუცილებელი ხდება მეტი საყრდენის გამოყენება წონასწორობის მდგომარეობის დასამყარებლად და ბმა 7 იქნება **ჭარბი**. მაშინ სხეული იქნება **სტატიკურად განუსაზღვრადი**, ასეთი მეშვიდე ბმის თანაობისას. მცირე გამოწვევების გარდა, ამ კურსში ყველა შემზღუდველი ადეკვატურია და სხეულები სტატიკურად განსაზღვრადი.

მე-4 და მე-5 თავების რეზიუმე

ამ თავებში გამოვიყენეთ მე-2 და მე-3 თავებში მიღებული ცოდნა ძალების, მომენტების და წყვილების შესახებ წონასწორობაში მყოფი ხისტი მყარი სხეულების პრობლემების გადასაჭრელად. სხეულის სრული წონასწორობა მოითხოვს რომ მასზე მოქმედი ყველა ძალის ვექტორული ტოლქმედი იყოს ნულის ტოლი და ყველა მომენტის ვექტორული ტოლქმედი წერტილის (ან ღერძის) მიმართ ასევე იყოს ნული.

წონასწორობის პრინციპების გამოყენების გადამწყვეტი საფეხურები შემდეგია:

1. წონასწორობაში მყოფი შესასწავლი სხეულის (სხეული ან სხეულთა ნაკრები) ერთმნიშვნელოვანი დადგენა.
2. სისტემის იზოლირება ყველა საკონტაქტო სხეულიდან მისი თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამის შედგენით, სადაც ნაჩვენებია იზოლირებულ სხეულზე მოქმედი ყველა ძალა და წყვილი.
3. ქმედების და უკუქმედების პრინციპის (ნიუტონის მესამე კანონი) გამოყენება თითოეული ძალის ნიშნის მინიჭებისას.
4. ყველა ცნობილი და უცნობი ძალის და წყვილის აღნიშვნა.
5. კოორდინატთა ღერძების შერჩევა; ყოველთვის აირჩიეთ მარჯვენა სისტემა როდესაც გამოიყენება ვექტორის ბრუნვა (რასაც, ჩვეულებრივ, ადგილი აქვს სამგანზომილებიანი ანალიზის შემთხვევაში).
6. შეამოწმეთ შემზღუდველების (სამაგრების) ადეკვატურობა და შესაბამისობაში მოიყვანეთ უცნობების რაოდენობა წონასწორობის დამოუკიდებელი განტოლებების რაოდენობასთან.

წონასწორობის პრობლემების გადაჭრისას პირველ რიგში უნდა შემოწმდეს, არის თუ არა სხეული სტატიკურად განსაზღვრადი. თუ არის მეტი სამაგრი, ვიდრე ეს საჭიროა სხეულის ადგილზე გასაჩერებლად, სხეული სტატიკურად არაგანსაზღვრადია და თავისთავად წონასწორობის განტოლებები ვერ ამოიხსნება ყველა გარე უკუქმედებისათვის. ამ განტოლებების ამოხსნისას ვირჩევთ სკალარულ ალგებრას, ვექტორულ ალგებრას ან გრაფიკულ ანალიზს. კერძოდ, ვექტორული ალგებრა სასარგებლოა მრავალი სამგანზომილებიანი პრობლემის გადასაჭრელად.

ამოხსნის ალგებრის გამარტივება შეიძლება მომენტის ღერძის არჩევით, რაც გამორიცხავს იმდენ უცნობს, რამდენიც კი შესაძლებელია, ან ძალთა შეკრების მიმართულების არჩევით, რაც თავიდან აგვაცილებს კონკრეტული უცნობების გათვალისწინებას.

2–5 თავებში განხილული პრინციპები და მეთოდები შეადგენს სტატიკის ძირითად ნაწილს. ისინი საფუძველს უყრიან არა მარტო სტატიკის, არამედ დინამიკის მოვლენებსაც.

თავი 6. კონსტრუქციები

6.1. შესავალი

მე-4 – მე-5 თავებში განხილული იყო ცალკეული ხისტი მყარი სხეულის ან შეერთებული ელემენტების სისტემის, რომელიც განიხილებოდა როგორც ერთი სხეული, წონასწორობა. აიგო სხეულის ძალთა დიაგრამა, რომელშიც გათვალისწინებული იყო იზოლირებულ სხეულზე მოქმედი ყველა გარე ძალა და შემდეგ გამოვიყენეთ ძალის და მომენტის განტოლებები წონასწორობისათვის. ამ თავში ყურადღება გამახვილებულია კონსტრუქციაზე მოქმედი შიდა ძალების დადგენაზე, ე.ი. შეერთებულ ელემენტებს შორის ქმედების და უკუქმედების ძალებზე. საინჟინრო კონსტრუქცია - ეს არის ელემენტების შეერთებული სისტემა, რომლის დანიშნულებაც ძალების შენარჩუნება ან გადაცემა და მოდებული დატვირთვების ატანა. საინჟინრო კონსტრუქციებზე მოქმედი ძალების დასადგენად აუცილებელია კონსტრუქციის დანაწევრება და ცალკეული ელემენტების და მათი კომბინაციის თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამების ცალ-ცალკე ანალიზი, რაც მოითხოვს ნიუტონის მესამე კანონის ზუსტად გამოყენებას, რომლის თანახმად ყოველ ქმედებას თან სდევს ტოლი და საწინააღდეგო უკუქმედება.

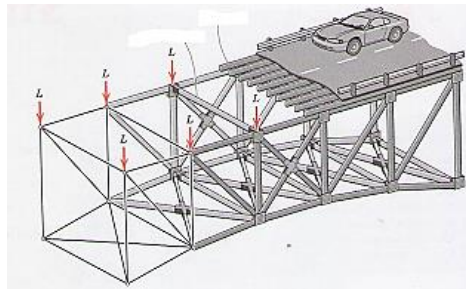
ამ თავში გაანალიზებული იქნება კონსტრუქციების სხვადასხვა სახეებზე, კერძოდ, წამწეებზე, კარკასებზე და მექანიზმებზე მოქმედი შიდა ძალები. ასეთი შემთხვევებისთვის განხილული იქნება მხოლოდ **სტატიკურად განსაზღვრადი** კონსტრუქციები, რომელთაც არ გააჩნიათ უფრო მეტი საყრდენი შემზღუდველები, ვიდრე ეს საჭიროა წონასწოვრული კონფიგურაციის შესანარჩუნებლად. ამდენად, როგორც უკვე ვნახეთ, წონასწორობის განტოლებები ადეკვატურია ყველა უცნობი უკუქმედების დასადგენად.

წამწეების, კარკასების, მექანიზმების და კოჭების (ძელების) ანალიზი კონცენტრირული დატვირთვების დროს გულისხმობს წინა ორ თავში მოცემული მასალის პირდაპირ გამოყენებას. ძირითადი პროცედურა სხეულის იზოლირებისათვის მოიცავს ძალთა სწორი დიაგრამის შედგენას, რაც მნიშვნელოვანია სტატიკურად განსაზღვრადი კონსტრუქციების ანალიზისათვის.

6.2. ბრტყელი წამწეები (ფერმები)

წამწე ეწოდება ხისტ კონსტრუქციას, რომელიც შედგენილია კარკასის შემადგენელი ელემენტების ბოლოების შეერთებით. წამწეების ცნობილი

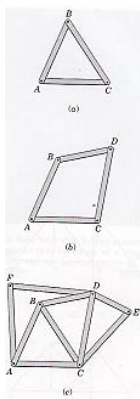
მაგალითებია ხიდები, სახურავის საყრდენები, ამწე-დერფები და სხვა ანალოგიური კონსტრუქციები. საყოველთაოდ გამოიყენება შემდეგი სახის კონსტრუქციული ელემენტები: L -კოჭები, შველერები, კუთხედები, თამასები და სპეციალური ფორმები, რომლებიც ერთმანეთს უერთდება ბოლოების შედუღებით, მოქლონვით, ან დიდი ჭანჭიკებით ან შტიფტებით. როდესაც წამწეს ელემენტები ძირითადად სიბრტყეში მდებარეობენ, წამწეს ეწოდება **ბრტყელი წამწე**.



ნახ. 6.1.

ხიდებში და ანალოგიურ კონსტრუქციებში წამწეებს, ჩვეულებრივ, იყენებენ წყვილ-წყვილად, თითოეული მათგანი კონსტრუქციის ერთ მხარესაა განლაგებული. ნახ. 6.1.-ზე ნაჩვენებია ტიპური ხიდის კონსტრუქცია. გზის და სატრანსპორტო საშუალებების ერთიანი წონა გადაეცემა გრძივ კოჭებს, შემდეგ განივ ძელებს და ბოლოს, გრძივი კოჭების და განივი ძელების წონასთან ერთად, კონსტრუქციის ვერტიკალური მხარეების შემადგენელი ორი ბრტყელი წამწეს ზედა შეერთებებს. წამწეს სტრუქტურის გამარტივებული სახე მოცემულია ნახაზის მარცხენა მხარეს. L ძალები წარმოადგენენ შეერთებებზე დატვირთვას.

მარტივი წამწეები



ნახ. 6.2.
ა, ბ, გ.

ბრტყელი წამწეს ძირითადი ელემენტია სამკუთხედი. სამი თამასა შეერთებული შტიფტებით (ნახ. 6.2.), შეადგენს ხისტ ჩარჩოს. ტერმინი ხისტი ნიშნავს არადასაშლელს და ასევე იმას, რომ შიდა ძაბვებით გამოწვეული დეფორმაცია უმნიშვნელოა. მეორე მხრივ, ოთხი ან მეტი თამასა რომლებიც შეერთებულია შტიფტებით პოლიგონის შესაქმნელად, შეადგენს არახისტ ჩარჩოს. ნახ. 6.2ა.-ზე მოტანილი არახისტი ჩარჩო შეიძლება გავხადოთ ხისტი ანუ სტაბილური დიაგონალური თამასას დამატებით, რომელიც აერთებს A და D ან B -ს და C და ამით წარმოქმნის ორ სამკუთხედს. კონსტრუქციის გავრცობა შეიძლება ორი ბოლოთი შეერთებული თამასების დამატებით, როგორიცაა DE და CE ან AF და DF (ნახ. 6.2.გ.), რომლებიც შტიფტით

წარმოქმნიან ორ ფიქსირებულ შეერთებას. ასეთი გზით შექმნილი კონსტრუქცია ხისტია.

ძირითადი სამკუთხედებისაგან შედგენილ კონსტრუქციას **მარტივი წამწე** ეწოდება. როდესაც მეტი ელემენტია ჩართული, კონსტრუქციის დაშლის თავიდან აცილების მიზნით, წამწე სტატიკურად განუსაზღვრელია. მისი ანალიზი შეუძლებელია მხოლოდ წონასწორობის განტოლებების საშუალებით. დამატებით ელემენტებს ან საყრდენებს, რომლების გამოყენებაც არ არის აუცილებელი წონასწორობის შესანარჩუნებლად, ეწოდებათ **ჭარბი ელემენტი**.

წამწეს დაპროექტებისას პირველ რიგში უნდა განვსაზღვროთ ძალები სხვადასხვა ელემენტებში და შემდეგ შევარჩიოთ შესაბამისი ზომები და ფორმები, რომლებიც ამ ძალებს გაუძლებენ. მარტივი წამწეების ძალების ანალიზისას გაკეთებულია რამდენიმე ვარაუდი. პირველი, ითვლება, რომ ყველა ელემენტი **ორძალიანია**. ეს ელემენტი წონასწორობაშია მხოლოდ ორი ძალის ქმედების გამო. ჩვეულებრივ, წამწეს თითოეული ელემენტი არის წრფივი კავშირი, რომელიც აერთებს ძალის მოდების ორ წერტილს. ორი ძალა მოდებულია ელემენტის ბოლოებზე და აუცილებლად ტოლია, საწინააღმდეგო და **კოლინეარული** წონასწორობის შესანარჩუნებლად.



ძაბვა კუმშვა

ორძალიანი ელემენტი

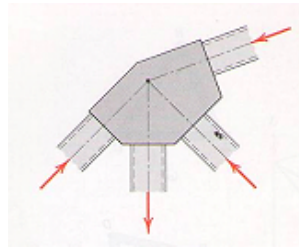
ნახ. 6.3.

ელემენტი შეიძლება იყოს ძაბვის და კუმშვის ქვეშ (ნახ 6.3) როდესაც წარმოვიდგენთ ორძალიანი ელემენტის ნაწილის წონასწორობას, ამოჭრილ ნაწილზე მოქმედი ძაბვა T ან კუმშვა C ერთი და იგივეა ყველა ნაწილისათვის. აქ ივარაუდება, რომ ელემენტის წონა მის საყრდენ ძალაზე ნაკლებია. თუ ეს ასე არ არის, ან თუ წონის ეფექტი სუსტია, შეიძლება ელემენტის წონის, W , ჩანაცვლება ორი ძალით, თითოეული $W/2$ -ია, და თუ ელემენტი ერთგვაროვანია, ერთი ძალით, რომელიც მოქმედებს ელემენტის თითოეულ ბოლოზე. რეალურად ეს ძალები განიხილება როგორც დატვირთვები, რომლებიც გარედან მოქმედებენ შტიფტიან შეერთებებზე. ასეთი გზით ელემენტის წონის შეფასება იძლევა სწორ

შედეგს ელემენტის გასწვრივ საშუალო ძაბვისა და კუმშვისთვის, მაგრამ არ ხდება ელემენტის ჩაღუნვის შეფასება.

წამწეების შეერთებები და საყრდენები

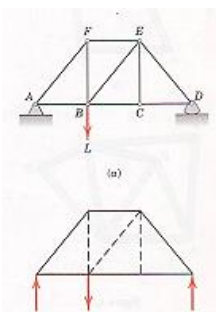
როდესაც შედუღებული ან მოქლონვილი შეერთებები გამოიყენება კონსტრუქციული ელემენტების დასაკავშირებლად, ჩვეულებრივ ითვლება, რომ შეერთება შტიფტიანია, თუ ელემენტების ცენტრების წრფეები იკვეთება შეერთების ადგილში (ნახ. 6.4).



ნახ. 6.4.

ასევე ითვლება, რომ მარტივ წამწეში ყველა გარე ძალა მოდებულია შტიფტიან შეერთებებზე ეს პირობა სამართლიანია წამწეთა უმრავლესობისათვის. ხიდის წამწეებში ფენილი, ჩვეულებრივ, მოთავსებულია განივ კოჭებზე.

დიდი ზომის წამწეებისათვის გამოიყენება ლილვაკი, ბარბაცა ან სრიალა შეერთების რაიმე სახე ერთ-ერთ საყრდენზე ტემპერატურის ცვლილებით გამოწვეული გაფართოების და უკუქმედების, ასევე მოდებული დატვირთვებიდან დეფორმაციის გათვალისწინებით. ის წამწეები და ჩარჩოები, სადაც ეს არ არის გათვალისწინებული, არის სტატიკურად განუსაზღვრელი.



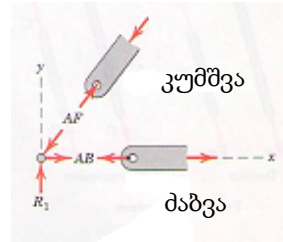
ნახ. 6.5. ა, ბ.

არსებობს მარტივი წამწეების ძალთა ანალიზის ორი მეთოდი (ნახ. 6.5.ა.). წამწეს, როგორც მთელის თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა ნაჩვენებია ნახ. 6.5.ბ.-ზე. პირველ რიგში განისაზღვრება გარე უკუქმედებები წონასწორობის განტოლებების საშუალებით. შემდეგ ტარდება ძალების ანალიზი წამწეს დარჩენილი ნაწილისათვის.

6.3. შეერთებების მეთოდი

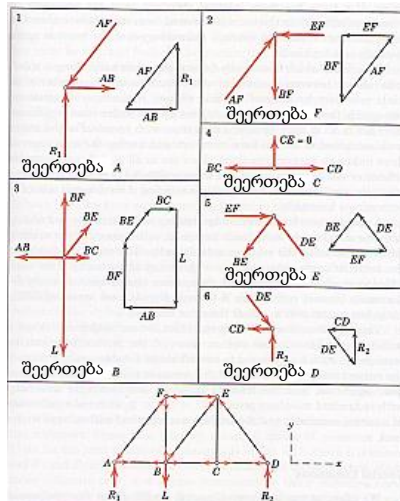
ეს მეთოდი მდგომარეობს წონასწორობის პირობების დაკმაყოფილებაში იმ ძალებისათვის, რომლებიც მოქმედებენ თითოეული შეერთების შტიფტზე. ამიტომ მეთოდი ეხება გადამკვეთი ძალების წონასწორობას და საჭიროა მხოლოდ ორი დამოუკიდებელი წონასწორობის განტოლება.

ანალიზი იწყება ნებისმიერი შეერთებით, სადაც ადგილი აქვს, სულ ცოტა, ერთ ცნობილ დატვირთვას და სადაც არ არის ორზე მეტი უცნობი ძალა. ამოხსნა იწყება მარცხენა მხარეს მდებარე შტიფტიდან. მისი ძალთა დიაგრამა ნაჩვენებია ნახ. 6.6.-ზე.



ნახ. 6.6.

ასოებით აღნიშნული შეერთებებისათვის თითოეული ელემენტის ძალას აღნიშნავენ ორი ასოთი, რომლებიც ელემენტის ბოლოებს განსაზღვრავენ. ამ მარტივი შემთხვევისათვის ნათელია ძალთა სწორი მიმართულებები. ასევე ნაჩვენებია ძალთა დიაგრამები ელემენტების (AF და AB) ნაწილებისათვის, რათა ნათელი იყოს ქმედების და უკუქმედების მექანიზმი. ელემენტი AB რეალურად კონტაქტშია შტიფტის მარცხენა მხარეს, თუმცა AB ძალის ქმედება ნაჩვენებია შტიფტიდან. ამდენად, თუ დავხაზავთ ძალის ისრებს შტიფტის იმავე მხარეს, რომელზეც ელემენტია, მაშინ ძაბვა (AB) ყოველთვის ნაჩვენები იქნება ისრით **შტიფტიდან** და კუმშვა (AF) - ისრით **შტიფტისკენ**. AF -ის მნიშვნელობა მიიღება განტოლებიდან $\sum F_y = 0$ და AB -განტოლებიდან $\sum F_x = 0$.



ნახ. 6.7.

შემდეგ ტარდება შეერთების ძალის F ანალიზი, რადგან ახლა ის შეიცავს მხოლოდ ორ უცნობს, EF და BF . შემდეგ შეერთებებზე გადასვლით, თანმიმდევრულად ტარდება B, C, E და D შეერთებების ანალიზი. ნახ. 6.7.-ზე ნაჩვენებია თითოეული შეერთების ძალთა დიაგრამა და მისი შესაბამისი ძალთა პოლიგონი, რომელიც გრაფიკულად გამოსახავს წონასწორობის პირობებს $\sum F_x = 0$ და $\sum F_y = 0$. რიცხვები მიუთითებს ანალიზირებული შეერთებების რიცხს. აღსანიშნავია, რომ როდესაც მიიღწევა D შეერთება, წონასწორობისას გამოთვლილი იქნება R_2

უკუქმედება CD და ED ელემენტებში ძალებთან ერთად, რომლებიც ადრეა განსაზღვრული ორი მეზობელი შეერთებიდან. ეს მოთხოვნა ითვალისწინებს ჩვენი მუშაობის სისწორის შემოწმებას. აღსანიშნავია, რომ შეერთება C გვიჩვენებს, რომ ძალა CE -ში უდრის ნულს, როდესაც გამოიყენება განტოლება $\sum F_y = 0$.

რასაკვირველია, ამ ელემენტში ძალა არ იქნება ნულის ტოლი, თუ C -ზე მოდებულია გარე ვერტიკალური დატვირთვა.

ხშირად მოსახერხებელია სხვადასხვა ელემენტების ძაბვის T და კუმშვის C გამოსახვა პირდაპირ საწყისი წამწეს დიაგრამაზე, ისრების დატანებით შტიფტიდან - ძაბვისათვის და შტიფტისკენ - კუმშვისათვის.

ზოგჯერ შეუძლებელია მოცემულ შტიფტზე მოქმედი ერთი ან ორივე უცნობი ძალის მიმართულების აღნიშვნა. ამ შემთხვევაში იყენებენ ნებისმიერ არჩევანს. ძალის გამოთვლილი უარყოფითი მნიშვნელობა აჩვენებს, რომ თავდაპირველად არჩეული მიმართულება არასწორია.

შიდა და გარე სიჭარბე

თუ წამწეს აქვს უფრო მეტი საყრდენი, ვიდრე ეს საჭიროა სტაბილური წონასწორული კონფიგურაციის შესანარჩუნებლად, წამწე, როგორც მთელი, სტატიკურად განუსაზღვრელია და დამატებითი საყრდენები შეადგენენ **გარე სიჭარბეს**. თუ წამწეს აქვს მეტი შიდა ელემენტი, ვიდრე ეს საჭიროა დაშლის თავიდან ასაცილებლად, როდესაც წამწე გადაადგილდება ამ საყრდენებიდან, მაშინ ზედმეტი ელემენტები შეადგენენ **შიდა სიჭარბეს** და წამწე ისევ სტატიკურად განუსაზღვრელია.

წამწესათვის, რომელიც გარედან სტატიკურად განსაზღვრულია, არსებობს გარკვეული დამოკიდებულება მისი ელემენტების რაოდენობასა და მისი შეერთებების რაოდენობას შორის, რაც აუცილებელია შიდა სტაბილურობისათვის სიჭარბის გარეშე. რადგან თითოეულ შეერთებაში წონასწორობას განვსაზღვრავთ ორი ძალის სკალარული განტოლებით, გვექნება $2j$ ასეთი განტოლება j -შეერთების მქონე წამწესათვის. მთელი წამწესათვის, რომელიც შედგება m ორძალიანი ელემენტისგან და ხასიათდება მაქსიმუმ სამი უცნობი საყრდენის უკუქმედებით, სულ იქნება $m + 3$ უცნობი (m ძაბვის და კუმშვის ძალები და სამი უკუქმედება).

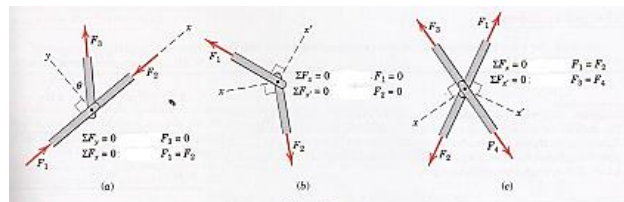
ამდენად, ნებისმიერი ბრტყელი წამწესათვის განტოლება $m + 3 = 2j$ კმაყოფილდება, თუ წამწე შიგნიდან სტატიკურად განსაზღვრადია.

მარტივი ბრტყელი წამწე, რომელიც ფორმირდება სამკუთხედიდან დაწყებული და ორი ახალი წევრის დამატებით, თითოეული ახალი შეერთების განსათავსებლად არსებული კონსტრუქციის მიმართ, ავტომატურად აკმაყოფილებს ამ დამოკიდებულებას. პირობა სამართლიანია საწყისი სამკუთხედისათვის, როდესაც $m = j = 3$ და m იცვლება 2-ით თითოეული დამატებითი შეერთებისათვის, მაშინ როცა j იცვლება 1-ით.

ეს განტოლება სტაბილურობის აუცილებელი პირობაა, მაგრამ არ არის საკმარისი, რადგან m ელემენტებიდან ერთი ან მეტი შეიძლება ისე იყოს განლაგებული, რომ არ მონაწილეობდეს მთელი წამწეს სტაბილურ

კონფიგურაციაში. თუ $m + 3 > 2j$, არის მეტი ელემენტი, ვიდრე დამოუკიდებელი განტოლებებია და წამწე შიგნიდან განუსაზღვრელია ჭარბი ელემენტების თანაობისას. თუ $m + 3 < 2j$, ადგილი აქვს შიდა ელემენტების ნაკლებობას და წამწე არასტაბილურია და შეიძლება დაიშალოს დატვირთვის ზემოქმედებით.

სპეციალური პირობები

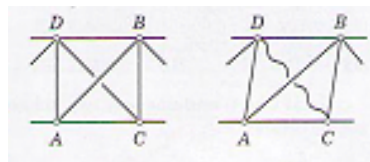


ნახ. 6.8.ა, ბ, გ.

ხშირად ვაწყდებით სპეციალურ შემთხვევებს წამწეების ანალიზისას. როდესაც ორი კოლინეარული ელემენტი კუმშვას განიცდის (ნახ. 6.8.ა.), აუცილებელია მესამე ელემენტის დამატება ორი ელემენტის განლაგების შესაწარმუნებლად და გალუნვის თავიდან აცილების მიზნით. y -მიმართულებით ძალების შეჯამებიდან ჩანს, რომ ძალა F_3 მესამე ელემენტში უნდა იყოს ნულის ტოლი და x -მიმართულებიდან $F_1 = F_2$. ეს დასკვნა ძალაშია კუთხე θ -ს მიუხედავად და ასევე სამართლიანია, თუ კოლინეარული წევრები ძაბვის ქვეშაა. თუ გარე ძალა y -მიმართულების კომპონენტით მოდებულია შეერთებაზე, მაშინ $F_3 \neq 0$.

როდესაც ორი არაკოლინეარული ელემენტია შეერთებული (ნახ. 6.8.ბ.), მაშინ ამ შეერთებაზე გარე დატვირთვის არარსებობისას, ძალები ელემენტზე ასევე იქნება ნულის ტოლი, როგორც ეს ცხადია ორი ძალის შეკრებიდან.

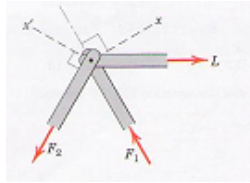
როდესაც კოლინეარული ელემენტების ორი წყვილი შეერთებულია (ნახ. 6.8.გ.), ძალები თითოეულ წყვილში ტოლი და საწინააღმდეგოა. ეს დასკვნა გამომდინარეობს ნახაზზე ნაჩვენები ძალთა შეკრებიდან.



ნახ. 6.9. ა, ბ.

ხშირად წამწეს პანელები განივად და დამაგრებული (ნახ. 6.9.ა.). ასეთი პანელი სტატიკურად განუსაზღვრელია, თუ თითოეული სამაგრი იჭერს როგორც ძაბვას, ასევე კუმშვას. მაგრამ როდესაც სამაგრები წარმოადგენენ დრეკად ელემენტებს, რომლებიც ვერ იჭერენ კუმშვას, როგორც, მაგალითად, კაბელები, ადგილი აქვს მხოლოდ ძაბვის ქმედებას და მეორე ელემენტი იგნორირებულია. ჩვეულებრივ,

დატვირთვის ასიმეტრიულობიდან ცხადია, თუ როგორ გაიღუნება პანელი. თუ გაღუნვას აქვს ნახ. 6.9.ბ.-ზე ნაჩვენები სახე, მაშინ რჩება AB ელემენტი და CD -იგნორირებულია თუ ამ არჩევანის გაკეთება შეუძლებელია, ჩვენ თვითნებურად ვირჩევთ ელემენტს, რომელიც უნდა დარჩეს. თუ სავარაუდო ძაბვა გამოთვლისას ხდება დადებითი, არჩევანი სწორია და თუ უარყოფითი, რჩება საწინააღმდეგო ელემენტი და გამოთვლა მეორდება.



ნახ. 6.10.

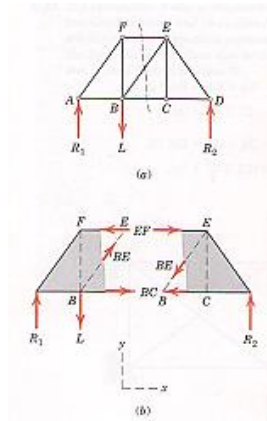
უნდა გამოვრიცხოთ ორი უცნობი ძალისთვის წონასწორობის განტოლებების ერთდროული ამოხსნა შეერთებისათვის ათვლის ღერძების ზუსტი შერჩევით. ამდენად, ნახ. 6.10.-ზე ნაჩვენები შეერთებისათვის, L ცნობილია და F_1 და F_2 - უცნობია, ძალთა შეკრება x -მიმართულებით გამორიცხავს F_1 -ს და შეკრება x' -მიმართულებით გამორიცხავს F_2 -ს. როდესაც კუთხეების დადგენა ძნელია, ხელსაყრელია ერთდროულად ამოხსნა ათვლის მიმართულებების ერთი სისტემისათვის ორივე უცნობისათვის.

6.4. გაკვეთის მეთოდი

შეერთებების მეთოდით ბრტყელი წამწეების ანალიზისას საჭიროა სამი წონასწორობის განტოლებიდან მხოლოდ ორი, რადგან პროცედურა მოითხოვს თითოეულ შეერთებაში გადამკვეთ ძალებს. მესამე ანუ მომენტის განტოლების უპირატესობას მივიღებთ წამწეს მთელი ნაწილის (სეგმენტის) არჩევით წონასწორობაში მყოფი თავისუფალი სხეულისათვის, რომელიც იმყოფება არაგადამკვეთი ძალების სისტემის ქმედების ქვეშ. ამ **გაკვეთის მეთოდის** მთავარი უპირატესობაა ის, რომ ნებისმიერ ელემენტში ძალა შეიძლება განისაზღვროს პირდაპირ იმ სეგმენტის ანალიზიდან, რომელიც ამოჭრილია ამ ელემენტიდან. ამდენად, არ არის საჭირო გამოთვლების ჩატარება შეერთებიდან შეერთებამდე, სანამ არ მიიღწევა სასურველი ელემენტი. წამწეს სეგმენტის შერჩევისას, აღსანიშნავია, რომ, ძირითადად, საჭიროა ამოიჭრას არა უმეტეს სამი სეგმენტისა, რომელთა ძალები უცნობია, რადგან არის მხოლოდ სამი ხელმისაწვდომი დამოუკიდებელი წონასწორობის განტოლება.

მეთოდის ილუსტრირება

გაკვეთის მეთოდი ნაჩვენებია ნახ. 6.5.-ზე, რომელიც გამოვიყენეთ შეერთების მეთოდის ახსნისას. წამწე ხელმეორედ ნაჩვენებია ნახ. 6.11.ა.-ზე. გარე უკუქმედებები პირველ რიგში ითვლება შეერთებების მეთოდით წამწეს, როგორც მთელის განხილვით.



ნახ. 6.11.ა, ბ.

მაგალითად, განვსაზღვროთ ძალა BE ელემენტში. წარმოსახვითი კვეთა, ნაჩვენები წყვეტილი ხაზით, გადის წამწეში და ყოფს მას ორ ნაწილად (ნახ.6.11.ბ.). ეს კვეთა ამოჭრის სამ ელემენტს, რომელთა ძალები თავდაპირველად უცნობია. იმისათვის, რომ კვეთის ორივე მხარეზე წამწის სეგმენტები იყოს წონასწორობაში, აუცილებელია თითოეულ ელემენტზე ძალის მოდება. მარტივი წამწეებისათვის, რომლებიც შედგენილია წრფივი ორძალიანი ელემენტებისგან, ეს ძალები, იქნება ეს ძაბვის თუ კუმშვის, ყოველთვის იქნება შესაბამისი ელემენტების მიმართულებით. მარცხენა სეგმენტი წონასწორობაშია მოდებული დატვირთვის L , ბოლოს უკუქმედების R_1 და სამი ძალის, რომლებიც მოდებულია მარჯვენა მხარის სეგმენტის ამოკვეთილ ელემენტზე, ზემოქმედების გამო.

ჩვეულებრივ, ძალების დახაზვა შეიძლება მათი სწორი ნიშნებით წონასწორობის მოთხოვნების ვიზუალური მიახლოებებით. ამრიგად, მარცხენა მხარის სეგმენტისათვის B წერტილის მიმართ მომენტების დაბალანსებისას, EF ძალა ერთმნიშვნელოვნად მიმართულია მარცხნივ, რაც ხდის მას შეკუმშვის ძალად, რადგან ის მოქმედებს EF ელემენტის ამოკვეთილი სეგმენტის მიმართულებით. დატვირთვა L მეტია, ვიდრე უკუქმედება R_1 , ასე რომ, BE ძალა უნდა იყოს მიმართული ზევით და მარჯვნივ, რათა უზრუნველყოს აუცილებელი ზევით მიმართული კომპონენტი ვერტიკალური წონასწორობისათვის. ამიტომ BE ძალა იქნება ძაბვითი, რადგან ის მოქმედებს ამოკვეთილი სეგმენტის საწინააღმდეგოდ.

R_1 და L -ს მიახლოებული მნიშვნელობებით ცხადია, რომ მომენტების ბალანსი E წერტილის მიმართ მოითხოვს, რომ BC მარჯვნივ იყოს მიმართული. წამწეზე ერთი შეხედვით თვალის გადავლებამ შეიძლება მოგვცეს იგივე დასკვნა, როდესაც ქვედა ჰორიზონტალური ელემენტი გაჭიმულია ძაბვის ქვეშ, რასაც იწვევს გაღუნვა. მომენტების განტოლებაში, B შეერთების მიმართ, გამორიცხულია სამი ძალა და EF პირდაპირ განისაზღვრება. BE ძალა გამოითვლება y -მიმართულებით წონასწორობის განტოლებიდან. და ბოლოს, BC განისაზღვრება E წერტილის მიმართ მომენტების დაბალანსებით. ამ გზით სამი უცნობიდან თითოეული განისაზღვრება დანარჩენი ორისგან დამოუკიდებლად.

წამწეს მარჯვენა სეგმენტი (ნახ. 6.11.ბ.) წონასწორობაშია R_2 -ს ქმედების ქვეშ და იგივე სამი ძალა ამოკვეთილ სეგმენტში მოდებულია მიმართულებებით, რომლებიც მარცხენა სეგმენტის ძალების საწინააღმდეგოა. ჰორიზონტალური ძალების სწორი ნიშანი ადვილად დგინდება B და E წერტილების მიმართ მომენტების ბალანსიდან.

დამატებითი განხილვა

მნიშვნელოვანია აღინიშნოს, რომ გაკვეთის მეთოდში წამწეს მთელი სეგმენტი განიხილება როგორც ცალკე სხეული წონასწორობაში. ამდენად სეგმენტის მიმართ შიდა ძალები ელემენტებში არ განიხილება სეგმენტის, როგორც მთელის ანალიზისას. თავისუფალი სხეულის და მის შიგნით მოქმედი ძალების დასადგენად ამოკვეთილი სეგმენტი, უპირატესად, გადის ელემენტებში და არა შეერთებებში. შეიძლება წამწეს ნებისმიერი სეგმენტის გამოყენება, მაგრამ მხოლოდ ის, რომელიც შეიცავს ძალების ნაკლებ რაოდენობას, ჩვეულებრივ, იძლევა მარტივ ამოხსნას.

ზოგ შემთხვევაში შეიძლება გაკვეთის და შეერთების მეთოდების გაერთიანება ეფექტური ამოხსნის მისაღებად. მაგალითად, დაუშვათ, საჭიროა დიდი წამწეს ცენტრალური ელემენტის ძალის დადგენა. მეტიც, დაუშვათ, რომ შეუძლებელია კვეთის გატარება ელემენტში სულ ცოტა ოთხი უცნობი ელემენტის გავლის გარეშე. შესაძლებელი იქნება ძალების განსაზღვრა ახლოს მდებარე ელემენტებში გაკვეთის მეთოდით და შემდეგ გადასვლა უცნობ ელემენტზე შეერთებების მეთოდით. ორი მეთოდის ასეთი კომბინაცია შეიძლება უფრო ეფექტური აღმოჩნდეს, ვიდრე მხოლოდ ერთის გამოყენება.

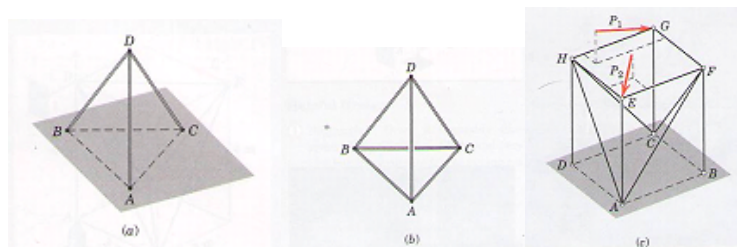
მომენტის განტოლებები ეფექტურად გამოიყენება გაკვეთის მეთოდში. შეიძლება მომენტის ცენტრის არჩევა სეგმენტზე ან მის გარეთ, რომელზეც, სავარაუდოდ, გადის მრავალი უცნობი ძალა.

ახლა ყოველთვის შესაძლებელია სწორი ნიშნის მინიჭება უცნობი ძალისათვის, როდესაც თავიდან არის შედგენილი სეგმენტის ძალთა დიაგრამა. როდესაც ადგილი აქვს ნიშნის ნებისმიერ მინიჭებას, დადებითი პასუხი დაადასტურებს სავარაუდო ნიშანს და უარყოფითი შედეგი იმის მანიშნებელია, რომ ძალის მიმართულება ემთხვევა ნავარაუდევს. არსებობს ალტერნატიული ნოტაცია, რაც მდგომარეობს იმაში, რომ ყველა უცნობი ძალა განიხილება როგორც დადებითი ძაბვის მიმართულებით (სეგმენტის საწინააღმდეგო მიმართულებით) და პასუხის ალგებრული ნიშანი – ძაბვასა და კუმშვას შორის. ამდენად, პლუს ნიშანი აღნიშნავს ძაბვას და მინუს ნიშანი – კუმშვას. მეორე მხრივ, ძალებისადმი ნიშნის სწორ მინიჭებას სეგმენტის თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამაზე,

როცა ეს შესაძლებელია, აქვს ის უპირატესობა, რომ ნათელი ხდება ძალების ფიზიკური ქმედება და ეს პრაქტიკა დღესდღეობით ფართოდ გამოიყენება.

6.5. სივრცითი წამწები

სივრცითი წამწე არის ბრტყელი წამწეს სამგანზომილებიანი ანალოგი, იდეალური სივრცითი წამწე შედგება ხისტი კავშირებიდან, რომლებიც ბოლოებითაა შეერთებული სახსრიანი შეერთებებით. შტიფტით შეერთებულთა მასები ქმნიან ძირითად არადაშლად ელემენტს ბრტყელი წამწესათვის, მეორე მხრივ, სივრცითი წამწე მოითხოვს ექვს თამასას, რომლებიც შეერთებულია ბოლოებით ტეტრაჰედრონის, როგორც საბაზო დაუშლელი ელემენტის, კიდეების შესაქმნელად.



ნახ. 6.12.ა, ბ, გ.

ნახ. 6.12.ა.-ზე ორი თამასა, AD და BD , შეერთებული D -ში, მოითხოვს მესამე საყრდენს CD , რათა აუცილებელ იქნას ADB სამკუთხედის ბრუნვა AB -ს ირგვლივ. ნახ. 6.12.ბ.-ზე საყრდენი ფუძე ჩანაცვლებულია სამი თამასით AB , BC და AC ტეტრაჰედრონის შესადგენად, რომელიც არ არის დამოკიდებული ფუძეზე მისი საკუთარი სიხისტის გამო.

