

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გამოყენებითი რიცხვითი მეთოდები

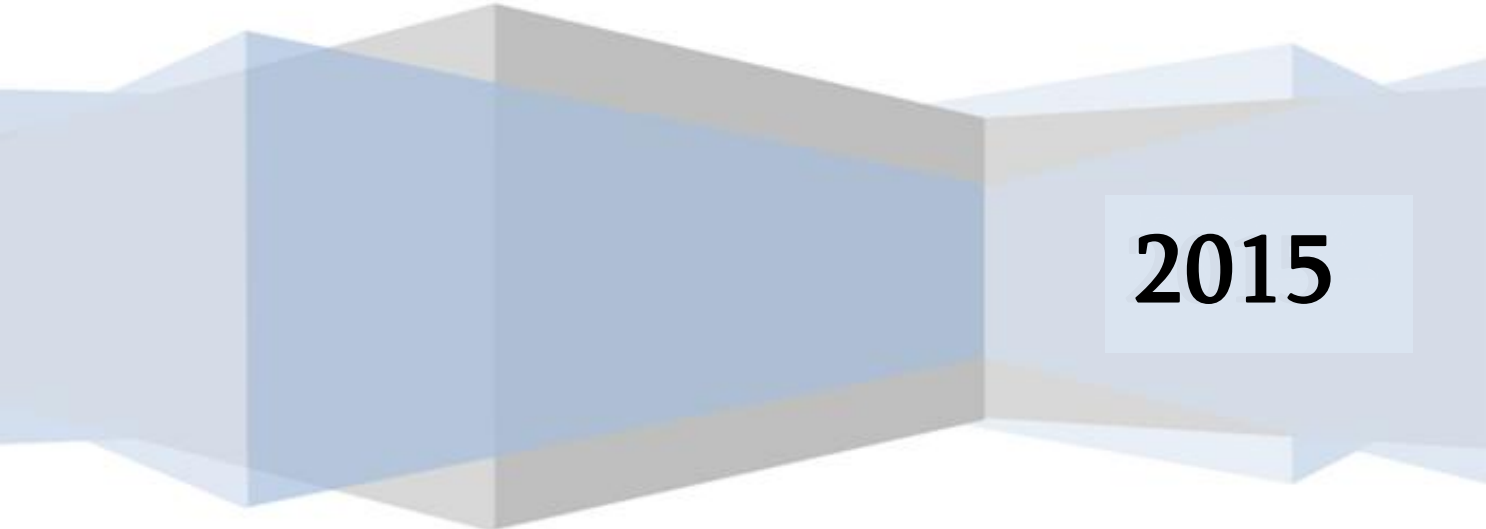
ლექციების კურსი

„Numerical methods for engineers / S.C. Chapra, R.P. Canale“ მიხედვით

(სტუ ბიბლიოთეკა # ...)

„ნიადაგისა და წყლის რესურსების ინჟინერიის“

სპეციალობის IV კურსის სტუდენტებისათვის



2015

Numerical Methods for Engineers

SIXT EDITION

Steven C. Chapra

Berger Chair in Computing and Engineering
Tufts University

Raymond P. Canale

Professor Emeritus of Civil Engineering
University of Michigan



Higher Education

Boston Burr Ridge, IL Dubuque, IA New York San Francisco St. Louis
Bangkok Bogotá Caracas Kuala Lumpur Lisbon London Madrid Mexico City
Milan Montreal New Delhi Santiago Seoul Singapore Sydney Taipei Toronto

დ.ნატროშვილი, გ.ბერიკელაშვილი, შ.ზაზაშვილი

გამოყენებითი რიცხვითი მეთოდები

ლექციების კურსი მომზადებულია

„Numerical methods for engineers / S.C. Chapra, R.P. Canale“

მიხედვით

თბილისი 2015



სარჩევი

თავი 1

1.1 მარტივი მათემატიკური მოდელი 5

თავი 2 პროგრამული პაკეტები და დაპროგრამება . . 9

თავი 3 მიახლოებები და დამრგვალების ცდომილებები .. 17

თავი 4

4.1 ტეილორის მწკრივი 24

თავი 5

5.2 ბისექციის მეთოდი 28

5.3 ყალბი პოზიციის მეთოდი 32

თავი 6

6.1 მარტივი უძრავი წერტილის იტერაცია 38

6.3 მკვეთთა მეთოდი 42

თავი 7

7.7 ფესვების მოძებნა პროგრამული პაკეტებით .. . 45

თავი 9

9.2 გაუსის გამორიცხვის მეთოდი 49

თავი 11

11.2 გაუს-ზეიდელის მეთოდი 54

თავი 15

15.1 წრფივი დაპროგრამება 59

თავი 16

16.1 კონტეინერის დაპროექტება უმცირესი დანახარჯებით . .71

16.4 წონასწორობა და პოტენციური ენერგიის მინიმუმი . . 75

თავი 17

17.1 წრფივი რეგრესია . . 80

თავი 18

18.2 ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი . . 85

18.6 სპლაინ ინტერპოლაცია . . . 87

თავი 21

21.1 ტრაპეციის ფორმულა . . 93

21.2 სიმპსონის ფორმულა . . . 98

თავი 22

22.4 გაუსის კვადრატურული ფორმულა . . 101

თავი 23

23.1 მაღალი სიზუსტის გაწარმოების ფორმულები . . 105

23.2 რიჩარდსონის ექსტრაპოლაცია . . . 108

თავი 25

25.1 ეილერის მეთოდი . . 111

25.2 ეილერის მეთოდის გაუმჯობესებები . . . 115

25.3 მეორე რიგის რუნგე-კუტას მეთოდები . . . 120

1.1 მარტივი მათემატიკური მოდელი

მათემატიკური მოდელი წარმოადგენს ფორმულირებას ან განტოლებას, რომელიც მათემატიკური ტერმინებით გამოსახავს ფიზიკურ სისტემას ან პროცესს. ზოგადი აზრით, მოდელი შეიძლება წარმოდგენილ იყოს შემდეგი თანაფარდობის სახით

$$\text{დამოკიდებული ცვლადი} = f \left(\begin{array}{l} \text{დამოუკიდებელი} \\ \text{ცვლადები} \end{array}, \begin{array}{l} \text{პარამეტრები,} \\ \text{ძალის} \\ \text{ფუნქციები} \end{array} \right) \quad (1.1)$$

სადაც დამოკიდებული ცვლადი წარმოადგენს მახასიათებელს, რომელიც როგორც წესი, ასახავს სისტემის ქცევას ან მდგომარეობას; დამოუკიდებელი ცვლადები განზომილებებია, როგორცაა მაგალითად დრო და სივრცე, რომელშიც განისაზღვრება სისტემის ქცევა; პარამეტრები ასახავენ სისტემის თვისებებს ან შედგენილობას; ძალის ფუნქციები კი არის გარეგანი ქმედებები სისტემაზე.

(1.1) ტოლობის ფაქტიური მათემატიკური გამოსახულება შეიძლება იცვლებოდეს უმარტივესი ალგებრული დამოკიდებულებებიდან დიფერენციალურ განტოლებათა ურთულეს ერთობლიობებამდე. მაგალითად, დაკვირვებათა საფუძველზე ნიუტონმა ჩამოაყალიბა მოძრაობის მეორე კანონი, რომელიც ადგენს, რომ სხეულის იმპულსის ცვლილების სიჩქარე მასზე მოქმედი ძალის ტოლია. ამ კანონის მათემატიკური გამოსახულება, ანუ მოდელი, კარგად ცნობილი განტოლებაა

$$F = ma \quad (1.2)$$

სადაც F სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედია (ნ, ან კგ მ/წმ²), m ობიექტის მასაა (კგ), a კი წარმოადგენს აჩქარებას (მ/წმ²).

მეორე კანონი შეგვიძლია გადავწეროთ (1.1) სახით ორივე მხარის m -ზე გაყოფით

$$a = \frac{F}{m} \quad (1.3)$$

სადაც a დამოკიდებული ცვლადი გამოსახავს სისტემის ქცევას, F ძალის ფუნქციაა, ხოლო m პარამეტრი ასახავს სისტემის თვისებას. მივაქციოთ ყურადღება, რომ ამ მარტივი შემთხვევისათვის არ გვაქვს დამოუკიდებელი ცვლადი, რადგან ჩვენ ჯერ არ შეგვიძლია გავაკეთოთ პროგნოზი როგორ იცვლება აჩქარება დროსა და სივრცეში. (1.3) განტოლებას

აქვს ზოგიერთი მახასიათებელი რომლებიც ტიპურია ფიზიკური სამყაროს მათემატიკური მოდელებისათვის:

1. ის აღწერს ბუნებრივ პროცესს ან სისტემას მათემატიკური ტერმინებით.
2. ის წარმოადგენს რეალობის იდეალიზაციას და გამარტივებას. ანუ, მოდელი არ ითვალისწინებს ბუნებრივი პროცესის უმნიშვნელო დეტალებს და ფოკუსირებულია მის არსებით მხარეებზე. მაგალითად, მეორე კანონი არ ითვალისწინებს ფარდობითობის თეორიის ეფექტებს, რომელთაც მინიმალურ გავლენა აქვთ ადამიანთა ხილული სამყაროსათვის დამახასიათებელი სიჩქარეებისათვის.
3. და ბოლოს, ის გვაძლევს პროგნოზირებისათვის საჭირო შედეგებს. მაგალითად, ცნობილი ძალის და მასის შემთხვევაში (1.3)-ით შეგვიძლია გამოვთვალოთ აჩქარება.

თავისი მარტივი ალგებრული ფორმის წყალობით, (1.2)-ის ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ ცხადი სახით. თუმცა, სხვა მათემატიკური მოდელი შეიძლება გაცილებით რთული იყოს და ამიტომ ან შეუძლებელი იყოს ზუსტი ამონახსნის მიღება, ან მოითხოვდეს რთულ მათემატიკურ მეთოდებს. საილუსტრაციოდ, გამოვიყენოთ მეორე კანონი თავისუფლად ვარდნილი სხეულის ზღვრული სიჩქარის მოსაძებნად დედამიწის ძედაპირის სიახლოვეს. ვარდნილ სხეულად წარმოვიდგინოთ პარაშუტისტი (ფიგ.1.2). ამ შემთხვევაში მოდელი შეიძლება მივიღოთ თუ აჩქარებას წარმოვადგენთ სიჩქარის ცვლილების სახით დროის განმავლობაში (dv/dt) და ჩავსვამთ (1.3)-ში



ფიგურა 1.2

ვარდნილ პარაშუტისტზე მოქმედი ძალების სქემატური დიაგრამა. F_D ქვევით მიმართული დედამიწის მიზიდულობის ძალაა, F_U კი -- ზევით მიმართული ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \quad (1.4)$$

სადაც v სიჩქარეა (მ/წმ) და t არის დრო (წმ). თუ ტოლქმედი ძალა დადებითია, მაშინ ობიექტი აჩქარებულად მოძრაობს, თუ უარყოფითი -- შენელებულად, თუ ნულია -- ობიექტი მუდმივი სიჩქარით გადაადგილდება.

ტოლქმედი ძალა წარმოადგენს საპირისპიროდ მოქმედი ორი ძალის -- ქვევით მიმართული F_D სიმძიმის ძალის და ზევით მიმართული F_U ძალის ჯამს:

$$F = F_D + F_U.$$

(1.5)

თუ ქვევით მიმართულ ძალას წარმოვიდგენთ დადებითი ნიშნით, მაშინ დედამიწის მიზიდულობის ძალის მიმართ მეორე კანონი ასე ჩაიწერება:

$$F_D = mg \quad (1.6)$$

სადაც g გრავიტაციული მუდმივაა, ანუ სიმძიმის ძალის აჩქარება, რომლის სიდიდეა მიახლოებით 9.8 მ/წმ². ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა შეიძლება სხვაგვარად ჩამოყალიბდეს. სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ იგი სიჩქარის პირდაპირ პროპორციულია და მიმართულია ზევით

$$F_U = -cv. \quad (1.7)$$

c (კგ/წმ) წარმოადგენს შემხვედრი წინააღმდეგობის კოეფიციენტს.

შენიშვნა. სინამდვილეში დამოკიდებულება არაწრფივია და უკეთესია მისი წარმოდგენა $F_U = -cv^2$ სახით. როგორ მოქმედებს ამგვარი არაწრფივობა მოდელზე, ცალკე განხილვის საგანს წარმოადგენს.

(1.4)-(1.7) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m} \quad (1.8)$$

ანუ

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \quad (1.9)$$

(1.9) დიფერენციალური განტოლება წარმოადგენს მოდელს, რომელიც აკავშირებს ვარდნილი სხეულის აჩქარებას ამ სხეულზე მოქმედ ძალებთან.

განსხვავებით (1.3) განტოლებისა, (1.9) განტოლების ზუსტი ამონახსნი -- პარამუტისტის სიჩქარე -- ვერ მიიღება მარტივი ალგებრული გარდაქმნებით. კალკულუსის მეთოდებით დგინდება, რომ თუ პარამუტისტის საწყისი სიჩქარე ნულია ($v = 0$ როცა $t = 0$), მაშინ

$$v(t) = \frac{gm}{c} (1 - e^{-(c/m)t}) . \quad (1.10)$$

მაგალითი 1.1

პარაშუტისტი, რომლის მასა 68.1 კგ-ია, ხტება შეჩერებული აერბურთიდან. (1.10)-ის გამოყენებით გამოვთვალოთ სიჩქარე პარაშუტის გახსნამდე. აეროდინამიკური წინააღმდეგობის კოეფიციენტი არის 12.5 კგ/წმ .