ახლა შეიძლება დავადგინოთ ახალი ხისტი ელემენტი, რათა გავავრცოთ კონსტრუქცია სამი დამატებითი გადამკვეთი თამასებითურთ, რომელთა ბოლოები მიერთებულია არსებული კონსტრუქციის სამ ფიქსირებულ შეერთებასთან. ამდენად, ნახ. 6.12.გ.-ზე თამასები AF , BF და CF მიმაგრებულია ფუძესთან და ამიტომ აფიქსირებენ F წერტილს სივრცეში. ანალოგიურად, H წერტილი ფიქსირებულია სივრცეში თამასებით AH , DH და CH . სამი დამატებითი თამასა მიერთებულია სამ ფიქსირებულ წერტილთან C , F და H და ამიტომ წერტილი G დაფიქსირებულია სივრცეში. ანალოგიური შემთხვევაა ფიქსირებული E წერტილისათვის. ახლა კონსტრუქცია მთლიანად სტაბილურია. ორი მოდებული დატვირთვა განაპირობებს ძალებს ყველა ელემენტში. ამ გზით შედგენილ სივრცით წამწეს ეწოდება მარტივი სივრცითი წამწე.

იდეალურ შემთხვევაში უნდა იყოს წერტილოვანი საყრდენი, ისეთი როგორც სახსრიანი შეერთებისას სივრცითი წამწეს შეერთებებში ელემენტების გაღუნვის

თავიდან ასაცილებლად. როგორც შედუღებული და მოქლოვნილი შეერთებებისას ბრტყელ წამწეებში, თუ შეერთებული ელემენტების ცენტრების წრფეები გადაიკვეთება წერტილში, შეიძლება დავადასტუროთ ვარაუდი ორ ძალიანი ელემენტების შესახებ მარტივი ძაბვის და კუმშვის დროს.

სტატიკურად განსაზღვრული სივრცითი წამწეები

როდესაც სივრცით წამწეს აქვს გარე საყრდენი ისე, რომ ის სტატიკურად განსაზღვრულია როგორც მთლიანი ბლოკი, არის დამოკიდებულება მისი შეერთებების რაოდენობასა და იმ ელემენტების რაოდენობას შორის, რომელიც აუცილებელია შიდა სტაბილურობისათვის სიჭარბის გარეშე. რადგან თითოეული შეერთების წინასწორება განსაზღვრულია სამი სკალარული ძალის განტოლებით, სულ არის $3j$ ასეთი განტოლება j შეერთების მქონე სივრცითი წამწესათვის. მთლიანი წამწესათვის, რომელიც შედგება m ელემენტისგან, არის m უცნობი (ძაბვის ან კუმშვის ძალები ელემენტებში) პლუს ექვსი უცნობი საყრდენის უკუქმედება სტატიკურად განსაზღვრული სივრცითი კონსტრუქციის ზოგად შემთხვევაში. ამდენად, ნებისმიერი სივრცითი წამწესათვის განტოლება $m + 6 = 3j$. დაკმაყოფილება, თუ წამწე შიგნიდან სტატიკურად განსაზღვრულია. **მარტივი** სივრცითი წამწე ავტომატურად აკმაყოფილებს ამ დამოკიდებულებას. საწყისი ტეტრაპედრონიდან დაწყებული, რომლისთვისაც განტოლება სამართლიანია, კონსტრუქცია ფართოვდება სამი ელემენტის და ერთი შეერთების დამატებით, ასე რომ ტოლობა შენარჩუნებულია.

ისევე როგორც ბრტყელი წამწეს შემთხვევაში, ეს განტოლება სტაბილურობის აუცილებელი პირობაა, მაგრამ არ არის საკმარისი, რადგან m ელემენტიდან ერთი ან რამდენიმე შეიძლება განლაგდეს ისე, რომ არ მიიღოს მონაწილეობა მთელი წამწეს სტაბილურ კონფიგურაციაში. თუ $m + 6 > 3j$, არის მეტი წევრი, ვიდრე დამოუკიდებელი განტოლებაა და წამწე შიგნიდან სტატიკურად განუსაზღვრელია ჭარბი ელემენტებითურთ. თუ $m + 6 < 3j$, არის შიდა ელემენტების დეფიციტი და წამწე არასტაბილურია და შეიძლება დაიშალოს დატვირთვის ზემოქმედებით. ეს დამოკიდებულება შეერთებების რაოდენობასა და ელემენტების რაოდენობას შორის ძალზედ სასარგებლოა სტაბილური სივრცითი წამწეების წინასწარი დაპროექტებისას, რადგან კონფიგურაცია არ არის ისეთი ნათელი, როგორც ბრტყელი წამწეს შემთხვევაში, სადაც სტატიკური განსაზღვრის გეომეტრია, ძირითადად, სავსებით ნათელია.

შეერთებების მეთოდი სივრცითი წამწეებისათვის

ბრტყელი წამწეებისათვის გამოყენებული შეერთებების მეთოდი პირდაპირ ვრცელდება სივრცითი წამწეებისათვის სრული ვექტორული განტოლების დაკმაყოფილებით თითოეული შეერთებისათვის:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (6.1)$$

ჩვეულებრივ, ანალიზი იწყება იმ შეერთებით, სადაც მოქმედებს სულ ცოტა ერთი ძალა და არის არა უმეტეს სამი უცნობი ძალა. მეზობელი წერტილები, რომლებზეც მოქმედებს არა უმეტეს სამი უცნობი ძალა, შეიძლება გაანალიზდეს რიგრიგობით.

საფეხურებიანი შეერთების ეს ტექნიკა ისწრაფვის ერთდროული განტოლებების რაოდენობის მინიმიზებისკენ, როდესაც უნდა განისაზღვროს სივრცითი წამწეს ყველა ელემენტის ძალები. ამისათვის მოწოდებულია ასეთი მიახლოება. მაგრამ, როგორც ალტერნატიული პროცედურა, შეიძლება უბრალოდ დაიწეროს $3j$ განტოლება (6.1.) წამწეს კარკასის ყველა შეერთებისათვის. უცნობთა რიცხვი იქნება $m + 6$, თუ კონსტრუქცია არადაშლადია, როდესაც ის ცილდება საყრდენებს და ეს საყრდენები იძლევა ექვს გარე უკუქმედებას. თუ, დამატებით, არ არის ჭარბი ელემენტები, მაშინ განტოლებათა რაოდენობა ($3j$) უდრის უცნობთა რაოდენობას ($m + 6$) და განტოლებათა მთლიანი სისტემა შეიძლება ერთდროულად ამოიხსნას ყველა უცნობისათვის. დაწყვილებული განტოლებების დიდი რაოდენობის გამო, ჩვეულებრივ, გამოიყენება კომპიუტერული ამოხსნა. ამ უკანასკნელი მიახლოების გამოყენებისას არ არის აუცილებელი იმ შეერთებიდან დაწყება, სადაც სულ ცოტა ერთი უცნობია და მოქმედებს არა უმეტეს სამი უცნობი ძალა.

გაკვეთის მეთოდი სივრცითი წამწეებისათვის

ამ შემთხვევაშიც გამოიყენება ბრტყელი წამწეებისათვის გამოყენებული მეთოდი. ორი ვექტორული განტოლება:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ და } \sum \vec{M} = 0$$

უნდა იყოს სამართლიანი წამწეს ნებისმიერი სეგმენტისათვის, სადაც მომენტების ნულოვანი ჯამი შენარჩუნებულია მომენტის ყველა ღერძისათვის. რადგან ორი ვექტორული განტოლება ეკვივალენტურია ექვსი სკალარული განტოლებისა, შეიძლება დავასკვნათ, რომ, ზოგადად, კვეთა არ უნდა გადიოდეს ექვსზე მეტ ელემენტზე, რომელთა ძალები უცნობია. მაგრამ ეს მეთოდი სივრცითი

წამწეებისათვის ფართოდ არ გამოიყენება, რადგან იშვიათად მოიძებნება მომენტის ღერძი, რომელიც გამორიცხავს ყველა უცნობს ერთის გარდა, როგორც ეს ბრტყელი წამწეს შემთხვევაშია.

თავი 7. კარკასები და მექანიზმები

კონსტრუქციას ეწოდება კარკასი ან მექანიზმი, თუ მისი ცალკეული ელემენტებიდან ერთ-ერთი მაინც არის მრავალძალიანი, რომელიც განისაზღვრება, როგორც ისეთი ელემენტი, რომელზეც მოქმედებს სამი ან მეტი ძალა ან ისეთი, რომელზეც მოქმედებს ორი ან მეტი ძალა და ერთი ან მეტი ძალთა წყვილი. კარკასები არის კონსტრუქციები, რომლებიც გათვალისწინებულია მოდებული ძაბვების დასაკავებლად და, ჩვეულებრივ, დაფიქსირებულია. მექანიზმები - კონსტრუქციებია, რომლებიც შედგება მოძრავი ნაწილებისგან და გათვალისწინებულია შემავალი ძალების ან წყვილების გადასაცემად გამავალ ძალებზე ან წყვილებზე.

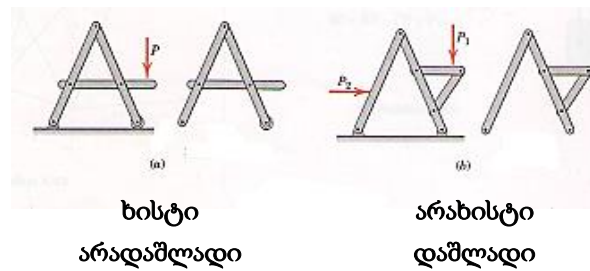
რადგან კარკასები და მექანიზმები შეიცავენ მრავალძალიან ელემენტებს, ძალები ამ ელემენტებში, ზოგადად, არ არის მიმართული ელემენტებისაკენ. ამიტომ ჩვენ ვერ ჩავატარებთ ამ კონსტრუქციის ანალიზს წინა თავში მოტანილი მეთოდებით, რადგან ეს მეთოდები გამოიყენება მარტივი წამწეებისათვის, რომლებიც შედგება ორძალიანი ელემენტებისგან და სადაც ძალები მიმართულია ამ ელემენტებისკენ.

ურთიერთშეერთებული ხისტი მყარი სხეული მრავალძალიანი ელემენტებითურთ

მე-5 თავში განხილული იყო მრავალძალიანი სხეულების წონასწორობა, მაგრამ ყურადღება გამახვილებული იყო ერთი ხისტი სხეულის წონასწორობაზე. აქ აქცენტი გამახვილებულია ურთიერთშეერთებული ხისტი სხეულების წონასწორობაზე, რომლებიც შეიცავს მრავალძალიან ელემენტებს. თუმცა ასეთი სხეულები შეიძლება გაანალიზდეს როგორც ორგანოზომილებიანი სისტემები, არის მთელი რიგი კარკასები და მექანიზმები, რომლებიც სამგანზომილებიანია.

შეერთებული სისტემის თითოეულ ელემენტზე მოქმედი ძალების დადგენა შეიძლება ელემენტის იზოლირებით ძალთა დიაგრამის და წონასწორობის განტოლების გამოყენებით. გულდასმით უნდა განვიხილოთ ქმედების და ურთიერთქმედების პრინციპი, როცა გვინდა ურთიერთქმედების ძალების წარმოდგენა ცალკეულ ძალთა დიაგრამაზე. თუ კონსტრუქცია შეიცავს მეტ ელემენტს ან საყრდენს, ვიდრე ეს საჭიროა დაშლის თავიდან ასაცილებლად, მაშინ, ისევე როგორც წამწეების შემთხვევაში, პრობლემა სტატიკურად განუსაზღვრელია და წონასწორობის პრინციპები თუმცა აუცილებელია, მაგრამ არ არის საკმარისი ამოხსნისათვის. თუმცა მრავალი კარკასი და მექანიზმი

სტატიკურად განუსაზღვრელია, აქ განვიხილავთ მხოლოდ სტატიკურად განსაზღვრულებს.



ნახ. 7.1.ა, ბ.

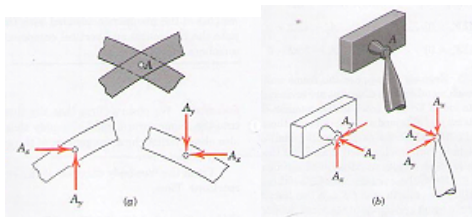
თუ კარკასი ან მექანიზმი თავისთავად წარმოადგენს ხისტ ბლოკს, როდესაც ის გადაადგილდება საყრდენებიდან, (ნახ. 7.1.ა.), ანალიზის დაწყება უმჯობესია ყველა ძალის დადგენით, რომლებიც გარე ძალებია კონსტრუქციისათვის, რომელიც განიხილება როგორც ერთი ხისტი სხეული. შემდეგ ჩვენ ვახდენთ კონსტრუქციის დანაწევრებას და ცალ-ცალკე განვიხილავთ თითოეული ნაწილის წონასწორობას. თითოეული ნაწილისათვის წონასწორობის განტოლებების გამოსახვა შეიძლება ურთიერთქმედების ძალების საშუალებით. თუ კონსტრუქცია თავისთავად არ არის ხისტი ბლოკი, მაგრამ დამოკიდებულია მის გარე საყრდენებზე (ნახ. 7.1.ბ.), მაშინ გარე საყრდენების უკუქმედებების გამოთვლა არ იქნება სრული, სანამ კონსტრუქცია დანაწევრებულია და ტარდება ცალკეული ნაწილების ანალიზი.

ძალების წარმოდგენა და თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამები

უმრავლეს შემთხვევაში კარკასების და მექანიზმების ანალიზი გაადვილებულია ძალების მართკუთხა კომპონენტების წარმოდგენით. განსაკუთრებით ეს ეხება შემთხვევას, როდესაც ნაწილების ზომები მოცემულია ურთიერთპერპენდიკულარული მიმართულებებით. ასეთი წარმოდგენის უპირატესობაა ის, რომ მომენტის მხარის გამოთვლა გაადვილებულია, ზოგიერთი სამ განზომილებიანი შემთხვევისათვის, კერძოდ, როდესაც მომენტები გამოთვლილია იმ ღერძების მიმართ, რომლებიც არ არის კოორდინატთა ღერძების პარალელური, ვექტორული ჩაწერის გამოყენება უფრო მომგებიანია.

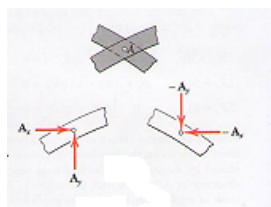
ყოველთვის არ არის შესაძლებელი თითოეული ძალისათვის ან მისი კომპონენტისათვის სწორი ნიშნის მინიჭება თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამის შედგენისას და აუცილებელი ხდება თვითნებური მინიჭება. ნებისმიერ შემთხვევაში **აბსოლუტურად აუცილებელია**, რომ ძალა დიაგრამაზე **თანმიმდევრულად** იყოს წარმოდგენილი ურთიერთქმედი სხეულებისათვის. ამდენად, შტიფტით A შეერთებული ორი სხეულისათვის (ნახ.7.2.ა.) ძალის კომპონენტები

თანმიმდევრულად უნდა იყოს წარმოდგენილი საწინააღმდეგო მიმართულებებით ცალკეულ ძალთა დიაგრამაზე.



ნახ. 7.2.ა, ბ.

სივრცითი წამწეს ბურთულოვანი სახსრით შეერთებული ელემენტებისათვის უნდა გამოვიყენოთ ქმედება-უკუქმედების პრინციპი ყველა სამი კომპონენტისათვის (ნახ. 7.2.ბ.). არჩეული მიმართულებები შეიძლება აღმოჩნდეს მცდარი, როდესაც კომპონენტის ალგებრული ნიშანი დგინდება გამოთვლით. თუ, მაგალითად, A_x ხდება უარყოფითი, ის რეალურად მოქმედებს თავიდან ნაჩვენები მიმართულების საწინააღმდეგოდ. შესაბამისად, აუცილებელია ძალის მიმართულების შეცვლა **ორივე** ელემენტისათვის და განტოლებაში მისი ძალის წევრების ნიშნის შეცვლა. ან უნდა დავტოვოთ საწყისი სურათი და ძალის სწორი ნიშანი უნდა გავიგოთ უარყოფითი ნიშნიდან. თუ ძალების აღსანიშნავად გამოვიყენებთ ვექტორულ ჩაწერას, ფრთხილად უნდა ვიყოთ პლიუს ნიშნის გამოყენებისას ძალის ქმედებისათვის და მინუს ნიშნის – შესაბამისი უკუქმედებისათვის (ნახ. 7.3.).



ვექტორული ჩაწერა

ნახ. 7.3.

უცნობთა განსაცალკევებლად ხანდახან საჭიროა ორი ან მეტი განტოლების ერთდროული ამოხსნა. მაგრამ, უმრავლეს შემთხვევაში, ერთდროული ამოხსნა თავიდან უნდა ავიცილოთ ელემენტების ან ელემენტების ჯგუფის ფრთხილად არჩევით ძალთა დიაგრამისათვის და მომენტის ღერძების ფრთხილად არჩევით, რაც გამორიცხავს არასასურველ წევრებს განტოლებებიდან.

მე-6 და მე-7 თავების რეზიუმე

მე-6 თავში გამოყენებული იყო წონასწორობის პრინციპი ორი სახის პრობლემისათვის: ა) მარტივი წამწები და ბ) კარკასები და მექანიზმები. კონსტრუქციების ამ ორი ჯგუფის ანალიზის ყველაზე არსებითი მახასიათებლები შემდეგია:

ა) მარტივი წამწები

1. მარტივი წამწე შედგება ორ ძალიანი ელემენტებისგან, რომლებიც შეერთებულია ბოლოებით და შეუძლიათ გაუძლონ დაბვას ან კუმშვას. ამიტომ თითოეული შიდა ძალა ყოველთვის მიმართულია მისი ელემენტის ბოლო წერტილების შემაერთებელი წრფისკენ.
2. მარტივი წამწები შედგენილია სამკუთხედის საბაზო ხისტი (არადაშლადი) ბლოკიდან ბრტყელი წამწებისათვის და ტეტრაჰედრონიდან - სივრცითი წამწებისათვის. წამწეს დამატებითი ბლოკების შექმნა ხდება ახალი ელემენტების დამატებით, ორის – ბრტყელი წამწებისათვის და სამის - სივრცითი წამწებისათვის, რომლებიც უერთდება არსებულ შეერთებებს და უკავშირდება მათ ბოლოებს ახალი შეერთების წარმოქმნით.
3. მარტივი წამწების შეერთებები განიხილება როგორც შტიფტიანი შეერთებები ბრტყელი წამწებისათვის და ბურთულოვან-სახსრიანი - სივრცითი წამწებისათვის. ამდენად, შეერთებებს შეუძლიათ ძალის, და არა მომენტის გადაცემა.
4. ივარაუდება, რომ გარე დატვირთვები მოდებულია მხოლოდ შეერთებებზე.
5. წამწები გარედან სტატიკურად განსაზღვრულია, როდესაც არ არის გარე შემზღუდველების სიჭარბე, რაც საჭიროა წონასწორობის შესანარჩუნებლად.
6. წამწები შიგნიდან სტატიკურად განსაზღვრულია, როდესაც ისინი აგებულია პუნქტ 2-ში აღწერილის მიხედვით, სადაც შიდა ელემენტები არ არის იმაზე ჭარბი, რაც მოითხოვება დაშლის თავიდან ასაცილებლად.
7. შეერთებების მეთოდი იყენებს წონასწორობის ძალთა განტოლებებს თითოეული შეერთებისათვის. ანალიზი, ჩვეულებრივ, იწყება შეერთებით, სადაც არის სულ ცოტა ერთი ცნობილი ძალა და არა უმეტეს ორი უცნობი ძალისა ბრტყელი წამწებისათვის და სამი უცნობი ძალისა სივრცითი წამწებისათვის.
8. **გაკვეთის მეთოდი** იყენებს წამწეს ცალკეული სეგმენტის თავისუფალ სხეულს, რომელიც შეიცავს ორ ან მეტ შეერთებას. ზოგადად, მეთოდი მოიცავს ძალების არაგადამკვეთი სისტემის წონასწორობას. წონასწორობის მომენტის განტოლება განსაკუთრებით სასარგებლოა გაკვეთის მეთოდის გამოყენებისას. ზოგადად, კვეთაზე მოქმედი ძალები, რომელიც ამოჭრის ბრტყელი წამწედან

სამზე მეტ უცნობ ელემენტს, შეიძლება სრულად დადგინდეს, რადგან არის მხოლოდ სამი დამოუკიდებელი განტოლება წონასწორობისათვის.

9. შეერთებაზე ან სეგმენტზე მოქმედი ძალის ვექტორული წარმოდგენა იხაზება შეერთების ან სეგმენტის იმავე მხარეზე, რომელზეც ძალის გადამცემი ელემენტია. ამ შეთანხმებით, ძაბვა ნაჩვენებია, როდესაც ძალის ისარი მიმართული შეერთებიდან ან სეგმენტიდან და კუმშვა - როდესაც ისარი მიმართულია შეერთებისკენ ან სეგმენტისკენ.
10. როდესაც ოთხკუთხა პანელის გამმაგრებელი ორი დიაგონალური ელემენტი დრეკადი ელემენტებია, რომლებიც ვერ უძლებენ კუმშვას, ანალიზში გათვალისწინებულია მხოლოდ ძაბვა და პანელი რჩება სტატიკურად განსაზღვრული.
11. როდესაც დატვირთვის ქვეშ მყოფი ორი შეერთება კოლინეარულია და სხვა მიმართულების მესამე ელემენტი უერთდება ამ შეერთებას, ძალა მესამე ელემენტში უნდა იყოს ნულის ტოლი, თუ არ არის მოდებული გარე ძალა შეერთებაზე კოლინეარული ელემენტისადმი ნორმალური კომპონენტით.

ბ) კარკასები და მექანიზმები

1. კარკასები და მექანიზმები ერთი ან მეტი მრავალძალიანი ელემენტიდან შედგენილი კონსტრუქციებია. მრავალძალიანი ელემენტი მოქმედებს კონსტრუქციაზე სამი ან მეტი ძალით ან ორი ან მეტი ძალით და ერთი ან მეტი წყვილით.
2. კარკასები კონსტრუქციებია, რომლებიც გათვალისწინებულია დატვირთვების გასაძლევად, ძირითადად, სტატიკურ პირობებში. მექანიზმები კონსტრუქციებია, რომლებიც გადაცემენ შემავალ ძალებს და მომენტებს, გამავალ ძალებს და მომენტებს და, ძირითადად, შედგება მოძრავი ნაწილებისგან. ზოგიერთი კონსტრუქცია შეიძლება განვიხილოთ როგორც კარკასი, ასევე როგორც მექანიზმი.
3. აქ განხილულია მხოლოდ გარედან და შიგნიდან სტატიკურად განსაზღვრული კარკასები და მექანიზმები.
4. თუ კარკასი ან მექანიზმი მთლიანად არის ხისტი (არადაშლადი) ბლოკი, როდესაც მათი გარე საყრდენები გადაადგილდება, მაშინ ანალიზი იწყება მთლიან ბლოკზე გარე უკუქმედების გამოთვლით. თუ კარკასი ან მექანიზმი არ არის ხისტი (დაშლადი) ბლოკი, როდესაც გარე საყრდენები გადაადგილდება, მაშინ გარე უკუქმედებების ანალიზი არ იქნება სრული, სანამ არ მოხდება კონსტრუქციის დანაწევრება.
5. კარკასების და მექანიზმების შიდა შეერთებებზე მოქმედი ძალების გამოთვლა ხდება კონსტრუქციის დანაწევრებით და თითოეული ნაწილისათვის ცალკე ძალთა დიაგრამის შედგენით. ქმედების და უკუქმედების პრინციპი მკაცრად

უნდა იყოს გათვალისწინებული; წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება მცდარი შედეგი.

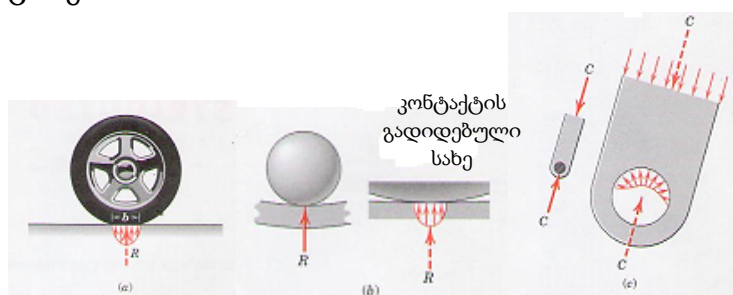
6. ძალის და მომენტის განტოლებები წონასწორობისათვის გამოიყენება იმ ელემენტებისათვის, რომელთათვისაც აუცილებელია საჭირო უცნობების გამოთვლა.

თავი 8. განაწილებული ძალები

8.1. შესავალი

წინა თავებში ყველა ძალა განხილული იყო როგორც კონცენტრირებული მათი ქმედების წრფეების გასწვრივ

ივ და მათი მოდების წერტილების ირგვლივ. ასეთი განხილვა იძლევა ამ ძალების დამაკმაყოფილებელ მოდელს. რეალურად, “კონცენტრირებული” ძალები არ არსებობენ ამ სიტყვის ზუსტი მნიშვნელობით, რადგან სხეულზე მექანიკურად მოდებული ნებისმიერი გარე ძალა განაწილებულია სასრულო საკონტაქტო ფართობზე და მცირეა.

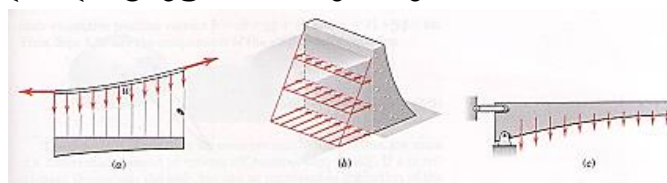


ნახ. 8.1.ა, ბ, გ.

მაგალითად, ავტომობილის საბურავზე ქვაფენილის მიერ მინიჭებული ძალა, მოდებული საბურავის მთლიან საკონტაქტო არეზე (ნახ. 8.1.ა.), შეიძლება იყოს საგრძნობი, თუ საბურავი რბილია. როდესაც ატარებენ ავტომანქანაზე, როგორც მთელზე, მოქმედი ძალების ანალიზს და თუ საკონტაქტო არეს ზომა b უმნიშვნელოა სხვა ზომებთან შედარებით, როგორიცაა მანძილი ბორბლებს შორის, მაშინ შეიძლება რეალური განაწილებული საკონტაქტო ძალების შეცვლა მათი ნაკრებით R , რომელიც განიხილება როგორც კონცენტრირებული ძალა. საკონტაქტო ძალა გამოწრთობილ ფოლადის ბურთსა და მისი საყრდენის ღარს შორის (ნახ. 8.1.ბ.) მოდებულია სასრულო ძალზედ მცირე საკონტაქტო ზონაზე. ძალები წამწეს ორძალიან ელემენტზე (ნახ. 8.1.გ.) მოდებულია შტიფტის კონტაქტის რეალურ ზონაზე და შიგნიდან კვეთენ ამოჭრილ სეგმენტს. ამ და სხვა ანალოგიური მაგალითების განხილვისას ძალები შეიძლება განვიხილოთ როგორც კონცენტრირებული, როდესაც ვაანალიზებთ მათ გარე ეფექტს სხეულზე, როგორც მთელზე.

მეორე მხრივ, თუ გვინდა ვიპოვოთ შიდა ძალების განაწილება სხეულში კონტაქტის მახლობლად, სადაც შიდა ძაბვები და დაჭიმულობები საგრძნობია, დატვირთვა არ უნდა განვიხილოთ როგორც კონცენტრირებული, მაგრამ უნდა გავითვალისწინოთ რეალური განაწილება. აქ ეს პრობლემა არ იქნება განხილული,

რადგან ის მოითხოვს მასალის თვისებების ცოდნას და ეხება მასალთმცოდნეობას და დრეკადობის და პლასტიკურობის თეორიებს.



ნახ. 8.2.ა, ბ, გ.

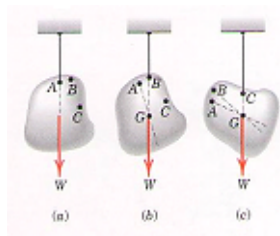
როდესაც ძალები მოდებულია უბანზე, რომლის ზომებიც არ არის უმნიშვნელო სხვა შესაბამის ზომებთან შედარებით, მაშინ უნდა დავადგინოთ რეალური გზა, რომლითაც ძალა განაწილებულია. ეს ხდება მთელ უბანზე განაწილებული ძალის ეფექტების შეკრებით მათემატიკური ინტეგრირების საშუალებით. ეს მოითხოვს ნებისმიერი მდებარეობისათვის ძალის ინტენსიურობის ცოდნას. ეს პრობლემა იყოფა სამ კატეგორიად:

1. **წრფივი განაწილება.** როდესაც ძალა განაწილებულია წრფის გასწვრივ, როგორც, მაგალითად, უწყვეტი ვერტიკალური დატვირთვა კაბელზე (ნახ. 8.2.ა.), დატვირთვის ინტენსიურობა, w , გამოისახება როგორც ძალა სიგრძის ერთეულზე, (ნიუტონ-მეტრებში, ნ/მ).
2. **ფართობითი განაწილება.** როდესაც ძალა განაწილებულია ფართობზე, როგორც, მაგალითად, წყლის ჰიდრავლიკური წნევა კაშხალის შიდა კედელზე (ნახ. 8.1.ბ.), ინტენსიურობა გამოისახება როგორც ძალა ფართობის ერთეულზე. ამ ინტენსიურობას ეწოდება **წნევა** ნაკადის ძალების ქმედებისათვის და **ძაბვა** მყარ სხეულებში ძალების შიდა განაწილებისათვის. წნევის ან ძაბვის მიღებული ერთეულია ნიუტონი კვადრატულ მეტრზე (ნ/მ^2), რასაც ასევე ეწოდება **პასკალი** (პა). კილოპასკალი (კპა), რომელიც ტოლია 10^3 პა-ს უფრო გამოიყენება ნაკადის წნევისათვის და მეგაპასკალი (10^6 პა) – ძაბვისათვის.
3. **მოცულობითი განაწილება.** ძალას, რომელიც განაწილებულია სხეულის მოცულობაში, ეწოდება მოცულობითი (მასური) ძალა. ყველაზე ცნობილი ასეთი ძალაა გრავიტაციული მიზიდულობის ძალა, რომელიც მოქმედებს სხეულის მასის ყველა ელემენტზე. მაგალითად, მძიმე კონსოლური კონსტრუქციის საყრდენებზე მოქმედი ძალების განსაზღვრა მოითხოვს კონსტრუქციაში (ნახ. 8.2.გ.) გრავიტაციული ძალის განაწილების შეფასებას. ამ ძალის ინტენსიურობას ეწოდება ხვედრითი წონა ρg , სადაც ρ არის სიმკვრივე (ერთეულოვანი მოცულობის მასა) და g არის გრავიტაციული აჩქარება. ρg -ს ერთეულია $(\text{კგ/მ}^3)(\text{მ/წმ}^2) = \text{ნ/მ}^3$.

დედამიწის გრავიტაციული მიზიდულობით გამოწვეული მოცულობითი ძალა (წონა) საყოველთაოდ აღიარებული ყველაზე ცნობილი განაწილებული ძალაა. ქვევით განხილული იქნება სხეულის იმ წერტილის დადგენა, რომლის

გავლითაც მოქმედებს ნაკრები გრავიტაციული ძალა და წრფეების, ფართობების და მოცულობების შესაბამისი გეომეტრიული თვისებები.

8.2. მასების ცენტრები



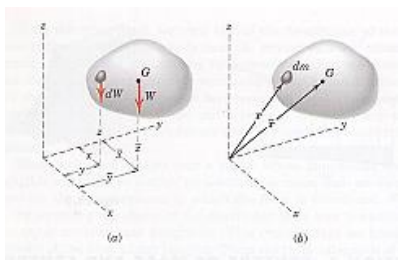
ნახ. 8.3.

განვიხილოთ ნებისმიერი ზომის და ფორმის m მასის მქონე სამგანზომილებიანი სხეული. თუ ამ სხეულს ჩამოვკიდებთ (ნახ. 8.3.) ნებისმიერ A წერტილში, სხეული იქნება წონასწორობაში თოკში ძაბვის და გრავიტაციული ძალების, რომლებიც მოქმედებენ სხეულის ყველა ნაწილზე, ტოლქმედის W მოქმედების ქვეშ. ეს ტოლქმედი ერთმნიშვნელოვნად თოკის კოლინეარულია. დავუშვათ, აღვნიშნეთ მისი მდებარეობა უმნიშვნელო ზომის ჰიპოთეტური ხვრელის გახვრეტით მისი ქმედების წრფის გასწვრივ. ექსპერიმენტს გავიმეორებთ სხეულის სხვა B და C წერტილებზე ჩამოკიდებით და ყველა შემთხვევისათვის აღვნიშნავთ ნაკრები ძალის ქმედების წრფეს. პრაქტიკული მიზნებისათვის ქმედების ეს წრფეები გადაიკვეთება G წერტილში, რომელსაც ეწოდება სხეულის **სიმძიმის ცენტრი**.

მაგრამ ზუსტი ანალიზი გვიჩვენებს გრავიტაციული ძალების ოდნავ განსხვავებულ მიმართულებებს სხეულის სხვადასხვა ნაწილაკისათვის, რადგან ეს ძალები იკრიბება დედამიწის მიზიდულობის ცენტრისკენ. ასევე, რადგან ნაწილაკები სხვადასხვა მანძილით არიან დაშორებული დედამიწიდან, დედამიწის ძალთა ველის ინტენსიურობა არ არის ერთგვაროვანი მთელ სხეულში. შედეგად, გრავიტაციული ძალის ტოლქმედების წრფეები ზევით აღწერილ ექსპერიმენტებში არ იქნება ზუსტად გადაკვეთილი და ამიტომ არ არსებობს ერთიანი სიმძიმის ცენტრი ამ სიტყვის ზუსტი მნიშვნელობით. ამას არა აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა, რადგან საქმე გვაქვს სხეულებთან, რომელთა ზომები მცირეა დედამიწასთან შედარებით. ამიტომ ვუშვებთ ერთგვაროვან და პარალელურ ძალთა ველს, რომელიც განპირობებულია დედამიწის გრავიტაციული მიზიდულობით და ეს დაშვება გამოიხატება სიმძიმის ერთიანი ცენტრის ცნებით.

სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრა

ნებისმიერი სხეულის სიმძიმის ცენტრის მათემატიკური განსაზღვრისათვის (ნახ.8.4.ა.) გამოიყენება **მომენტის პრინციპი** გრავიტაციული ძალების პარალელური სისტემებისათვის. გრავიტაციული ძალის W ნაკრები მომენტი



ნახ. 8.4.ა, ბ.

ნებისმიერი ღერძის მიმართ იგივე ღერძის მიმართ გრავიტაციული ძალების dW მომენტების ჯამის ტოლია, რომლებიც მოქმედებენ ყველა ნაწილაკზე, რომლებიც განიხილება სხეულის უსასრულოდ მცირე ელემენტები. ყველა ელემენტზე მოქმედი ნაკრები გრავიტაციული ძალა არის სხეულის წონა. ეს ელემენტები განიხილება როგორც სხეულის უსასრულოდ მცირე ელემენტები. ყველა ელემენტზე მოქმედი ნაკრები გრავიტაციული ძალა არის სხეულის წონა და და მოიცემა ჯამით: $W = \int dW$. თუ მომენტების პრინციპს გამოვიყენებთ y -ღერძის მიმართ ელემენტარული წონის მომენტი ამ ღერძის მიმართ არის $x dW$ და ამ მომენტების ჯამი სხეულის ყველა ელემენტისათვის არის $\int x dW$. მომენტების ეს ჯამი უნდა უდრიდეს $W \bar{x}$ -ს, ჯამის მომენტს. ამდენად, $\bar{x} W = \int x dW$.

სხვა ორი კომპონენტისათვის ანალოგიური გამოსახულებების გამოყენებით შეიძლება სიმძიმის G ცენტრის კოორდინატების გამოსახვა:

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W}, \bar{y} = \frac{\int y dW}{W}, \bar{z} = \frac{\int z dW}{W} \quad (8.1a)$$

მესამე განტოლებაში შემოსული გრავიტაციული ძალების ფიზიკური მომენტების ვიზუალიზებისათვის, უნდა ჩავატაროთ სხეულის კვლავორიენტაცია და ღერძების ისე მიმართვა, რომ z -ღერძი გახდეს ჰორიზონტალური. მნიშვნელოვანია იმის გაცნობიერება, რომ ამ სამი გამოსახულების თითოეული მრიცხველი არის **მომენტების ჯამი**, მაშინ როცა W -ს და G -ს შესაბამისი კოორდინატის ნამრავლი არის **ჯამის მომენტი**.

თუ ჩავანაცვლებთ $w = mg$ და $dw = g dm$, გამოსახულებები მიიღებს სახეს:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{m}, \bar{y} = \frac{\int y dm}{m}, \bar{z} = \frac{\int z dm}{m} \quad (8.1b)$$

ამ განტოლების ჩაწერა შეიძლება ვექტორული ფორმით ნახ. 8.4.ბ.-ს გამოყენებით, რომელშიც საწყისი მასა და მასების ცენტრი G განთავსებულია მათი შესაბამისი მდებარეობის ვექტორებით: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ და $\vec{r} = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k}$.

ამდენად, განტოლებები (8.1b) ერთი ვექტორული განტოლების კომპონენტებია:

$$\vec{r} = \frac{\int \vec{r} dm}{m} \quad (8.2)$$

სხეულის სიმკვრივე ρ არის მისი ერთეულოვანი მოცულობის მასა. ამდენად, dV მოცულობის ცალკეული ელემენტის მასა $dm = \rho dV$. თუ ρ არ არის მუდმივი

მთელ სხეულში, მაგრამ შეიძლება მისი, როგორც სხეულის კოორდინატების ფუნქციის გამოსახვა, ეს უნდა გავითვალისწინოთ მრიცხველების და მნიშვნელების გამოთვლისას და შეიძლება ამ გამოსახულების ასე ჩაწერა:

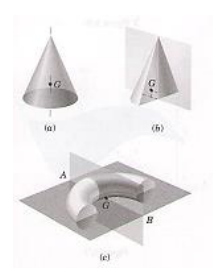
$$\bar{x} = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV} \quad \bar{y} = \frac{\int y \rho dV}{\int \rho dV} \quad \bar{z} = \frac{\int z \rho dV}{V} \quad (8.3)$$

მასების ცენტრის და სიმძიმის ცენტრის შედარება

განტოლებები 8.1b, 8.2 და 8.3 არ არის დამოკიდებული გრავიტაციულ ეფექტებზე, რადგან აქ g არ ფიგურირებს. ამიტომ ისინი განსაზღვრავენ ერთ წერტილს სხეულში, რომელიც არის მხოლოდ მასის განაწილების ფუნქცია. ამ წერტილს ეწოდება **მასების ცენტრი** და ის სრულად ემთხვევა სიმძიმის ცენტრს, თუ გრავიტაციულ ველს განვიხილავთ როგორც ერთგვაროვანს და პარალელურს.

უაზროა ლაპარაკი სხეულის სიმძიმის ძალაზე, რომელიც მოცილებულია დედამიწის გრავიტაციული ველიდან, რადგან ამ დროს მასზე არ მოქმედებენ გრავიტაციული ძალები. ამ მომენტიდან ჩვენ ვილაპარაკებთ მასების ცენტრზე და არა სიმძიმის ცენტრზე. ასევე მასების ცენტრს ენიჭება განსაკუთრებული მნიშვნელობა სხეულის არადაბალანსებული ძალებისადმი დინამიკური რეაქციის გამოსათვლელად.

მთელ რიგ პრობლემებში მასათა ცენტრის მდებარეობის გამოთვლა შეიძლება გაადვილდეს კოორდინატთა ღერძების გააზრებული შერჩევით. ძირითადად, ღერძები ისე უნდა განლაგდეს, რომ რაც შეიძლება უფრო გამარტივდეს სასაზღვრო განტოლებები. ამდენად, წრიული საზღვრების მქონე სხეულებისათვის სასარგებლოა პოლარული კოორდინატები.



ნახ. 8.5.

ა, ბ, გ.

კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ინფრომაციის მიღება შეიძლება სიმეტრიის განხილვიდან. როდესაც ჰომოგენურ სხეულში არის სიმეტრიის ღერძი ან სიბრტყე, არჩეული კოორდინატთა ღერძი ან სიბრტყე უნდა ემთხვეოდეს ამ ღერძს ან სიბრტყეს. მასების ცენტრი უნდა მდებარეობდეს ასეთ ღერძზე ან სიბრტყეზე, რადგან

სიმეტრიულად განლაგებული ელემენტებით გამოწვეული მომენტები ყოველთვის ბათილდება და შეიძლება სხეულის, როგორც ამ ელემენტების წყვილებიდან შედგენილის განხილვა.

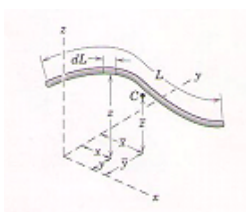
ამდენად, მასების ცენტრი G ჰომოგენური მარჯვენა წრიულად ორიენტირებული კონუსისათვის (ნახ. 8.5.ა.) იქნება სადღაც მის ცენტრალურ ღერძზე, რომელიც სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს. ნახევრად მარჯვენა წრიული ორიენტაციის კონუსის მასების ცენტრი მდებარეობს მის სიმეტრიის სიბრტყეზე (ნახ. 8.5.ბ.). ნახევარგოლის მასების ცენტრი (ნახ. 8.5.გ.) მდებარეობს მისი სიმეტრიის ორივე

სიბრტყეში და ამიტომ განთავსებულია AB წრფეზე. ძალიან ადვილია G -ს მდებარეობის დადგენა არსებული სიმეტრიის გამოყენებით.

8.3. წრფეების, ფართობების და მოცულობების ცენტროიდები

როდესაც სხეულის სიმკვრივე ρ მთლიანად ერთგვაროვანია, ეს იქნება მუდმივი კოეფიციენტი (8.3) განტოლების როგორც მრიცხველში ასევე მნიშვნელში და ამიტომ გაბათილდება. დარჩენილი გამოსახულებები განსაზღვრავს მხოლოდ სხეულის გეომეტრიულ თვისებას, რადგან ქრება ყველანაირი მინიშნება მის მასურ თვისებებზე. ტერმინი **ცენტროიდი** გამოიყენება, როდესაც გამოთვლა ეხება მხოლოდ გეომეტრიულ ფორმას. როდესაც ლაპარაკია რეალურ ფიზიკურ სხეულზე, გამოიყენება ტერმინი **მასების ცენტრი**. თუ სიმკვრივე მთელ სხეულში ერთგვაროვანია, ცენტროიდის და მასების ცენტრის მდებარეობა ერთი და იგივეა, მაშინ როცა, თუ სიმკვრივე იცვლება, ეს ორი წერტილი, ძირითადად, არ ემთხვევა ერთმანეთს.

ცენტროიდების გამოთვლა იყოფა სამ განსხვავებულ კატეგორიად:



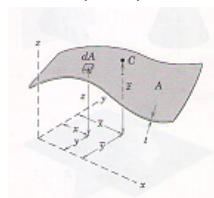
ნახ. 8.6.

1) **წრფეები.** L სიგრძის წვრილი ღეროსთვის ან მავთულისათვის განივკვეთის ფართია A და სიმკვრივეა ρ (ნახ. 8.6.), სხეული წრფივი სეგმენტის ანალოგიურია $dm = \rho A dL$. თუ A და ρ მუდმივია ღეროს მთელ სიგრძეზე, მასების ცენტრის კოორდინატები ასევე იქნება წრფივი სეგმენტის C კოორდინატები, რომლისთვისაც (8.1b) განტოლების თანახმად

შეიძლება დაიწეროს:

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L}, \bar{y} = \frac{\int y dL}{L}, \bar{z} = \frac{\int z dL}{L} \quad (8.4)$$

აღსანიშნავია, რომ, ზოგადად, ცენტროიდი L არ ძევს წრფეზე. თუ ღერო ძევს ერთ სიბრტყეზე, როგორიცაა $x - y$ სიბრტყე, გამოთვლისათვის საჭიროა მხოლოდ ორი კოორდინატი.



ნახ. 8.7.

2) **ფართობები.** როდესაც ρ სიმკვრივის სხეულს აქვს მცირე, მაგრამ მუდმივი სისქე t , მას განიხილავენ როგორც ზედაპირის ფართობს A (ნახ. 8.7.). ელემენტის მასა $dm = \rho t dA$. და ისევ, თუ ρ და t მუდმივია მთელ ფართობზე, სხეულის მასების ცენტრის კოორდინატები ასევე იქნება ზედაპირის ფართობის ცენტროიდის C კოორდინატები და განტოლებები 8.1 b ასე ჩაიწერება:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}, \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}, \bar{z} = \frac{\int z dA}{A} \quad (8.5)$$

ამ განტოლების მრიცხველებს უწოდებენ **ფართობის პირველ მომენტებს**.

თუ ზედაპირი მრუდეა (ნახ. 8.7.) გარსიანი სეგმენტიტურთ, ჩართული იქნება სამივე კოორდინატი. მრუდე ზედაპირისათვის ცენტროიდი C , როგორც წესი, არ ძევს სიბრტყეზე. თუ ფართობი წარმოადგენს ბრტყელ ზედაპირს, მაგალითად, $x-y$ სიბრტყეს, გამოთვლისათვის საჭიროა მხოლოდ C -ს კოორდინატები ამ სიბრტყეში.

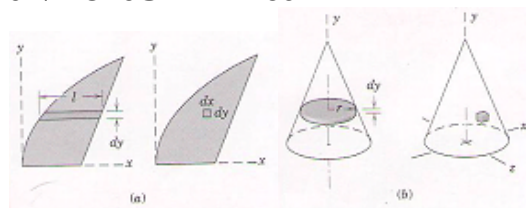
3) მოცულობები. V მოცულობის და ρ სიმკვრივის ზოგადი სხეულისათვის, კომპონენტის მასა $dm = \rho dV$. სიმკვრივე ρ ბათილდება, თუ ის მუდმივია მთელ მოცულობაში და მასების ცენტრის კოორდინატები ასევე იქნება სხეულის ცენტროიდის, C -ს კოორდინატები. 8.3 და 8.1 *b* განტოლებებიდან მიიღება:

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}, \bar{y} = \frac{\int y dV}{V}, \bar{z} = \frac{\int z dV}{V} \quad (8.6)$$

ინტეგრირების ელემენტის შერჩევა

თეორიის მთავარი სირთულეა არა მისი კონცეპციები, არამედ მისი გამოყენების პროცედურები. მასების ცენტრებისა და ცენტროიდებისათვის მომენტის პრინციპის კონცეპცია სავსებით საკმარისია; რთული საფეხურებია დიფერენციალური ელემენტის და ინტეგრალების შერჩევა. სასარგებლოა შემდეგი ხუთი წესი:

1) ელემენტის რიგი. თუ შესაძლებელია, უნდა შეირჩეს პირველი რიგის დიფერენციალი და არა უფრო მაღალი რიგის ისე, რომ საჭირო იყოს მხოლოდ ერთი ინტეგრირება მთელი ფიგურის მოცვით.



ნახ. 8.8.ა, ბ.

ამდენად, ნახ. 8.8.ა.-ზე ფართობის $dA = l dy$ პირველი რიგის ჰორიზონტალური ზოლი მოითხოვს მხოლოდ ერთ ინტეგრირებას y -ს მიმართ. მეორე რიგის ელემენტები $dx dy$ მოითხოვს ორ ინტეგრირებას, პირველს x -ს მიმართ და მეორეს y -ს მიმართ. მყარი კონუსისათვის (ნახ. 8.8.ბ.) ვირჩევთ პირველი რიგის ელემენტს მოცულობის $dV = \pi r^2 \cdot dy$ წრიული ნაწილის ფორმით. ეს მოითხოვს მხოლოდ ერთ ინტეგრირებას და, ამდენად, ის სასარგებლოა მესამე

რიგის ელემენტის შესარჩევად $dV = dxdydz$, რომელიც მოითხოვს სამ ძნელად შესასრულებელ ინტეგრირებას.



ნახ. 8.9.

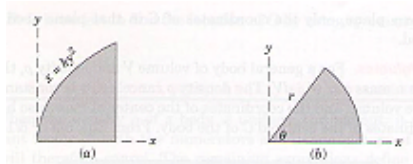
2) უწყვეტობა. თუ შესაძლებელია, ვირჩევთ ელემენტს, რომლის ინტეგრირება უნდა ჩატარდეს ერთი უწყვეტი ოპერაციით. ამდენად, ჰორიზონტალურ ზოლს (ნახ. 8.8.ა.) აქვს უპირატესობა ვერტიკალურ

ზოლთან შედარებით (ნახ. 8.9), რომელიც გამოყენებისას მოითხოვს ორ ცალკეულ ინტეგრალს წყვეტილობის გამო ზოლის სიმაღლის გამოსახულებაში, როცა $x = x_1$.



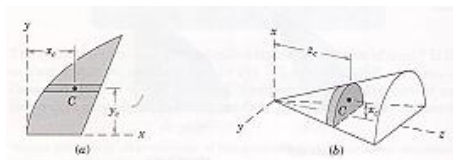
ნახ. 8.10.

3) მაღალი რიგის წევრების უარყოფა. მაღალი რიგის წევრები ყოველთვის უნდა გამოირიცხოს დაბალი რიგის წევრებთან შედარებით. ამდენად, ფართობის ვერტიკალური ზოლი მრუდის ქვევით (ნახ. 8.10) მოცემულია პირველი რიგის წევრით $dA = ydx$ და მეორე რიგის სამკუთხედის ფართობი $\frac{1}{2}dxdy$ გამორიცხულია.



ნახ. 8.11.ა, ბ.

4) კოორდინატების შერჩევა. ძირითადად, ვირჩევთ კოორდინატთა სისტემას, რომელიც ყველაზე უკეთ მონიშნავს ფიგურის საზღვრებს. ამდენად, ფართობის საზღვრები (ნახ. 8.11.ა.) ადვილად აღიწერება მართკუთხა კოორდინატებით და წრიული სექტორის საზღვრები (ნახ. 8.11.ბ.) - პოლარული კოორდინატებით.



ნახ. 8.12.ა, ბ.

5) ელემენტის ცენტროიდული კოორდინატები. როდესაც არჩეულია პირველი ან მეორე რიგის დიფერენციალური ელემენტი, მნიშვნელოვანია ელემენტის ცენტროიდის კოორდინატის გამოყენება მხარის მომენტისათვის ამ ელემენტის მომენტის გამოსახატავად. ამდენად, ფართობის ჰორიზონტალური ზოლისათვის (ნახ. 8.12.ა.) მომენტი dA y -ღერძის მიმართ არის $x_c dA$, სადაც x_c არის ელემენტის ცენტროიდის, C -ს, x -კოორდინატი. აღსანიშნავია, რომ x_c არ არის x , რომელიც აღწერს ფართობის საზღვარს. ამ ელემენტის y -მიმართულებისათვის ელემენტის ცენტროიდის მომენტის მხარი y_c იგივეა, რაც ორი საზღვრის y -კოორდინატები.

განვიხილოთ მყარი ნახევარკონუსი (ნახ. 8.12.ბ.) განსხვავებული სისქის ნახევრად წრიული გადანაჭრით, როგორც მოცულობის ელემენტი. ელემენტის მომენტის მხარი x -მიმართულებით არის ელემენტის პირის მხრიდან ცენტროიდამდე მანძილი და არა x -მანძილი ელემენტის საზღვრამდე. მეორე მხრივ, z -მიმართულებით ელემენტის ცენტროიდის მომენტის მხარი z_c იგივეა, რაც ელემენტის z -კოორდინატი.

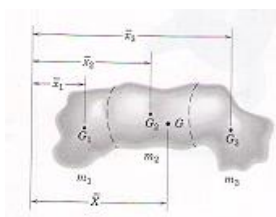
ამ მაგალითების გათვალისწინებით 8.5 და 8.6 განტოლებები შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dV}{V}, \bar{y} = \frac{\int y_c dV}{V}, \bar{z} = \frac{\int z_c dV}{V} \quad (7.6 a)$$

მნიშვნელოვანია, რომ ინდექსი „ c “ მიუთითებს იმაზე, რომ ინტეგრალის გამოსახულებების მრიცხველში შესული მომენტის მხრები ყოველთვის არიან ცენტროიდის კოორდინატები.

ამ თვალსაზრისით ნათლად შეიძლება მომენტების პრინციპის გაგება და ამ პრინციპის ფიზიკური შინაარსის გააზრება, როდესაც ის გამოიყენება პარალელური ძალების სისტემისათვის (ნახ. 8.4.ა.). გაითვალისწინეთ საერთო წონის W და ელემენტარული წონების dW ჯამის (ინტეგრალის) ეკვივალენტურობა, რათა თავიდან აიცილოთ შეცდომები მათემატიკის გამოყენებისას.

8.4. შედგენილი სხეულები და ფიგურები; მიახლოებები



ნახ. 8.13.

როდესაც სხეული ან ფიგურა შეიძლება დაიყოს რამდენიმე ნაწილად, რომელთა მასების ცენტრები ადვილად ისაზღვრება, ვიყენებთ მომენტის პრინციპს და თითოეულ ნაწილს განვიხილავთ როგორც მთელს. ასეთი სხეული

ნაჩვენებია ნახ. 8.13.-ზე. მისი ნაწილების მასებია m_1, m_2, m_3 შესაბამისი მასების ცენტრის კოორდინატებით $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ x -მიმართულებით. მომენტის პრინციპის თანახმად

$$(m_1 + m_2 + m_3)\bar{X} = m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3$$

სადაც $\bar{X}$ მთელი სხეულის მასების ცენტრის x კოორდინატია. ანალოგიური დამოკიდებულება სამართლიანია დანარჩენი ორი კოორდინატისთვის.

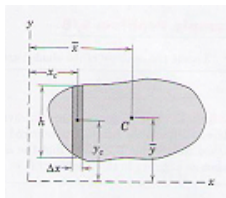
ზოგად შემთხვევაში, ნებისმიერი რაოდენობის ნაწილის შემცველი სხეულისათვის მასების ცენტრის კოორდინატებისათვის ჯამები გამოისახება კომპაქტური სახით:

$$\bar{x} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m} \quad \bar{y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \quad \bar{z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} \quad (8.7)$$

ანალოგიური გამოსახულებები სამართლიანია შედგენილი წრფეების, ფართობების და მოცულობებისათვის, სადაც m -ში ჩანაცვლებულია L -ბით, A -ბით და V -ბით.

აღსანიშნავია, რომ როდესაც ხვრელი ან ღრმული განიხილება როგორც შედგენილი სხეულის ან ფიგურის ერთ-ერთი კომპონენტი, შესაბამისი მასა განიხილება როგორც უარყოფითი სიდიდე.

მიახლოების მეთოდი



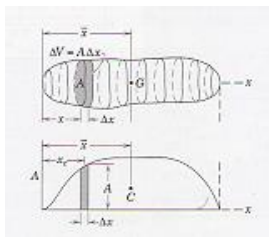
ნახ. 8.14.

პრაქტიკაში ფართობის ან მოცულობის საზღვრები შეიძლება ვერ გამოისახოს უბრალო გეომეტრიული ფორმების საშუალებით ან როგორც ფორმები, რომელთა მათემატიკური წარმოდგენა შესაძლებელია. ასეთ შემთხვევაში მიმართავენ მიახლოების მეთოდს. მაგალითისთვის განვიხილოთ არარეგულარული ფართობის ცენტროიდის, C -ს მდებარეობის პრობლემა (ნახ. 8.14.). ფართობი დაყოფილია Δx სიგანის და ცვლადი სიმაღლის h ზოლებად. თითოეული ზოლის ფართობი A არის $h\Delta x$ და მრავლდება მისი ცენტროიდის x_c და y_c კოორდინატებზე ფართობის ელემენტის მომენტების მისაღებად. ყველა ზოლის მომენტების ჯამი, გაყოფილი ზოლების საერთო ფართობზე, იძლევა შესაბამისი ცენტროიდის კოორდინატს. შედეგების სისტემატური კლასიფიცირება მთელი ფართობის $\sum A$, ჯამების $\sum A x_c$ და $\sum A y_c$ და ცენტროიდების კოორდინატების სწორი შეფასების საშუალებას იძლევა:

$$\bar{x} = \frac{\sum A x_c}{\sum A} \quad \bar{y} = \frac{\sum A y_c}{\sum A}$$

მიახლოების სიზუსტის გაზრდა შეიძლება ზოლების სიგანის შემცირებით. ყველა შემთხვევაში ზოლების საშუალო სიმაღლე უნდა შეფასდეს ფართობების შესაბამისად. თუმცა ჩვეულებრივ მომგებიანია მუდმივი სიგანის ელემენტების გამოყენება, მაგრამ ეს არ არის აუცილებელი. რეალურად, შეიძლება ნებისმიერი ზომის და ფორმის ელემენტის გამოყენება, რომელიც უახლოვდება მოცემულ ფართობს დამაკმაყოფილებელი სიზუსტით.

არარეგულარული მოცულობები



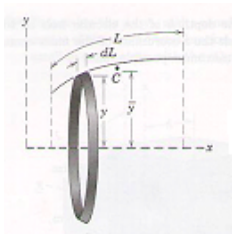
ნახ. 8.15.

არარეგულარული მოცულობის ცენტროიდის განსათავსებლად ეს პრობლემა უნდა დავიყვანოთ ფართობის ცენტროიდის განთავსებაზე. განვიხილოთ მოცულობა (ნახ. 8.15.), სადაც ფართობის, რომელიც x -მიმართულების ნორმალურია, განივკვეთის სიდიდეები, A , ნაჩვენებია x -დან დამოკიდებულებით. მრუდის ქვეშ ფართობის ვერტიკალური ზოლი არის $A\Delta x$, რომელიც ΔV მოცულობის შესაბამისი ელემენტის ტოლია. ამდენად, მრუდის ქვევით ფართობი წარმოადგენს სხეულის მოცულობას და მრუდის ქვევით ფართობის ცენტროიდის x -კოორდინატი მოიცემა გამოსახულებით

$$\bar{x} = \frac{\sum (A\Delta x)x_c}{\sum A\Delta x},$$

რომელიც ტოლია: $\bar{x} = \frac{\sum Vx_c}{\sum V}$ რეალური მოცულობის ცენტროიდისათვის.

8.5. პაპუსის თეორემა



ნახ. 8.16.

არსებობს ძალზედ მარტივი მეთოდი ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელად, რომელიც წარმოიქმნება ბრტყელი მრუდის ბრუნვით არაგადამკვეთი ღერძის გარშემო მრუდის სიბრტყეში (ნახ. 8.16.). L სიგრძის წრფივი სეგმენტი $x-y$ სიბრტყეში წარმოქმნის ზედაპირს x -ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს. ამ ზედაპირის ელემენტია dL -ით წარმოქმნილი რგოლი. ამ რგოლის ფართობი არის მისი წრის სიგრძე გამრავლებული მის აპოთემაზე, ანუ $dA = 2\pi y dL$.

მთელი ფართობი ასე გამოისახება:

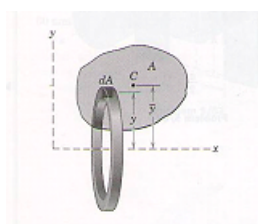
$$A = 2\pi \int y dL$$

რადგან $\bar{y}L = \int y dL,$

$$A = 2\pi \bar{y}L \quad (8.8.)$$

სადაც $\bar{y}$ არის ცენტროიდის, C -ს, y -კოორდინატი L სიგრძის წრფისათვის.

ამდენად, წარმოქმნილი ფართობი იგივეა, რაც L სიგრძის და $\bar{y}$ -რადიუსის მარჯვენა წრიული ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



ნახ. 8.17.

თუ მოცულობა წარმოიქმნება ფართობის არაგადამკვეთი ღერძის ირგვლივ მის სიბრტყეში ბრუნვით, არსებობს ანალოგიური მარტივი დამოკიდებულება მოცულობის დასადგენად. A -ფართობის x -ღერძის ირგვლივ ბრუნვით წარმოქმნილი მოცულობის ელემენტი (ნახ. 8.17.) არის dA განიკვეთის და y -რადიუსის ელემენტარული რგოლი. ელემენტის მოცულობა არის მისი წრის სიგრძე გამრავლებული dA -ზე ანუ $dV = 2\pi y dA$ და მთელი მოცულობა ტოლია:

$$V = 2\pi \int y dA$$

$$\text{რადგან } \bar{y} A = \int y dA, \quad V = 2\pi \bar{y} A \quad (8.9)$$

სადაც $\bar{y}$ არის მბრუნავი ფართობის A ცენტროიდის C -ს, y -კოორდინატი.

ამრიგად, წარმოქმნილი მოცულობა მიიღება წარმოქმნილი ფართობის გამრავლებით ცენტროიდით აღწერილი წრიული ტრექტორიის წრის სიგრძეზე.

პაპუსის ორი თეორემა, გამოსახული 8.8 და 8.9 განტოლებებით, სასარგებლოა ბრუნვის ფართობების და მოცულობების დასადგენად. ისინი ასევე გამოიყენება ბრტყელი მრუდების და ბრტყელი ფართობების ცენტროიდების საპოვნელად, როდესაც ცნობილია ამ ფიგურების არაგადამკვეთი ღერძის ირგვლივ ბრუნვით წარმოქმნილი შესაბამისი ფართობები და მოცულობები. ფართობის ან მოცულობის 2π -ზე ნაკლები θ კუთხით წარმოქმნილი ფართობი ან მოცულობა შეიძლება განისაზღვროს 2π -ს ჩანაცვლებით θ -თი 8.8 და 8.9 განტოლებებში. ასე რომ,

$$A = \theta \bar{y} L \quad (8.8a)$$

და

$$V = \theta \bar{y} A \quad (8.9a)$$

სადაც θ გამოსახულია რადიანებში.

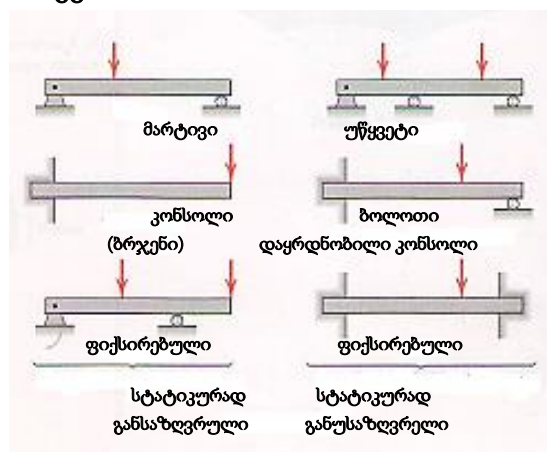
თავი 9. ძელები (კოჭები)

9.1. ძელები - გარე ეფექტები

ძელი (კოჭი) კონსტრუქციული ელემენტებია, რომელიც წინააღმდეგობას უწევს მოდებული დატვირთვით გამოწვეულ გაღუნვას. ძელების უმრავლესობა პრიზმული ღეროებია და მოდებული დატვირთვები, როგორც წესი, ნორმალურია ღეროების ღერძების მიმართ.

უეჭველია, ძელები ყველაზე მნიშვნელოვანია სხვა კონსტრუქციულ ელემენტებს შორის. ასე რომ, მათი დაპროექტებისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს ძირითად თეორიას. ძელის დატვირთვის მზიდი უნარის ანალიზისათვის პირველ რიგში უნდა დადგინდეს ძელის, როგორც მთელის, წონასწორობის მოთხოვნები და მისი ნებისმიერი ნაწილი ცალკე უნდა იყოს განხილული. მეორე, უნდა დადგინდეს დამოკიდებულებები ნაკრებ ძალებსა და ძელის თანმხლებ შიდა წინააღმდეგობას შორის ამ ძალების შესაკავებლად. ანალიზის პირველი ნაწილი მოითხოვს სტატიკის პრინციპების გამოყენებას. მეორე ნაწილი მოიცავს მასალის სიმტკიცის პარამეტრებს და ჩვეულებრივ განიხილება მყარი სხეულების მექანიკაში ან მასალათგამძლეობაში.

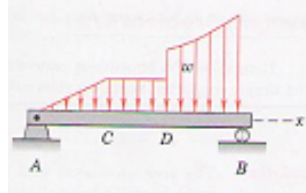
ძელების (კოჭების) სახეები



ნახ. 9.1.

ძელებს, რომლებიც ისეა გამაგრებული, რომ მათი გარე საყრდენი ურთიერთქმედების გამოთვლა შეიძლება მხოლოდ სტატიკის მეთოდებით, ეწოდებათ **სტატიკურად განსაზღვრული**. ძელი, რომელსაც ამაგრებს მეტი საყრდენი, ვიდრე საჭიროა წონასწორობის შესანარჩუნებლად, **სტატიკურად განუ-**

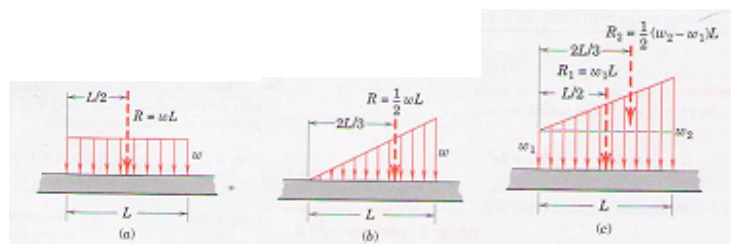
ზღვრელია. ასეთი ძელის საყრდენის უკუქმედების დასადგენად განვიხილოთ დატვირთვა-დეფორმაციის თვისებები სტატიკური წონასწორობის განტოლებებთან ერთად. ნახ. 9.1.-ზე ნაჩვენებია ძელის ორივე სახის მაგალითები. აქ გაანალიზებული იქნება მხოლოდ სტატიკურად განსაზღვრული ძელები.



ნახ. 9.2.

ძელების იდენტიფიცირება ასევე შესაძლებელია გარე დატვირთვის ტიპის საშუალებით. ძელები ნახ. 9.1.-ზე უძლებს კონცენტრირებულ დატვირთვებს, მაშინ როცა ძელი ნახ. 9.2.-ზე – განაწილებულ დატვირთვას, რომლის ინტენსიურობა შეიძლება გამოისახოს როგორც ერთეულოვანი სიგრძის ძელის ძალა. ინტენსიურობა შეიძლება იყოს მუდმივი ან იცვლებოდეს, იყოს უწყვეტი ან წყვეტილი. ნახ. 9.2.-ზე დატვირთვის ინტენსიურობა მუდმივია C-დან D-მდე და იცვლება A-დან C-მდე და D-დან B-მდე. ინტენსიურობა წყვეტილია D-ში, სადაც ის მკვეთრად იცვლის სიდიდეს. თუმცა თავისთავად ინტენსიურობა არ არის წყვეტილი C-ში, ინტენსიურობის ცვლილების წარმოებული dw/dx წყვეტილია.

განაწილებული დატვირთვები

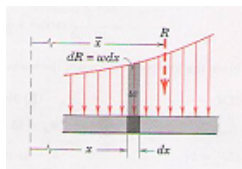


ნახ. 9.3.ა, ბ, გ.

დატვირთვის ინტენსიურობა, რომელიც მუდმივია ან წრფივად იცვლება, ადვილად რეგულირდება. ნახ. 9.3.-ზე ნაჩვენებია სამი ყველაზე გავრცელებული შემთხვევა და თითოეული შემთხვევისათვის განაწილებული დატვირთვების ტოლქმედები.

ა და ბ შემთხვევაში (ნახ. 9.3.) ნაკრები დატვირთვა R წარმოდგენილია ფართობით, რომელიც წარმოიქმნება ინტენსიურობით w (ერთეულოვანი სიგრძის ძალის ძალა) და სიგრძით L , რომლის გასწვრივაც დატვირთვა განაწილებულია. ნაკრები გადის ამ ფართობის ცენტროიდში.

გ- ნაწილში (ნახ. 9.3.) ტრაპეციის ფართობი იშლება მართკუთხა და სამკუთხა ფართობებად და ამ ქვეფართობების შესაბამისი ნაკრებები R_1 და R_2 ცალ-ცალკე განისაზღვრება. აღსანიშნავია, რომ ცალკეული ნაკრების განსაზღვრა შეიძლება ცენტროიდების მოსაძებნად რთული ტექნიკის გამოყენებით. მაგრამ, როგორც წესი, ცალკეული ნაკრების განსაზღვრა არ არის აუცილებელი.



ნახ. 9.4.

დატვირთვის უფრო ზოგადი განაწილებისათვის (ნახ. 9.4.), იწყებენ ძალის დიფერენციალური ინკრემენტით $dR = w dx$. მაშინ საერთო დატვირთვა R არის დიფერენციალური ძალების ჯამი

$$R = \int w dx$$

აქაც ნაკრები R განთავსებულია ფართობის ცენტროიდში. ამ ცენტროიდის x -კოორდინატი განისაზღვრება მომენტების პრინციპიდან $R\bar{x} = \int x w dx$ ან

$$\bar{x} = \frac{\int x w dx}{R}$$

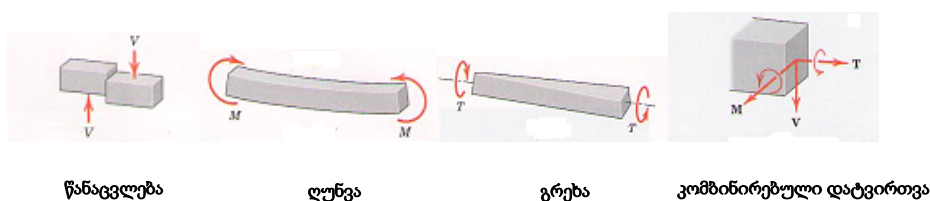
ნახ. 9.4.-ზე მოტანილი განაწილებისათვის არ არის აუცილებელი ცენტროიდის ვერტიკალური კომპონენტის განსაზღვრა.

თუ განაწილებული დატვირთვები დაიყვანება მათ ეკვივალენტურ კონცენტრირებულ დატვირთვებზე, ძელზე მოქმედი გარე უკუქმედებების დადგენა შეიძლება პირდაპირი სტატიკური ანალიზით.

9.2. ძელები - შიდა ეფექტები

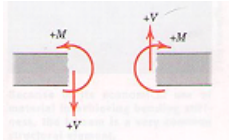
ამ პარაგრაფში შემოდის ძელების შიდა ეფექტები და გამოიყენება სტატიკის პრინციპები შიდა წანაცვლების და ღუნვის მომენტის, როგორც მდებარეობის ფუნქციის გამოსათვლელად.

წანაცვლება, ღუნვა და გრება



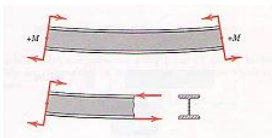
ნახ. 9.5.

ძაბვის ან კუმშვის გაძლების გარდა, ძელმა უნდა გაუძლოს წანაცვლებას, ღუნვას და გრეხას. ეს სამი ეფექტი ნაჩვენებია ნახ. 9.5.-ზე. ძალას V ეწოდება წანაცვლების ძალა, წყვილს H - ღუნვის მომენტი და წყვილს T - გრეხის მომენტი. ეს ეფექტები იმ ძალების ნაკრების ვექტორული კომპონენტებია, რომელიც მოქმედებს ძალის განივ ნაწილზე.



ნახ. 9.6.

განვიხილოთ წანაცვლების ძალა V და ღუნვის მომენტი H , გამოწვეული ძელზე ერთ სიბრტყეში მოქმედი ძალებით. წანაცვლების V და ღუნვის მომენტის დადებითი მნიშვნელობები (ნახ. 9.6.) საყოველთაოდ გამოიყენება. ქმედების და უკუქმედების პრინციპის თანახმად, V -ს და M -ს მიმართულებები საწინააღმდეგოა ორ სეგმენტზე. ხშირად გამოთვლის გარეშე შეუძლებელია იმის თქმა, არის წანაცვლება და მომენტი ცალკეულ ნაწილში დადებითი თუ უარყოფითი. ამ მიზნისათვის სასარგებლოა V -ს და M -ს წარმოდგენა მათი დადებითი მიმართულებებით თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამაზე და იმის დაშვება, რომ გამოთვლილი სიდიდეების ალგებრული ჯამი უჩვენებს სწორ მიმართულებებს.



ნახ. 9.7.

ღუნვის წყვილის, M -ს, ფიზიკური ინტერპრეტაციის უკეთ გააზრებისათვის განვიხილოთ ძელი (9.7.), რომელიც გაღუნულია ბოლოებზე მოდებული ორი ტოლი და საწინააღმდეგო დადებითი მომენტით. ძელის განივკვეთი განიხილება როგორც H -სეგმენტი ძალიან ვიწრო ცენტრალური წიბოთი და მძიმე ზედა და ქვედა კიდევებით. ამ ძელისათვის შეიძლება პატარა წიბოს დატვირთვის უგულებელყოფა ორ კიდესთან შედარებით. ძელის ზედა კიდე აშკარად დამოკლებულია და კუმშვის ქვეშაა, მაშინ როცა ქვედა კიდე წაგრძელებულია და ძაბვის ქვეშაა. ამ ორი ძალის ნაკრები, ერთი კუმშვის და მეორე - ძაბვის, რომელიც მოქმედებს ნებისმიერ სეგმენტზე, არის წყვილი და მას აქვს ღუნვის მომენტის სიდიდე. თუ ძელს აქვს განსხვავებული განივკვეთის ფორმა დატვირთვისას, ძალის განაწილება განივკვეთზე იქნება განსხვავებული, მაგრამ ნაკრები იქნება იგივე წყვილი.

წანაცვლება-ძალა და ღუნვა-მომენტის დიაგრამები

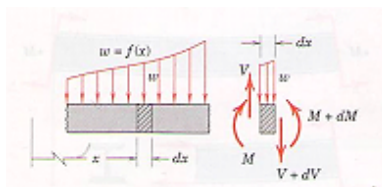
წანაცვლების ძალის V -ს და ღუნვის მომენტის M -ს ცვლილება ძელის მთელ სიგრძეზე იძლევა აუცილებელ ინფორმაციას ძელის ანალიზისათვის. კერძოდ, ღუნვის მომენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა, როგორც წესი, პირველ რიგში განიხილება ძელის დაპროექტებისას ან შერჩევისას და მისი სიდიდე და მდებარეობა ასევე განისაზღვრება. წანაცვლების და მომენტის ილუსტრაციის

საუკეთესო საშუალებაა გრაფიკი და V -ს და M -ს გრაფიკები ძელის გასწვრივ მანძილიდან დამოკიდებულებით იძლევა წანაცვლება-ძალის და ღუნვა-მომენტის დიაგრამებს.

წანაცვლების და მომენტის დამოკიდებულებების განსაზღვრისას პირველი საფეხურია ძელზე ყველა გარე უკუქმედების სიდიდეების დადგენა წონასწორობის განტოლებების გამოყენებით ძელის, როგორც მთელის, თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამაზე. შემდეგ ვახდენთ ძელის ნაწილის იზოლირებას ნებისმიერი განივი სეგმენტის მარჯვნივ ან მარცხნივ და ვიყენებთ წონასწორობის განტოლებებს ძელის ამ იზოლირებული ნაწილისათვის. ეს განტოლებები იძლევა გამოსახულებებს წანაცვლების ძალის V და ღუნვის მომენტისათვის M , რომლებიც მოქმედებენ ძელის იზოლირებული ნაწილის ამოკვეთილ სეგმენტზე. ძელის ნაწილი, რომელშიც მოქმედებს ძალების ნაკლები რაოდენობა, სეგმენტის მარჯვნივ ან მარცხნივ, როგორც წესი, იძლევა მარტივ ამოხსნას.

შეიძლება თავიდან ავიცილოთ განივი სეგმენტის გამოყენება, რომელიც ემთხვევა კონცენტრირებული დატვირთვის ან წყვილის მდებარეობას, როდესაც ასეთი მდებარეობა წყვეტადობის წერტილია წანაცვლების ან ღუნვის მომენტის ცვლილებისას. და ბოლოს, მნიშვნელოვანია იმის აღნიშვნა რომ V -ს და M -ს გამოთვლა თითოეულ არჩეულ სეგმენტზე უნდა ემთხვეოდეს დადებით შეთანხმებას.

დატვირთვის, წანაცვლების და მომენტის ძირითადი დამოკიდებულებები



ნახ. 9.8.

განაწილებულ დატვირთვებიანი ნებისმიერი ძელისათვის უნდა დავადგინოთ გარკვეული დამოკიდებულებები, რომლებიც დიდად გვეხმარება ძელის გასწვრივ წანაცვლების და მომენტის განაწილების დადგენაში. ნახ. 9.8.-ზე წარმოდგენილია დატვირთული ძელის ნაწილი, სადაც ძელის ელემენტი dx იზოლირებულია. დატვირთვა w არის ძალა ძელის სიგრძის ერთეულზე. x მდებარეობისას ელემენტზე მოქმედი წანაცვლება V და მომენტი M ნაჩვენებია დადებითი მიმართულებით. ელემენტის საწინააღმდეგო მხარეს, სადაც კოორდინატია $x + dx$, ეს სიდიდეები ასევე ნაჩვენებია დადებითი მიმართულებით. მაგრამ ისინი უნდა აღნიშნოს $V + dV$ და $M + dM$, რადგან V და

M იცვლება x -ის მიხედვით. მოდებული დატვირთვა ω ელემენტის მთელ სიგრძეზე შეიძლება განვიხილოთ როგორც მუდმივი, რადგან ეს სიგრძე დიფერენციალური სიდიდეა და ზღვარში ω -ს ნებისმიერი ცვლილების ეფექტი ისპობა თავად ω -ს ეფექტთან შედარებით.

ელემენტის წონასწორობა მოითხოვს, რომ ვერტიკალური ძალების ჯამი იყოს ნულის ტოლი. ასე რომ

$$V - \omega dx - (V + dV) = 0$$

ან

$$\omega = -\frac{dV}{dx} \quad (9.1)$$

ამ განტოლებიდან ცხადია, რომ წანაცვლების დიაგრამის დახრა ყოველთვის მოდებული დატვირთვის უარყოფითი მნიშვნელობის ტოლი უნდა იყოს. ეს განტოლება სამართლიანია კონცენტრირებული დატვირთვის ორივე მხარეს, მაგრამ არა კონცენტრირებული დატვირთვისას, რადგან წარმოიქმნება წვეტადობა/წანაცვლების მკვეთრი ცვლილების გამო.