ამოხსნა. (1.10) განტოლებაში პარამეტრების შეტანით მიიღება

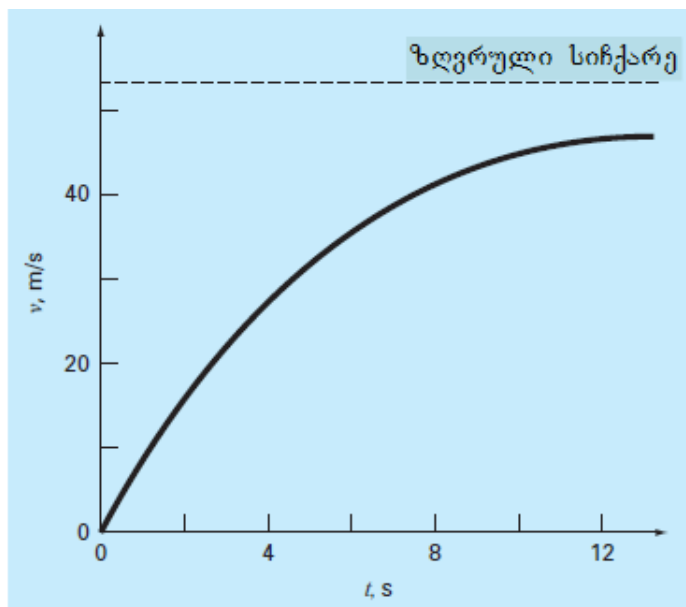
$$v(t) = \frac{9.8(68.1)}{12.5} (1 - e^{-(12.5/68.1)t}) = 53.39(1 - e^{-0.18355t})$$

და გამოვთვლით

t (წმ)	v (მ/წმ)
0	0.00
2	16.40
4	27.77
6	35.64
8	41.10
10	44.87
12	47.49
∞	53.39

მოდელის თანახმად, პარაშუტისტი მკვეთრად უმატებს სიჩქარეს (ფიგ. 1.3). 10 წამში მიიღწევა 44.87 მ/წმ (161.5 კმ/სთ) სიჩქარე. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ საკმარისად დიდი ხნის შემდეგ მიიღწევა ზღვრული სიჩქარე 53.39 მ/წმ (192.2 კმ/სთ) . ეს სიჩქარე მუდმივია, რადგან ბოლოს და ბოლოს სიმძიმის ძალა გაწონასწორდება ჰაერის წინააღმდეგობის ძალასთან, ტოლქმედი ძალა ხდება ნულის ტოლი და აჩქარება წყდება.

(1.10) ტოლობით განსაზღვრულ ამონახსნს ანალიზური (ზუსტი) ეწოდება, რადგან ის ზუსტად აკმაყოფილებს გამოსავალ დიფერენციალურ განტოლებას. მაგრამ უამრავი მათემატიკური მოდელისათვის ზუსტი ამონახსნი არ იძებნება. ასეთ შემთხვევებში ერთადერთ ალტერნატივას წარმოადგენს რიცხვითი მეთოდების შემუშავება, რომლებიც იძლევიან ზუსტი ამონახსნის მიახლოებებს .



ფიგურა 1.3

პარაშუტისტის ამოცანის ანალიზური ამოხსნა მაგალით 1.1-ში. სიჩქარე იზრდება და ასიმპტოტურად უახლოვდება ზღვრულ მნიშვნელობას

პროგრამული პაკეტები და დაპროგრამება

დღეისათვის არსებობენ პროგრამული უზრუნველყოფის ორი ტიპის მომხმარებლები. პირველი ტიპის მომხმარებელი სარგებლობს პროგრამულ უზრუნველყოფას სტანდარტული შესაძლებლობებით, ანუ იმ ფუნქციონალით რომელიც წინასწარ არის ჩადებული ამა თუ იმ პროგრამულ პაკეტში. მაგალითად, წრფივ განტოლებათა ამოხსნა ან ფუნქციის გრაფიკის აგება შესაძლებელია შესრულდეს Excel ან MATLAB პროგრამული პაკეტების გამოყენებით. ამ პროგრამული პაკეტების შემქმნელებმა იცოდნენ რომ ბევრ მომხმარებელს დასჭირდებოდა ასეთი ტიპის ამოცანების გადაჭრა.

მაგრამ რა ხდება იმ შემთხვევაში როცა გადასაჭრელი ამოცანისათვის არ არის საკმარისი წინასწარ ჩადებული შესაძლებლობები? საინჟინრო წრეებში არ არის მისაღები ასეთ შემთხვევაში ხელების ჩამოშვება ბურტყუნით „უფროსო, პროგრამას მეტი არ შეუძლია“. ასეთ შემთხვევაში არსებობს ორი გამოსავალი. პირველი, მოინახოს სხვა უფრო ქმედითი პროგრამული პაკეტი. მეორე, უნდა გახდეთ უფრო „ძლიერი“ მომხმარებელი, უნდა ისწავლოთ Excel VBA მაკროებისა და MATLAB M-ფაილების წერა. რას წარმოადგენენ ეს უკანასკნელნი? ისინი პროგრამებია რომელთა გამოყენებით პროგრამულ უზრუნველყოფაში წინასწარ ჩადებული შესაძლებლობების გაფართოებაა შესაძლებელი. ამ პროგრამების დაწერა და აღსრულება Excel და MATLAB პროგრამული პაკეტების გარემოებებშია შესაძლებელი. მეტიც, დაპროგრამების უნარ-ჩვევების მოთხოვნა ამ შემთხვევაში იგივეა, რაც Fortran 90 ან C ენების დაპროგრამებისთვისაა საჭირო.

ჩვენი მიზანია ვისწავლოთ დაპროგრამების ის მხარეები რომლებიც სტანდარტული საინჟინრო ამოცანების გადასაწყვეტადაა საჭირო. აქედან გამომდინარე უნდა შევვხებით დაპროგრამების შემდეგ საკითხებს:

- მარტივი ინფორმაციის წარმოდგენა (მუდმივები, ცვლადები, მონაცემთა ტიპების დეკლარაცია)
- რთული ინფორმაციის წარმოდგენა (მონაცემთა სტრუქტურები, მასივები)
- მათემატიკური ფორმულები (მინიჭება, პრიორიტეტების წესები, რთული ფუნქციები)

- შეტანა/გამოტანა
- ლოგიკური წარმოდგენა (მიმდევრობა, ამორჩევა, განმეორება)
- მოდულური დაპროგრამება

ჩვენ შევჩერდებით ბოლო ორ საკითხზე რადგან სწორად ეს საკითხებია მნიშვნელოვანი ალგორითმების აღქმაში და პროგრამების შესწავლაში.