წანაცვლების ძალის V გამოსახვა შეიძლება დატვირთვის საშუალებით 9.1-ის ინტეგრირებით. ამდენად,

$$\int_{V_0}^V dV = - \int_{x_0}^x \omega - dx$$

ან $V = V_0 + (x_0$ -დან x -მდე დატვირთვის მრუდის ქვეშ ფართობის უარყოფითი სიდიდე)

ამ გამოსახულებაში V_0 არის წანაცვლების ძალა x_0 -ში და V არის წანაცვლების ძალა x -ში. დატვირთვის მრუდის ქვევით ფართობის შეკრება, ჩვეულებრივ, წანაცვლება-ძალის დიაგრამის აგების მარტივი გზაა.

ელემენტის წონასწორობა (ნახ. 9.8.) ასევე მოითხოვს, რომ მომენტების ჯამი იყოს ნულის ტოლი. მომენტების შეკრება ელემენტის მარცხენა მხარეს იძლევა:

$$M + \omega dx \frac{dx}{2} + (V + dV)dx - (M + dM) = 0$$

M -ები ბათილდება და შეიძლება $\omega(dx)^2/2$ და $dVdx$ წევრების ამოგდებაც, რადგან ისინი მაღალი რიგის დიფერენციალებია. ამიტომ

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (9.2)$$

ეს გამოსახავს იმ ფაქტს, რომ წანაცვლება ყველგან უდრის მომენტის მრუდის დახრას. განტოლება 9.2 სამართლიანია კონცენტრირებული დატვირთვის ორივე მხარეს, მაგრამ არა კონცენტრირებულ დატვირთვაზე, მომენტის მკვეთრი ცვლილებით გამოწვეული წყვეტადობის გამო.

M -ს გამოსახვა შეიძლება წანაცვლების საშუალებით 9.2-ის ინტეგრირებით. ამდენად,

$$\int_{M_o}^M dM = \int_{x_o}^x V dx$$

ან $M = M_o +$ (ფართობი x_o -დან x -მდე წანაცვლების დიაგრამის ქვეშ).

ამ გამოსახულებაში M_o არის ღუნვის მომენტი x_o -ში, M – ღუნვის მომენტი x -ში. ძელებისათვის, რომლებშიც $x_o = 0$ -ში არ არის გარედან მოდებული მომენტი M_o , ნებისმიერი სეგმენტის ნაკრები მომენტი სეგმენტის წანაცვლების დიაგრამის ქვეშ ფართობის ტოლია. დიაგრამის ქვეშ ფართობის შეკრება, ჩვეულებრივ, ყველაზე მარტივი გზაა მომენტის დიაგრამის ასაგებად.

როდესაც V გადის ნულში და x -ს უწყვეტი ფუნქციაა ($dV/dx \neq 0$), ღუნვის მომენტი იქნება მაქსიმალური ან მინიმალური, რადგან $dM/dx = 0$ ასეთ წერტილში. M -ს კრიტიკულ მნიშვნელობას ასევე აქვს ადგილი, როდესაც V წყვეტით კვეთს ნულოვან ღერძს, რასაც ადგილი აქვს ძელების კონცენტრირებული დატვირთვისას.

9.1. და 9.2. განტოლებებიდან ცხადია, რომ x -ში V ერთი რიგით მეტია, ვიდრე w -ს სიდიდე. ასევე H ერთი რიგით მეტია x -ში, ვიდრე V . შედეგად, M ორი F რიგით მეტია x -ში, ვიდრე w . ამდენად, $w = kx$ -ით დატვირთული ძელისათვის, რომელიც პირველი რიგისაა x -ში, წანაცვლება V მეორე რიგისაა და ღუნვის მომენტი M მესამე რიგის.

9.1. და 9.2. განტოლებების გაერთიანება იძლევა

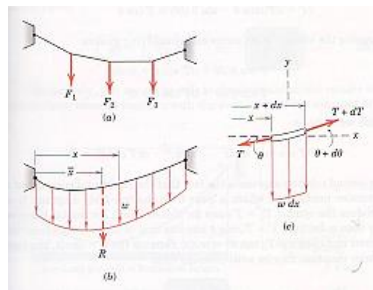
$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -w \quad (9.3)$$

ამრიგად, თუ w არის x -ს ცნობილი ფუნქცია, მომენტი M მიიღება ორი ინტეგრირებით, თუ ინტეგრირების ზღვრები ზუსტადაა დადგენილი დროის თითოეულ მომენტში. მეთოდის გამოყენება შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როდესაც w არის x -ს უწყვეტი ფუნქცია.

როდესაც ძელის გაღუნვას ადგილი აქვს ერთზე მეტ სიბრტყეში, ტარდება ცალკე ანალიზი თითოეული სიბრტყისათვის და ხდება შედეგების ვექტორული შეკრება.

თავი 10. ელასტიკური კაბელები

კონსტრუქციული ელემენტების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი სახეა ელასტიკური კაბელი, რომელიც გამოიყენება კიდულ ხიდებში, გადაცემის ხაზებში, მზიდ გვარლებში ტროლეიბუსის და ტელეფონის მძიმე ხაზების დასაკავებლად და სხვა. ასეთი კონსტრუქციების დასაპროექტებლად საჭიროა კაბელების ძაბვას, გაქანებას, ჩაკიდებას და სიგრძეს შორის დამოკიდებულებების დადგენა. ამ სიდიდეების განსაზღვრა ხდება კაბელის, როგორც წონასწორობაში მყოფი სხეულის, შემოწმებით. ელასტიკური კაბელის ანალიზისას ვუშვებთ, რომ **გალუნვით გამოწვეული** ნებისმიერი წინააღმდეგობა უმნიშვნელოა. ეს ნიშნავს, რომ ძალა კაბელში ყოველთვის კაბელისკენაა მიმართული.



ნახ. 10.1.ა, ბ, გ.

ელასტიკურმა კაბელმა შეიძლება გაუძლოს კონცენტრირებულ დატვირთვებს (ნახ. 10.1.ა.) ან დატვირთვებს, რომლებიც უწყვეტადაა განაწილებული კაბელის სიგრძეზე, როგორც ეს ნაჩვენებია ცვლადი ინტენსიურობის დატვირთვისათვის w (ნახ. 10.1.ბ.). რიგ შემთხვევებში კაბელის წონა უმნიშვნელოა დატვირთვებთან შედარებით. სხვა შემთხვევაში კაბელის წონა შეიძლება იყოს საგრძნობი დატვირთვა ან ერთეული დატვირთვა და მისი უგულებელყოფა არ შეიძლება. განურჩევლად ზევით აღწერილი პირობებისა, კაბელის მიმართ წონასწორობის მოთხოვნები ერთნაირად არის ჩამოყალიბებული.

ძირითადი დამოკიდებულებები

თუ ცვლადი უწყვეტი დატვირთვის ინტენსიურობა w (ნახ. 10.1.ბ.) გამოხატულია როგორც ძალა x -ს ჰორიზონტალური სიგრძის ერთეულზე, მაშინ ვერტიკალური დატვირთვის ნაკრებს R აქვს ასეთი სახე:

$$R = \int dR = \int w dx$$

სადაც ინტეგრირება ტარდება შესაბამის ინტერვალში. ჩვენ ვადგენთ მდებარეობას R მომენტის პრინციპიდან, ასე რომ,

$$R\bar{x} \int sxdR \quad \bar{x} = \frac{\int x dR}{R}$$

ელემენტარული დატვირთვა $dR = \omega dx$ წარმოდგენილია დატვირთვის დიაგრამაზე, როგორც ვერტიკალური სიგრძის ელემენტარული ზოლი ω და დაშტრიხული ფართობის სიგანე dx , და R წარმოდგენილია საერთო ფართობის სახით. შემდგომი განხილვიდან ირკვევა, რომ R გადის დაშტრიხული ფართობის ცენტროიდში.

კაბელის წონასწორობის პირობა კმაცოფილდება, თუ თითოეული უსასრულო ელემენტი წონასწორობაშია. დიფერენციალური ელემენტის ძალთა დიაგრამა ნაჩვენებია ნახ. 10.1.გ.-ზე. ძირითად მდგომარეობაში x ძაბვა კაბელზე არის T და კაბელი ადგენს θ კუთხეს ჰორიზონტალურ x -მიმართულებასთან. $x + dx$ მონაკვეთში ძაბვა არის $T + dT$ და კუთხე $\theta + d\theta$. მიღებულია, რომ როგორც T -ს, ასევე θ -ს მიმართულება დადებითია x -ს დადებითი ცვლილების დროს. ვერტიკალური დატვირთვა ωdx ამთავრებს ძალთა დიაგრამას. ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ძალების წონასწორობა მოითხოვს, რომ

$$\begin{aligned}(T + dT) \sin(\theta + d\theta) &= T \sin \theta + \omega dx \\ (T + dT) \cos(\theta + d\theta) &= T \cos \theta\end{aligned}$$

სინუსის და კოსინუსის ორი კუთხის ჯამად წარმოდგენა და შეტანა: $\sin d\theta = d\theta$ და $\cos d\theta = 1$, რაც სამართლიანია ზღვარში, როდესაც $d\theta$ უახლოვდება ნულს, იძლევა:

$$\begin{aligned}(T + dT)(\sin \theta + \cos \theta d\theta) &= T \sin \theta + \omega dx \\ (T + dT)(\cos \theta - \sin \theta d\theta) &= T \cos \theta\end{aligned}$$

მეორე რიგის წევრების ამოგდებათ და გამარტივებით მიიღება:

$$\begin{aligned}T \cos \theta d\theta + dT \sin \theta &= \omega dx \\ -T \sin \theta d\theta + dT \cos \theta &= 0\end{aligned}$$

$$\text{და } d(T \sin \theta) = \omega dx, \quad d(T \cos \theta) = 0.$$

მეორე დამოკიდებულება ასახავს იმ ფაქტს, რომ T -ს ჰორიზონტალური კომპონენტი უცვლელია, რაც ცხადია თავისუფალი სხეულის ძალთა

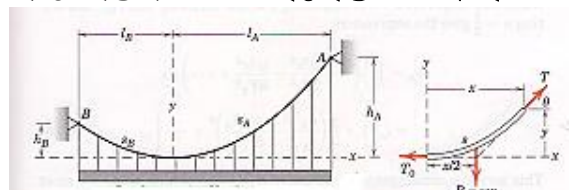
დიაგრამიდან. თუ ამ მუდმივი ჰორიზონტალური ძალისათვის შემოვიტანთ სიმბოლოს $T_0 = T \cos \theta$, $T = T_0 f \cos \theta$ შეიძლება ჩავანაცვლოთ პირველ განტოლებაში და მივიღოთ $d(T_0 \operatorname{tg} \theta) = \omega dx$. რადგან $\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$, წონასწორობის განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\omega}{T_0} \quad (10.1)$$

ეს არის დიფერენციალური განტოლება ელასტიკური კაბელისათვის. განტოლების ამოხსნა ფუნქციური დამოკიდებულება $y = f(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას და ასევე პირობებს კაბელის ფიქსირებულ ბოლოებზე, რომლებსაც **სასაზღვრო პირობები** ეწოდება. ეს დამოკიდებულება განსაზღვრავს კაბელის ფორმას და გამოიყენება კაბელის დატვირთვის ორი მნიშვნელოვანი და ზღვრული შემთხვევისათვის.

პარაბოლური კაბელი

როდესაც ვერტიკალური დატვირთვის ინტენსიურობა ω მუდმივია, ეს შემთხვევა ყველაზე ახლოსაა დაკიდულ ხიდთან, სადაც გზის ერთგვაროვანი წონა შეიძლება გამოისახოს მუდმივი ω -თი. თავისთავად კაბელის მასა არ არის ერთგვაროვნად განაწილებული ჰორიზონტალზე, მაგრამ ის შედარებით მცირეა და ამიტომ მის წონას უგულებელყოფენ. ასეთი ზღვრული შემთხვევისათვის ამბობენ, რომ კაბელი დაკიდულია **პარაბოლურ თადად**.



ω = დატვირთვა სიგრძის ერთეულზე

ა)

ბ)

ნახ. 10.2.ა, ბ.

განვიხილოთ კაბელი, რომელიც ჩამოკიდებულია ორი წერტილით A და B, რომლებიც არ მდებარეობენ ერთი და იგივე ჰორიზონტალურ ღერძზე (ნახ. 10.2.ა.). კოორდინატა სათავედ ვირჩევთ კაბელის ყველაზე დაბალ წერტილს, სადაც ძაბვა ჰორიზონტალურია და არის T_0 . 10.1 განტოლების ინტეგრირება x -ს მიმართ იძლევა

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega x}{T_0} + C$$

სადაც C ინტეგრირების მუდმივაა. არჩეული კოორდინატთა ღერძისათვის $\frac{dy}{dx} = 0$, როდესაც $x = 0$, ასე რომ $C = 0$. ამრიგად,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega x}{T_0}$$

რაც განსაზღვრავს მრუდის დახრას როგორც x -ს ფუნქციას. შემდგომი ინტეგრირებით ვიღებთ

$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{\omega x}{T_0} dx \quad \text{ან} \quad y = \frac{\omega x^2}{2T_0} \quad (10.2)$$

ალტერნატიულად, იდენტური შედეგები უნდა მივიღოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალით, ინტეგრირების მუდმივას გამოთვლასთან ერთად. 10.2. განტოლება იძლევა კაბელის ფორმას, რომელიც, როგორც ვნახეთ, ვერტიკალური პრობლემაა. კაბელის ძაბვის მუდმივი ჰორიზონტალური კომპონენტი ხდება კაბელის ძაბვა სათავეში.

შესაბამისი მნიშვნელობების: $x = l_A$ და $y = h_A$ 10.2-ში ჩასმა იძლევა

$$T_0 = \frac{\omega l_A^2}{2h_A} \quad \text{და} \quad y = h_A (x/l_A)^2$$

ძაბვა T განისაზღვრება კაბელის სასრულო ნაწილის ძალთა დიაგრამიდან (ნახ. 10.2.ბ.). პითაგორას თეორემის თანახმად,

$$T = \sqrt{T_0^2 + \omega^2 x^2}$$

$$T_0 \text{-ს გამორიცხვით} \quad T = \omega \sqrt{x^2 + (l_A^2/2h_A)^2} \quad (10.3)$$

მაქსიმალურ ძაბვას ადგილი აქვს, როდესაც $x = l_A$ და

$$T_{max} = \omega l_A \sqrt{1 + (l_A/2h_A)^2} \quad (10.3a)$$

თუმცა ინტეგრირება შეიძლება დახურული სახით, გამოთვლის მიზნებისათვის უფრო მოსახერხებელია რადიკალის, როგორც კრებადი მწკრივის სახით გამოსახვა და შემდეგ მის წევრ-წევრი ინტეგრირება. ამ მიზნით გამოიყენება ბინომიალური გამოსახულება:

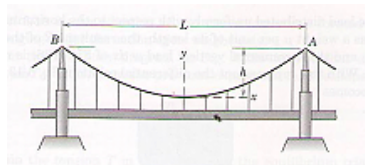
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

რომელიც იკრიბება, თუ $x^2 < 1$. x -ს ჩანაცვლება $(\omega x/T_0)^2$ -ით და $n = \frac{1}{2}$ - ის დაშვებით, გამოსახულება იღებს ასეთ სახეს:

$$S_A = \int_0^{l_A} \left(1 + \frac{\omega^2 x^2}{2T_0^2} - \frac{\omega^4 x^4}{8T_0^4} + \dots \right) dx = l_A \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{h_A}{l_A} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{h_A}{l_A} \right)^4 + \dots \right] \quad 10.4$$

ეს მწკრივი კრებადია $h_A/l_A < \frac{1}{2}$ მნიშვნელობისათვის, რაც სამართლიანია პრაქტიკული შემთხვევების უმრავლესობისათვის.

დამოკიდებულებები, რომლებიც გამოიყენება კაბელის მონაკვეთისათვის სათავიდან B წერტილამდე, ადვილად მიიღება h_A -ს, l_A -ს და s_A -ს ჩანაცვლებით h_B -თი, l_B -თი და s_B -თი.



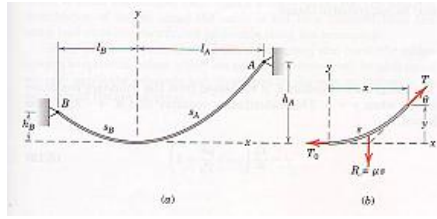
ნახ. 10.3.

დაკიდული ხიდისათვის, სადაც საყრდენები ერთი და იგივე ჰორიზონტალურ წრფეზეა (ნახ. 10.3.), მთლიანი გაქანება $L = 2l_A$, ჩაკიდება $h = h_A$ და კაბელის მთელი სიგრძე $S = 2s_A$. ამის გათვალისწინებით მაქსიმალური ძაბვა და მთელი სიგრძე ასე გამოისახება:

$$T_{max} = \frac{\omega L}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{L}{4h} \right)^2} \quad (10.3b)$$

$$S = L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{L} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{L} \right)^4 + \dots \right] \quad (10.4a)$$

ეს რიგები კრებადია $h/L < \frac{1}{4}$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის. უმრავლეს შემთხვევაში h ბევრად უფრო მცირეა, ვიდრე $L/4$, ასე რომ, 10.4.ა.-ს სამი წევრი იძლევა საკმაოდ ზუსტ მიახლოებას.



ნახ. 10.4.ა, ბ.

კიდული (მზიდი) კაბელი

განვიხილოთ ერთგვაროვანი კაბელი (10.4.ა.) დაკიდული ორი წერტილით A და B და გაღუნული მხოლოდ საკუთარი წონის ქმედებით. ასეთ ზღვრულ შემთხვევაში ამბობენ, რომ კაბელი იძენს მრუდის ფორმას და არის **კიდული**.

s სიგრძის კაბელის სასრულო მონაკვეთის ძალთა დიაგრამა ნაჩვენებია ნახ. 10.4.ბ.-ზე. დიაგრამა განსხვავდება ნახ. 10.2.ბ.-სგან იმით, რომ მთლიანი ვერტიკალური ძალა s სიგრძის კაბელის მონაკვეთის წონის ტოლია და არა დატვირთვის, რომელიც თანაბრადაა განაწილებული ჰორიზონტალზე. თუ კაბელის წონაა μ მისი სიგრძის ერთეულზე, მაშინ დატვირთვის ნაკრები $R = \mu s$ და ინკრემენტალური ვერტიკალური დატვირთვა μdx (ნახ. 10.1.გ.) ჩაინაცვლება μds -ით. ამის შედეგად დიფერენციალური დამოკიდებულება (განტოლება 10.1) იღებს სახეს

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0} \frac{ds}{dx} \quad (10.5)$$

რადგან $s = f(x, y)$, ეს განტოლება უნდა შევცვალოთ ისეთით, სადაც მხოლოდ ორი უცნობია. $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ შეტანით ვიღებთ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (10.6)$$

ეს არის მრუდის (კიდულის) დიფერენციალური განტოლება კაბელისათვის. მისი ამოხსნა ადვილია, თუ შევიტანთ $P = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dP}{\sqrt{1 + P^2}} = \frac{\mu}{T_0} dx$$

$$\text{ინტეგრირებით } \ln(P + \sqrt{1 + P^2}) = \frac{\mu}{T_0} x + C$$

მუდმივა $C = 0$, რადგან $\frac{dy}{dx} = P = 0$, როდესაც $x = 0$. $P = \frac{dy}{dx}$ შეტანით და ექსპონენციალურ ფორმაზე გადასვლით

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\mu x/T_0} - e^{-\mu x/T_0}}{2} = \sinh h \frac{\mu x}{T_0}$$

სადაც მოხერხებულობისათვის შემოტანილია ჰიპერბოლური ფუნქცია. ინტეგრირებით

$$y = \frac{T_0}{\mu} \cosh h \frac{\mu x}{T_0} + K$$

ინტეგრირების მუდმივა K გამოითვლება სასაზღვრო პირობიდან $x = 0$, როდესაც $y = 0$. ეს ჩანაცვლება მოითხოვს, რომ $K = -T_0/\mu$ და, შესაბამისად,

$$y = \frac{T_0}{\mu} \left(\cosh h \frac{\mu x}{T_0} - 1 \right) \quad (10.7)$$

ეს არის მრუდის (კიდულის) განტოლება, როდესაც კაბელი დაკიდულია მხოლოდ საკუთარი წონის ქმედებით.

ძალთა დიაგრამიდან (ნახ. 10.4.) ცხადია, რომ

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} Q = \mu s / T_0$$

ამრიგად,

$$s = \frac{T_0}{\mu} \sinh \frac{\mu x}{T_0} \quad (10.8)$$

ძაბვა T მიიღება ძალთა წონასწორობის სამკუთხედიდან (ნახ. 10.4.ბ.).

$$T^2 = \mu^2 s^2 + T_0^2$$

10.8-ან გაერთიანებით

$$T^2 = T_0^2 \left(1 + \sinh^2 \frac{\mu x}{T_0} \right) = T_0^2 \cosh^2 \frac{\mu x}{T_0}$$

აწ

$$T = T_0 \cosh^2 \frac{\mu x}{T_0} \quad (10.9)$$

ძაბვის გამოსახვა ასევე შეიძლება y -ის საშუალებით (10.7) განტოლების გამოყენებით, რომლის ჩასმა (10.9)-ში იძლევა

$$T = T_0 + \mu y \quad (10.10)$$

ამ განტოლების თანახმად, კაბელის ძაბვის ცვლილება მისი უდაბლესი მდებარეობის ძაბვიდან მხოლოდ μy -ზეა დამოკიდებული.

კიდულებთან დაკავშირებული პრობლემების უმრავლესობა მოითხოვს 10.7–10.10 განტოლებების ამოხსნას, რაც უნდა ჩატარდეს გრაფიკული მიახლოების ან კომპიუტერის საშუალებით.

ამ პრობლემის გადაჭრა, როდესაც გაქანება-ჩაკიდების ფარდობა მცირეა, შეიძლება პარაბოლური კაბელისათვის მიღებული დამოკიდებულებების გამოყენებით. ეს მცირე ფარდობა ნიშნავს დაჭიმულ კაბელს, რომელზეც წონის ერთგვაროვანი განაწილება დიდად არ განსხვავდება ისეთივე დატვირთვის ინტენსიურობისაგან, რომელიც განაწილებულია ჰორიზონტალზე.

კიდულ და პარაბოლურ კაბელებთან დაკავშირებული მრავალი პრობლემა მოიცავს დაკიდების წერტილებს, რომლებიც არ არიან ერთ დონეზე. ასეთ შემთხვევაში იყენებენ გამოსახულებებს, რომლებიც მიღებულია კაბელის ნაწილისათვის უდაბლესი წერტილის ორივე მხარეზე.

მე-8 – 10 თავების რეზიუმე

განაწილების ძალების ტოლქმედების დადგენა

1. პირველ რიგში ძალის ინტენსიურობას ამრავლებენ შესაბამისი ელემენტის მოცულობაზე, ფართობზე ან სიგრძეზე, რომელთა საშუალებითაც ინტენსიურობა გამოისახება. შემდეგ ახდენენ ინკრემენტალური ძალების შეკრებას (ინტეგრირებას) მათი ტოლქმედის მისაღებად საჭირო უბანში.
2. ამ ტოლქმედის წრფის მდებარეობის დასადგენად იყენებენ მომენტის პრინციპს. გამოთვლიან ძალის ყველა ინკრემენტის ელემენტების ჯამს კონკრეტული ღერძის მიმართ. ამ ჯამს უტოლბენ იგივე ღერძის მიმართ ტოლქმედის მომენტს. შემდეგ ამოხსნიან უცნობი ნაკრები მომენტის მხარისთვის.

გრავიტაციული ძალები

როდესაც ძალა განაწილებულია მასაზე, როგორც ამას ადგილი აქვს გრავიტაციული მიზიდულობისას, ინტენსიურობა არის მიზიდულობის ძალა pg

მოცულობის ერთეულზე, სადაც ρ არის სიმკვრივე და g – გრავიტაციული აჩქარება. მუდმივი სიმკვრივის სხეულებისათვის ρg ბათილდება, როდესაც გამოიყენება მომენტის პრინციპი. ეს აყენებს ზუსტ გეომეტრიულ პრობლემას ფიგურის ცენტროიდის დადგენის შესახებ, რომელიც ემთხვევა ფიზიკური სხეულის მასების ცენტრს, რომლის საზღვარიც განსაზღვრავს ფიგურას.

1. ბრტყელი ფილებისათვის და გარსაცმებისათვის, რომლებიც ჰომოგენურია და მუდმივი სისქისაა, პრობლემა დაიყვანება ფართობის თვისებების განსაზღვრაზე.
2. ერთგვაროვანი სიმკვრივისა და მუდმივი განიკვეთის წვრილი ღეროებისა და მავთულებისათვის პრობლემა დაიყვანება წრფივი სეგმენტის თვისებების დადგენაზე.

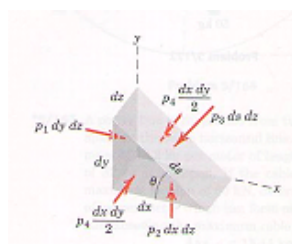
დიფერენციალური დამოკიდებულებების ინტეგრირება

1. აირჩიეთ კოორდინატთა სისტემა, რომელიც იძლევა ინტეგრირების უბნის საზღვრების ზუსტ აღწერას.
2. გამორიცხეთ მეორე რიგის დიფერენციალური სიდიდეები და დატოვეთ დაბალი რიგის სიდიდეები.
3. აირჩიეთ პირველი რიგის დიფერენციული ელემენტი მეორე რიგის ელემენტის ნაცვლად და მეორე რიგისა – მესამე რიგის ნაცვლად
4. თუ ეს შესაძლებელია, აირჩიეთ დიფერენციალური ელემენტი, რომელიც გამორიცხავს წყვეტას ინტეგრირების უბანში
5. განაწილებული ძალები ძელებში და კაბელებში
გახსოვდეთ, რომ ძელებისა და კაბელებისათვის ძალის ინტენსიურობა გამოისახება როგორც ერთეულოვანი სიგრძის ძალა.

თავი 11. დენადი მასების სტატიკა

ამ თავში განხილული იქნება მყარი სხეულების წონასწორობა, რომლებიც განიცდიან დენადი მასის წნევით გამოწვეული ძალების ქმედებას. **დენადი მასა** არის ნებისმიერი უწყვეტი ნივთიერება, რომელიც უძრაობისას ვერ აკავებს წანაცვლების ძალას. ეს ძალა იმ ზედაპირის მხებია, რომელზეც ის მოქმედებს და აღიძვრება როდესაც დენადი მასის მეზობელ ფენებს შორის ადგილი აქვს სხვადასხვა სიჩქარეს. ამრიგად, უძრავ დენად მასას შეუძლია აღძრას მხოლოდ ნორმალური ძალა სასაზღვრო ზედაპირზე. დენადი მასა შეიძლება იყოს როგორც აირადი, ასევე თხევადი. ზოგადად, დენადი მასების სტატიკას **ჰიდროსტატიკა** ეწოდება, როდესაც დენად მასას წარმოადგენს სითხე და **აეროსტატიკა**, როდესაც ასეთი მასა აირია.

დენადი მასის წნევა



ნახ. 11.1.

წნევა დენადი მასის ნებისმიერ წერტილში ერთნაირია ყველა მიმართულებით (პასკალის კანონი). ამის დასაბუთება შეიძლება დენადი მასის უსასრულოდ მცირე სამკუთხა პრიზმის წონასწორობის განხილვით (ნახ. 11.1.). დენადი მასის წნევა, ნორმალური ელემენტის საზღვრების მიმართ, არის P_1, P_2, P_3 და P_4 . ძალა უდრის წნევის ფართობზე ნამრავლს, ასე რომ ძალების წონასწორობა x და y -მიმართულებებით ტოლია:

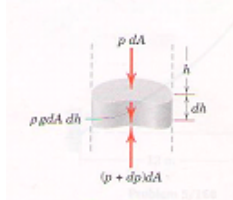
$$P_1 dydz = P_3 dsdz \sin \theta \quad P_2 dxdz = P_3 dsdz \cos \theta$$

რადგან $ds \sin \theta = dy$ და $ds \cos \theta = dx$, ვიღებთ

$$P_1 = P_2 = P_3 = P.$$

ელემენტის 90° -ით მოტრიალებით ცხადია, რომ P_4 ასევე დანარჩენი წნევების ტოლია. ამრიგად, უძრაობისას დენადი მასის ნებისმიერ წერტილში წნევა

ერთნაირია ყველა მიმართულებით. ამ ანალიზისას არ არის აუცილებელი დენადი მასის ელემენტის წონის ცოდნა, რადგან როდესაც ერთეულოვანი მოცულობის წონა (სიმკვრივე ρ გამრავლებული g -ზე) მრავლდება ელემენტის მოცულობაზე, წარმოიქმნება მესამე რიგის დიფერენციალური ელემენტი, რომელიც ზღვარში ისპობა მეორე რიგის წნევა-ძალის წევრებისგან განსხვავებით.



ნახ. 11.2.

ყველა უძრავ დენად მასაში წნევა ვერტიკალური განზომილების ფუნქციაა. ამ ფუნქციის განსაზღვრის მიზნით განვიხილოთ dA განივკვეთის ფართობის დენადი მასის ვერტიკალური სვეტის დიფერენციალური ელემენტი (ნახ. 11.2.). ვერტიკალური გაზომვის, h -ის, დადებითი მიმართულება აღებულია ზევით და ქვევით, წნევა ზედა საზღვარზე არის P და ქვედაზე $-P$ პლუს P -ს ცვლილება. ელემენტის წონა ρg მრავლდება მის მოცულობაზე. ნორმალური ძალები გვერდით ზედაპირზე, რომლებიც ჰორიზონტალურია და არ მოქმედებენ ძალთა ბალანსზე ვერტიკალური მიმართულებით, არ არის ნაჩვენები. დენადი მასის ელემენტის წონასწორობა h -მიმართულებით მოითხოვს.

$$p dA + \rho g dA dh - (p + dp) dA = 0 \quad dp = \rho g dh \quad (11.1)$$

ეს დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ წნევა დენად მასაში იზრდება სიღრმეში და მცირდება სიმაღლის ზრდით. განტოლება (11.1) სამართლიანია როგორც სითხეებისათვის, ასევე აირებისათვის და თანხმობაშია ჰაერის და წყლის წნევებზე დაკვირვებებთან.

დენად მასებს, რომლებიც, ძირითადად, უკუმშვადია, ეწოდება სითხეები და შემთხვევათა უმრავლესობისათვის მათ სიმკვრივეს, ρ -ს, განვიხილავთ როგორც მუდმივს სითხის ყველა ნაწილისათვის. აქედან, (11.1)-ს ინტეგრირებით ვიღებთ:

$$P = P_0 + \rho gh \quad (11.2)$$

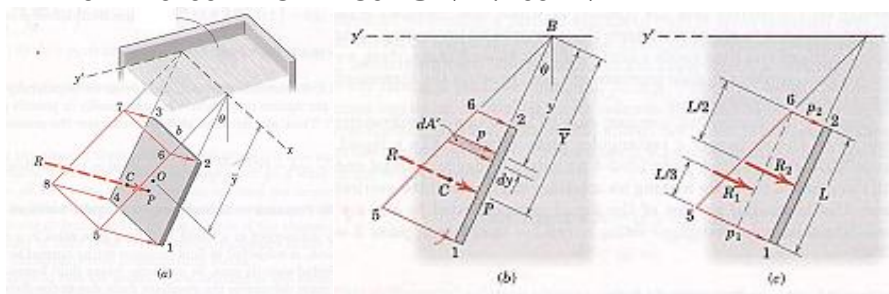
წნევა P_0 არის წნევა სითხის ზედაპირზე ($h = 0$), თუ P_0 გამოწვეულია ატმოსფერული წნევით და საზომი იარაღი აჩვენებს მხოლოდ ატმოსფერული წნევიდან გადახრას. გაზომვა გვაძლევს წნევას, რომელსაც ეწოდება მანომეტრული წნევა და გამოითვლება $p = \rho gh$ ფორმულიდან.

SI სისტემაში წნევის მიღებული ერთეულია კილოპასკალი (კპა), იგივეა რაც კილონიუტონი კვადრატულ მეტრზე (10^3ნ/მ^2). წნევის გამოთვლისას, თუ ვიყენებთ $M \text{ გ/მ}^3$ ρ -სთვის, მ/წმ^2 -ს g -სთვის და მ-ს h -თვის, მაშინ ნამრავლი ρgh პირდაპირ იძლევა წნევას კილოპასკალში. მაგალითად, მტკნარ წყალში 10 მეტრის სიღრმეზე წნევა იქნება:

$$p = \rho gh = 1.0 M \text{გ/მ}^3 \left(9.81 \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2} \right) (10 \text{მ}) = 98.1 \left(10^3 \frac{\text{კგ}\cdot\text{მ}}{\text{წმ}^2} \cdot \frac{1}{\text{მ}^2} \right) = 98.1 \text{ კნ/მ}^2 = 98.1 \text{ კპა}$$

ჩადირულ მართკუთხა ზედაპირებზე ჰიდროსტატიკური წნევა

სითხეში ჩადირული სხეული, როგორიცაა კაშხალის ჩამკეტი სარქველი ან რეზერვუარის კედელი, განიცდის დენადი მასის წნევას, რომლის ქმედება მისი ზედაპირის ნორმალურია და მთელ ფართობზეა განაწილებული. იმ შემთხვევაში, როცა დენადი მასის ძალები საგრძნობია, უნდა განისაზღვროს ნაკრები ძალა, განპირობებული წნევის ზედაპირზე განაწილებით და ის პოზიცია, რომელზეც ეს ნაკრები ძალა მოქმედებს. ჰაერზე მყოფი სისტემებისათვის ატმოსფერული წნევა P_0 მოქმედებს ყველა ზედაპირზე, რაც იძლევა ნულის ტოლ ნაკრებ ძალას. ასეთ შემთხვევაში უნდა განვიხილოთ მხოლოდ მანომეტრული წნევა $p = \rho gh$, რომელიც არის განსხვავება ატმოსფერული წნევიდან.



ნახ. 11.3.ა, ბ, გ.

განვიხილოთ სითხეში ჩადირული მართკუთხა ფირფიტის ზედაპირზე მოქმედი ჰიდროსტატიკური წნევის კერძო, მაგრამ საკმაოდ ცნობილი შემთხვევა. ნახ. 11.3. გვიჩვენებს, რომ ასეთი ფირფიტა, 1-2-3-4, თავისი ზედა ბოლოთი ჰორიზონტალურია და ფირფიტის სიბრტყესთან ერთად ადგენს ნებისმიერ θ კუთხეს ვერტიკალურ სიბრტყესთან. სითხის ჰორიზონტალური ზედაპირი წარმოდგენილია $x - y'$ სიბრტყით. დენადი მასის წნევა (მანომეტრული) მოქმედებს პერპენდიკულარულად სიბრტყეზე წერტილში 2 და წარმოდგენილია ისრით 6-2 და უდრის ρg -ს გამრავლებულს ვერტიკალურ მანძილზე სითხის ზედაპირიდან წერტილამდე 2. იგივე წნევა მოქმედებს ყველა წერტილზე 2-3

კიდეს გასწვრივ. 1-ელ წერტილში ქვედა კიდეზე დენადი მასის წნევა უდრის ρg -ს გამრავლებულს 1-ლი წერტილის სიღრმეზე და ეს წნევა ერთნაირია ყველა წერტილში 1-4 კიდეს გასწვრივ. წნევის ცვლილება სიბრტყის ფართობზე დამოკიდებულია სიღრმეზე და ამიტომ წარმოდგენილია ისრით P (ნახ. 11. 3.ა.), რომელიც წრფივად იცვლება 6-2-ს მნიშვნელობიდან 5-1 მნიშვნელობამდე. წნევის ასეთი განაწილებით წარმოქმნილი ნაკრები ძალა წარმოდგენილია როგორც R , რომელიც მოქმედებს გარკვეულ P წერტილში, რომელსაც წნევის ცენტრი ეწოდება.

პირობები, რომლებიც ჭარბობს ვერტიკალურ ნაწილში 1-2-6-5 (ნახ. 11.3.ა.), იდენტურია 4-3-7-8 ნაწილის და ფილას ნორმალურ ყველა შემდეგ ვერტიკალურ ნაწილში. ამრიგად, პრობლემის ანალიზი შეიძლება ჩატარდეს ვერტიკალური ნაწილის ორგანოზომილებიანი თვალთახევდით (ნახ. 11.3.ბ.) 1-2-6-5 ნაწილისათვის, რომლისთვისაც წნევის განაწილება ტრაპეციული ფორმისაა. თუ b არის ფილას ჰორიზონტალური სიგანე, რომელიც იზომება ფიგურის სიბრტყის ნორმალურად (მონაკვეთი 2-3, ნახ. 11.3.ა.), ფილას ფართობის ელემენტი, რომელზეც მოქმედებს $p = \rho gh$ წნევა, არის $dA = bdy$ და ნაკრები ძალის ინკრემენტი, $dR = pdA = bpd y$. მაგრამ pdy არის მხოლოდ ტრაპეციული ფორმის ფართობის, $-dA'$, დაშტრიხული ინკრემენტი, ასე რომ, $dR = bdA'$. ამიტომ მთელ ფილაზე მოქმედი ნაკრები ძალა შეიძლება გამოისახოს როგორც ტრაპეციული ფორმის ფართობი 1-2-6-5 გამრავლებული ფილას სიგანეზე, b .

$$R = b \int dA' = b A'$$

არ აგერიოთ ფილას ფიზიკური ფართობი გეომეტრიული A' ფართობთან, რომელიც განსაზღვრულია წნევის ტრაპეციული განაწილებით.

ტრაპეციული ფორმის ფართობი, რომელიც წარმოადგენს წნევის განაწილებას, ადვილად გამოისახება საშუალო სიმაღლის გამოყენებით. ამიტომ შეიძლება ნაკრები ძალის R ჩაწერა როგორც საშუალო წნევა $P_{AV} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ გამრავლებული ფილას ფართობზე A . საშუალო წნევა ასევე არის წნევა საშუალო სიღრმეზე, რომელიც იზომება ფილას ცენტროიდთან O . ამიტომ, R -ს ალტერნატიული გამოსახულება ასეთია:

$$R = P_{AV}A = \rho g \bar{h}A$$

სადაც $\bar{h} = \bar{y} \cos \theta$.

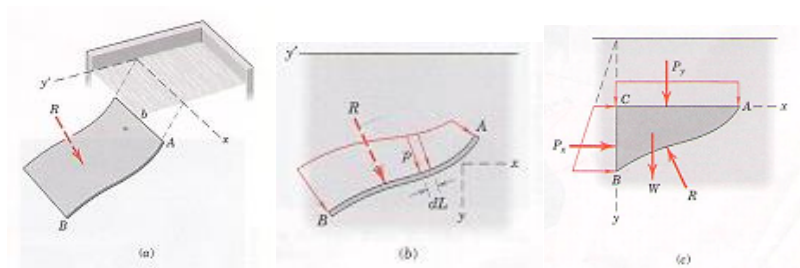
ნაკრები ძალის R ქმედების წრფე მიიღება მომენტის პრინციპიდან. x -ღერძის (ნახ. 11.3.ბ., წერტილი B), როგორც მომენტის ღერძის გამოყენება, იძლევა: $R\bar{y} = \int y(pbdy)$. $pdy = dA'$ და $R = bA'$ -ს ჩასმით და b' -ს ამოგდებათ მივიღებთ:

$$\bar{y} = \frac{\int y dA'}{\int dA'}$$

რაც უბრალოდ არის გამოსახულება ტრაპეციული ფორმის ფართობის A' ცენტროიდის კოორდინატებისათვის. ამიტომ ორგანზომილებიანი შემთხვევისათვის ნაკრები R გადის ტრაპეციული ფორმის ფართობის ცენტროიდში, რომელიც განსაზღვრულია ვერტიკალურ ნაწილში წნევის განაწილებით. ცხადია, $\bar{y}$ ასევე განსაზღვრავს წაჭრილი პრიზმის 1-2-3-4-5-6-7-8 ცენტროიდის მდებარეობას (ნახ.11.3.ა.), რომელშიც გადის ნაკრები.