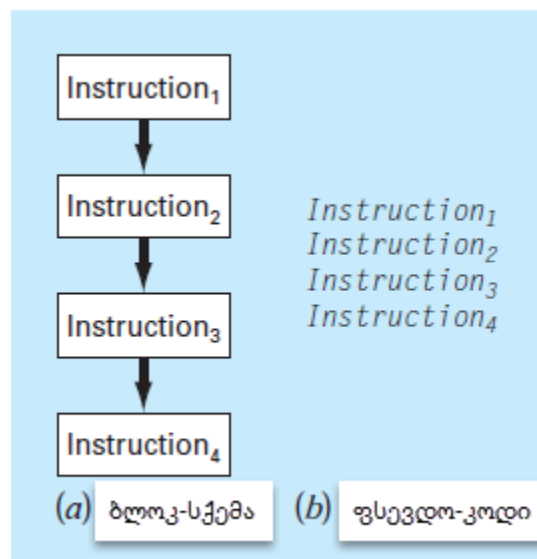
ზოგადად, ალგორითმი რაიმე ამოცანის გადაჭრის გზაა, მაგრამ ამ გადაჭრისას უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი სამი პუნქტი:

1. ალგორითმი უნდა შედგებოდეს რამოდენიმე ბიჯისაგან;
2. როცა ალგორითმი ერთი ბიჯის შესრულებას დაასრულებს, იგი შემდგომი ბიჯის შესრულებაზე უნდა გადავიდეს;
3. ბიჯები შეიძლება პერიოდულად გამეორდეს, მაგრამ საერთო ჯამში ყოველი ალგორითმის ბიჯების საერთო რაოდენობა სასრული უნდა იყოს -- ალგორითმი როდესღაც უნდა გაჩერდეს.

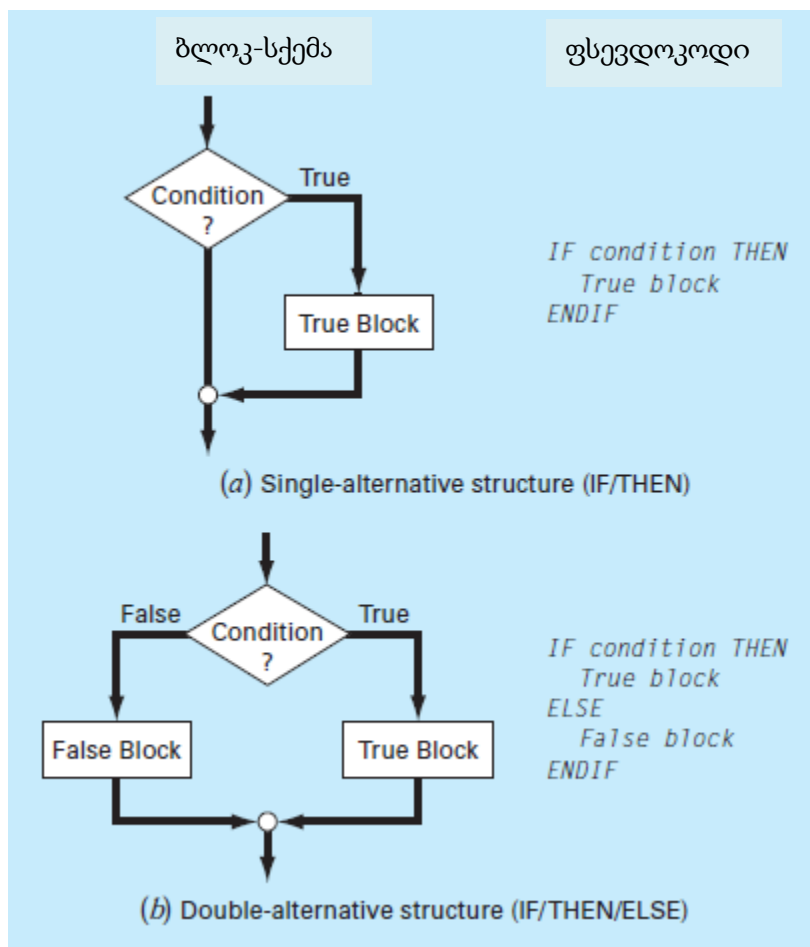
ალგორითმის წარმოდგენის მიზნით ხშირად მიმართავენ ე.წ. ფსევდო-კოდს, ანუ მანქანურ კოდთან დაახლოებულ ბრძანებებს ჩაწერილს ჩვეულებრივ (ინგლისურ) ენაზე. შევთანხმდეთ, რომ საკვანძო სიტყვები (მაგ. IF, DO, INPUT) ჩაიწერება მთავრული სიმბოლოებით, ხოლო დანარჩენი პატარა სიმბოლოებით.

მიმდევრობა. მიმდევრობითი სტრუქტურა გამოხატავს იმ ტრივიალურ იდეას, რომ კომპიუტერი ასრულებს ერთ ინსტრუქციას (ბრძანებას) დროის ერთეულში და გადადის შემდეგი ინსტრუქციის შესრულებაზე. სტრუქტურა შეიძლება გამოსახული იყოს ბლოკ-სქემით ან ფსევდოკოდით (ფიგ. 2.2).

ფიგურა 2.2



ამორჩევა. ამორჩევა გულისხმობს პროგრამის დინების გახლეჩვას განშტოებებად რაიმე ლოგიკური პირობის გამოყენებით. მაგალითად, განვიხილოთ IF/THEN პირობითი ერთ არჩევანის კონსტრუქცია (ფიგ. 2.3 a). თუ პირობა Condition ჭეშმარიტია, სრულდება კოდის ბლოკი True Block, ხოლო თუ პირობა Condition მცდარია, მაშინ კოდის ბლოკი True Block არ სრულდება, პროგრამა ასრულებს მომდევნო ინსტრუქციას.



ფიგურა 2.3

განვიხილოთ IF/THEN/ELSE ორ არჩევანის კონსტრუქცია (ფიგ. 2.3b).

თუ პირობა Condition ჭეშმარიტია სრულდება კოდის ბლოკი True Block. წინააღმდეგ შემთხვევაში სრულდება კოდის ბლოკი False Block.

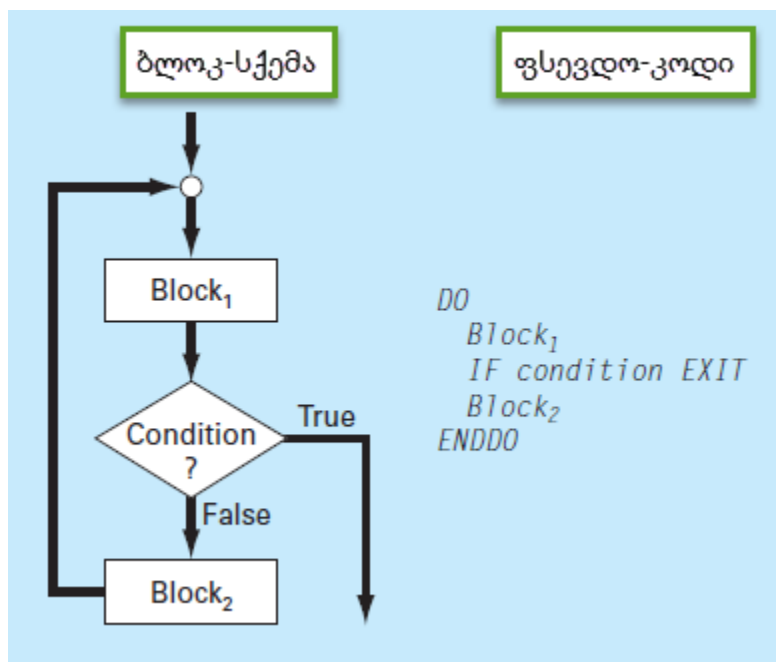
განმეორება (ციკლი) გულისხმობს ინსტრუქციათა განმეორებას რაიმე პირობის მიხედვით. განვიხილოთ DOEXIT კონსტრუქცია (ფიგ. 2.5). ამ განმეორების კონსტრუქციაში ინსტრუქციების შესრულება მეორდება ვიდრე ლოგიკური პირობა condition არ გახდება

ჭეშმარიტი. თუ condition ჭეშმარიტია, მაშინ სრულდება EXIT და განმეორება (ციკლი) შეწყვეტილია.

შევნიშნოთ, რომ DOEXIT ციკლი სტანდარტული ნაწილია Excel VBA-სათვის. MATLAB მის ნაცვლად იყენებს ე.წ. WHILE სტრუქტურას.

ფიგურა 2.5

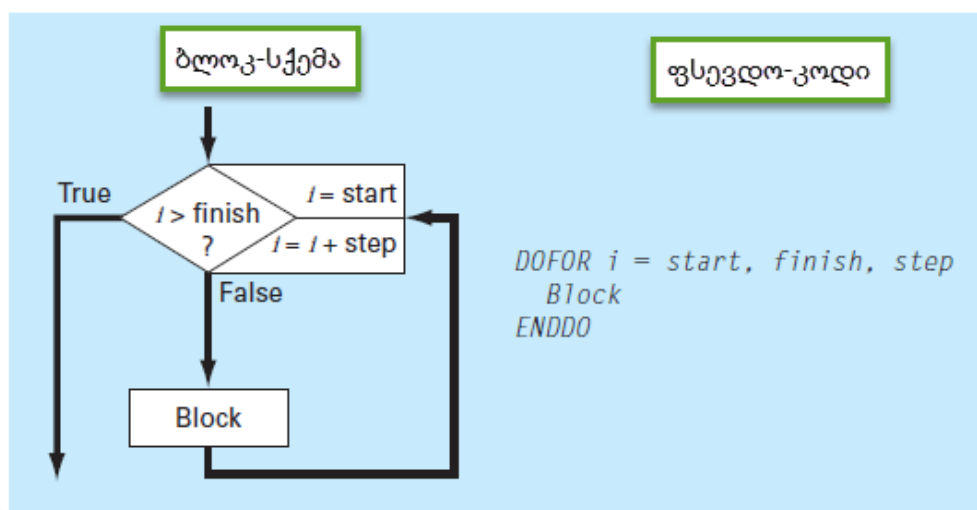
DOEXIT, ანუ
ციკლის შეწყვეტა



განსხვავებით DOEXIT კონსტრუქციისა, რომელიც ლოგიკურ ციკლს წარმოადგენს, იყენებენ თვლით-კონტროლირებად DOFOR ციკლსაც (ფიგ. 2.6). ეს კონსტრუქცია შეიძლება გამოვიყენოთ, როცა განმეორებათა რაოდენობა ცნობილია.

ფიგურა 2.6

DOFOR
თვლით-კონტროლი-
რებადი კონსტრუქცია



კერძოდ, i ინდექსი ღებულობს საწყის მნიშვნელობას $start$, შემდეგ ხდება შემოწმება არის თუ არა ის საბოლოო $finish$ მნიშვნელობაზე ნაკლები ან ტოლი, და თუ ეს ასეა, მაშინ ინსტრუქციათა ბლოკი აღსრულდება, თუ არა, განმეორება შეწყდება, ამასთან ENDDO ინსტრუქციასთან ყოველ შეხვედრაზე ინდექსი i იზრდება $step$ მნიშვნელობით.

განვიხილოთ ზოგიერთი მარტივი ამოცანა და ჩაწეროთ მათი ამოხსნის ალგორითმები ფსევდო-კოდების დახმარებით.

მაგალითი 2.1

კვადრატული განტოლების ფესვების მოძებნა.

ცნობილია, რომ $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების ფესვები მოიძებნება ფორმულით: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

შევქმნათ ალგორითმი, რომელიც გააკეთებს შემდეგს:

ბიჯი 1: მოსთხოვს მომხმარებელს განტოლების a, b და c კოეფიციენტებს.

ბიჯი 2: გამოიყენებს ფესვების მოძებნის ფორმულას, ამასთან დაამუშავებს ყველა შესაძლო შემთხვევას (მაგალითად ნულზე გაყოფას, როცა $a = 0$).

ბიჯი 3: ამობეჭდავს ფესვებს.

ბიჯი 4: შესთავაზებს მომხმარებელს ბიჯი 1-ზე დაბრუნებას და პროცესის გამეორებას.

ამოხსნა. ალგორითმის შემუშავებისას ჩვენ გამოვიყენებთ „ზოგადიდან-კერძოსკენ“ მიდგომას, ანუ მოვახდენთ ალგორითმის თანმიმდევრულ დახვეწას. დავუშვათ, რომ განტოლების კოეფიციენტები არ საჭიროებენ გადამოწმებას (ანუ $a \neq 0$ და დისკრიმინანტი $b^2 - 4ac$ არაუარყოფითია), მაშინ ალგორითმის ფსევდო-კოდს ასეთი სახე ექნება

```
DO
  INPUT a, b, c
  r1 = (-b + SQRT(b^2 - 4ac)) / (2a)
  r2 = (-b - SQRT(b^2 - 4ac)) / (2a)
  DISPLAY r1, r2
  DISPLAY 'Try again? Answer yes or no'
  INPUT response
  IF response = 'no' EXIT
ENDDO
```

ფორმულის ხელახლა გამოყენებისათვის გამოყენებულია DOEXIT კონსტრუქცია, ალგორითმი მთავრდება თუ $response = 'no'$.

ეს ალგორითმი არაა სრულყოფილი, საჭიროა მისი დახვეწა განტოლების კოეფიციენტთა ყველა შესაძლო მნიშვნელობებისათვის. კერძოდ:

1. თუ $a = 0$, მაშინ ჩვენი ფორმულა არ მუშაობს (ნულზე გაყოფა არ შეიძლება). საქმე გვაქვს წრფივ განტოლებასთან ორი შესაძლო შემთხვევით:

- თუ $b \neq 0$, მაშინ ფესვი ტოლია $-c/b$.
- თუ $b = 0$, მაშინ ფესვი არ გვაქვს.