წნევის ტრაპეციული განაწილებისათვის გამოთვლის გამარტივება შეიძლება ტრაპეციის მართკუთხედად და სამკუთხედად დაყოფით (ნახ. 11.3.გ.) და თითოეულ ნაწილში ძალის ცალ-ცალკე განხილვით. მართკუთხა ნაწილში ძალა მოქმედებს ფილას ცენტრზე O და ტოლია: $R_2 = p_2 A$, სადაც A არის ფილას ფართობი 1-2-3. სამკუთხა ნაწილში წარმოდგენილი ძალა R_1 არის $\frac{1}{2}(P_1 - P_2)A$ და მოქმედებს სამკუთხა ნაწილის ცენტროიდის გავლით.

ჰიდროსტატიკური წნევა ცილინდრულ ზედაპირებზე



ნახ. 11.4.ა, ბ, გ.

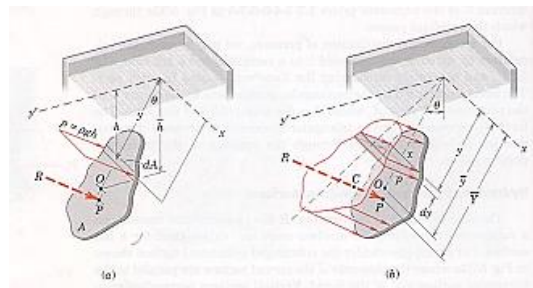
ნაკრები R -ს განსაზღვრა, დამოკიდებული წნევის განაწილებაზე ჩაძირულ მრუდე ზედაპირზე, მოითხოვს უფრო მეტ გამოთვლებს, ვიდრე ბრტყელი ზედაპირის შემთხვევაში. მაგალითად, განვიხილოთ ჩაძირული ცილინდრული ზედაპირი (ნახ. 11.4.ა.), სადაც მრუდე ზედაპირის ელემენტები სითხის ჰორიზონტალური ზედაპირის, $x - y'$ -ის პარალელურია. ზედაპირის პერპენდიკულარული ყველა ვერტიკალური ნაწილისათვის ადგილი აქვს იგივე AB მრუდს და იგივე წნევის განაწილებას. ამდენად, შეიძლება ორგანზომილებიანი წარმოდგენის გამოყენება (ნახ. 11.4.ბ.). R -ს პირდაპირი ინტეგრირებით განსაზღვრის მიზნით უნდა მოვახდინოთ dR -ს x - და y კომპონენტების ინტეგრირება AB მრუდის გასწვრივ, რადგან dR მუდმივად იცვლის მიმართულებას, ასე რომ,

$$R_x = b \int (pdL)_x = b \int p dy \quad \text{და} \quad R_y = b \int (pdL)_y = b \int p dx$$

მომენტის განტოლება არ არის საჭირო, თუ გვინდა R -ს მდებარეობის დადგენა.

R -ს დადგენის მეორე მეთოდი გაცილებით უფრო მარტივია. განვიხილოთ სითხის ABC -ბლოკის წონასწორობა პირდაპირ ზედაპირზე (ნახ. 11. 4.ა.). აქ ნაკრები R ამ ზედაპირის უკუქმედების ტოლია და საწინააღმდეგო. წნევის ტოლქმედები AC -ს და CB -ს გასწვრივ, შესაბამისად, P_y და R_x -ია და ადვილად ისაზღვრება. სითხის ბლოკის წონა W გამოითვლება მისი სეგმენტის ABC ფართობით, რომელიც მრავლდება მუდმივ b -ზე და ρg -ზე. წონა W გადის ABC ფართობის ცენტროიდში. შემდეგ გაწონასწორებული R მთლიანად დგინდება წონასწორობის განტოლებებიდან, რომლებსაც ვიყენებთ დენადი მასის ბლოკის ძალთა დიაგრამისათვის.

ნებისმიერი ფორმის ბრტყელი ზედაპირის ჰიდროსტატიკური წნევა



ნახ. 11.5.ა, ბ.

ნახ. 11.5.ა. გვიჩვენებს ნებისმიერი ფორმის ბრტყელ ფილას, რომელიც ჩამირულია სითხეში. სითხის ჰორიზონტალური ზედაპირია $x - y'$ სიბრტყე და ფილას სიბრტყე ვერტიკალთან ადგენს θ კუთხეს. ძალა, მოქმედი dA ფართობის დიფერენციალურ ზოლზე, რომელიც სითხის ზედაპირის პარალელურია, $dR = p dA = \rho g h dA$. წნევას p აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა ზოლის მთელ სიგრძეზე, რადგან ზოლის გასწვრივ სიღრმე არ იცვლება. A ფართობზე მოქმედი ნაკრები ძალა მიიღება ინტეგრირებით:

$$R = \int dR = \int p dA = \rho g \int h dA$$

$\bar{h}A = \int h dA$ შეტანით ვიღებთ:

$$R = \rho g \bar{h} A \quad (11.3)$$

სიდიდე $\rho g \bar{h}$ არის წნევა ფართობის ცენტროიდის O სიღრმეში და არის საშუალო წნევა მთელ ფართობზე.

ნაკრები R -ს გამოსახვა შეიძლება ასევე გეომეტრიულად ნახ. 11.5.ბ.–ზე ნაჩვენები ფიგურის მოცულობით V' . აქ დენადი მასის წნევა p წარმოდგენილია როგორც სიდიდე, რომელიც ფილას ნორმალურია, რაც, თავის მხრივ, განიხილება როგორც ფუძე. ნახაზიდან ცხადია, რომ საერთო მოცულობა არის წაკვეთილი მარჯვენა ცილინდრი. დიფერენციალურ ფართობზე $dA = x dy$ მოქმედი ძალა dR წარმოდგენილია ელემენტარული მოცულობით $p dA$ (დამტრიხულია) და ნაკრები ძალა წარმოდგენილია ცილინდრის საერთო მოცულობით. (11.3) განტოლებიდან ცხადია, რომ წაკვეთილი ცილინდრის საშუალო სიმაღლე არის საშუალო წნევა $\rho g \bar{h}$ სიღრმეში, რომელიც შეესაბამება ფართობის ცენტროიდს O .

იქ, სადაც ცენტროიდი O ან მოცულობა V' არ არის გამოკვეთილი, ტარდება პირდაპირი ინტეგრირება R -ს მისაღებად:

$$R = \int dR = \int p dA = \int \rho g h x dy$$

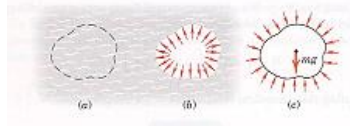
სადაც დიფერენციალური ფართობის ჰორიზონტალური ზოლის სიღრმე h და სიგრძე x შეიძლება გამოისახოს y -ის საშუალებით.

ნაკრები ძალის დადგენის შემდეგ საზღვრავენ მის მდებარეობას. მომენტის პრინციპის გამოყენებით x -ღერძისათვის, როგორც მომენტის ღერძისათვის, მიიღება:

$$R \bar{Y} = \int y dR \text{ ან } \bar{Y} = \frac{\int y(p x dy)}{\int p x dy} \quad (11.4)$$

ეს დამოკიდებულება აკმაყოფილებს წნევა–ფართობის წაკვეთილი ცილინდრის V' მოცულობის ცენტროიდის $\bar{Y}$ კოორდინატის განსაზღვრებას. ამიტომ ვასკვნით, რომ ნაკრები R გადის მოცულობის ცენტროიდში C , რომელიც აღიწერება როგორც ფილას ფართობი, როგორც ფუძე და წრფივად ცვლადი წნევა როგორც პერპენდიკულარული კოორდინატი. წერტილი P , რომელზეც მოდებულია R , წნევის ცენტრია. აღსანიშნავია, რომ წნევის ცენტრი p და ფილას ფართობის ცენტროიდი O არ არის ერთი და იგივე.

ტივტივადობა



ნახ. 11.6.ა, ბ, გ.

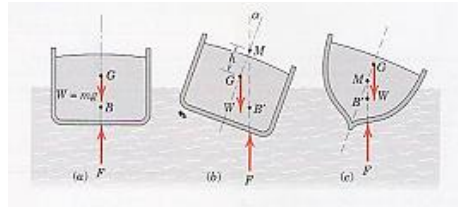
არქიმედეს საყოველთაო აღიარება მოუტანა მის მიერ აღმოჩენილმა **ტივტივადობის კანონმა**, რომელიც ადვილად აიხსნება წონასწორობაში მყოფი ნებისმიერი დენადი მასისათვის, იქნება ეს სითხე თუ აირი. განვიხილოთ დენადი მასის ნაწილი, რომელიც განსაზღვრულია წარმოსახვითი ჩაკეტილი ზედაპირით, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ. 11.6.ა.-ზე არარეგულარული წყვეტილი საზღვრით. თუ შეიძლება დენადი მასის სხეულის ამოღება ჩაკეტილი ღრუდან და მისი იმავდროული ჩანაცვლება ისეთი ძალებით, რომლებსაც ის აღძრავს ღრუს ზედაპირზე (ნახ. 11.6.ბ.), დენადი მასის წონასწორობა არ იქნება განაწილებული. მეტიც, ნახ. 11.6.გ.-დან ცხადია, რომ მის ზედაპირზე განაწილებული წნევის ძალების ტოლქმედი უნდა იყოს მისი წნევის, mg -ს ტოლი და საწინააღმდეგო და უნდა გადიოდეს დენადი მასის ელემენტის მასების ცენტრში. თუ დენადი მასის ელემენტს შევცვლით იგივე ზომის სხეულით, ამ პოზიციაში მყოფ სხეულზე მოქმედი ზედაპირული ძალები დენადი მასის ელემენტზე მოქმედი ძალების იდენტური იქნება. ამრიგად, დენად მასაში ჩაძირული ობიექტის ზედაპირზე მინიჭებული ნაკრები ძალა გადაადგილებული დენადი მასის წონის ტოლი და საწინააღმდეგოა და გადის გამოდევნილი დენადი მასის მასების ცენტრშია. ამ ნაკრებ ძალას **ამომგდები ძალა** ეწოდება.

$$F = \rho g V \quad (11.5)$$

აქ ρ -დენადი მასის სიმკვრივეა, g -გრავიტაციული აჩქარებაა და V -გამოდევნილი დენადი მასის მოცულობაა. სითხის შემთხვევაში, რომლის სიმკვრივეც უცვლელია, გადაადგილებული სითხის მასების ცენტრი თანხვედრა გამოდევნილი მოცულობის ცენტრშიდს.

ამრიგად, როდესაც ობიექტის სიმკვრივე ნაკლებია იმ დენადი მასის სიმკვრივეზე, რომელშიც ის ჩაძირულია, არის ძალების დისბალანსი ვერტიკალური მიმართულებით და ობიექტი იწევს ზევით. როდესაც ჩამძირავი დენადი მასა არის სითხე, ობიექტი განაგრძობს ზევით აწევას მანამ, სანამ არ მიაღწევს სითხის ზედაპირს და შემდეგ ჩერდება წონასწორობის მდგომარეობაში, რაც იმის მანიშნებელია, რომ ახალი დენადი მასის სიმკვრივე ზედაპირზე

ნაკლებია ობიექტის სიმკვრივეზე. სითხესა და აირს შორის, როგორიცაა, მაგალითად, წყალი და ჰაერი, სასაზღვრო ზედაპირის შემთხვევაში, აირის წნევის ეფექტი მოტივტივე ობიექტის ამ ნაწილზე სითხეში გაწონასწორებულია დამატებითი წნევით, რაც განპირობებულია აირის მოქმედებით მის ზედაპირზე.



ნახ. 11.7.ა, ბ, გ.

ტივტივადობის შემცველი მნიშვნელოვანი პრობლემაა მოტივტივე ობიექტის სტაბილურობის განსაზღვრა, როგორიცაა, მაგალითად, ნახ. 11.7.ა.-ზე ვერტიკალურ პოზიციაში ნაჩვენებია გემის კორპუსი(განივკვეთში). წერტილი B არის გამოდევნილი მოცულობის ცენტროიდი და მას **ტივტივადობის ცენტრი** ეწოდება. წყლის წნევის მიერ კორპუსზე მინიჭებული ძალების ტოლქმედი არის ამომგდები ძალა F , რომელიც გადის B-ში და გემის წონის, W -ს ტოლი და საწინააღმდეგოა. თუ გემი იხრება α -კუთხით (ნახ.11.7.ბ.), გამოდევნილი მოცულობის ფორმა იცვლება და ტივტივადობის ცენტრი წაინაცვლებს B' -კენ.

B' -ში გამავალი ვერტიკალური ხაზის გემის ცენტრის (ღერძის) ხაზთან გადაკვეთის წერტილს **მეტაცენტრი** M ეწოდება და M -ის h მანძილს მასების ცენტრიდან – G -ს **მეტაცენტრული სიმაღლე**. გემების უმრავლესობისათვის h პრაქტიკულად უცვლელია დაახლოებით 20° -ით გადახრის კუთხეებისათვის. როდესაც M -ი G -ზე მაღლაა (ნახ 11.7.ბ.), ადგილი აქვს აღმდგენ მომენტს, რომელიც ისწრაფვის დააბრუნოს გემი ვერტიკალურ მდგომარეობაში. თუ M -ი G -ზე დაბლაა (ნახ. 11.7.გ.) მომენტი მიმართულია დახრის გაზრდისკენ. ეს, ცხადია, არასტაბილურობის პირობაა და თავიდან უნდა იქნას აცილებული ნებისმიერი გემის დაპროექტებისას.

თავი 12. ხახუნი

12.1. შესავალი

წინა თავებში დაშვებული იყო, რომ კონტაქტში შემავალ ზედაპირებს შორის ქმედების და უკუქმედების ძალები ზედაპირების პერპენდიკულარულია. ეს დაშვება ახასიათებს გლუვი ზედაპირების ურთიერთქმედებას. თუმცა ეს იდეალური დაშვება ხშირად შეიცავს შედარებით მცირე შეცდომას. არის მრავალი პრობლემა, სადაც უნდა განვიხილოთ კონტაქტში შემავალი ზედაპირების უნარი აიტანოს როგორც ტანგენციალური (მხები), ასევე ნორმალური (პერპენდიკულარული) ძალები. ასეთ ზედაპირებს შორის წარმოქმნილ ტანგენციალურ ძალებს **ხახუნის ძალები** ეწოდება და მათ ადგილი აქვთ გარკვეული სიდიდით ყველა რეალურ ზედაპირებს შორის ურთიერთქმედებისას. როდესაც არის ტენდენცია, რომ ერთმა კონტაქტში შემავალმა ზედაპირმა ისრიალოს მეორე ზედაპირზე, წარმოქმნილი ხახუნის ძალები ყოველთვის მიმართულია ამ ტენდენციის საწინააღმდეგოდ.

მექანიზმების და პროცესების გარკვეული სახეებისათვის საჭიროა ხახუნის ძალების შემწელებელი ეფექტების მინიმიზება. ამის მაგალითებია ყველა სახის მზიდი საყრდენები, სავალი ხრახნი, კბილანები, მილებში დენადი მასების გადინება და ატმოსფეროში საფრენი აპარატების და რაკეტების მოძრაობა. სხვა სიტუაციებში საჭიროა ხახუნის ეფექტის მაქსიმალიზება, როგორც, მაგალითად, მუხრუჭების, გადაბმულობის, ღვედური ამძრავის და სოლისებრი ინსტრუმენტების შემთხვევაში. ბორბლიანი სატრანსპორტო საშუალებები დამოკიდებულია ხახუნზე როგორც დამკრისას, ასევე გაჩერებისას და ჩვეულებრივი ფეხით მოსიარულე დამოკიდებულია ფეხსაცმელსა და გრუნტს შორის ხახუნზე.

ხახუნის ძალები არსებობენ მთელ ბუნებაში და ყველა მანქანა-მექანიზმში იმისდა მიუხედავად, თუ როგორი სიფრთხილით და სიზუსტით არის ისინი დამზადებული და შეზეთილი. მექანიზმი ან პროცესი, რომელშიც ხახუნი იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება მისი უგულებელყოფა, ითვლება **იდეალურად**. როდესაც ხახუნი გასათვალისწინებელია, მექანიზმი ან პროცესი განიხილება როგორც **რეალური**. ყოველთვის, როდესაც ადგილი აქვს ნაწილებს შორის სრიალა მოძრაობას, ხახუნის ძალები იწვევს ენერგიის დანაკარგებს, რაც სითბოს სახით განიბნევა. ხახუნის მეორე ეფექტია ცვეთა.

12.2. ხახუნის სახეები

ა) მშრალი ხახუნი

მშრალ ხახუნს ადგილი აქვს როდესაც ორი მყარი სხეული, რომელთა ზედაპირები შეუზეთავია, ერთმანეთთან კონტაქტშია სრიალის ან სრიალისკენ სწრაფვისას. კონტაქტის ზედაპირისადმი ტანგენციალურ ხახუნის ძალას ადგილი აქვს ძვრის დასაწყისში, ისევე როგორც სრიალის დროს. ხახუნის ამ ძალის მიმართულება ყოველთვის მოძრაობის ან ძვრის დასაწყისის საწინააღმდეგოა. ასეთი ტიპის ხახუნს ასევე ეწოდება **კულონის ხახუნი**. მშრალი ან კულონის ხახუნის კანონები დაადგინეს 1781 წელს კულონმა ექპერიმენტების საშუალებით და მორინმა 1813-1834 წლებში. თუმცა დღემდე არ არის მშრალი ხახუნის ამომწურავი თეორია, 12.3-ში განხილული იქნება ანალიზური მოდელი, რომელიც საკმარისია მშრალ ხახუნთან დაკავშირებული პრობლემების უმრავლესობის გადაჭრასთან.

ბ) დენადი მასის ხახუნი

ამ ტიპის ხახუნს ადგილი აქვს, როდესაც დენად მასაში ორი მეზობელი ფენა (სითხე ან აირი) მოძრაობს სხვადასხვა სიჩქარით. ეს მოძრაობა იწვევს დენადი მასის ელემენტებს შორის ხახუნის ძალებს, რომლებიც დამოკიდებულია ფენებს შორის ფარდობით სიჩქარეზე. თუ ასეთი სიჩქარე არ არის, არც დენადი მასის ხახუნს აქვს ადგილი. დენადი მასის სიჩქარე დამოკიდებულია არა მარტო დენად მასაში სიჩქარის გრადიენტებზე, არამედ დენადი მასის სიბლანტეზეც, რომელიც არის დენადი მასის ელემენტებს შორის წანაცვლების ეფექტისადმი მისი წინააღმდეგობა.

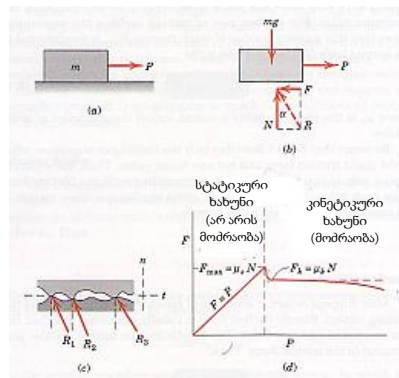
გ) შიდა ხახუნი

შიდა ხახუნს ადგილი აქვს ყველა მყარ მასალაში, რომლებიც პერიოდულად არიან დატვირთული. ძალზედ ელასტიკური მასალებისათვის დეფორმაციიდან გამოსვლა ხდება შიდა ხახუნით გამოწვეული ენერგიის ძალზედ მცირე დანაკარგებით. ელასტიკურობის უფრო დაბალი დონის მქონე მასალებისათვის, რომლებიც დატვირთვისას განიცდიან შესამჩნევ პლასტიკურ დეფორმაციას, ამ დეფორმაციას შეიძლება თან ახლდეს მნიშვნელოვანი სიდიდის შიდა ხახუნი. შიდა ხახუნის მექანიზმი დაკავშირებულია წანაცვლებით დეფორმაციის ქმედებასთან.

12.3. მშრალი ხახუნი

ამ ნაწილში აღწერილია მშრალი ხახუნის მოქმედება ხისტი მყარი სხეულებს შორის გარე ზედაპირებზე. ქმედების მექანიზმი აიხსნება მარტივი ექსპერიმენტით.

მშრალი ხახუნის მექანიზმი



ნახ. 12.1.ა, ბ, გ, დ.

განვიხილოთ m მასის მყარი ბლოკი, რომელიც მოთავსებულია ჰორიზონტალურ ზედაპირზე (ნახ.12.1.ა.). დაუშვათ, რომ საკონტაქტო ზედაპირები ხასიათდება გარკვეული ხორკლიანობით. ექსპერიმენტი მოიცავს ჰორიზონტალური ძალის p გამოყენებას, რომელიც განუწყვეტლივ იზრდება ნულიდან ისეთ მნიშვნელობამდე, რომელიც საკმარისია ბლოკის ასამოდრავებლად და მისთვის შესაძენევი სიჩქარის მისანიჭებლად. ბლოკის ძალთა დიაგრამა p -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ნაჩვენებია ნახ. 12.1.ბ.-ზე, სადაც ტანგენციალური ხახუნის ძალა, მინიჭებული ბლოკის სიბრტყისადმი, აღნიშნულია F -ით. სხეულზე მოქმედი ხახუნის ეს ძალა ყოველთვის იქნება მიმართული მოძრაობის საწინააღმდეგოდ ან ექნება სწრაფვა სხეულის მოძრაობისკენ. აქ ასევე არის ნორმალური ძალა N , რომელიც ამ შემთხვევაში უდრის mg -ს და ძალა R , რომელსაც მზიდი ზედაპირი ანიჭებს ბლოკს, არის N -ის და F -ის ნაკრები.

შემხები ზედაპირების უსწორობების გადიდებული გამოსახულება (ნახ. 12.1.გ.) გვეხმარება ხახუნის მექანიკური მოქმედების ვიზუალიზებაში. საყრდენი აუცილებლად არის წყვეტილი და მას ადგილი აქვს მიმხებ ამოზნექილობებზე. ბლოკზე თითოეული უკუქმედების მიმართულება, $R_1, R_2, R_3, \dots$ ა.შ. დამოკიდებულია არა მარტო უსწორობების გეომეტრიულ პროფილზე, არამედ

თითოეული საკონტაქტო წერტილის ლოკალური დეფორმაციის სიდიდეზე. ნაკრები ნორმალური ძალა, N არის R -ს n -კომპონენტების ჯამი და ნაკრები ხახუნის ძალა F არის R -ს t -კომპონენტების ჯამი. როდესაც ზედაპირები ფარდობით მოძრაობაშია, კონტაქტები უფრო ახლოსაა ამოზნექილობების ზედა ნაწილთან და R -ს t -კომპონენტები უფრო მცირეა, ვიდრე იმ შემთხვევაში, როდესაც ზედაპირები უძრავია ერთმანეთის მიმართ. ამით აიხსნება ის კარგად ცნობილი ფაქტი, რომ p ძალა, რომელიც საჭიროა მოძრაობის შესანარჩუნებლად, ძირითადად, ნაკლებია ვიდრე ის, რომელიც მოითხოვება ბლოკის დასაძრავად, როდესაც უსწორობები უფრო ახლოს არიან შეჭიდული.

თუ ჩავატარებთ ექსპერიმენტს და ჩავწერთ ხახუნის ძალის F , როგორც p -ს ფუნქციას, მივიღებთ ნახ. 12.1.დ.-ზე მოტანილ გამოსახულებას. როდესაც $p = 0$, წონასწორობა მოითხოვს, რომ არ იყოს ხახუნის ძალა, როდესაც p იზრდება, ხახუნის ძალა უნდა იყოს p -ს ტოლი და საწინააღმდეგო, სანამ ბლოკი არ სრიალებს. ამ პერიოდში ბლოკი წონასწორობაშია და ბლოკზე მოქმედი ყველა ძალა უნდა აკმაყოფილებდეს წონასწორობის განტოლებებს. და ბოლოს, მივაღწევთ p -ს მნიშვნელობას, რომელიც იწვევს ბლოკის გასრიალებას და მის მოძრაობას მოდებული ძალის მიმართულებით. ამავე დროს ხახუნის ძალა უმნიშვნელოდ და მკვეთრად მცირდება. ის, ძირითადად, არ იცვლება დროში, მაგრამ შემდგომში მცირდება სიჩქარის გაზრდისას.

სტატიკური ხახუნი

უბანს სრიალის წერტილის ან ძვრის დასაწყისის ზევით (ნახ. 12.1.დ.), ეწოდება **სტატიკური ხახუნის უბანი** და ამ უბანში ხახუნის ძალის მნიშვნელობა განისაზღვრება **წონასწორობის განტოლებებით**. ამ ძალამ შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა ნულიდან მაქსიმალურის ჩათვლით. მიმხები ზედაპირების მოცემული წყვილისათვის ექსპერიმენტი აჩვენებს, რომ ხახუნის ძალის ეს მაქსიმალური მნიშვნელობა F_{max} ნორმალური ძალის, N -ს პროპორციულია. ასე რომ,

$$F_{max} = \mu_s N \quad (12.1)$$

სადაც μ_s - პროპორციულობის მუდმივაა და მას **სტატიკური ხახუნის კოეფიციენტი** ეწოდება. გაითვალისწინეთ, რომ განტოლება (12.1) აღწერს მხოლოდ სტატიკური ხახუნის **ზღვრულ ან მაქსიმალურ** მნიშვნელობას და არა ნებისმიერ უფრო ნაკლებ სიდიდეს. ამდენად, განტოლება გამოიყენება მხოლოდ იმ შემთხვევებისათვის, როდესაც საქმე გვაქვს მოძრაობისას ხახუნის ძალის პიკურ მნიშვნელობასთან. სტატიკური წონასწორობის პირობიდან, როდესაც მოძრაობა არ არის მიმხები, **გამომდინარეობს, რომ სტატიკური ხახუნის ძალა $F < \mu_s N$**

კინეტიკური ხახუნი

სრიალის დაწყების შემდეგ კინეტიკური ხახუნის მდგომარეობა თან ახლავს შემდგომ მოძრაობას. ჩვეულებრივ, კინეტიკური ხახუნის ძალა ოდნავ ნაკლებია, ვიდრე მაქსიმალური სტატიკური ხახუნის ძალა. კინეტიკური ხახუნის ძალა F_k ასევე ნორმალური ძალის პროპორციულია. ამდენად,

$$F_k = \mu_k N \quad (12.2)$$

სადაც μ_k -კინეტიკური ხახუნის კოეფიციენტი. ზოგადად, μ_k ნაკლებია μ_s -ზე. ბლოკის სიჩქარის ზრდისას კინეტიკური ხახუნი ოდნავ მცირდება და მაღალ სიჩქარეებზე ეს შემცირება მნიშვნელოვანია. ხახუნის კოეფიციენტი ძლიერაა დამოკიდებული ზედაპირის ზუსტ მდგომარეობაზე, ისევე როგორც ფარდობით სიჩქარეზე და მნიშვნელოვანი ცდომილების მიზეზია.

ხახუნის მოქმედების განმსაზღვრელი პირობების მრავალფეროვნების გამო, საინჟინრო პრაქტიკაში ხშირად გამწვანებულია სტატიკური და კინეტიკური კოეფიციენტების ერთმანეთისგან გარჩევა, კერძოდ, ძვრის დასაწყისსა და მოძრაობას შორის უბანში. მაგალითად, კარგად გაზეთილი ხრახნის კუთხვილი მსუბუქი დატვირთვებისას ხშირად ამჟღავნებს თანაზომვად ხახუნის წინააღმდეგობას, იმისდა მიუხედავად, არის ის ტრიალის ზღვარზე თუ მოძრაობს.

საინჟინრო ლიტერატურაში ხშირად გვხვდება გამოსახულებები მაქსიმალური სტატიკური ხახუნისათვის და კინეტიკური ხახუნისათვის, რომლებიც უბრალოდ ჩაწერილია როგორც $F = \mu N$. ეს გასაგებია იმ პრობლემისათვის, რომელშიც აღიწერება მაქსიმალური სტატიკური ხახუნი ან კინეტიკური ხახუნი. თუმცა ჩვენ ხშირად ვანსხვავებთ სტატიკურ და კინეტიკურ კოეფიციენტებს, მაგრამ რიგ შემთხვევებში ეს განსხვავება არ უნდა გაკეთდეს და ხახუნის კოეფიციენტი უბრალოდ უნდა ჩაიწეროს როგორც μ . ასეთ შემთხვევებში უნდა გადაწყვიტოთ, თუ ხახუნის რომელი პირობა უნდა გამოიყენოთ: მაქსიმალური სტატიკური ხახუნი ძვრის დასაწყისში თუ კინეტიკური ხახუნი. კიდევ ერთხელ ხაზს ვუსვამთ იმას, რომ ბევრ პრობლემაში ჩართულია სტატიკური ხახუნის ძალა, რომელიც მოძრაობისას ნაკლებია მაქსიმალურ სიდიდეზე და ამიტომ ასეთ პირობებში განტოლება (12.1) ვერ გამოიყენება.

ნახ. 12.1.გ.-ზე ნაჩვენებია, რომ ხორკლიანი ზედაპირი ხასიათდება უფრო დიდი კუთხეებით უკუქმედებებსა და n -მიმართულებას შორის, ვიდრე გლუვი ზედაპირი. ამდენად, მიმხები ზედაპირების წყვილისათვის ხახუნის კოეფიციენტი ასახავს ხორკლიანობას, რომელიც ზედაპირის გეომეტრიული თვისებაა. ხახუნის ამ გეომეტრიული მოდელის საშუალებით მიმხები ზედაპირები აღიწერება

როგორც „გლუვი“, როდესაც ხახუნის ძალები უმნიშვნელოდ მცირეა. უაზრობაა ხახუნის კოეფიციენტზე ლაპარაკი ერთი ზედაპირისათვის.

ხახუნის კუთხეები

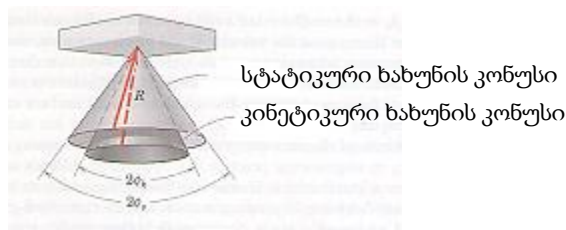
ნაკრები R -ს მიმართულება (ნახ. 12.1.ბ.) შეიძლება გაიზომოს N -ს მიმართულებიდან: $tg \alpha = F/N$ როდესაც ხახუნის ძალა მიაღწევს ზღვრულ სიდიდეს, F_{max} , კუთხეც, α ხდება მაქსიმალური, ϕ_s ამდენად,

$$tg \phi_s = \mu_s$$

როდესაც ადგილი აქვს სრიალს, α კუთხის მნიშვნელობაა ϕ_k , რაც შეესაბამება კინეტიკური ხახუნის ძალას. ანალოგიურად,

$$tg \phi_k = \mu_k$$

პრაქტიკაში ხშირად იყენებენ გამოსახულებას $tg \phi = \mu$, რომელშიც ხახუნის კოეფიციენტი შეიძლება ეხებოდეს როგორც სტატიკურ, ასევე კინეტიკურ შემთხვევას, რაც განპირობებულია კონკრეტული პრობლემით. ϕ_s კუთხეს **სტატიკური ხახუნის კუთხე** ეწოდება და ϕ_k -ს – **კინეტიკური ხახუნის კუთხე**. ხახუნის კუთხე თითოეულ შემთხვევაში ცხადად განსაზღვრავს საერთო უკუქმედების R -ს, R უნდა იყოს წვეროსთან მდებარე $2\phi_s$ კუთხის მარჯვენა წრიული კონუსის ერთი ელემენტი (ნახ. 12.2) თუ მოძრაობა არ არის დაწყებული, R კონუსის შიგნითაა.



ნახ. 12.2.

ამ კუთხის, $2\phi_s$ -ს კონუსს ეწოდება **სტატიკური ხახუნის კონუსი** და ის წარმოადგენს შესაძლო მიმართულებების ადგილმდებარეობას R უკუქმედებისათვის ძერის დასაწყისისას. თუ ადგილი აქვს მოძრაობას, ჩნდება კინეტიკური ხახუნის კუთხე და უკუქმედება უნდა მდებარეობდეს ზედა კუთხის, $2\phi_s$ -ს ოდნავ განსხვავებული კონუსის ზედაპირზე. ამ კონუსს **კინეტიკური ხახუნის კონუსი** ეწოდება.

ხახუნზე მოქმედი ფაქტორები

ექსპერიმენტებმა ცხადყო, რომ ხახუნის ძალა, არსებითად, კონტაქტის რეალური ან სავარაუდო ფართობიდან დამოუკიდებელია. რეალური საკონტაქტო ფართობი ბევრად უფრო მცირეა, ვიდრე სავარაუდო, რადგან მხოლოდ საკონტაქტო ზედაპირის უსწორობების პიკები იკავებს დატვირთვას. შედარებით მცირე ნორმალური დატვირთვებიც კი იწვევს მაღალ ძაბვებს კონტაქტის წერტილებში. ნორმალური ძალის გაზრდისას რეალური საკონტაქტო ფართობი ასევე იზრდება, როდესაც მასალა განიცდის პლასტიკურ დეფორმაციას, მსხვრევას ან რღვევას კონტაქტის წერტილებში.

მშრალი ხახუნის ამომწურავი თეორია მიიღება ქვემოთ წარმოდგენილი მექანიკური ახსნა-განმარტებით. მაგალითად, არის იმის საფუძველი, რომ მოლეკულურმა მიზიდულობამ შეიძლება გამოიწვიოს ხახუნი ისეთ პირობებში, როდესაც მიმხები ზედაპირები ერთმანეთთან მჭიდრო კონტაქტშია. მშრალ ხახუნზე მოქმედი სხვა ფაქტორებია მაღალი ლოკალური ტემპერატურები და ადჰეზია კონტაქტის წერტილებში, მიმხები ზედაპირების ფარდობითი სიმტკიცე და ოქსიდების, ზეთის ან სხვა ნივთიერებების თხელი ზედაპირული ფენების არსებობა.

ხახუნის პრობლემების სახეები

არის მშრალი ხახუნის შემცველი პრობლემების სამი სახეობა. ხახუნის პრობლემის გადაწყვეტის პირველი საფეხურია მისი სახის დადგენა.

1. პრობლემების **პირველი** სახეობისათვის ცნობილი უნდა იყოს ძვრის დასაწყისის პირობა. აქ წონასწორობაში მყოფი სხეული იმყოფება სრიალის ზედა წერტილში და ხახუნის ძალა ზღვრული სტატიკური ძალის, $F_{max} = \mu_s N$, ტოლია. რასაკვირველია, სამართლიანია წონასწორობის განტოლებებიც.
2. პრობლემების **მეორე** სახეობისათვის, არ არის ცნობილი არც ძვრის დასაწყისის, არც მოძრაობის პირობები. რეალური ხახუნის პირობების დასადგენად პირველ რიგში უნდა დაუშვათ სტატიკური წონასწორობა და შემდეგ დავადგინოთ წონასწორობისთვის აუცილებელი ხახუნის ძალა F .

შესაძლებელია სამი შედეგი:

- a) $F < (F_{max} = \mu_s N)$: აქ შენარჩუნებულია წონასწორობისთვის აუცილებელი ხახუნის ძალა და ამიტომ ითვლება, რომ სხეული სტატიკურ წონასწორობაშია. ვითვალისწინებთ, რომ **რეალური** ხახუნის ძალა, F **ნაკლებია** ვიდრე ზღვრული მნიშვნელობა F_{max} , რომელიც მოცემულია (12.1) განტოლებით და F განსაზღვრულია **მხოლოდ** წონასწორობის განტოლებებით.

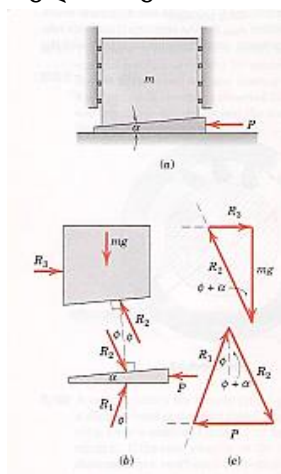
- b) $F = (F_{max} = \mu_s N)$: რადგან ამ შემთხვევაში ხახუნის ძალა F მაქსიმალურია, F_x , მოძრაობა გარდაუვალია. სტატიკური წონასწორობის ეს დაშვება სამართლიანია.
- c) $F > (F_{max} = \mu_s N)$: ცხადია, ეს პირობა შეუძლებელია, რადგან ზედაპირები ვერ იკავებენ უფრო მეტ ძალას, ვიდრე მაქსიმალური $\mu_s N$. ამიტომ, წონასწორობის ვარაუდი უვარგისია და ადგილი აქვს მოძრაობას. ხახუნის ძალა $\mu_k N$ (განტოლება 12.2)
3. პრობლემების მესამე სახისათვის ცნობილია, რომ ორ საკონტაქტო ზედაპირს შორის ადგილი აქვს ფარდობით მოძრაობას და ამდენად, ცხადად ჩნდება ხახუნის კინეტიკური კოეფიციენტი. ასეთი პრობლემებისათვის განტოლება 12.2 პირდაპირ იძლევა კინეტიკური ხახუნის ძალას.

თავი 13. ხახუნის გამოყენება მექანიზმებში

ამ თავში განხილულია ხახუნის მოქმედება სხვადასხვა მექანიზმში. რადგან ასეთი შემთხვევების პირობა, ჩვეულებრივ, ზღვრული სტატიკური ან კინეტიკური ხახუნია, ჩვენ, ძირითადად, გამოვიყენებთ ცვლადს μ (და არა μ_s ან μ_k -ს), იმისგან დამოკიდებულებით, არის მოძრაობა გარდაუვალი თუ რეალური, μ შეიძლება განვიხილოთ ხახუნის, როგორც სტატიკური ასევე კინეტიკური კოეფიციენტი.

13.1. სოლები

სოლი ერთ-ერთი მარტივი და ყველაზე სასარგებლო მექანიზმია და გამოიყენება სხეულის მდებარეობის ოდნავ შესაცვლელად ან დიდი ძალების მოსაღებად. მუშაობისას სოლები მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული ხახუნზე. როდესაც იწყება სოლის სრიალი, თითოეულ სრიალს ზედაპირზე ნაკრები ძალა უნდა გადაიხაროს ზედაპირისადმი ნორმალურად ხახუნის კუთხის ტოლი სიდიდით. ზედაპირის გასწვრივ ტოლქმედის კომპონენტი არის ხახუნის ძალა რომელიც ყოველთვის მიმართულია სოლის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ მიმხეზ ზედაპირებთან მიმართებით.

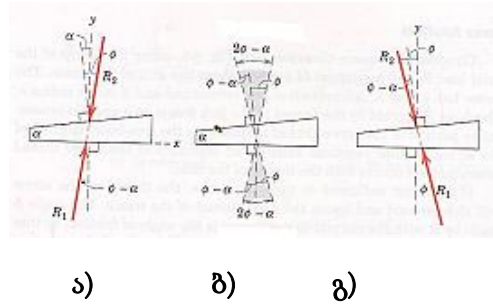


დატვირთვის ასაწევი
ძალები

ნახ. 13.1.

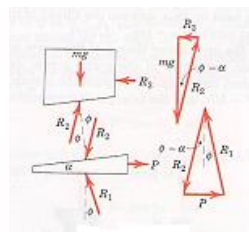
ა, ბ, გ, დ.

ნახ. 13.1.ა.-ზე ნაჩვენებია სოლი, რომელიც გამოიყენება დიდი მასის m -ის ქვევით დასაშვებად ან ასაწევად როდესაც ვერტიკალური დატვირთვაა mg . ზედაპირების თითოეული წყვილის ხახუნის კოეფიციენტი $\mu = \tan \phi$. ძალის, რომელიც საჭიროა სოლის ასამოძრავებლად, დადგენა ხდება დატვირთვაზე და სოლზე მოქმედი ძალების წონასწორობის სამკუთხედებიდან. თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამები ნაჩვენებია ნახ. 13.1.ბ.-ზე, სადაც უკუქმედებები გადახრილია ϕ კუთხით მათი შესაბამისი ნორმალებიდან და მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. სოლის მასას უგულებელვყოფთ. ძალთა დიაგრამიდან შეიძლება დაიწეროს ძალების წონასწორობის პირობები თითოეულ სხეულზე მოქმედი ძალების ვექტორების ჯამთან გატოლებით. ამ განტოლებების ამოხსნა მოტანილია ნახ. 13.1.გ.-ზე, სადაც, პირველ რიგში განისაზღვრება R_2 დიაგრამის ზედა ნაწილში mg -ს ცნობილი მნიშვნელობის საშუალებით. შემდეგ ისაზღვრება ძალა p ქვედა სამკუთხედიდან, როდესაც დადგენილია R_2 -ის მნიშვნელობა.



ნახ. 13.2.

თუ p მოცილებულია და სოლი რჩება ადგილზე, სოლის წონასწორობა მოითხოვს, რომ ტოლი უკუქმედებები R_1 და R_2 იყოს კოლინეარული (ნახ. 13.2.), სადაც დაშვებულია, რომ სოლის კუთხე α ნაკლებია ϕ -ზე. ნახაზის ა - ნაწილში წარმოდგენილია ძვრის დასაწყისი ზედა ზედაპირზე და გ - ნაწილში-ქვედა ზედაპირზე. იმისთვის, რომ სოლი გამოსრიალდეს თავისი სივრციდან, სრიალს ადგილი უნდა ქონდეს ერთდროულად ორივე ზედაპირზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში, სოლი არის თვითბლოკირებადი და არის R_1 -ს და R_2 -ს შესაძლო შუალედური კუთხური მდებარეობების სასრულო დიაპაზონი, რომლისთვისაც სოლი დარჩება ადგილზე. ნახ. 13.2.ბ.-ზე ნაჩვენებია ეს უბანი და ისიც, რომ ერთდროული სრიალი შეუძლებელია, თუ $\alpha < 2\phi$ თქვენ გაგიადვილდებათ დამატებითი დიაგრამების აგება შემთხვევებისთვის, როდესაც $\alpha > \phi$ და იმის შემოწმება, რომ სოლი თვითბლოკირებადია, თუ $\alpha < 2\phi$.



დატვირთვის დასაწყისი ძალები

ნახ. 13.3.

თუ სოლი თვითბლოკირებადია და მოსაცილებელია, საჭიროა სოლზე ძალის P მოდება. ძვრის დასაწყისისადმი წინააღმდეგობისათვის, უკუქმედებები R_1 და R_2 უნდა მოქმედებდნენ თავიანთი ნორმალების საწინააღმდეგო მხარეებზე განსხვავებით შემთხვევისა, როდესაც სოლი დაყენებულია. ამოხსნის მიღება შეიძლება დატვირთვის აწევის შემთხვევისათვის. ნახ. 13.3.-ზე ნაჩვენებია ძალთა დიაგრამა და ვექტორების პოლიგონები ამ შემთხვევისთვის.

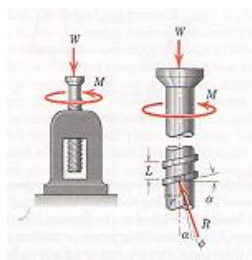
სოლის პრობლემებისათვის უპირატესია გრაფიკული ამოხსნა, როგორც ეს ნაჩვენებია ამ სამ ნახაზზე. გრაფიკული ამოხსნის სიზუსტე ადვილად მიიღწევა

დასაშვები გადახრებით, ხახუნის კოეფიციენტების ცდომილებასთან ერთად. ალგებრული ამოხსნის მიღება ასევე შეიძლება წონასწორობის პოლიგონების ტრიგონომეტრიიდან.

13.2. ხრახნები

ხრახნები გამოიყენება დასამაგრებლად და სიმძლავრის ან მოძრაობის გადასაცემად. თითოეულ შემთხვევაში წარმოქმნილი ხახუნი დიდად განსაზღვრავს ხრახნის მოქმედებას. სიმძლავრის ან მოძრაობის გადასაცემად კვადრატული კუთხვილი უფრო ეფექტურია, ვიდრე V-ფორმის კუთხვილი და ანალიზი აქ შემოიფარგლება კვადრატული კუთხვილით.

ძალების ანალიზი



ნახ. 13.4.

განვიხილოთ კვადრატულ-კუთხვილიანი დომკრატი (ნახ.13.4.), რომელიც იმყოფება ღერძული დატვირთვის W და ხრახნის ღერძზე მოდებული მომენტის M მოქმედების ქვეშ. ხრახნის კუთხვილის ბიჯია L (გადაადგილება ერთ ბრუნზე) და საშუალო რადიუსია r . ძალა, R , რომელსაც ანიჭებს კუთხვილი დომკრატის კორპუსს ხრახნის მცირე ნაწილზე, ნაჩვენებია ხრახნის ძალთა დიაგრამაზე. ანალოგიურ უკუქმედებებს ადგილი აქვს ხრახნის კუთხვილის ყველა სეგმენტზე, სადაც ხდება კონტაქტი ფუძის კუთხვილთან.

თუ M საკმარისია ხრახნის მოსატრიალებლად, ხრახნის კუთხვილი ისრიალებს კორპუსის ფიქსირებული კუთხვილის გარშემო და ზევით. R -ით კუთხვილთან შექმნილი კუთხე არის ხახუნის კუთხე, ასე რომ, $tg\phi = \mu$, ხრახნის ვერტიკალური ღერძის მიმართ მომენტი R არის $Rr\sin(\alpha + \phi)$ და ყველა უკუქმედებით გამოწვეული სრული მომენტი არის $\Sigma r\sin(\alpha + \phi)$, რადგან $r\sin(\alpha + \phi)$ ყველა წევრში შედის, ის შეიძლება ჯამის გარეთ გამოვიტანოთ. ხრახნის მომენტის წონასწორობის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$M = [r\sin(\alpha + \phi)]\Sigma R$$

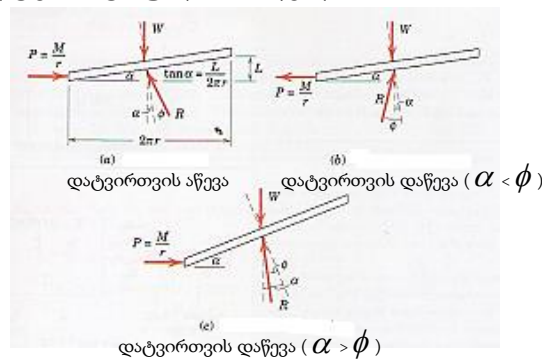
ძალების წონასწორობა ღერძის მიმართულებით მოითხოვს, რომ

$$W = \Sigma R \cos(\alpha + \phi) = [\cos(\alpha + \phi)] \Sigma R$$

M -ს და W -ს გამოსახულებების გაერთიანება იძლევა:

$$M = W r \tan(\alpha + \phi) \quad (13.1)$$

ხრახნის წრის დახრის კუთხის, α -ს განსაზღვრისათვის ხრახნის კუთხვილს ატრიალებენ ერთი სრული ბრუნით და აღნიშნავენ, რომ $\alpha = \tan^{-1}(L/2\pi r)$. შეიძლება გამოვიყენოთ ხრახნის დატრიალებული კუთხვილი როგორც მთელი ხრახნის მოქმედების ალტერნატიული მოდელი (ნახ. 13.5.ა.).



ნახ. 13.5.ა, ბ, გ.

ეკვივალენტური ძალა, რომელიც საჭიროა მოძრავი ხრახნის ფიქსირებული დახრისათვის, არის $P = M/r$ და განტოლება 13.1 მცისიერად იძლევა ძალების ვექტორების სამკუთხედს.

ამოხვევის პირობები

თუ მომენტი M მოცილებულია, ხახუნის ძალა იცვლის მიმართულებას ისე, რომ ϕ იზომება კუთხვილის ნორმალის მეორე მხარეზე. ხრახნი რჩება ადგილზე და იქნება თვითდაბლოკილი, რაც იძლევა $\alpha < \phi$ და იქნება ამოხვევის ზედა წერტილში, თუ $\alpha = \phi$.

ტვირთის დასაწევად ტრიალით, უნდა შეიცვალოს M -ის მიმართულება, როდესაც $\alpha < \phi$. ეს პირობა ნაჩვენებია ნახ. 13.5.-ზე ფიქსირებული გადახრისას ჩვენი მოდელირებული კუთხვილისათვის. ვექტორების სამკუთხედიდან მიიღება მომენტი, რომელიც აუცილებელია ხრახნის დაშვებისათვის.

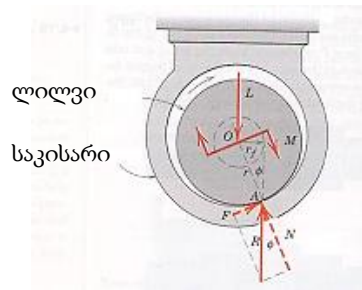
$$M = Wrtg(\phi - \alpha) \quad (13.1a)$$

თუ $\alpha > \phi$, ხრახნი თავისით ამოიხვევა და ნახ. 13.5.გ. გვიჩვენებს, რომ ამოხვევის თავიდან ასაცილებლად საჭირო მომენტი ტოლია:

$$M = Wrtg(\alpha - \phi) \quad (13.2b)$$

13.3. საყრდენი საკისრები

საყრდენი საკისრი განივად იკავებს ლილვს განსხვავებით ღერძული ან ბჯენითი მხარდაჭერიდან. მშრალი საკისრებისთვის და ნაწილობრივ გაზეთილი საკისრების უმრავლესობისათვის გამოიყენება მშრალი ხახუნის კანონები, რომლებიც დამაკმაყოფილებელი მიახლოებაა დაპროექტების მიზნებისათვის.



ნახ. 13.6.

მშრალი ან ნაწილობრივ გაზეთილი საყრდენი საკისრები ლილვთან კონტაქტში ან საკისრსა და ლილვს შორის **კონტაქტთან ახლოს** ნაჩვენებია ნახ. 13.6.-ზე სადაც მანძილი ლილვსა და საკისრს შორის გაზრდილია ქმედების თვალსაჩინოებისათვის. როდესაც ლილვი იწყებს ტრიალს, ის უახლოვდება საკისრის შიდა ზედაპირს მანამ, სანამ ის სრიალებს. აქ ის იქნება ცოტად თუ ბევრად ფიქსირებულ მდგომარეობაში ბრუნვის დროს. ბრუნვის შესანარჩუნებლად საჭიროა ბრუნვის მომენტი M და ლილვზე რადიალური დატვირთვა L იწვევს R უკუქმედებას კონტაქტის წერტილში A . ვერტიკალური წონასწორობისთვის R უნდა იყოს L -ის ტოლი, მაგრამ არ უნდა იყოს მისი კოლინეარული. ამდენად, R იქნება r_b რადიუსის პატარა წრის მხები, რომელსაც **ხახუნის წრე** ეწოდება. კუთხე R -ის და მის ნორმალურ კომპონენტს, N -ს შორის არის ხახუნის კუთხე ϕ . A -ს მიმართ მომენტების ჯამის ნულთან გატოლებით ვიღებთ:

$$M = Lr_b = Lz \sin \phi \quad (13.3)$$

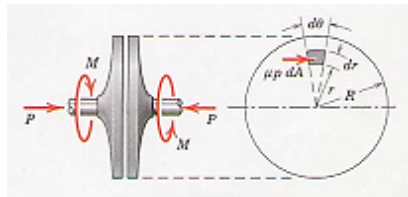
ხახუნის კოეფიციენტის მცირე სიდიდისათვის კუთხე ϕ მცირეა და შეიძლება სინუსის და ტანგენსის ურთიერთჩანაცვლება. რადგან $\mu = tg\phi$, კარგი მიახლოებით

$$M = \mu Lr \quad (13.4)$$

ეს გამოსახულება იძლევა ბრუნვის მომენტის სიდიდეს, რომელიც უნდა მოედოს ლილვზე ხახუნის დასაძლევად მშრალი ან ნაწილობრივ გაზეთილი საყრდენი საკისრებისათვის.

13.4. ბჯენითი საკისრები. დისკოს ხახუნი

განაწილებული ნორმალური წნევების მოქმედებისას წრიულ ზედაპირებს შორის ხახუნი წარმოიქმნება სახსრიან საყრდენებში, გადაბმულობის დისკოებში და დისკოსებზე მუხრუჭებში. ამ სიტუაციების ანალიზისათვის განვიხილოთ ორი ბრტყელი წრიული დისკო (ნახ. 13.7.).



ნახ. 13.7.

მათი ლილვები დამონტაჟებულია საკისრებში (არ არის ნაჩვენები) ისე, რომ ისინი შეიძლება შევიდნენ კონტაქტში აქსიალური ძალის P მოქმედებით. მაქსიმალური მომენტი, რომელიც ამ გადაბმულობამ შეიძლება გადასცეს, ბრუნვის მომენტის ტოლია M , რომელიც აუცილებელია ერთი დისკოს მეორის მიმართ სრიალისათვის. თუ P არის ნორმალური წნევა დისკოებს შორის ნებისმიერ მდგომარეობაში, ელემენტარულ ფართობზე მოქმედი ხახუნის ძალა არის $\mu p dA$, სადაც μ -ხახუნის კოეფიციენტია და dA არის ელემენტის ფართობი $r dr d\theta$. ამ ელემენტარული ხახუნის ძალის მომენტი ლილვის ღერძის მიმართ არის $\mu p r dA$ და საერთო მომენტი ასე გამოისახება:

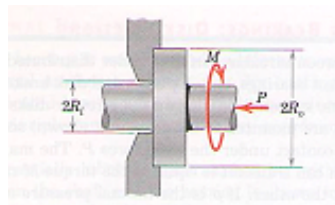
$$M = \int \mu p r dA$$

ინტეგრალი გამოითვლება დისკოს მთელ ფართობზე. ამ ინტეგრირების ჩასატარებლად საჭიროა ვიცოდეთ μ -ს და P -ს ცვლილება r -ზე დამოკიდებულებით.

შემდეგ მაგალითებში ივარაუდება, რომ μ მუდმივია, მეტიც, თუ ზედაპირები ახალია, ბრტყელი და კარგად არის გამაგრებული, ლოგიკურია დაუშვათ, რომ წნევა ერთგვაროვანია მთელ ზედაპირზე. ასე რომ, $\pi R^2 p = P$, μ -ს გამოსახულებაში შეტანა იძლევა:

$$M = \frac{\mu P}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\theta = \frac{2}{3} \mu p R \quad (13.5)$$

ეს შეიძლება განვიხილოთ როგორც მომენტის ეკვივალენტი, რომელიც გამოწვეულია ლილვის ცენტრიდან $\frac{2}{3} R$ მანძილზე მოქმედი ხახუნის ძალით.



ნახ. 13.8.

თუ ხახუნის დისკოები რგოლებია, როგორც სავარცხლური საკისრის შემთხვევაში (ნახ. 13.8.), ინტეგრირების საზღვრებია, შესაბამისად, შიდა და გარე რადიუსები, R_i და R_o და ხახუნის ბრუნვის მომენტი ასე გამოისახება:

$$M = \frac{2}{3} \mu P \frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \quad (13.5a)$$

როდესაც დასრულდება მისახმარისება, ზედაპირები მიიღებენ ახალ ფარდობით ფორმას და შემდგომი ცვეთა მუდმივია მთელ ზედაპირზე. ეს ცვეთა დამოკიდებულია როგორც გავლილ წრიულ მანძილზე, ასევე P წნევაზე. რადგან ეს მანძილი r -ს პროპორციულია, შეიძლება ჩაიწეროს გამოსახულება $rp = K$, სადაც K მუდმივაა, რომლის მნიშვნელობა გამოითვლება აქსიალური ძალების წონასწორობის პირობიდან:

$$P = \int p dA = K \int_0^{2\pi} \int_0^R dr d\theta = 2\pi k R$$

$pr = K = P/2\pi R$ -ს გათვალისწინებით, M ასე ჩაიწერება

$$M = \int \mu r dA = \frac{\mu P}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta$$

და

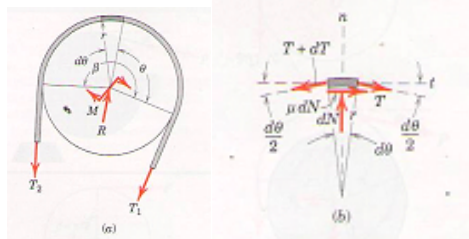
$$M = \frac{1}{2} \mu P R \quad (13.6)$$

ამიტომ, მისახმარისებული ფილების ხახუნის მომენტი ახალი ზედაპირებისათვის იქნება მხოლოდ $\frac{1}{2}/\frac{2}{3}$ ან $3/4$. თუ ხახუნის დისკოები შიდა R_i რადიუსიანი და გარე R_o რადიუსიანი რგოლებია, ვიღებთ ხახუნის მომენტს მისახმარისებული ზედაპირებისათვის.

$$M = \frac{1}{2} \mu P (R_o + R_i) \quad (13.6a)$$

13.5. მოქნილი ღვედები

მოქნილი კაბელების, ღვედების და ტროსების სრიალი შკივებზე და დოლებზე მნიშვნელოვანია ყველა სახის ღვედური ამძრავების, ლენტური მუხრუჭების და ტვირთამწევი მექანიზმების დაპროექტებისას.



ნახ. 13.9.ა, ბ.

ნახ. 13.9.ა.-ზე ნაჩვენებია დოლი, რომელზეც მოდებულია ორი ღვედის ძაბვა T_1 და T_2 , ბრუნვის თავიდან ასაცილებელი მომენტი M და საკისრის უკუქმედება R . M -ს ნაჩვენები მიმართულებისათვის $T_2 > T_1$. $r d\theta$ სიგრძის ღვედის ელემენტის ძალთა დიაგრამა ნაჩვენებია ნახ. 13.9.ბ.-ზე. დიფერენციალურ ელემენტზე მოქმედი ძალების ანალიზი ტარდება ელემენტის წონასწორობის დადგენით სხვა ცვლადი ძალის პრობლემების ანალოგიურად. ძაბვა იზრდება T - ან $(\theta$ კუთხეზე) $T + dT$ -მდე $(\theta + d\theta$ კუთხეზე). ნორმალური ძალა არის დიფერენციალი dN , რადგან ის მოქმედებს ფართობის დიფერენციალურ ელემენტზე. ანალოგიურად, ხახუნის ძალა, რომელმაც უნდა იმოქმედოს ღვედზე სრილის საწინააღმდეგო მიმართულებით, არის დიფერენციალი μdN ძვრის დასაწყისისათვის.

t -მიმართულებით წონასწორობა იძლევა:

$$T \cos \frac{d\theta}{2} + \mu dN = (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2}$$

$$\text{ან } \mu dN = dT$$

სადაც ვიყენებთ იმ ფაქტებს, რომ ზღვარში დიფერენციალური კუთხის კოსინუსი ერთის ტოლია და ორი დიფერენციალის ნამრავლი ზღვარში უმნიშვნელოა დარჩენილ პირველი რიგის დიფერენციალებთან შედარებით.

წონასწორობის ორი განტოლების გაერთიანება გვაძლევს:

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

შესაბამის ზღვრებში ინტეგრირებით

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\beta \mu d\theta \quad \text{ანუ} \quad \ln \frac{T_2}{T_1} = \mu \beta$$

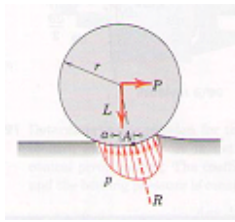
სადაც $\ln(T_2/T_1)$ არის ნატურალური ლოგარიტმი. ამოხსნა T_2 -თვის იძლევა:

$$T_2 = T_1 e^{\mu \beta} \quad (13.7)$$

აღსანიშნავია, რომ β არის ღვედის კონტაქტის სრული კუთხე და გამოისახება რადიანებში. თუ ტროსი შემოხვეულია დოლზე n -ჯერ, კუთხე $\beta = 2\pi n$ რადიანს. განტოლება 13.7 სამართლიანია არაწრიული სეგმენტისათვის, სადაც კონტაქტის სრული კუთხე $= \beta$. ეს დასკვნა ცხადია იმ ფაქტიდან, რომ წრიული დოლის რადიუსი r (ნახ. 13.9.) არ შედის ღვედის დიფერენციალური ელემენტის წონასწორობის განტოლებებში.

განტოლება (13.7) ასევე გამოიყენება ღვედური ამძრავებისათვის, სადაც როგორც ღვედი, ასევე შკივი ბრუნავენ მუდმივი სიჩქარით. ამ შემთხვევაში განტოლება აღწერს სრიალისათვის ან ძვრის დასაწყისისათვის ღვედის ძაბვების ფარდობას. როდესაც ბრუნვის სიჩქარე იზრდება, ღვედი ცდილობს დატოვოს ფერსო. ასე რომ, ამ შემთხვევაში განტოლება 13.7 შეიცავს მცირეოდენ შეცდომას.

13.6 ბრუნვისადმი წინააღმდეგობა



ნახ. 13.10.

მბრუნავ ბორბალსა და მის საყრდენ ზედაპირებს შორის კონტაქტის წერტილში დეფორმაცია იწვევს ბრუნვის მიმართ წინააღმდეგობას. ეს წინააღმდეგობა არ არის გამოწვეული ტანგენციალური ხახუნის ძალებით და ამიტომ მშრალი ხახუნის მოვლენისგან სავსებით განსხვავებულია.

ამ წინააღმდეგობის აღსაწერად განვიხილოთ ბორბალი (ნახ.13.10.), რომლის ღერძზეც მოქმედებს დატვირთვა L და რომლის ცენტრზე მოდებულია ძალა P ბრუნვის წარმოსაქმნელად. ბორბლის და საყრდენი ზედაპირების დეფორმაცია, როგორც ეს ნახაზიდან ჩანს, ძალზედ გაზრდილია. წნევის P განაწილება კონტაქტის ფართობზე ნაჩვენები განაწილების ანალოგიურია. ამ განაწილების ნაკრები R მოქმედებს რომელიღაც A წერტილზე და უნდა გადიოდეს ბორბლის ცენტრში, რათა ბორბალი იყოს წონასწორობაში. ძალა P აუცილებელია, რათა შევინარჩუნოთ მუდმივი სიჩქარით ბრუნვა A -ს მიმართ ყველა ძალის მომენტების ნულთან გატოლებით ეს იძლევა:

$$P = \frac{\alpha}{r} L = \mu_r L,$$

სადაც ივარაუდება, რომ მომენტის მხარი $P = r$. თანაფარდობას $\mu_r = \alpha/r$ ეწოდება ბრუნვისადმი **წინააღმდეგობის კოეფიციენტი**. ეს კოეფიციენტი არის წინააღმდეგობის ძალის ფარდობა ნორმალურ ძალასთან და, ამდენად, ის სტატიკური ან კინეტიკური ხახუნის ანალოგიურია. მეორე მხრივ, μ_r -ს ინტერპრეტაციაში არ არის გათვალისწინებული სრიალი ან ძვრის დასაწყისი.

რადგან α დამოკიდებულია მრავალ ფაქტორზე, რომელთა დადგენა ძნელია, არ არსებობს ბრუნვისადმი წინააღმდეგობის ყოვლისმომცველი თეორია. მანძილი α მიმხები მასალების დრეკადი და პლასტიკური თვისებების, ბორბლის რადიუსის, გადაადგილების სიჩქარის და ზედაპირების ხორკლიანობის ფუნქციაა. ცდება აჩვენა, რომ α ოდნავ იცვლება ბორბლის რადიუსის ცვლილებით და, ამდენად, ხშირად ითვლება, რომ α არ არის დამოკიდებული ბრუნვის რადიუსზე. სამწუხაროდ, ზოგჯერ α -ს უწოდებენ ბრუნვის ხახუნის კოეფიციენტს. მაგრამ α -ს აქვს სიგრძის განზომილება და ამიტომ ის არ არის განუზომელი კოეფიციენტი ამ ტერმინის ჩვეულებრივი გაგებით.

მე-12 და მე-13 თავების რეზიუმე

ხახუნის შესწავლისას მთავარი ყურადღება გამახვილებული იყო მშრალ ანუ კულონის ხახუნზე, სადაც კონტაქტში შემავალი სხეულების ზედაპირის უსწორობების მარტივი მექანიკური მოდელი ადეკვატურად აღწერს ხახუნის მოვლენას საინჟინრო მიზნების უმრავლესობისათვის. ეს მოდელი გვეხმარება მშრალი ხახუნის პრობლემების სამი სახეობის ვიზუალიზებაში, რომლებიც გვხვდება პრაქტიკაში. ეს პრობლემები შემდეგია:

1. სტატიკური ხახუნი მაქსიმალურ შესაძლო მნიშვნელობაზე ნაკლებია და განისაზღვრება წონასწორობის განტოლებებით (ჩვეულებრივ ეს მოითხოვს $F < \mu_s N$ -ს შემოწმებას).
2. ზღვრული სტატიკური ხახუნი ძვრის დასაწყისით ($F = \mu_s N$).
3. კინეტიკური ხახუნი, სადაც ადგილი აქვს სრიალით მოძრაობას მიმხეზ ზედაპირებს შორის ($F = \mu_k N$).

მშრალი ხახუნის პრობლემების გადაჭრისას გასათვალისწინებელია შემდეგი:

1. ხახუნის კოეფიციენტი გამოიყენება მიმხეზი ზედაპირების მოცემული წყვილისათვის. უაზრობაა ერთი ზედაპირისათვის ხახუნის კოეფიციენტის შესახებ ლაპარაკი.
2. ზედაპირების მოცემული წყვილისათვის სტატიკური ხახუნის კოეფიციენტი μ_s ოდნავ მეტია, ვიდრე კინეტიკური კოეფიციენტი μ_k .
3. სხეულზე მოქმედი ხახუნის ძალა ყოველთვის მიმართულია სხეულის სრიალის საწინააღმდეგოდ ან იმ შემთხვევაში, როდესაც ამ სრიალს ადგილი ექნება ხახუნის არ არსებობისას.
4. როდესაც ხახუნის ძალები განაწილებლია ზედაპირზე ან წრფის გასწვრივ, ვირჩევთ ზედაპირის ან წრფის ტიპიურ ელემენტს და ვითვლით ელემენტზე მოქმედი ელემენტარული ხახუნის ძალის და მომენტის ეფექტს. შემდეგ განვავრცობთ ამ ეფექტებს მთელ ზედაპირზე ან წრფეზე.
5. ხახუნის კოეფიციენტები მნიშვნელოვნად იცვლება მიმხეზი ზედაპირების ზუსტი მდგომარეობიდან დამოკიდებულებით. სამი მნიშვნელოვანი რიცხვითი ხახუნის კოეფიციენტების გამოთვლა სიზუსტეა, რომლის დუბლირება ექსპერიმენტით მწელია. როდესაც ასეთი რამ ციტირებულია, ეს სიდიდეები მოტანილია მხოლოდ გამოთვლის შემოწმების მიზნით. საინჟინრო პრაქტიკაში, ცნობარებში მოტანილი ნებისმიერი სიდიდე სტატიკური ან კინეტიკური ხახუნისთვის უნდა განვიხილოთ როგორც მიახლოებული.

თავი 14. შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობა

14.1. შესავალი

წინა თავებში გაანალიზებული იყო სხეულის წონასწორობა მისი იზოლირებით თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამის გამოყენებით და ნულოვანი ძალის და ნულოვანი მომენტის ერთობლივი განტოლებებით. ჩვეულებრივ, ეს მიახლოება გამოიყენება სხეულისათვის, რომლის წონასწორობის მდებარეობა ცნობილია ან განსაზღვრულია და როდესაც ერთი ან მეტი გარე ძალა უცნობია.

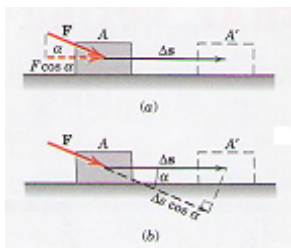
არსებობს პრობლემების განსაკუთრებული კლასი, რომელშიც სხეულები შედგენილია ურთიერთშეერთებული ელემენტებიდან, რომელთაც შეუძლიათ ერთმანეთის მიმართ მოძრაობა. ამდენად, შესაძლებელია სხვადასხვა წონასწორობის კონფიგურაციის არსებობა, რომელთა შესწავლა აუცილებელია. ამ ტიპის პრობლემებისათვის ძალის და მომენტის წონასწორობის განტოლებები, თუმცა ვარგისია და ადეკვატური, ხშირად არ წარმოადგენენ ყველაზე უშუალო და შესაბამის მიახლოებას.

ძალის მიერ შესრულებული მუშაობის კონცეპციაზე დაყრდნობილი მეთოდი უფრო პირდაპირია. მეთოდი ასევე უზრუნველყოფს მექანიკური სისტემების ქცევის უფრო ღრმა გააზრებას და წონასწორობაში მყოფი სისტემების სტაბილურობის შემოწმების შესაძლებლობას იძლევა. ამ მეთოდს ეწოდება **შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობის მეთოდი**.

14.2. მუშაობა

პირველ რიგში, უნდა განვსაზღვროთ ტერმინი **მუშაობა** მისი რაოდენობრივი გაგებით საყოველთაო არატექნიკური გამოყენების საწინააღმდეგოდ.

ძალის მუშაობა



ნახ. 14.1.ა, ბ.

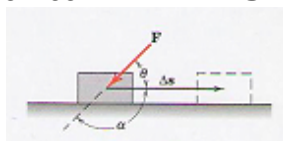
განვიხილოთ სხეულზე მოქმედი მუდმივი $\vec{F}$ ძალა (ნახ. 14.1.ა.); სხეულის მოძრაობა სიბრტყეში A –დან A' –მდე წარმოდგენილია $\Delta \vec{s}$ ვექტორით, რომელსაც სხეულის გადაადგილება ეწოდება. განმარტების თანახმად, $\vec{F}$ ძალის მიერ სხეულზე მისი გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობა არის ამ გადაადგილების მიმართულებით ძალის კომპონენტი გამრავლებული გადაადგილებაზე. ე. ი.

$$U = (F \cos \alpha) \Delta s$$

ნახ. 14.1.ბ.-დან ცხადია, რომ იგივე შედეგი მიიღება, თუ ძალის სიდიდეს გავამრავლებთ ამ ძალის მიმართულებით გადაადგილების კომპონენტზე, ანუ

$$U = F(\Delta s \cos \alpha)$$

რადგან ვიღებთ ერთი და იგივე შედეგს, მიუხედავად მიმართულებისა, რომელშიც ვშლით ვექტორებს, ვასკვნით, რომ მუშაობა U სკალარული სიდიდეა.

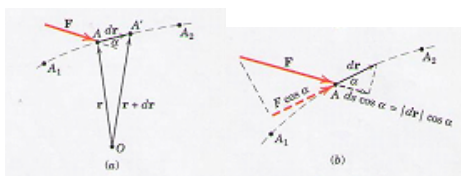


ნახ. 14.2.

მუშაობა დადებითია, როდესაც ძალის სამუშაო კომპონენტის მიმართულება ემთხვევა გადაადგილების მიმართულებას. როდესაც სამუშაო კომპონენტი გადაადგილების საწინააღმდეგოა (ნახ. 14.2.), შესრულებული მუშაობა უარყოფითია და

$$U = (F \cos \alpha) \Delta s = -(F \cos \theta) \Delta s$$

ახლა განვაზოგადოთ მუშაობის განსაზღვრა, რათა მიუყენოთ ისეთ პირობებს, რომლებშიც გადაადგილების მიმართულება და ძალის სიდიდე და მიმართულება იცვლება.



ნახ. 14.3.ა, ბ.

ნახ.14.3.ბ.-ზე ნაჩვენებია A წერტილში სხეულზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალა. სხეული მოძრაობს A_1 -დან A_2 -მდე ნაჩვენები გზით. A წერტილი განსაზღვრულია მისი მდებარეობის ვექტორით $\vec{r}$, რომელიც იზომება რაღაც ნებისმიერი, მაგრამ შესაბამისი სათავედან O . A_1 -დან A_2 -მდე მოძრაობისას მცირე გადაადგილება მოცემულია მდებარეობის ვექტორის დიფერენციალური ცვლილებით $d\vec{r}$. $d\vec{r}$ გადაადგილებისას $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ასე განისაზღვრება:

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (14.1)$$

თუ F აღნიშნავს $\vec{F}$ ძალის სიდიდეს და ds –დიფერენციალური გადაადგილების, $d\vec{r}$ –ის სიდიდეს, ვიყენებთ სკალარულ ნამრავლს და ვიღებთ:

$$dU = F ds \cos \alpha$$

ეს გამოსახულება შეიძლება განვიხილოთ როგორც გადაადგილების მიმართულებით ძალის კომპონენტი $F \cdot \cos \alpha$ გამრავლებული გადაადგილებაზე ან, როგორც ძალის მიმართულებით გადაადგილების კომპონენტი $ds \cos \alpha$ გამრავლებული ძალაზე, როგორც ეს წარმოდგენილია ნახ.14.3.ბ.–ზე. თუ $\vec{F}$ –ს და $d\vec{r}$ გამოვსახავთ მათი მართკუთხა კომპონენტების საშუალებით, მივიღებთ გამოსახულებას:

$$dU = (\vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z) \cdot (\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$\vec{F}$ –ს მიერ შესრულებული სრული მუშაობის, U –ს მისაღებად A წერტილის A_1 –დან A_2 –ში სასრულო მოძრაობისას (ნახ. 14.3.ა.) გავაინტეგრირებთ dU ამ პოზიციებს შორის. ამდენად,

$$U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

ან

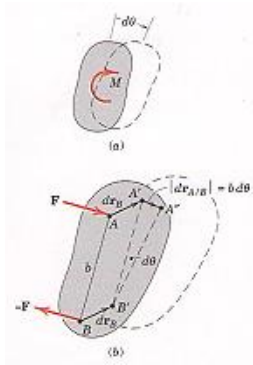
$$U = \int F \cos \alpha ds$$

ამ ინტეგრირების ჩასატარებლად საჭიროა ძალის კომპონენტებსა და მათ შესაბამის კოორდინატებს შორის დამოკიდებულების ცოდნა, ან F –სა და s –ს შორის და $\cos \alpha$ –ს და s –ს შორის დამოკიდებულების ცოდნა.

გადამკვეთი ძალების შემთხვევაში, რომლებიც მოდებულია სხეულის ნებისმიერ გარკვეულ წერტილზე, მათი ტოლქმედის მიერ შესრულებული მუშაობა სხვადასხვა ძალების მიერ შესრულებული მთლიანი მუშაობის ტოლია. ამის მიზეზია ის, რომ გადაადგილების მიმართულებით ტოლქმედის კომპონენტი იგივე მიმართულებით სხვადასხვა ძალების ჯამის ტოლია.

წყვილის მუშაობა

ძალების მიერ შესრულებული მუშაობის გარდა, წყვილებს ასევე შეუძლიათ მუშაობის შესრულება. ნახ. 14.4.ა.–ზე ნაჩვენებია სხეულზე მოქმედი წყვილი, რომელიც ცვლის სხეულის კუთხურ მდებარეობას $d\theta$ სიდიდით. წყვილის მიერ შესრულებული მუშაობა ადვილად ისაზღვრება წყვილის შემადგენელი ორი ძალის ერთობლივი მუშაობით. ნახ. 14.4.ბ.–ზე წარმოდგენილი ორი ტოლი და



ნახ. 14.4.ა, ბ.

საწინააღმდეგო ძალების: $\vec{F}$ და $-\vec{F}$ წყვილი, რომელიც მოქმედებს ნებისმიერ ორ: A და B წერტილზე, $F = M/b$. ფიგურის სიბრტყეში უსასრულოდ მცირე მოძრაობისას, წრფე AB მოძრაობს $A''B'$ -კენ. ახლა ვიღებთ A -ს გადანაცვლებას ორ საფეხურად: პირველი, $d\vec{r}_B$ გადანაცვლება, რომელიც უდრის B -ს გადანაცვლებას და მეორე, გადანაცვლება $d\vec{r}_{A/B}$ (იკითხება როგორც A -ს გადანაცვლება B -ს მიმართ), რომელიც გამოწვეულია B -ს გარშემო ბრუნვით. ამრიგად, A -დან A' -მდე გადანაცვლებისას $\vec{F}$ -ის მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლი და საწინააღმდეგოა მუშაობისა, რომელიც გამოწვეულია $-\vec{F}$ -ს მოქმედებით B -დან B' -მდე ტოლი გადაადგილების დროს. ამიტომ ვასკვნით რომ გადატანის დროს არ სრულდება მუშაობა წყვილის მიერ (მოძრაობა ბრუნვის გარეშე).

მაგრამ ბრუნვის დროს $\vec{F}$ -ს მიერ შესრულებული მუშაობა $\vec{F} \cdot d\vec{r}_{A/B} = F b d\theta$, სადაც $d\vec{r}_{A/B} = b d\theta$ და θ არის ბრუნვის უსასრულოდ მცირე კუთხე რადიანებში. რადგან $M = Fb$,

$$dU = M d\theta \quad (14.2)$$

წყვილის მუშაობა დადებითია, თუ M -ს აქვს იგივე ნიშანი, რაც $d\theta$ -ს (საათის ისრის მიმართულება ნახაზზე) და უარყოფითია, თუ M -ს აქვს ბრუნვის საწინააღმდეგო ნიშანი. წყვილის სრული მუშაობა მის სიბრტყეში სასრულო ბრუნვის დროს იქნება:

$$U = \int M d\theta$$

მუშაობის ერთეულები

მუშაობის ერთეულია (ძალა) $\times$ (მანძილზე). SI სისტემაში მუშაობის ერთეულია ჯოული (ჯ), რომელიც არის ერთი ნიუტონი ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ერთი მეტრის მანძილზე ძალის მიმართულებით. (ჯ=ნ $\times$ მ).

ძალის მუშაობის და ძალის მომენტის ერთეულები იგივეა, თუმცა ისინი სავსებით განსხვავებული ფიზიკური სიდიდეებია. აღსანიშნავია, რომ მუშაობა არის **სკალარი**, რომელიც მოიცემა სკალარული ნამრავლით და, ამდენად, შეიცავს ძალის და მანძილის ნამრავლს. ორივე იზომება როგორც ვექტორული ნამრავლი და შეიცავს ძალის და მანძილის ნამრავლს, რომელიც იზომება ძალისადმი მართ კუთხეზე. ამ ორი სიდიდის განსხვავების მიზნით SI ერთეულებში

მუშაობისათვის გამოიყენება ჯოული (ჯ) და მომენტისათვის ვიყენებთ გაერთიანებულ ერთეულს ნიუტონი-მეტრზე (ნ·მ).

შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობა

განვიხილოთ ნაწილაკი, რომლის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობა განისაზღვრება მასზე მოქმედი ძალებით. ნებისმიერ სავარაუდო და თვითნებურ მცირე გადაადგილებას, $d\vec{r}$, მისი ბუნებრივი მდებარეობიდან, რომელიც თანხვედრა სისტემის შემზღუდველებს, ეწოდება **შესაძლო გადაადგილება**. ტერმინი **შესაძლო** გამოიყენება იმის აღსანიშნავად, რომ გადაადგილება რეალურად არ ხდება, მაგრამ მხოლოდ ნავარაუდევია; ასე რომ, ჩვენ შეგვიძლია სხვადასხვა შესაძლო წონასწორობის მდებარეობების შედარება ზუსტი მათგანის დასადგენად.

შესაძლო გადაადგილებისას, $d\vec{r}$, ნაწილაკზე მოქმედი ნებისმიერი ძალის $\vec{F}$ მიერ შესრულებული მუშაობას ეწოდება **შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობა** და

$$\delta U = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{ან} \quad dU = F \delta s \cos \alpha$$

სადაც α არის $\vec{F}$ -სა და $d\vec{r}$ -ს შორის კუთხე და δs არის $d\vec{r}$ -ს სიდიდე. განსხვავება $d\vec{r}$ -სა და $d\vec{r}$ -ს შორის არის ის, რომ $d\vec{r}$ ეხება მდებარეობის უსასრულოდ მცირე ცვლილებას და შეიძლება მისი ინტეგრირება, მაშინაც როცა $d\vec{r}$ ეხება უსასრულოდ მცირე შესაძლო ანუ სავარაუდო მოძრაობას და მისი ინტეგრირება შეუძლებელია. მათემატიკურად ორივე სიდიდე პირველი რიგის დიფერენციალია.

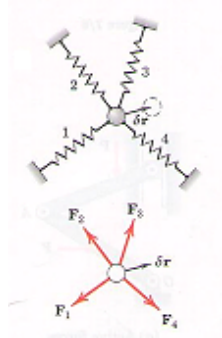
შესაძლო გადაადგილება ასევე შეიძლება იყოს სხეულის ბრუნვა $\delta\theta$. (14.2) განტოლების თანახმად, წყვილის $\vec{M}$ მიერ შესრულებული შესაძლო მუშაობა შესაძლო კუთხური გადაადგილებისას $\delta\theta$, $dU = M\delta\theta$. $\vec{F}$ ძალა და $\vec{M}$ მომენტი შეიძლება განვიხილოთ როგორც მუდმივი ნებისმიერი უსასრულოდ მცირე გადაადგილების დროს. თუ გავითვალისწინებთ $\vec{F}$ და $\vec{M}$ -ის ნებისმიერ ცვლილებას უსასრულოდ მცირე მოძრაობის დროს, გამოჩნდება მაღალი რიგის წევრები, რომლებიც ზღვარში გაქრება. ეს განხილვა იგივეა მათემატიკურად, რაც ის, რომელიც უფლებას გვაძლევს უგულებელვყოთ ნამრავლი $dx dy$ $dA = y dx$ -ს ჩაწერისას $y = f(x)$ მრუდის ქვეშ ფართობის ელემენტისათვის.

14.3. წონასწორობა

ამ ნაწილში წონასწორობის პირობები გამოსახულია შესაძლო მუშაობის საშუალებით, პირველ რიგში ნაწილაკისათვის, შემდეგ ცალკეული ხისტი მყარი

სხეულისთვის და ბოლოს, შეერთებული ხისტი მყარი სხეულების სისტემისათვის.

ნაწილაკის წონასწორობა



ნახ. 14.5.

განვიხილოთ ნაწილაკი ან პატარა სხეული (ნახ. 14.5.), რომელიც წონასწორობის მდგომარეობაშია შეერთებული ზამბარების ძალების მოქმედების შედეგად. თუ ნაწილაკის მასა საგრძნობია, მაშინ წონა mg ასევე უნდა განვიხილოთ როგორც ერთ-ერთი ძალა. ნაწილაკის შესაძლო გადაადგილებისათვის, $d\vec{r}$, მისი წონასწორობის მდგომარეობიდან სრული შესაძლო მუშაობა იქნება:

$$\delta U = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r} + \dots = \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

ახლა გამოვსახოთ $\sum \vec{F}$ მისი სკალარული ჯამებით და $\delta \vec{r}$ მისი კომპონენტების სავარაუდო გადაადგილებით კოორდინატთა მიმართულებით

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = \left(\vec{i} \sum F_x + \vec{j} \sum F_y + \vec{k} \sum F_z \right) \cdot (\vec{i} \delta x + \vec{j} \delta y + \vec{k} \delta z) \\ &= \sum F_x \delta x + \sum F_y \delta y + \sum F_z \delta z = 0 \end{aligned}$$

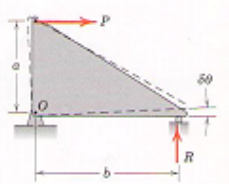
ჯამი $= 0$, რადგან $\sum \vec{F} = 0$, რაც გვაძლევს, რომ $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$. ამიტომ განტოლება $\delta U = 0$ ნაწილაკის წონასწორობის პირობების ალტერნატიული დებულებაა. წონასწორობისათვის ნულოვანი შესაძლო მუშაობის ეს პირობა არის როგორც აუცილებელი, ასევე საკმარისი, რადგან ის შეიძლება მიუყენოთ შესაძლო გადაადგილებებს თითოეული სამი ურთიერთპერპენდიკულარული მიმართულებით, როდესაც ის ხდება წონასწორობის სამი ცნობილი სკალარული მოთხოვნის ეკვივალენტი.

ცალკეული ნაწილაკის წონასწორობისათვის ნულოვანი შესაძლო მუშაობის პრინციპი, როგორც წესი, არ ამარტივებს ამ უკვე მარტივ პრობლემას, რადგან $\delta U = 0$ და $\sum \vec{F} = 0$ იძლევა იგივე ინფორმაციას. მაგრამ შემოგვაქვს შესაძლო მუშაობის პრინციპი ნაწილაკისათვის, ასე რომ, მოგვიანებით ამ პრინციპს გამოვიყენებთ ნაწილაკების სისტემებისათვის.

ხისტი მყარი სხეულის წონასწორობა

ცალკეული ნაწილაკისათვის შესაძლო მუშაობის პრინციპის გავრცელება ადვილია ხისტი მყარი სხეულზე, რომელიც განიხილება როგორც მცირე ელემენტების სისტემა ან როგორც ნაწილაკების სისტემა, რომლებიც ერთმანეთთან ხისტადაა შეერთებული. რადგან წონასწორობაში მყოფი სხეულის თითოეულ ნაწილაკზე შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია. მთელი სხეულისათვის $\delta U = 0$ გამოთვლისას შემოდის გარე ძალების მიერ შესრულებული შესაძლო მუშაობა, რადგან ყველა შიდა ძალა არის ტოლი, საწინააღმდეგო და კოლინეარული ძალების წყვილების სახით და ამ ძალების მიერ შესრულებული სრული მუშაობა ნებისმიერი მოძრაობის დროს ნულის ტოლია.

ისევე როგორც ნაწილაკის შემთხვევაში, შესაძლო მუშაობის პრინციპი არ იძლევა რაიმე განსაკუთრებულ უპირატესობას ამოხსნისათვის წონასწორობაში მყოფი ცალკეული ხისტი მყარი სხეულისათვის. ნებისმიერი შესაძლო გადაადგილება, განსაზღვრული წრფივი ან კუთხური მოძრაობით, გამოჩნდება $\delta U = 0$ განტოლების თითოეულ წევრში და როცა გაბათილდება, დარჩება იგივე გამოსახულება, რაც მიიღება პირდაპირ ერთ-ერთი ძალის ან მომენტის წონასწორობის განტოლებების გამოყენებით.



ნახ. 14.6.

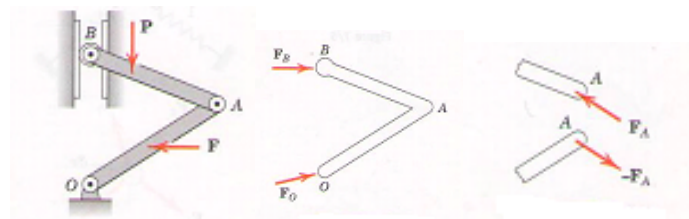
ეს პირობა ნაჩვენებია ნახ. 14.6-ზე, სადაც უნდა განისაზღვროს გორგოლაჭის ქვეშ R უკუქმედება უმნიშვნელო წონის დაკიდული ფილასათვის მოცემული P ძალის მოქმედებისათვის. O -ს ირგვლივ ფილას სუსტი სავარაუდო ბრუნვა $\delta\theta$ თანხვდება კიდულ შემზღუდველს O -ში და ეს მიჩნეულია როგორც სავარაუდო გადაადგილება. P -ს მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლია $-P_a\delta\theta$ და R -ს მიერ შესრულებული მუშაობა $+R\delta\theta$. ამიტომ $\delta U = 0$ პრინციპი იძლევა

$$-P_a \delta \theta + R_b d\theta = 0$$

$\delta \theta$ ისპობა და $P_a - R_b = 0$, რაც, უბრალოდ, O -ს მიმართ მომენტის წონასწორობის განტოლებაა. ამიტომ, არაფერი იცვლება ცალკეული ხისტი მყარი სხეულისათვის შესაძლო მუშაობის პრინციპის გამოყენებით. მაგრამ პრინციპს, უეჭველია, უპირატესობა აქვს ურთიერთშეერთებული სხეულებისათვის.

ხისტი მყარი სხეულების სისტემების წონასწორობა

ახლა შესაძლო მუშაობის პრინციპს განვაგრძობთ ხისტი მყარი სხეულების ურთიერთშეერთებული სისტემის წონასწორობაზე. ჩვენი განხილვა შეზღუდულია ე. წ. **იდეალური სისტემებით**, შედგენილი ორი ან მეტი ხისტი ელემენტიდან, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია მექანიკური შეერთებებით, რომლებსაც არ შეუძლიათ ენერგიის შთანთქმა გაჭიმვისას ან შეკუმშვისას და სადაც ხახუნი საკმაოდ მცირეა.



(ა) ქმედების ძალები (ბ) უკუქმედების ძალები (გ) შიდა ძალები

ნახ. 14.7.

ნახ. 14.7.ა.-ზე ნაჩვენებია იდეალური სისტემის მარტივი მაგალითი, სადაც შესაძლებელია მის ორ ნაწილს შორის ფარდობითი მოძრაობა და სადაც წონასწორობის მდგომარეობა განისაზღვრება მოდებული გარე ძალებით $\vec{P}$ და $\vec{F}$. ანსხვავებენ ასეთი ძალების სამ სახეს:

- 1) **ქმედების ძალები.** ამ ძალებს შეუძლიათ შესაძლო მუშაობის შესრულება შესაძლო გადაადგილების დროს. ნახ.14.7.ა.-ზე ძალები $\vec{P}$ და $\vec{F}$ მოქმედია, რადგან ისინი ასრულებენ მუშაობას ბმების მოძრაობისას.
- 2) **უკუქმედების ძალები.** ეს ძალები მოქმედებენ ფიქსირებულ საყრდენ პოზიციებზე, სადაც ადგილი არა აქვს შესაძლო გადაადგილებას ძალის მიმართულებით. ეს ძალები არ ასრულებენ მუშაობას შესაძლო გადაადგილებისას. ნახ. 14.7.ბ.-ზე ჰორიზონტალურ ძალას $\vec{F}_B$, ვერტიკალური მიმმართველით მოდებულს ელემენტის გორგოლაქის ბოლოზე, შეუძლია ასეთი მუშაობის შესრულება, რადგან ამ შემთხვევაში არ არის გორგოლაქის

ჰორიზონტალური გადაადგილება. უკუქმედების ძალას, $\vec{F}_0$, მინიჭებულს სისტემაზე ფიქსირებული საყრდენით O , ასევე შეუძლია მუშაობა, რადგან O არ მოძრაობს.

- 3) **შიდა ძალები.** ეს არის ძალები ელემენტებს შორის შეერთებებში. სისტემის ან მისი ნაწილების ნებისმიერი შესაძლო მოძრაობისას, **შიდა ძალების მიერ ბმებზე შესრულებული სრული მუშაობა ნულის ტოლია.** ეს ასეა, რადგან შიდა ძალები ყოველთვის წარმოადგენენ ტოლი და საწინააღმდეგო ძალების წყვილს, როგორც ეს ნაჩვენებია შიდა ძალებისათვის $\vec{F}_A$ და $-\vec{F}_A$ შეერთების A წერტილში (ნახ. 14.7.გ.). ამიტომ ერთი ძალის მუშაობა აუცილებლად აბათილებს მეორე ძალის მუშაობას მათი იდენტური გადაადგილებისას.

შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობის პრინციპი

აღსანიშნავია, რომ მხოლოდ შიდა ქმედების ძალები ასრულებენ მუშაობას სისტემის ნებისმიერი შესაძლო მოძრაობისას, ასე რომ, შესაძლო მუშაობის პრინციპი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

წონასწორობის მდგომარეობაში მყოფ იდეალურ სისტემაზე შიდა ქმედების ძალების მიერ შესრულებული შესაძლო მუშაობა ნულის ტოლია ნებისმიერი და ყველა შესაძლო გადაადგილებისათვის, რომლებიც თავსებადია შემზღუდველებთან.

შემზღუდველის ქვეშ იგულისხმება საყრდენების მიერ მოძრაობის შეზღუდვა. მათემატიკურად ეს პრინციპი გამოისახება განტოლებით:

$$\delta U = 0 \quad (14.3)$$

სადაც δU ძალაშია სრული შესაძლო მუშაობისათვის, რომელსაც ყველა მოქმედი ძალა ასრულებს შესაძლო გადაადგილებისას.

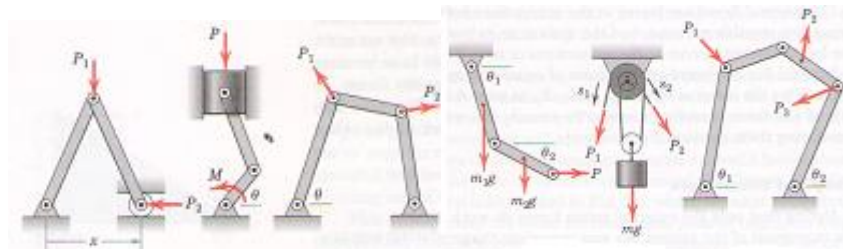
მხოლოდ ახლა ვნახავთ შესაძლო მუშაობის მეთოდის რეალურ უპირატესობას. ძირითადად, ეს ორი სახისაა. პირველი, არ არის აუცილებელი იდეალური სისტემის დანაწევრება მოქმედ ძალებს შორის დამოკიდებულების დასადგენად, როგორც ამას ადგილი აქვს ძალის და მომენტის შეკრებაზე დაფუძნებულ წონასწორობის მეთოდის შემთხვევაში. მეორე, შესაძლებელია მოქმედ ძალებს შორის დამოკიდებულების პირდაპირი განსაზღვრა უკუქმედების ძალების გათვალისწინების გარეშე. ეს უპირატესობები განსაკუთრებულად სასარგებლოს ხდის ამ მეთოდს ცნობილი დატვირთვების ქვეშ მყოფი სისტემის წონასწორობის მდგომარეობის დასადგენად. პრობლემის ეს სახე განსხვავებულია

იმ ძალების დადგენის პრობლემიდან, რომლებიც მოქმედებენ წონასწორობის ცნობილ მდგომარეობაზე.

მეთოდი განსაკუთრებით სასარგებლოა აღნიშნული მიზნებისათვის, მაგრამ მოითხოვს, რომ შიდა ხახუნის ძალები ასრულებდნენ უმნიშვნელო მუშაობას ნებისმიერი შესაძლო გადაადგილებისას. შესაბამისად, თუ მექანიკურ სისტემაში შიდა ხახუნი შესამჩნევია, მეთოდი ვერ გამოიყენება ამ სისტემისათვის, როგორც მთელისათვის მანამ, სანამ ადგილი აქვს შიდა ხახუნით შესრულებულ მუშაობას.

შესაძლო მუშაობის მეთოდის გამოყენებისას უნდა დაიხაზოს დიაგრამა, სადაც ხდება სისტემის იზოლირება. განსხვავებით თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამიდან, სადაც ყველა ძალა ნაჩვენებია, შესაძლო მუშაობის მეთოდის დიაგრამაზე საჭიროა მხოლოდ მოქმედი ძალების ჩვენება, რადგან უკუქმედების ძალები არ შედის გამოსახულებაში $\delta U = 0$. ასეთ დიაგრამას ეწოდება ქმედების ძალთა დიაგრამა (ნახ. 14.7.ა.).

თავისუფლების ხარისხები



(ა) სისტემები ერთი თავისუფლების ხარისხით; (ბ) სისტემები ორი თავისუფლების ხარისხით

ნახ. 14.8.

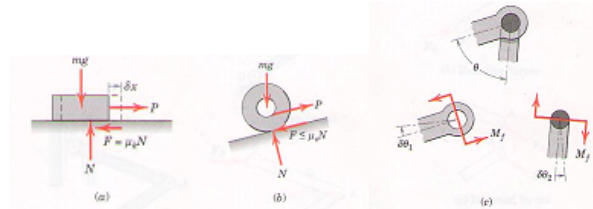
მექანიკური სისტემის თავისუფალი ხარისხების რიცხვი არის დამოუკიდებელი კოორდინატების რიცხვი, რომლებიც აუცილებელია სისტემის კონფიგურაციის სრულად დასადგენად. ნახ. 14.8.ა.–ზე ნაჩვენებია ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის სამი მაგალითი. მხოლოდ ერთი კოორდინატია საჭირო სისტემის ნებისმიერი ნაწილის მდებარეობის დასადგენად. კოორდინატი შეიძლება იყოს მანძილი ან კუთხე. ნახ. 14.8.ბ.–ზე ნაჩვენებია ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემები, სადაც სისტემის კონფიგურაციას ადგენს ორი დამოუკიდებელი კოორდინატი. მექანიზმზე მეტი ბმების დამატებისას თავისუფლების ხარისხების რაოდენობა არ არის შეზღუდული.

შესაძლო მუშაობის პრინციპის $\delta U = 0$ გამოყენება შეიძლება იმდენჯერ, რამდენიც არის თავისუფლების ხარისხი. თითოეული გამოყენებისას ერთჯერადად შეიძლება მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი კოორდინატის შეცვლა,

მაშინ როცა დანარჩენები რჩება უცვლელი. ჩვენ ვიხილავთ მხოლოდ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებს.

სისტემები ხახუნის თანაობისას

როდესაც მექანიკურ სისტემაში ადგილი აქვს შესამჩნევი სიდიდის სრიალა ხახუნს, ამბობენ, რომ სისტემა “რეალურია“. ასეთ სისტემებში გარე მოქმედი ძალების მიერ შესრულებული დადებითი მუშაობის ნაწილი გაბნეულია სითბოს სახით, რაც გამოწვეულია კინეტიკური ხახუნის ძალებით სისტემის მოძრაობისას. როდესაც საკონტაქტო ზედაპირებს შორის ადგილი აქვს სრიალს, ხახუნის ძალა ასრულებს უარყოფით მუშაობას, რადგან ის ყოველთვის მიმართულია სისტემის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. ასეთი მუშაობის აღდგენა შეუძლებელია.



ნახ. 14.9.ა, ბ, გ.

ამრიგად, მოსრიალე ბლოკზე მოქმედი კინეტიკური ხახუნის ძალა, $\mu_k N$ (ნახ. 14.9.ა.) ასრულებს მუშაობას ბლოკზე x -გადაადგილების დროს – $\mu_k N x$ სიდიდით. შესაძლო გადაადგილების, δx , შემთხვევაში, ხახუნის ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა უდრის – $\mu_k N \delta x$. მეორე მხრივ, მბრუნავ ბორბალზე მოქმედი სტატიკური ხახუნის ძალა (ნახ. 14.9.ბ.), არ ასრულებს მუშაობას, თუ ბორბალი არ სრიალებს ბრუნვის დროს.

ნახ. 14.9.გ.–ზე შტიფტიანი შეერთების ცენტრის მიმართ M_f მომენტი, რომელიც გამოწვეულია საკონტაქტო ზედაპირებზე მოქმედი ხახუნის ძალებით, ასრულებს უარყოფით მუშაობას ორ ნაწილს შორის ნებისმიერი ფარდობითი კუთხური მოძრაობის დროს. ამდენად, ორ ნაწილს შორის შესაძლო გადაადგილებისათვის δr , რომელიც შედგება ცალკეული შესაძლო გადაადგილებებიდან, δr და δr_2 , შესრულებული უარყოფითი მუშაობა იქნება $-M_b \delta \theta - M_f \delta \theta_2 = -M_f (\delta \theta_1 + \delta \theta_2)$ ან უბრალოდ, $-M_f \delta \theta$. თითოეული ნაწილისათვის M_b თავისი ნიშნით ბრუნვის ფარდობითი მოძრაობის საწინააღმდეგოა.

ადრე აღვნიშნეთ, რომ შესაძლო მუშაობის მთავარი უპირატესობაა მთელი სისტემის ანალიზი მის შემადგენელ ელემენტებად დანაწევრების გარეშე. თუ სისტემაში არის შესამჩნევი შიდა კინეტიკური ხახუნი, აუცილებელია სისტემის

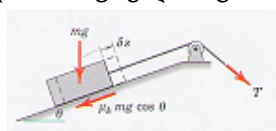
დანაწევრება ხახუნის ძალების დასადგენად. ასეთ შემთხვევაში შესაძლოა მუშაობის მეთოდს შეზღუდული გამოყენება აქვს.

მექანიკური მარგი ქმედების კოეფიციენტი

ხახუნით გამოწვეული ენერგიის დანაკარგების გამო, მექანიზმის გამომავალი მუშაობა ყოველთვის ნაკლებია შემავალ მუშაობაზე. მუშაობის ამ ორი რაოდენობის ფარდობას მექანიკური მარგი ქმედების კოეფიციენტი (მქკ) e , ეწოდება:

$$e = \frac{\text{გამომავალი მუშაობა}}{(\text{შემავალი}) \text{ მუშაობა}}$$

მარტივი მექანიზმების მექანიკური მქკ, რომლებსაც აქვთ ერთი თავისუფლების ხარისხი და რომლებიც მუშაობენ ერთნაირად, შეიძლება განისაზღვროს მუშაობის მეთოდით შესაძლო გადაადგილებისას e -ს გამოსახულების მრიცხველის და მნიშვნელის გამოთვლით.



ნახ. 14.10.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ბლოკის მოძრაობა დახრილ სიბრტყეზე ზევით (ნახ. 14.10.). შესაძლო გადაადგილებისათვის ბლოკის ასაწევად საჭირო გამომავალი მუშაობა არის $mg\delta s \sin \theta$. შემავალი მუშაობა არის $T\delta s = (mg \sin \theta + \mu_k mg \cos \theta)\delta s$. ამიტომ დახრილი სიბრტყის მქკ ტოლია:

$$e = \frac{mg\delta s \sin \theta}{mg(\sin \theta + \mu_k \cos \theta)\delta s} = \frac{1}{1 + \mu_k \cos \theta}$$

მეორე მაგალითში განვიხილავთ ხრახნიანი დომკრატი (იხ. ნახ. 13.4.). განტოლება (13.1) ასახავს მომენტს M , რომელიც აუცილებელია ტვირთის, W , ასაწევად, როდესაც ხრახნის საშუალო რადიუსია τ და სპირალის კუთხეა α და ხახუნის კუთხე $\phi = \tan^{-1} \mu_k$. ხრახნის მცირე ბრუნვისას $\delta \theta$, შემავალი მუშაობაა $M\delta \theta = Wr\delta \theta \tan(\alpha + \phi)$. ტვირთის ასაწევად საჭირო მუშაობაა $Wr\delta \theta \tan \alpha$. ამრიგად, დომკრატის მქკ ასე გამოისახება:

$$e = \frac{Wr\delta \theta \tan \alpha}{Wr\delta \theta \tan(\alpha + \phi)} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \phi)}$$

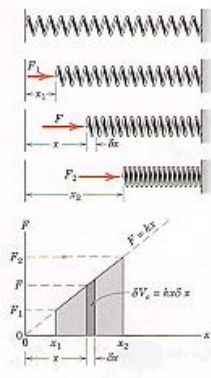
ხახუნის შემცირებისას φ მცირდება და მქკ უახლოვდება ერთს.

14.4. პოტენციური ენერგია და სტაბილურობა

წინა ნაწილში განვიხილეთ ცალკეული ელემენტებიდან შედგენილი მექანიკური სისტემების წონასწორული კონფიგურაცია. სისტემას ვიხილავთ როგორც სრულიად ხისტს. ახლა მეთოდს განვაგრძობთ მექანიკურ სისტემებზე, რომლებიც შეიცავს ზამბარას სახის დრეკად ელემენტებს. შემოვა პოტენციური ენერგიის ცნება, რომელიც სასარგებლოა წონასწორობის სტაბილურობის დასადგენად.

დრეკადი პოტენციური ენერგია

დრეკად ელემენტზე შესრულებული მუშაობა ინახება ამ ელემენტში **დრეკადი პოტენციური ენერგიის**, V , სახით. ამ ენერგიას პოტენციურად შეუძლია მუშაობის შესრულება სხვა სხეულზე მისი შეკუმშვის ან გაჭიმვის შესასუსტებლად.



ნახ. 14.11.

განვიხილოთ ზამბარა (ნახ. 14.11.), შეკუმშული F ძალის მიერ. ივარაუდება, რომ ზამბარა დრეკადია და წრფივია, რაც ნიშნავს, რომ F ძალა გადახრის, x -ს, პირდაპირ პროპორციულია. ეს დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება: $F = kx$, სადაც k **ზამბარას კოეფიციენტი**ა ანუ **სიხისტე**. dx მოძრაობისას ზამბარაზე F ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა $dU = Fdx$, ასე რომ, ზამბარას დრეკადი პოტენციური ენერგია შეკუმშვისას, x , არის ზამბარაზე შესრულებული სრული მუშაობა:

$$V_e = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx \text{ ანუ } V_e = \frac{1}{2} kx^2 \quad (14.4)$$

ამრიგად, ზამბარას პოტენციური ენერგია $F - x$ დიაგრამაზე, O -დან x -მდე, სამკუთხედის ფართობის ტოლია.

ზამბარას შეკუმშვის ზრდისას x_1 -დან x_2 -მდე ზამბარაზე შესრულებული მუშაობა მისი დრეკადი პოტენციური ენერგიის ცვლილების ტოლია ანუ:

$$\Delta V_e = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$

რაც x_1 -დან x_2 -მდე ტრაპეციის ფართობის ტოლია.

ზამბარას შესაძლო გადაადგილებისას, δx , ზამბარაზე შესრულებული შესაძლო მუშაობა არის დრეკადი პოტენციური ენერგიის შესაძლო ცვლილება:

$$\delta V_e = F\delta x = kx\delta x$$

ზამბარას შეკუმშვის შემცირებისას, როდესაც ადგილი აქვს $x = x_2$ -დან $x = x_1$ -მდე რელაქსაციას, ზამბარას პოტენციური ენერგიის ცვლილება (საბოლოოს მინუს საწყისი) უარყოფითია. ამდენად, თუ δx უარყოფითია, δV_e ასევე უარყოფითია.

როდესაც ვიხილავთ ზამბარას გაჭიმვას და არა კუმშვას, მუშაობის და ენერგიის დამოკიდებულებები იგივეა, რაც კუმშვისათვის. ახლა x წარმოადგენს ზამბარას წაგრძელებას და არა შეკუმშვას. როცა ზამბარა გაჭიმულია, ძალა ისევ მოქმედებს გადაადგილების მიმართულებით, ასრულებს ზამბარაზე დადებით მუშაობას და ზრდის მის პოტენციურ ენერგიას.

რადგან ზამბარას მოძრავ ბოლოზე მოქმედი ძალა ზამბარას მიერ სხეულზე მოდებული ძალის საწინააღმდეგოა, იმ სხეულისა, რომელთანაც მისი მოძრავი ბოლოა მიერთებული, სხეულზე შესრულებული მუშაობა ზამბარის პოტენციური ენერგიის ცვლილების საწინააღმდეგოა.

მგრები ზამბარა, რომელიც წინააღმდეგობას უწევს გორგოლაქს ან რომელიმე სხვა ელემენტის ბრუნვას, ასევე ინახავს და გასცემს პოტენციურ ენერგიას. თუ გრებითი სიხისტე, გამოხატული როგორც გრების მომენტი ერთი რადიანით გრებისას, მუდმივია, k , და თუ θ არის გრების კუთხე რადიანებში, მაშინ წინააღმდეგობის გამწვევი გრება $M = k\theta$. პოტენციური ენერგია იქნება:

$$V_e = \int_0^\theta k\theta d\theta$$

და

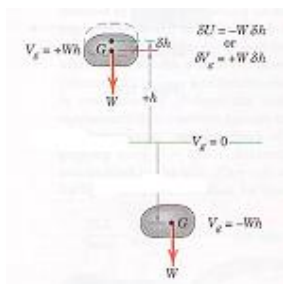
$$V_e = \frac{1}{2} k\theta^2 \quad (14.4a)$$

ეს წრფივი გაჭიმვის ზამბარას გამოსახულების ანალოგიურია.

დრეკადი პოტენციური ენერგიის ერთეული იგივეა რაც მუშაობის, ე. ი. ჯოული (ჯ).

გრავიტაციული პოტენციური ენერგია

ადრე განვიხილეთ სხეულზე მოქმედი გრავიტაციული ძალის ანუ წონის მიერ შესრულებული მუშაობა იმავე გზით, როგორც ნებისმიერი სხვა ქმედების



ნახ. 14.12.

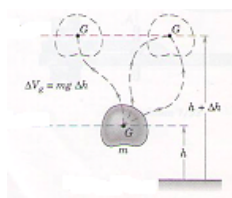
ძალით შესრულებული მუშაობა, ამრიგად, სხეულის ზევით გადაადგილებისათვის, δh , (ნახ. 14.12.) წონა $W = mg$ ასრულებს უარყოფით მუშაობას $\delta U = -mg\delta h$. მეორე მხრივ, თუ სხეული გადაადგილდება ქვევით, წონა ასრულებს დადებით მუშაობას $\delta U = +mg\delta h$. ზემოთაღნიშნული განხილვის ალტერნატივა გამოხატავს გრავიტაციის მიერ შესრულებულ მუშაობას სხეულის პოტენციური ენერგიის ცვლილების საშუალებით. ეს ალტერნატიული განხილვა სასარგებლოა, როდესაც მექანიკურ სისტემას აღვწერთ

სრული ენერგიის საშუალებით. **სხეულის გრავიტაციული პოტენციური ენერგია V_g** განისაზღვრება როგორც სხეულზე იმ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, რომელიც წონის ტოლი და საწინააღმდეგოა. სხეულის გადატანისას განსახილავ მდგომარეობაში რაღაც ნებისმიერი საბაზო სიბრტყიდან, სადაც პოტენციური ენერგია ნულის ტოლია. შემდეგ პოტენციური ენერგია წონის მიერ შესრულებული მუშაობის საწინააღმდეგოა. როდესაც სხეული ადის ზევით, შესრულებული მუშაობა გარდაიქმნება ენერგიად, რომელიც პოტენციურად ხელმისაწვდომია, რადგან სხეულს არ შეუძლია მუშაობის შესრულება სხვა სხეულზე, როცა ის უბრუნდება საწყის დაბალ მდებარეობას. თუ V_g -ს მივიღებთ ნულის ტოლად, როდესაც $h = 0$ (ნახ. 14.12.), მაშინ h სიმაღლეზე საბაზო სიბრტყის ზევით სხეულის გრავიტაციული პოტენციური ენერგია იქნება:

$$V_g = mgh \quad (14.5)$$

თუ სხეული h მანძილზეა საბაზო სიბრტყიდან, მისი გრავიტაციული პოტენციური ენერგია იქნება $-mgh$.

აღსანიშნავია, რომ საბაზო სიბრტყე ნულოვანი პოტენციური ენერგიისათვის ნებისმიერია, რადგან მნიშვნელოვანია მხოლოდ პოტენციური ენერგიის ცვლილება და ეს ცვლილება ერთი და იგივეა იმისდა მიუხედავად, თუ სად არის მოთავსებული საბაზო სიბრტყე. ასევე, გრავიტაციული პოტენციური ენერგია არ არის დამოკიდებული გარკვეული დონის, h , მიღწევის გზაზე.



ნახ. 14.13.

ამრიგად, m მასის სხეული (ნახ. 14.13.) ხასიათდება პოტენციური ენერგიის იგივე ცვლილებით იმისდამიუხედავად, თუ რა გზას გადის ის საბაზო სიბრტყიდან 1 საბაზო სიბრტყემდე 2, რადგან Δh ერთი და იგივე ყველა სამი გზისათვის.

გრავიტაციული პოტენციური ენერგიის შესაძლო (ვირტუალური) ცვლილება ასეთი სახისაა:

$$\delta V_g = mg\delta h$$

სადაც δh სხეულის მასების ცენტრის ზევით შესაძლო გადაადგილებაა. თუ მასების ცენტრი ასრულებს შესაძლო გადაადგილებას ქვევით, მაშინ δV_g უარყოფითია.

გრავიტაციული პოტენციური ენერგიის ერთეულები იგივეა, რაც მუშაობის და დრეკადი პოტენციური ენერგიის, ე. ი. ჯოული (ჯ) SI სისტემაში.

ენერგიის განტოლება

ვნახეთ, რომ წრფივი ზამბარას მიერ სხეულზე შესრულებული მუშაობა, როდესაც ზამბარა მიერთებულია სხეულთან მოძრავი ბოლოთი, ზამბარას დრეკადი პოტენციური ენერგიის ცვლილების საწინააღმდეგოა. ასევე, გრა-
ვიტაციული პოტენციური ენერგიის ანუ წონის მიერ შესრულებული მუშაობა ამ ენერგიის ცვლილების საწინააღმდეგოა. ამიტომ, როდესაც ვიყენებთ შესაძლო მუშაობის განტოლებას ზამბარიანი სისტემისათვის მისი ელემენტების ვერტიკალური ცვლილებების დროს, შეგვიძლია ზამბარას მუშაობა და წონის მუშაობა ჩავანაცვლოთ შესაბამისი პოტენციური ენერგიის ცვლილების უარ-
ყოფითი მნიშვნელობით.

ამ ცვლილებების გამოყენება შეიძლება სრული შესაძლო მუშაობის, δU -ს ჩასაწერად (14.3) განტოლებაში, როგორც $\delta U'$ მუშაობის, რომელიც შესრუ-
ლებულია ყველა ქმედების ძალით, რომლებიც განსხვავდება **ზამბარას და წონის ძალებიდან** და ზამბარას და წონის ძალების მიერ შესრულებული მუშაობის $-(\delta V_e + \delta V_g)$ ჯამით. მაშინ (14.3) განტოლება ასე ჩაიწერება:

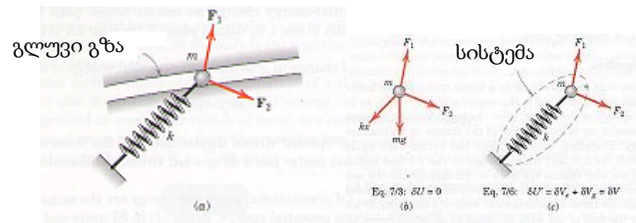
$$\delta U' = -(\delta V_e + \delta V_g) = 0 \text{ ან } \delta U' = \delta V \quad (14.6)$$

აქ $V = V_e + V_g$ სამართლიანია სისტემის სრული პოტენციური ენერგიისათვის. ამ ფორმულირებით სისტემისათვის ზამბარა ხდება **შიდა** და ზამბარას და გრავიტაციული ძალების მუშაობა გამოითვლება δV წევრით.

ქმედების ძალთა დიაგრამები

შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობის მეთოდით სასარგებლოა **ქმედების ძალთა დიაგრამების აგება** გაანალიზებული სისტემისათვის. სისტემის საზღვარი ცხადად უნდა აცალკევებდეს სისტემის ნაწილს სხვა სხეულებიდან, რომლებიც არ შეადგენენ სისტემის ნაწილს. როდესაც დრეკადი ელემენტი შეტანილია ჩვენი სისტემის საზღვრის ფარგლებში, სისტემასა და მის მოძრავ ელემენტებს შორის

ურთიერთქმედების ძალები სისტემისათვის იქნება შიდა. ამდენად, არ არის აუციელებელი ამ ძალების ჩვენება, რადგან მათი ეფექტები გათვალისწინებულია V_e წევრში. ანალოგიურად, არ არის ნაჩვენები წონის ძალები, რადგან მათი მუშაობა გათვალისწინებულია V_g წევრში.



ნახ. 14.14.ა, ბ, გ.

ნახ. 14.14.-ზე ნაჩვენებია განსხვავება 14.3 და 14.6 განტოლებების გამოყენებას შორის. ნახაზის ა - ნაწილში სხეული სიმარტივისათვის განიხილება, როგორც ნაწილაკი და ივარაუდება, რომ შესაძლო გადაადგილება ხდება ფიქსირებული გზის გასწვრივ. ნაწილაკი წონასწორობაშია მოდებული ძალების, F_1 და F_2 , გრავიტაციული ძალის, mg , ზამბარას ძალის, kx და ნორმალური უკუქმედების ძალის ქმედების გამო. ნახ. 14.14.ბ.-ზე, სადაც ნაწილაკი იზოლირებულია, δU შეიცავს ყველა ძალის შესაძლო მუშაობის, რაც ნაჩვენებია ქმედების ძალთა დიაგრამაზე (ნორმალური უკუქმედება, რომელსაც ნაწილაკს ანიჭებს გლუვი მიმმართველი, არ ასრულებს მუშაობას და ამიტომ გამოტოვებულია. ნახ. 14.14.გ.-ზე ზამბარა ჩართულია სისტემაში და $\sigma U'$ არის მხოლოდ F_1 -ს და F_2 -ს შესაძლო მუშაობა. ეს ძალები მხოლოდ გარე ძალებია, რომელთა მუშაობა არ არის გათვალისწინებული პოტენციური ენერგიის წევრებში. წონის, mg , მუშაობა გათვალისწინებულია σV_g წევრში და ზამბარას ძალის მუშაობა - σV_e წევრში.

შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობის პრინციპი

ამრიგად, მექანიკური სისტემისათვის, რომელიც შეიცავს დრეკად ელემენტებს და ელემენტებს, რომლებიც იცვლიან მდებარეობას, შეიძლება ჩამოვყალიბოთ შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობის პრინციპი:

შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობა, შესრულებული წონასწორობაში მყოფ მექანიკურ სისტემაზე გარე ქმედების ყველა ძალის მიერ (რომლებიც განსხვავდება გრავიტაციული და ზამბარას ძალებიდან) სისტემის სრული დრეკადი და გრავიტაციული პოტენციური ენერგიების შესაბამისი ცვლილების ტოლია ნებისმიერი და ყველა შესაძლო გადაადგილებისათვის, რომელიც თანხვდება შემზღუდველებს.