2. თუ $a \neq 0$, მაშინ $d = b^2 - 4ac$ დისკრიმინანტის მიხედვით საქმე გვაქვს ორ შემთხვევასთან:

- თუ $d \geq 0$, მაშინ გვაქვს ორი ნამდვილი ფესვი.
- თუ $d < 0$, მაშინ გვაქვს ორი კომპლექსური ფესვი.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობების თანახმად ჩვენი ალგორითმის საბოლოო სახე ასეთი ფსევდოკოდით წარმოიდგინება.

```
DO
  INPUT a, b, c
  r1 = 0: r2 = 0: i1 = 0: i2 = 0
  IF a = 0 THEN
    IF b ≠ 0 THEN
      r1 = -c/b
    ELSE
      DISPLAY "Trivial solution"
    ENDIF
  ELSE
    discr = b2 - 4 * a * c
    IF discr ≥ 0 THEN
      r1 = (-b + Sqrt(discr))/(2 * a)
      r2 = (-b - Sqrt(discr))/(2 * a)
    ELSE
      r1 = -b/(2 * a)
      r2 = r1
      i1 = Sqrt(Abs(discr))/(2 * a)
      i2 = -i1
    ENDIF
  ENDIF
  DISPLAY r1, r2, i1, i2
  DISPLAY 'Try again? Answer yes or no'
  INPUT response
  IF response = 'no' EXIT
ENDDO
```


წარმოვიდგინოთ როგორი არაკომფორტულია ისეთი წიგნის წაკითხვა, რომელსაც არა აქვს არც თავები, არც პუნქტები და არც პარაგრაფები, ანუ ტექსტი არასტრუქტურირებულია, არ არის მოდულური. ასევე კომპიუტერულ პროგრამებშიც, კარგი პროგრამა უნდა იყოს დაყოფილი ნაწილებად, მოდულებად. მოდულები უნდა იყვნენ მაქსიმალურად დამოუკიდებელნი, მათ თავისი საკუთარი დავალების შესრულება უნდა შეეძლოთ.

Excel/VBA დაპროგრამებაში ასეთ მოდულებს წარმოადგენენ პროცედურები და ფუნქციები. ფუნქციების დანიშნულებაა მიიღონ რაღაც ინფორმაცია, დაამუშაონ ეს ინფორმაცია და დააბრუნონ დამუშავების შედეგები.

მოდულურ დაპროგრამების უპირატესობა ისაა, რომ შესაძლებელია თითოეული მოდულის დამოუკიდებლად დახვეწა და მომსახურება, შესაძლებელია პროგრამის მოდიფიცირება ახალი მოდულების დამატებით.

განვიხილოთ პარაშუტისტის ამოცანა: დროისა და სიჩქარის საწყისი $t_i = 0$ და v_i მნიშვნელობებით პარაშუტისტის სიჩქარე გამოითვლება იტერაციული ფორმულით

$$v_{i+1} = v_i + \frac{dv_i}{dt} \Delta t.$$

დავუშვათ, რომ გვაინტერესებს სიჩქარის მნიშვნელობა მოძრაობის დაწყებიდან დროის $t_f = 4$ წამისათვის, ბიჯით $\Delta t = 0.5$ წმ. ადვილი მისახვედრია რომ ფორმულა უნდა

გამოვიყენოთ $n = \frac{t_f}{\Delta t} = \frac{4}{0.5} = 8$ -ჯერ. რადგან იტერაციების რაოდენობა ცნობილია, ამიტომ

გამოვიყენებთ DOFOR კონსტრუქციას. ალგორითმის ფსევდო-კოდს აქვს შემდეგი სახე

```
g = 9.8
INPUT cd, m
INPUT ti, vi, tf, dt
t = ti
v = vi
n = (tf - ti) / dt
DOFOR i = 1 TO n
    dvdt = g - (cd / m) * v
    v = v + dvdt * dt
    t = t + dt
ENDDO
DISPLAY v
```

ამ ალგორითმის საფუძველზე შეგვიძლია შევქმნათ ფუნქცია Function Euler(ti, vi, tf, dt),

რომელიც შემავალ INPUT მნიშვნელობებს მიიღებს არგუმენტების სახით და რომლის დაბრუნებული შედეგი შეიძლება დაიწეროს მინიჭების სახით $y = \text{Euler}(ti, vi, tf, dt)$.
ფუნქციის ფსევდო-კოდს აქვს შემდეგი სახე

```
FUNCTION Euler(ti, vi, tf, dt)
```

```
   $g = 9.8$ 
```

```
  INPUT  $cd, m$ 
```

```
  INPUT  $ti, vi, tf, dt$ 
```

```
   $t = ti$ 
```

```
   $v = vi$ 
```

```
   $n = (tf - ti) / dt$ 
```

```
  DOFOR  $i = 1$  TO  $n$ 
```

```
     $dvd t = g - (cd / m) * v$ 
```

```
     $v = v + dvd t * dt$ 
```

```
     $t = t + dt$ 
```

```
  ENDDO
```

```
  Euler =  $v$ 
```

```
END
```

მიახლოებები და დამრგვალების ცდომილებები

პრაქტიკულ ამოცანებში ჩვენ ყოველთვის ვაწყდებით გამოთვლების ცდომილებებს, ამიტომ ძალზე მნიშვნელოვანია ცდომილების ზოგადი კონცეფციის კარგად გააზრება. ბევრ გამოყენებით და საინჟინრო ამოცანაში ჩვენ არ შეგვიძლია მივიღოთ ანალიზური ამოხსნები. აქედან გამომდინარე, არ შეგვიძლია ზუსტად გამოვთვალოთ ცდომილება, რომელიც დაკავშირებულია ჩვენი ამოცანის ამოხსნის მეთოდებთან. ასეთ შემთხვევებში ჩვენ უნდა შევეგუოთ მიახლოებებს ან ცდომილებებს და უნდა შევძლოთ მათი შეფასება.

ეს ფაქტი თითქოს ეწინააღმდეგება ჩვენი ცხოვრების ლოგიკურ დინებას, თუნდაც უსაფრთხოების ინჟინერიას. ინჟინრები ყოველთვის ცდილობენ შეამცირონ ცდომილებები თავიანთ მუშაობაში. გამოცდების ჩაბარებისას თუ საშინაო დავალების შესრულებისას ჩვენ კი არ გვაჯილდოებენ, არამედ გვსჯიან შეცდომების გამო. პროფესიულ პრაქტიკაში შეცდომას, ცდომილებას შეიძლება მოჰყვეს კატასტროფული შედეგები. თუ ხელსაწყო ან კონსტრუქციამ არ გაამართლა, შეიძლება ამას მსხვერპლი მოჰყვეს.