წონასწორობის სტაბილურობა

განვიხილოთ მექანიკური სისტემა, რომლის მოძრაობას თან სდევს გრავიტაციული და დრეკადი პოტენციური ენერგიების ცვლილება და სადაც არაპოტენციური ძალები არ ასრულებენ მუშაობას. როცა $\sigma U' = 0$, განტოლება (14.6) ასე ჩაიწერება:

$$\sigma(V_g + V_e) = 0 \text{ ანუ } \sigma V = 0 \quad (14.7)$$

ეს განტოლება იმის მოთხოვნაა, რომ მექანიკური სისტემის წონასწორობის კონფიგურაცია ისეთია, რომ სისტემის სრულ პოტენციურ ენერგიას აქვს სტაციონარული მნიშვნელობა. ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის, სადაც პოტენციური ენერგია და მისი წარმოებულები ერთი ცვლადის, მაგალითად, x -ის უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებიც აღწერენ კონფიგურაციას, წონასწორობის პირობა, $\sigma V = 0$, მათემატიკურად შემდეგი მოთხოვნის ეკვივალენტურია:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad (14.8)$$

ამ განტოლების თანახმად, მექანიკური სისტემა იმყოფება წონასწორობაში, როდესაც მისი სრული პოტენციური ენერგიის წარმოებული=0. რამდენიმე თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის კერძო წარმოებული თითოეული კოორდინატის მიმართ წონასწორობის მდებარეობისათვის უნდა იყოს ნულის ტოლი.



სტაბილური; არასტაბილური; ნეიტრალური

ნახ. 14.15.

არსებობს სამი პირობა, როდესაც (14.8) განტოლება სამართლიანია, კერძოდ, როდესაც სრული პოტენციური ენერგია მინიმალურია (სტაბილური წონასწორობა), მაქსიმალურია (არასტაბილური წონასწორობა) და მუდმივია (ნეიტრალური წონასწორობა). ნახ. 14.15.-ზე მოტანილია ამ სამი პირობის ამსახველი მარტივი მაგალითი. გორგოლაჭის პოტენციური ენერგია ერთმნიშვნელოვნად მინიმალურია სტაბილურ პოზიციაში, მაქსიმალურია არასტაბილურში და მუდმივია ნეიტრალურში.

მექანიკური სისტემის სტაბილურობა შეიძლება ასევე დავახასიათოთ იმითაც, რომ სტაბილური პოზიციიდან მცირე გადაადგილებაც კი იწვევს პოტენციური ენერგიის ზრდას და სისტემა ისწრაფვის დაუბრუნდეს დაბალი ენერგიის პოზიციას. მეორე მხრივ, არასტაბილური პოზიციიდან მცირე გადახრა იწვევს პოტენციური ენერგიის შემცირებას და სწრაფვას კიდევ უფრო შორს წავიდეს წონასწორობის მდგომარეობიდან უფრო დაბლა ენერგიის მდგომარეობამდე. ნეიტრალური პოზიციისათვის ერთი ან მეორე გზით მცირე გადაადგილება არ ცვლის პოტენციურ ენერგიას და არ წარმოქმნის მოძრაობის ტენდენციას.

როდესაც ფუნქცია და მისი წარმოებულები უწყვეტია, მეორე წარმოებული დადებითია ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობის წერტილში. ამრიგად, სისტემის წონასწორობის და სტაბილურობის მათემატიკური პირობები ერთი თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში ასეთია:

$$\begin{aligned} \text{წონასწორობა} \quad \frac{dV}{dx} &= 0 \\ \text{სტაბილურობა} \quad \frac{d^2V}{dx^2} &> 0 \\ \text{არასტაბილურობა} \quad \frac{d^2V}{dx^2} &< 0 \end{aligned} \quad (14.9)$$

$V - x$ მეორე წარმოებული ასევე შეიძლება იყოს ნულის ტოლი წონასწორობის მდგომარეობაში; ამ შემთხვევაში უნდა შევამოწმოთ უფრო მაღალი რიგის წარმოებულის ნიშანი წონასწორობის სახის დასადგენად. როდესაც ყველაზე დაბალი დარჩენილი არანულოვანი წარმოებულის რიგი წყვილი რიცხვია, წონასწორობა იქნება სტაბილური ან არასტაბილური იმისდა მიხედვით, თუ როგორია წარმოებულის ნიშანი: დადებითი თუ უარყოფითი. თუ წარმოებულის რიგი კენტია, წონასწორობა განიხილება როგორც არასტაბილური და გრაფიკი $V - x$ ამ შემთხვევაში აჩვენებს გადაღუნვის წერტილის მრუდზე ნულოვანი დახრით წონასწორობის მნიშვნელობისას.

სტაბილურობის კრიტერიუმი მრავალჯერადი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებისათვის მოითხოვს უფრო სრულყოფილ განხილვას. მაგალითად, ორი თავისუფლების ხარისხისათვის გამოიყენება ტეილორის მწკრივების გაშლა ორი ცვლადისათვის.

მე-14 თავის რეზიუმე

ამ თავში შემოტანილია შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობის პრინციპი, რომელიც სასარგებლოა სხეულის ან ურთიერთდაკავშირებული სხეულების სისტემის შესაძლო წონასწორობის კონფიგურაციის დასადგენად, სადაც გარე

ძალები ცნობილია. მეთოდის წარმატებით გამოყენების მიზნით სტუდენტმა უნდა გაიაზროს შესაძლო გადაადგილების, თავისუფლების ხარისხის და პოტენციური ენერგიის ცნებები.

შესაძლო (ვირტუალური) მუშაობის მეთოდი

როდესაც სისტემისათვის ან ურთიერთდაკავშირებული სხეულების სისტემისათვის შესაძლებელია სხვადასხვა კონფიგურაციის არსებობა მოდებული ძალების ქმედების დროს, წონასწორობის მდგომარეობა უნდა დადგინდეს შესაძლო მუშაობის მეთოდის საშუალებით, რომლის გამოყენებისას გასათვალისწინებელია შემდეგი:

1. მხოლოდ იმ ძალების განხილვაა აუცილებელი, რომლებიც, წონასწორობის მდგომარეობის განსაზღვრისას, ასრულებენ მუშაობას (ქმედების ძალები) სხეულის ან სისტემის სავარაუდო დიფერენციალური მოძრაობისას წონასწორობის მდებარეობიდან.
2. ის გარე ძალები, რომლებიც არ ასრულებენ მუშაობას (უკუქმედების ძალები), არ უნდა იყოს განხილული.
3. ამ მიზნით სხეულის ან სისტემის ქმედების ძალის დიაგრამა (და არა თავისუფალი სხეულის ძალთა დიაგრამა) სასარგებლოა მხოლოდ იმ ძალებზე ყურადღების გამახვილების მიზნით, რომლებიც ასრულებენ მუშაობას შესაძლო (ვირტუალური) გადაადგილებების დროს.

შესაძლო (ვირტუალური) გადაადგილება

შესაძლო გადაადგილება არის წრფივი ან კუთხური მდებარეობის პირველი რიგის დიფერენციალური ცვლილება. ეს ცვლილება წარმოსახვითია, რადგან ეს არის სავარაუდო მოძრაობა, რომელიც რეალურად შეიძლება არ მოხდეს. მათემატიკურად შესაძლო გადაადგილება იგივეა, რაც რეალური მოძრაობის დიფერენციალური ცვლილება. სიმბოლო σ გამოიყენება დიფერენციალური ცვლილებებისათვის. მექანიკური სისტემის ნაწილების წრფივი და კუთხური შესაძლო გადაადგილებების დაკავშირება შესაძლო მოძრაობასთან, რომელიც შეესაბამება შეზღუდვებს, ხშირად ანალიზის ყველაზე ძნელი ნაწილია. ამის გასაკეთებლად საჭიროა შემდეგი:

1. დაწერეთ გეომეტრიული დამოკიდებულებები, რომლებიც აღწერენ სისტემის კონფიგურაციას.
2. დაადგინეთ სისტემის ნაწილების მდებარეობებში დიფერენციალური ცვლილებები გეომეტრიული დამოკიდებულებების გაწარმოებით, რათა მიიღოთ დიფერენციალური შესაძლო მოძრაობები.

თავისუფლების ხარისხები

ამ თავში ყურადღება გამახვილებული იყო მექანიკურ სისტემებზე, სადაც ელემენტების მდებარეობები განისაზღვრებოდა ერთი ცვლადით (ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემები). ორი და მეტი თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში უნდა გამოიყენოთ შესაძლო მუშაობის განტოლება იმდენჯერ, რამდენიცაა თავისუფლების ხარისხი, უნდა შეცვალოთ ერთი ცვლადი, დანარჩენი დატოვოთ უცვლელად.

პოტენციური ენერგიის მეთოდი

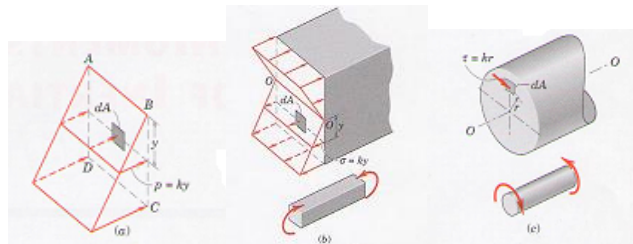
პოტენციური ენერგიის ცნება, როგორც გრავიტაციულის (V_g), ასევე ელასტიკურის (V_e), სასარგებლოა წონასწორობის პრობლემების გადასაჭრელად, სადაც შესაძლო გადაადგილება იწვევს სხეულების მასების ცენტრების ვერტიკალური მდებარეობის ცვლილებას და ცვლის ელასტიკური ელემენტის (ზამზარას) სიგრძეს. ამ მეთოდის გამოსაყენებლად:

1. მიიღეთ სისტემის სრული პოტენციური ენერგიის, V -ს გამოსახულება იმ ცვლადის საშუალებით, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის შესაძლო მდებარეობას.
2. შეამოწმეთ V -ს პირველი და მეორე წარმოებულები, რათა დაადგინოთ, შესაბამისად, წონასწორობის მდგომარეობა და შესაბამისი სტაბილურობის პირობა.

თავი 15. ინერციის ფართითი მომენტები

15.1. შესავალი

როდესაც ძალები უწყვეტადაა განაწილებული იმ ფართობზე, რომელზეც ისინი მოქმედებენ, ხშირად აუცილებელია ამ ძალების მომენტის გამოთვლა გარკვეული ღერძის მიმართ, რომელიც ამ ფართობის სიბრტყეშია ან მისი პერპენდიკულარულია. ხშირად ძალის ინტენსიურობა (წნევა ან ძაბვა) ამ ძალის ქმედების წრფიდან მომენტის ღერძამდე მანძილის პროპორციულია. მაშინ ფართობის ელემენტზე მოქმედი ელემენტარული ძალა პროპორციულია მანძილის დიფერენციალურ ფართობზე ნამრავლის და ელემენტარული მომენტი მანძილის კვადრატის დიფერენციალურ ფართობზე ნამრავლის პროპორციულია. ამიტომ სრული მომენტი შეიცავს ასეთ ინტეგრალს: $\int (\text{მანძილი})^2 d$ (ფართობი). ამ ინტეგრალს **ინერციის მომენტი** ან ფართობის **მეორე მომენტი** ეწოდება. ინტეგრალი ფართობის გეომეტრიის ფუნქციაა და ხშირად ჩნდება მექანიკის გამოყენებისას. ამდენად, სასარგებლოა მისი თვისებების უფრო დეტალური შესწავლა და ამ თვისებების გამოყენება.



ნახ. 15.1.ა, ბ, გ.

ნახ.15.1.-ზე ნაჩვენებია ამ ინტეგრალების წარმოქმნა. ნახ.15.1.ა.-ზე ზედაპირის ფართობი $ABCD$ განაწილებული წნევის P ქმედების ქვეშაა, რომელიც AB ღერძიდან y -მანძილის პროპორციულია. ეს სიტუაცია წინა თავებში იყო განხილული, სადაც აღწერილი იყო სითხის წნევის მოქმედება ბრტყელ ზედაპირზე. AB -ს მიმართ მომენტი, განპირობებული ფართობის dA ელემენტზე წნევით, არის $pydA = ky^2dA$. ამდენად, ინტეგრალი შემოდის, როდესაც გამოთვლილია სრული მომენტი. $M = k \int y^2 dA$.

ნახ.15.1.ბ.-დან ცხადია, რომ მარტივი დრეკადი ძელის განივ სეგმენტზე მოქმედი ძაბვის განაწილება მრუდდება მის ბოლოებზე მოდებული ტოლი და საწინააღმდეგო წყვილებით. ძელის ნებისმიერ სეგმენტზე ადგილი აქვს ძალის ინტენსიურობის ან ძაბვის $\sigma = ky$, წრფივ განაწილებას. ძაბვა დადებითია (გამჭიმი) $0-0$ ღერძს ქვევით და უარყოფითია (შემკუმშველი) ამ ღერძს ზევით. ცხადია, რომ $0-0$ ღერძის მიმართ ელემენტარული მომენტი $dM = y(\sigma dA) = ky^2dA$.

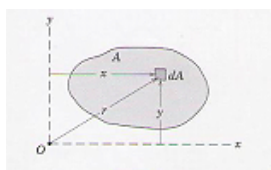
ამრიგად, იგივე ინტეგრალი შემოდის, როდესაც გამოთვლილია სრული მომენტი:
 $M = k \int y^2 dA$.

მესამე მაგალითი მოტანილია ნახ.15.1.გ.-ზე; აქ ნაჩვენებია წრიული ღერო, რომელიც განიცდის გრეხას. მასალის დრეკადობის ფარგლებში გრეხის მომენტი აწყდება წინააღმდეგობას ლილვის თითოეულ კვეთაზე ტანგენციალური ანუ წანაცვლების ძაბვის, τ , განაწილებით, რომელიც ცენტრიდან რადიალური მანძილის r პროპორციულია. ამრიგად, $\tau = kr$ და სრული მომენტი ცენტრალური ღერძის მიმართ: $M = \int r(\tau dA) = k \int r^2 dA$. აქ ინტეგრალი განსხვავებულია წინა ორი მაგალითის ინტეგრალებიდან იმით, რომ ფართობი მომენტის ღერძის ნორმალურია, და არა პარალელური, და იმით, რომ r არის რადიალური და არა მართკუთხა კოორდინატი.

თუმცა ზემოთ მოტანილ მაგალითებში ინტეგრალს, ზოგადად, ეწოდება ფართობის **ინერციის მომენტი** ღერძის მიმართ, უფრო შესაფერისი სახელია **ფართობის მეორე მომენტი**, რადგან dA ელემენტის მეორე მომენტის მისაღებად პირველი მომენტი $y dA$ მრავლდება მომენტის მხარზე, y . სიტყვა ინერცია გამოიყენება იმ ანალოგიის გამოსახატავად, რომელიც არსებობს ფართობის მეორე მომენტის ინტეგრალის მათემატიკურ ფორმასა და მბრუნავი სხეულების შემთხვევაში ე.წ. ინერციის ძალების ნაკრები მომენტების მათემატიკურ ფორმას შორის. ფართობის ინერციის მომენტი ფართობის წმინდა მათემატიკური თვისებაა და თავისთავად მას არა აქვს ფიზიკური შინაარსი.

15.2. განსაზღვრებები

ინერციის მართკუთხა და პოლარული მომენტები



ნახ. 15.2.

განვიხილოთ A ფართობი $x - y$ სიბრტყეში (ნახ. 15.2.). განმარტების თანახმად, dA ელემენტის ინერციის მომენტები x - და y -ღერძების მიმართ $dI_x = y^2 dA$ და $dI_y = x^2 dA$. ამიტომ A -ს ინერციის მომენტები იგივე ღერძების მიმართ ასეთია:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (15.1)$$

აქ ინტეგრირება ტარდება მთელ ფართობზე.

ანალოგიურად, dA -ს ინერციის მომენტი 0-პოლუსის (z -ღერძი) მიმართ ტოლია: $dI_z = r^2 dA$. მთელი ფართობის ინერციის მომენტი 0-ს მიმართ იქნება:

$$I_z = \int r^2 dA \quad (15.2)$$

განტოლება (15.1)-ით განსაზღვრულ გამოსახულებებს ინერციის მართკუთხა მომენტები ეწოდება, მაშინ როცა (15.2) გამოსახულებას - ინერციის პოლარული მომენტი. რადგან $x^2 + y^2 = z^2$, ცხადია, რომ

$$I_z = I_x + I_y \quad (15.3)$$

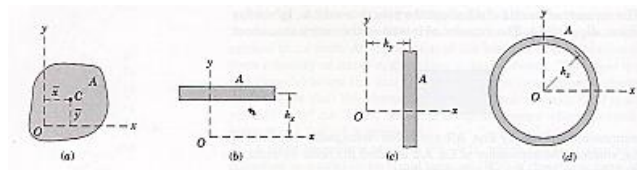
ისეთი სიბრტყისთვის, რომლის საზღვრები უფრო ადვილად აღიწერება მართკუთხა, ვიდრე პოლარული კოორდინატებით, მისი ინერციის მომენტი ადვილად გამოითვლება (15.3) განტოლების დახმარებით.

ელემენტის ინერციის მომენტში შედის ინერციის ღერძიდან ელემენტამდე მანძილის კვადრატი. ამრიგად, ელემენტს, რომლის კოორდინატი უარყოფითი სიდიდეა, იმდენივე წვლილი შეაქვს ინერციის მომენტში, რამდენიც იგივე სიდიდის დადებით კოორდინატს. შესაბამისად, ინერციის ფართითი მომენტი ნებისმიერი ღერძის მიმართ ყოველთვის დადებითი სიდიდეა. ამის საწინააღმდეგოდ, ფართობის პირველი მომენტი, რომელიც გამოიყენება ცენტროიდების გამოთვლისას, შეიძლება იყოს დადებითი, უარყოფითი ან ნულის ტოლი.

ფართობის ინერციის მომენტის განზომილებაა, ერთმნიშვნელოვნად, L^4 , სადაც L - სიგრძის განზომილებაა. ამდენად, SI ერთეულებში ინერციის ფართითი მომენტი გამოისახება m^4 -ით ან mm^4 -ით.

მნიშვნელოვანია კოორდინატების არჩევა ინერციის მომენტის გამოსათვლელად. მართკუთხა კოორდინატები გამოიყენება ისეთი ფორმებისათვის, რომელთა საზღვრები ყველაზე ადვილად გამოისახება ამ კოორდინატებში. პოლარული კოორდინატები, ჩვეულებრივ, ამარტივებს იმ საზღვრების პრობლემებს, რომლებიც აღიწერება z -ით და θ -ით. ფართობის ელემენტის არჩევა, რომელიც ამარტივებს ინტეგრაციას, რამდენადაც ეს შესაძლებელია, ასევე მნიშვნელოვანია ეს განხილვა ანალოგიურია იმისა, რომელიც ჩატარდა მე-8 თავში ცენტროიდების გამოთვლისას.

წრიული მოძრაობის (გირაციის) რადიუსი



ნახ. 15.3.ა, ბ, გ, დ.

განვიხილოთ ფართობი A (ნახ. 15.3.ა.), რომლის ინერციის მომენტებია I_x და I_y და O -ს მიმართ ინერციის პოლარული მომენტია I_z . ახლა ამ ფართობს განვიხილავთ როგორც ფართობის A გრძელ ვიწრო ზოლში კონცენტრირებულს. x ღერძიდან k_x მანძილზე (ნახ. 15.3.ბ.). განმარტების თანახმად, x ღერძის მიმართ ზოლის ინერციის მომენტი იქნება იგივე, რაც საწყისი ფართობისათვის, თუ $K_x^2 A = I_x$. k_x -მანძილს ეწოდება ფართობის წრიული მოძრაობის (გირაციის) რადიუსი x ღერძის მიმართ. ანალოგიური დამოკიდებულება შეიძლება დაიწეროს y -ღერძისთვის, თუ ფართობს განვიხილავთ როგორც ვიწრო ზოლში კონცენტრირებულს, რომელიც y -ღერძის პარალელურია (ნახ. 15.3.გ.). ასევე შეიძლება ფართობის ვიზუალიზება, რომელიც კონცენტრირებულია k_z რადიუსის ვიწრო რგოლში (ნახ. 15.3.დ.). ის შეიძლება გამოვსახოთ ინერციის პოლარული მომენტით, $K_z^2 A = I_z$. შეჯამებით მიიღება:

$$\begin{aligned} I_x &= K_x^2 A & K_x &= \sqrt{I_x/A} \\ I_y &= K_y^2 A & K_y &= \sqrt{I_y/A} \\ I_z &= K_z^2 A & K_z &= \sqrt{I_z/A} \end{aligned} \quad \text{ან} \quad (15.4)$$

წრიული მოძრაობის რადიუსი არის ფართობის განაწილება განსახილველი ღერძიდან. ინერციის მართკუთხა ან პოლარული მომენტი შეიძლება გამოისახოს წრიული მოძრაობის რადიუსის და ფართობის განსაზღვრით.

(15.4) განტოლების (13.7)-ში ჩასმა იძლევა

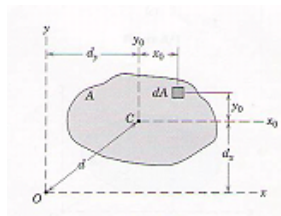
$$K_z^2 = K_x^2 + K_y^2$$

ამრიგად, პოლარული ღერძის მიმართ წრიული მოძრაობის რადიუსის კვადრატი ორი შესაბამისი მართკუთხა ღერძის მიმართ წრიული მოძრაობის რადიუსების ჯამის ტოლია.

არ აურიოთ ფართობის ცენტროიდის, c , კოორდინატი წრიული მოძრაობის რადიუსთან. ნახ. 15.3.ა.-ზე, x ღერძიდან ცენტროიდული მანძილის კვადრატი არის $\bar{y}^2$, რაც ფართობის ელემენტებიდან x ღერძამდე მანძილების საშუალო

მნიშვნელობის კვადრატია. მეორეს მხრივ, სიდიდე K_x^2 არის ამ მანძილების კვადრატების საშუალო. ინერციის მომენტი არ უდრის $A\bar{y}^2$, რადგან საშუალოს კვადრატი ნაკლებია, ვიდრე კვადრატების საშუალო.

ღერძების გადატანა



ნახ. 15.4.

ფართობის ინერციის მომენტი არაცენტროიდული ღერძის მიმართ შეიძლება ადვილად გამოისახოს ინერციის მომენტით პარალელური ცენტროიდული ღერძების მიმართ. ნახ. 15.4.-ში $x_0 - y_0$ ღერძები გადის ფართობის ცენტროიდში, c , ახლა განვსაზღვროთ ფართობის ინერციის მომენტები პარალელური $x - y$ ღერძების მიმართ. განმარტების თანახმად, ელემენტის ინერციის მომენტი dA x ღერძის მიმართ ასეთია:

$$dI_x = (y_0 + dx)^2 dA$$

$$\text{ინტეგრირებით } I_x = \int y_0^2 dA + 2dx \int y_0 dA + dx^2 \int dA$$

ცხადია, რომ, განმარტების თანახმად, პირველი ინტეგრალი არის ინერციის მომენტი $\bar{I}_x$ ცენტროიდული x_0 -ღერძის მიმართ. მეორე ინტეგრალი ნულის ტოლია, რადგან $\int y_0 dA = A\bar{y}_0 + \bar{y}_0$ ავტომატურად უდრის ნულის x ღერძზე მდებარე ცენტროიდისთვის. მესამე წევრი, უბრალოდ, არის $A dx^2$. ამრიგად, I_x -ს და I_y -ათვის ვიღებთ გამოსახულებებს:

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_x + A dx^2 \\ I_y &= \bar{I}_y + A dy^2 \end{aligned} \quad (15.6)$$

(15.3) განტოლების თანახმად, ამ ორი განტოლების ჯამი ასეთია:

$$I_z = \bar{I}_z + A d^2 \quad (15.6a)$$

(15.6) და (15.6 a) განტოლებები ე.წ. პარალელური ღერძის თეორემებია, კერძოდ, აღსანიშნავია ორი მომენტი. პირველი, ღერძები, რომელთა შორის ხდება

გადატანა, უნდა იყოს პარალელური და მეორე, ერთ-ერთმა ღერძმა უნდა გაიაროს ფართობის ცენტროიდში.

თუ გადატანა საჭიროა ორ პარალელურ ღერძს შორის, რომელთაგან არცერთი არ გადის ცენტროიდში, პირველ რიგში აუცილებელია ერთი ღერძიდან გადასვლა პარალელურ ცენტროიდულ ღერძზე და შემდეგ ცენტროიდული ღერძიდან გადასვლა მეორე ღერძზე.

პარალელური ღერძის თეორემები ასევე სამართლიანია წრიული მოძრაობის რადიუსებისთვის. K -ს განტოლება (15.6)-ში ჩასმით გადატანის გამოსახულება იღებს სახეს:

$$K^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (15.6b)$$

სადაც $\bar{k}$ არის წრიული მოძრაობის რადიუსი ცენტროიდული ღერძის მიმართ, რომელიც იმ ღერძის პარალელურია, რომელზეც k მოდებულია და d არის ორ ღერძს შორის მანძილი. ღერძები შეიძლება იყოს ფართობის სიბრტყეში ან ამ სიბრტყის ნორმალურია.

15.3. შედგენილი ფართობები

ხშირად აუცილებელია ფართობის ინერციის მომენტის გამოთვლა, როდესაც ფართობი შედგება მთელი რიგი მარტივი და გამოთვლადი გეომეტრიული ფორმის ცალკეული ნაწილებიდან. რადგან ინერციის მომენტი მანძილის კვადრატის და ფართობის ელემენტის ნამრავლის ინტეგრალი ან ჯამია, აქედან გამომდინარეობს, რომ დადებითი ფართობის ინერციის მომენტი ყოველთვის დადებითი სიდიდეა. შედგენილი ფართობის ინერციის მომენტი გარკვეული ღერძის მიმართ, უბრალოდ, მისი შემადგენელი ნაწილების ინერციის მომენტების ჯამია იგივე ღერძის მიმართ. ხშირად მოსახერხებელია შედგენილი ფართობის, როგორც დადებითი და უარყოფითი ნაწილებიდან შემდგარის განხილვა. მაშინ უარყოფითი ფართობის ინერციის მომენტი უნდა განვიხილოთ როგორც უარყოფითი სიდიდე.

როდესაც შედგენილი ფართობი შეიცავს რამდენიმე ნაწილს, მოსახერხებელია შედეგების ცხრილის სახით წარმოდგენა თითოეული ნაწილისთვის მისი ფართობის, ინერციის ცენტროიდული მომენტის $\bar{I}$, ცენტროიდული ღერძიდან იმ ღერძამდე მანძილის d , რომლის მიმართაც მთელი სეგმენტის ინერციის მომენტი გამოითვლება, და ნამრავლის Ad^2 საშუალებით. ინერციის მომენტი ნებისმიერი ნაწილისათვის, ღერძის გადატანის თეორემის თანახმად, ტოლია $\bar{I} + Ad^2$

მაგალითად, ასეთი ფართობისათვის $x - y$ სიბრტყეში და ნახ. 15.4.-ის აღნიშვნების საშუალებით, სადაც $\bar{I}_x$ იგივეა, რაც I_{x_0} და $\bar{I}_y$ იგივეა, რაც I_{y_0} .

ცხრილი ასეთი სახისაა:

ნაწილი	ფართობი, A	dx	dy	Adx^2	Ady^2	I_x	I_y
ჯამი	ΣA			ΣAdx^2	ΣAdy^2	ΣI_x	ΣI_y

ოთხი სვეტის ჯამებიდან შედგენილი ფართობის ინერციის მომენტების სახე x და y ღერძების მიმართ ასეთია:

$$I_x = \Sigma \bar{I}_x + \Sigma Adx^2 \qquad I_y = \Sigma \bar{I}_y + \Sigma Ady^2$$

თუმცა ჩვენ ვკრებთ შედგენილი ფართობის ცალკეული ნაწილების ინერციის მომენტებს მოცემული ღერძის მიმართ, მაგრამ შეგვიძლია მათი წრიული მოძრაობის რადიუსების შეკრება. შედგენილი ფართობის წრიული მოძრაობის რადიუსი განსაზღვრავს ღერძის მიმართ მოიცემა როგორც $K = \sqrt{I/A}$, სადაც I არის ინერციის სრული მომენტი და A არის შედგენილი ფიგურის სრული ფართობი. ანალოგიურად, წრიული მოძრაობის რადიუსი K პოლარული ღერძის მიმართ რაღაც წერტილის გავლით არის $\sqrt{I_z/A}$ სადაც $I_z = I_x + I_y$ $x - y$ ღერძებისთვის ამ წერტილის გავლით.

15.4. ინერციის ნამრავლი და ღერძების ბრუნვა

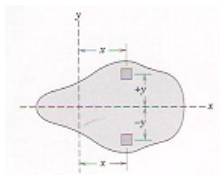
ქვემოთ განვსაზღვრავთ ინერციის ნამრავლს მართკუთხა ღერძების მიმართ და გამოვიყვანოთ პარალელური ღერძის თეორემას ცენტროიდული და არაცენტროიდული ღერძებისათვის. დამატებით, განვიხილავთ ღერძების ბრუნვის გავლენას ინერციის მომენტებზე და ნამრავლზე.

განსაზღვრება

ზოგიერთ პრობლემაში, რომლებშიც შედის არასიმეტრიული განივკვეთები და ინერციის მომენტების გამოთვლისას მბრუნავი ღერძის მიმართ შემოდის გამოსახულება $dI_{xy} = xy dA$, რომელსაც აქვს ინტეგრალური სახე:

$$I_{xy} = \int xy dA \qquad (15.7)$$

სადაც x და y ფართობის $dA = d_x d_y$ ელემენტის კოორდინატებია. სიდიდეს I_{xy} ეწოდება A ფართობის ინერციის ნამრავლი $x - y$ ღერძების მიმართ. ინერციის მომენტისგან განსხვავებით, რომელიც ყოველთვის დადებითია. დადებითი ფართობისთვის, ინერციის ნამრავლი შეიძლება იყოს დადებითი, უარყოფითი ან ნულის ტოლი.



ნახ. 15.5.

ინერციის ნამრავლი $= 0$, როდესაც კოორდინატთა ღერძებიდან რომელიმე არის სიმეტრიის ღერძი, როგორც, მაგალითად, ფართობის x -ღერძი (ნახ. 15.5.) აქედან ცხადია, რომ წევრების $x(-y)dA$ და $x(+y)dA$ ჯამი, განპირობებული სიმეტრიულად განლაგებული ელემენტებით, ისპობა, რადგან საერთო ფართობი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ასეთი ელემენტების წყვილებიდან შედგენილი, აქედან გამომდინარეობს, რომ მთელი ფართობის ინერციის მომენტი $I_{xy} = 0$.

ღერძების გადატანა

განმარტების თანახმად, A ფართობის ინერციის ნამრავლი (ნახ. 15.4) $x - y$ ღერძების მიმართ x_0, y_0 კოორდინატების საშუალებით ასეთი სახისაა:

$$I_{xy} = 0 \int (x_0 + d_x)(y_0 + d_y) dA = \int x_0 y_0 dA + d_x \int x_0 dA + d_y \int y_0 dA + d_x d_y \int dA$$

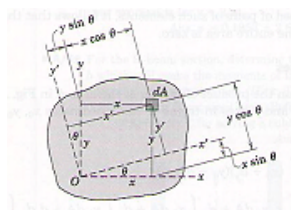
განმარტების თანახმად, პირველი ინტეგრალი არის ინერციის ნამრავლი ცენტროიდული ღერძის მიმართ, რომელიც ჩაიწერება როგორც $\overline{I_{xy}}$. ორივე შუათანა ინტეგრალი ნულის ტოლია, რადგან ფართობის პირველი მომენტი მისი ცენტროიდის მიმართ აუცილებლად ნულის ტოლია. მეოთხე წევრი არის $d_x d_y A$. ამრიგად, ღერძის გადატანის თეორემა ინერციის ნამრავლისათვის იღებს სახეს:

$$I_{xy} = \overline{I_{xy}} + d_x d_y A \quad (15.8)$$

ღერძების ბრუნვა

ინერციის ნამრავლი გამოიყენება ფართობის ინერციის მომენტის გამოსათვლელად დახრილი ღერძების მიმართ. ამ განხილვას პირდაპირ

მიყვავართ იმ ღერძების განსაზღვრის მნიშვნელოვანი პრობლემისკენ, რომელთა მიმართ ინერციის მომენტი მაქსიმალურია ან მინიმალური.



ნახ. 15.6.

ნახ. 15.6.-ზე ფართობის ინერციის მომენტი x' და y' ღერძების მიმართ ასეთი სახისაა:

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (y \sin \theta + x \cos \theta)^2 dA$$

სადაც x' და y' ჩანაცვლებულია მათი ეკვივალენტური გამოსახულებებით როგორც ეს ჩანს ფიგურის გეომეტრიიდან.

ტრიგონომეტრიული ტოლობების გამოყენებით:

$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}$ და I_x -ს, I_y -ს და I_{xy} -ს დამოკიდებულებების განსაზღვრით ვიღებთ:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (15.9)$$

ანალოგიურად ჩაიწერება ინერციის ნამრავლი დახრილი ღერძებისთვის:

$$I_{x'y'} = \int x' y' dA = \int (y \sin \theta + x \cos \theta)(y \sin \theta - x \cos \theta) dA$$

შემდეგი ტრიგონომეტრიული ტოლობების გამოყენებით:

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

და I_x, I_y, I_{xy} დამოკიდებულებების განსაზღვრით,

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (15.9a)$$

(15.9) განტოლების დამატებით ვიღებთ $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_z$, ინერციის პოლარულ მომენტს 0-ს მიმართ.

$I_{x'}$ და $I_{y'}$ მიერ შედგენილი კუთხე, იქნება ეს მაქსიმალური თუ მინიმალური შეიძლება განისაზღვროს როგორც $I_{x'}$, ასევე $I_{y'}$ θ -ს მიმართ წარმოებულის ნულად ჩათვლით. ამდენად,

$$\frac{dI'}{d\theta} = (I_y - I_x) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

ზღვრული კუთხის α -თი აღნიშვნით ვიღებთ:

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (15.10)$$

ეს განტოლება იძლევა 2α -ს ორ მნიშვნელობას, რომლებიც π -თ განსხვავდებიან ერთმანეთისგან, რადგან $\tan 2\alpha = \tan(2\alpha + \pi)$. შესაბამისად, α -ს ორი ამოხსნა ერთმანეთისგან განსხვავდება $\pi/2$ -თ. ერთი მნიშვნელობა განსაზღვრავს ინერციის მაქსიმალურ მომენტს და მეორე - მინიმალურ მომენტს. ამ ორ მართკუთხა ღერძს ეწოდება **ინერციის მთავარი ღერძები**.

როდესაც (15.10) განტოლებას შევიტანთ (15.9a) განტოლებაში, დაინახავთ, რომ ინერციის ნამრავლი $=0$ ინერციის მთავარი ღერძებისათვის. განტოლება (15.10) მიღებული $\sin 2\alpha$ -ს და $\cos 2\alpha$ ჩანაცვლებით $\sin 2\theta$ -ს და $\cos 2\theta$ -სთვის (განტოლებაში 15.9) იძლევა გამოსახულებებს **ინერციის მთავარი მომენტებისათვის**:

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (15.11)$$

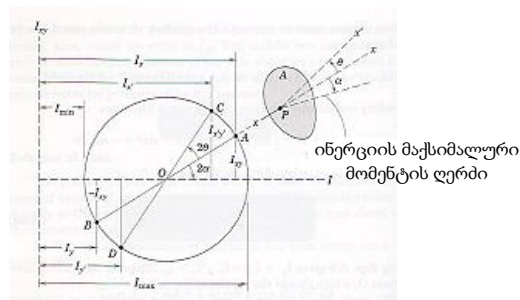
$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

ინერციის მორის წრე

შეიძლება 15.9, 15.9a, 15.10 და 15.11 განტოლებების გრაფიკულად წარმოდგენა დიაგრამის სახით, რომელსაც **მორის წრე** ეწოდება.

I_x , I_y და I_{xy} -ს მოცემული მნიშვნელობებისათვის I'_x , I'_y და I'_{xy} -ს შესაბამისი მნიშვნელობების დადგენა შეიძლება ნებისმიერი θ კუთხისათვის. პირველ რიგში შეირჩევა ჰორიზონტალური ღერძი ინერციის მომენტის გამოსათვლელად და

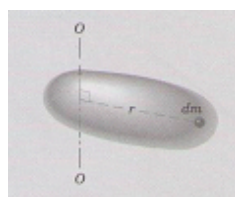
ვერტიკალური ღერძი-ინერციის ნამრავლის გამოსათვლელად. (ნახ. 15.7). შემდეგ განთავსდება A წერტილი, რომლის კოორდინატებია (I_x, I_{xy}) და B წერტილი, რომლის კოორდინატებია $(I_y, -I_{xy})$.



ნახ. 15.7.

ამის შემდეგ ამ ორი წერტილით, როგორც დიამეტრის ბოლოებით იხაზება წრე. კუთხე OA რადიუსსა და ჰორიზონტალურ ღერძს შორის არის 2α ანუ განსახილავი ფართობის x -ღერძსა და ინერციის მაქსიმალური მომენტის ღერძს შორის გაორმაგებული კუთხე. როგორც კუთხე დიაგრამაზე, ასევე ფართობის კუთხე იზომება იგივე ნიშნით, როგორითაც ნაჩვენებია. ნებისმიერი C წერტილის კოორდინატებია $(I_{x'}, I_{x'y'})$ ასევე კუთხე OA -ს და OC -ს შორის არის 2θ ანუ x -ღერძსა და x' -ღერძს შორის გაორმაგებული კუთხე. ისევ იზომება ორივე კუთხე იმავე ნიშნით, როგორც ნაჩვენებია. წრის ტრიგონომეტრიიდან შეიძლება დავადგინოთ, რომ განტოლებები 15.9, 15.9a და 15.10 შესაბამისობაშია ჩამოყალიბებულ დებულებებთან.

ინერციის მასის მომენტი



ნახ. 15.8.

განვიხილოთ m მასის მქონე სამგანზომილებიანი სხეული (ნახ. 15.8.) $O-O$ ღერძის მიმართ ინერციის მასის მომენტი I ასე განისაზღვრება:

$$I = \int r^2 dm$$

სადაც r $O-O$ ღერძიდან მასის ელემენტის dm -ს პერპენდიკულარული მანძილია და სადაც ინტეგრირება ტარდება მთელ სხეულზე. მოცემული ხისტი მყარი

სხეულისთვის ინერციის მასის მომენტი არის მისი მასის განაწილების ზომა განსახილავი ღერძის მიმართ და ამ ღერძისთვის სხეულის მუდმივი თვისებაა. მისი განზომილებაა (მასა)(სიგრძე)², ანუ კგ.მ² SI ერთეულებში. ეს განზომილება განსხვავდება ინერციის ფართობის მომენტის განზომილებიდან, რომელიც არის (სიგრძე)⁴ ანუ მ⁴ SI ერთეულებში.