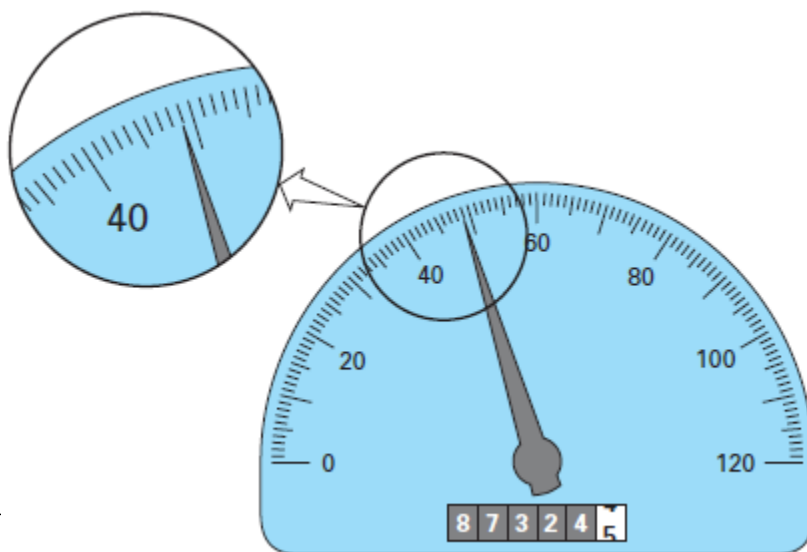
მიუხედავად იმ ფაქტისა, რომ მოდელი, მიღებული ნიუტონის მეორე კანონიდან არის შესანიშნავი მიახლოება, იგი ვერასდროს ვერ განსაზღვრავს წინასწარ პარაშუტისტის დაცემას. უამრავ ფაქტორს, როგორიცაა თუნდაც ქარი და ჰაერის წინააღმდეგობის უმცირესი ცვლილებები, შეაქვს თავისი კორექცია პარაშუტისტის ვარდნაში. თუ ეს გადახრები სისტემატურად მეტია ან ნაკლებია, ჩვენ იძულებული გავხდებით შეგვექმნა ახალი მოდელი, თუმცა, თუ ეს გავლენები შემთხვევით იქნებოდა განაწილებული და მჭიდროდ დაჯგუფებული სავარაუდო შედეგის გარშემო, მაშინ გადახრების უგულებელყოფა შესაძლებელი იქნებოდა და მოდელი იქნებოდა ადექვატური. რიცხვით მიახლოებებს შემოაქვს მსგავსი გადახრები ანალიზშიც. იზადება კითხვა: რამდენად უგულებელსაყოფია გამოთვლების ესა თუ ის ცდომილება? ჩვენს მიზანს სწორედ ამ ცდომილებების მინიმიზება წარმოადგენს.

შევხვით ცდომილებების იდენტიფიკაციას. აქ უნდა გამოიყოს დამრგვალების ცდომილება (Round-off error), რომელიც განპირობებულია იმ ფაქტით, რომ კომპიუტერს შეუძლია წარმოადგინოს სიდიდეები მხოლოდ ციფრთა სასრული რაოდენობით; შემდეგ არსებობს დისკრეტიზაციის (წაკვეთის, აპროქსიმაციის, უკუგდების) ცდომილება (Truncation error), განპირობებული იმ ფაქტით, რომ რიცხვითი მეთოდები იყენებენ მიახლოებებს, რათა წარმოადგინონ ზუსტი მათემატიკური სიდიდეები და ოპერაციები. და ბოლოს, არის ცდომილებები, რომლებიც უშუალოდ არ არის დაკავშირებული რიცხვით მეთოდებთან. ეს არის უნებლიე შეცდომები, აგრეთვე მონაცემთა საეჭვოობა.

ნიშნადი ციფრები

სანამ დავიწყებდეთ იმ ცდომილებების განხილვას, რომლებიც დაკავშირებულია რიცხვით მეთოდებთან, სასარგებლოა განვიხილოთ ძირითადი კონცეფცია, დაკავშირებული თავად რიცხვების მიახლოებით წარმოდგენასთან.

როცა ჩვენ გამოთვლებში ვიყენებთ რიცხვს, უნდა ვიყოთ დარწმუნებული, რომ იგი არის სანდო და უეჭველი. მაგალითად, ფიგ 3.1-ზე გამოსახულია სპიდომეტრი (სიჩქარის მზომი) და ოდომეტრი (მანძილის მზომი). ვიზუალურად ჩანს, რომ ავტომობილი მოძრაობს სიჩქარით 48 კმ/სთ - სა და 49 კმ/სთ - ს შორის. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ისარი უფრო ახლოს არის 49-სთან, ჩვენ მეტი დამაჯერებლობით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მანქანა მოძრაობს 49 კმ/სთ სიჩქარით.



ფიგურა 3.1

ნიშნადი ციფრის კონცეფციის
ილუსტრაცია ავტომობილის
სპიდომეტრით და ოდომეტრით

თუმცა, დავუშვათ გვინდა სიჩქარის გაგება ერთ ათობით ნიშნამდე. ამ შემთხვევაში ერთმა ადამიანმა შეიძლება თქვას, რომ მანქანის სიჩქარეა 48.8, მეორემ კი-- 48.9 კმ/სთ. ამიტომ ამ ხელსაწყოს გაზომვის საზღვრების გათვალისწინებით მხოლოდ პირველი ორი ციფრი შეიძლება მივიჩნიოთ სარწმუნოდ. მესამე ციფრი უკვე შეიძლება განხილული იყოს, როგორც მიახლოება. იქნებოდა არაბუნებრივი და დაუჯერებელი იმის თქმა, რომ ავტომობილი მოძრაობს 48.86421338 კმ/სთ სიჩქარით.

ოდომეტრი კი გვაძლევს 6 გარკვეულ ციფრს; ჩვენების მიხედვით მანქანას გავლილი აქვს 87 324.5 კმ-ზე ოდნავ ნაკლები. ამ შემთხვევაში მეშვიდე ციფრი არა სანდოა.

ნიშნადი ციფრები

რიცხვის ნიშნადი ციფრები ის ციფრებია, რომელთა გამოყენება შეიძლება დარწმუნებით. ისინი შეესაბამებიან სანდო ციფრებს მიმატებული ერთი დამრგვალებული ციფრი. მაგ. სპიდომეტრი და ოდომეტრი გვაძლევს შესაბამისად სამი და შვიდი ნიშნადი ციფრის

წაკითხვის საშუალებას. სპიდომეტრისათვის ორი სანდო ციფრი არის 48. მიზანშეწონილია დაისვას შეფასებული ციფრი საზომი ხელსაწყოს უმცირესი სკალის დანაყოფის ნახევარზე. ამგვარად, სპიდომეტრის წანაკითხი იქნება შედგენილი სამი ნიშნადი ციფრისაგან: 48.5. ამგვარადვე, ოდომეტრი მოგვცემს 7 ნიშნად ციფრს - 87 324.45.

ნიშნადი ციფრების დადგენისას ზოგჯერ შეიძლება სირთულეებს წავაწყდეთ. მაგალითად, ნული ყოველთვის არ არის ნიშნადი, იგი შეიძლება საჭირო იყოს ათობითი ადგილის აღსანიშნავად. რიცხვებს 0.00001845, 0.0001845, და 0.001845 ყველას აქვთ ოთხი ნიშნადი ციფრი. ანალოგიურად, როდესაც დიდი რიცხვების ბოლოში ნულებია, გაუგებარია, რომელი მათგანი ნიშნადია და რომელი არა. მაგალითად, რიცხვს 45 300 შეიძლება ჰქონდეს სამი, ოთხი ან ხუთი ნიშნადი ციფრი. ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენი ნული არის ცნობილი ეჭვს გარეშე. ამგვარი გაუგებრობა შეიძლება გადალახული იყოს სტანდარტული (სამეცნიერო) აღნიშვნის გამოყენებით, კერძოდ, 4.53×10^4 , 4.530×10^4 , 4.5300×10^4 აღნიშნავენ რიცხვებს შესაბამისად სამი, ოთხი და ხუთი ნიშნადი ციფრებით.

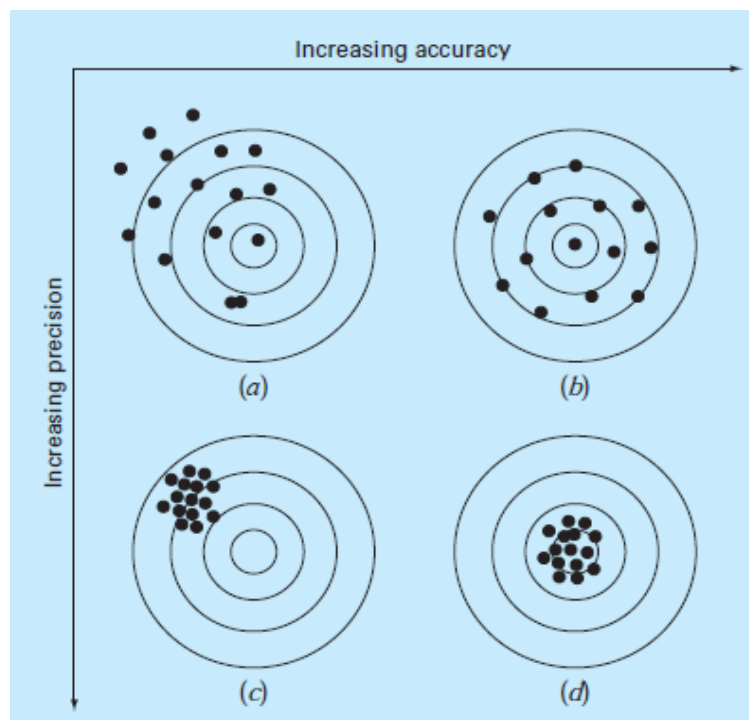
ნიშნადი ციფრების საკითხს აქვს ორი მნიშვნელოვანი იმპლიკაცია რიცხვითი მეთოდების შესწავლისას.

1. კონკრეტული ამოცანის ამოხსნისას რიცხვითი მეთოდები იძლევა მიახლოებით შედეგს. ამიტომ ჩვენ უნდა შევიმუშავოთ კრიტერიუმი ჩვენს მიერ მიღებული მიახლოებითი შედეგის სარწმუნოობის დასადგენად. ერთი გზა ამ მიმართულებით არის ნიშნადი ციფრების საკითხი. მაგალითად, ჩვენ შეიძლება შევთანხმდეთ, გადავწყვიტოთ, რომ ჩვენი მიახლოებითი შედეგი მისაღები იყოს, თუ იგი სწორია ოთხი ნიშნადი ციფრით.
2. თუმცა ზოგიერთი სიდიდე, მაგ. π , e , ან $\sqrt{7}$ შეუძლებელია ზუსტად წარმოდგენილი იყვნენ ციფრთა სასრული რაოდენობით. უკუგდებული (წაკვეთილი) ნიშნადი ციფრები წარმოადგენენ დამრგვალების ცდომილებას.

ცდომილებები, დაკავშირებული როგორც თვლასთან, ასევე გაზომვასთან, შეიძლება დახასიათებული იქნას მათი სიზუსტისა და სიახლოვის მიხედვით. სიახლოვე განსაზღვრავს, თუ რამდენად ახლოს არის გამოთვლილი თუ გაზომილი სიდიდე მის ნამდვილ მნიშვნელობასთან. სიზუსტე კი უჩვენებს, თუ რამდენად ახლოს არიან გამოთვლილი თუ გაზომილი სიდიდეების ერთმანეთთან.

ეს კონცეფციები ილუსტრირებულია ფიგ.3.2-ზე, რომელიც გამოხატავს სროლის სამიზნეს. წრეები ნახაზზე შეიძლება განხილული იყოს, როგორც რიცხვითი ტექნიკის პროგნოზი, მაშინ, როცა ცენტრი წარმოადგენს ნამდვილ სიდიდეს. ცდომილება (გადახრა) განმარტებულია, როგორც სისტემური გადახრა ჭეშმარიტისაგან. ამგვარად, თუმცა სროლის შედეგები c ნახაზზე უფრო მჭიდროდ არიან, ვიდრე a -ზე, ისინი ერთნაირად არიან გადახრილი, რადგან ორივე დაჯგუფებულია ზედა მარცხენა კვადრანტში. უზუსტობა (საეჭვოობა) ეხება გაბნევის სიდიდეს.

ფიგურა 3.2



ამიტომ, თუმცა b და d-ს ერთნაირი სიახლოვე აქვთ, უკანასკნელი უფრო ზუსტია, რადგან შედეგები უფრო მჭიდროდ არიან დაჯგუფებული.

რიცხვითი მეთოდები უნდა იყოს საკმაოდ აკურატული (არა გადახრილი) რათა დააკმაყოფილოს საინჟინრო ამოცანების მოთხოვნები. მათ აგრეთვე მოეთხოვებათ მაღალი სიზუსტე, რათა ადეკვატური იყვნენ საინჟინრო გათვლებში. ჩვენ გავაერთიანებთ ამ ორი სახის ცდომილებას ერთიანი ტერმინით - ცდომილება.

ცდომილების განსაზღვრა. რიცხვითი ცდომილებები წარმოიშვება მათემატიკური მოქმედებებისა და სიდიდეების მიახლოების შედეგად. მათ შორის არის აპროქსიმაციის ცდომილებები, რომლებიც მიიღება ზუსტი მათემატიკური პროცედურების მიახლოებით წარმოდგენის შედეგად და დამრგვალების ცდომილებები, რომლებიც წარმოიშვება ზუსტი რიცხვების ნაცვლად შეზღუდული რაოდენობის ნიშნადი ციფრების მქონე სიდიდეების გამოყენებით.

$$\text{ჯამური სიდიდე} = \text{მიახლოებას} + \text{ცდომილება.} \quad (3.1)$$

აქედან გამომდინარეობს

$$E_t = \text{ჯამური სიდიდე} - \text{მიახლოება,} \quad (3.2)$$

სადაც E_t არის ცდომილების ზუსტი მნიშვნელობა (true error). ამისგან განსხვავებით, სხვა შემთხვევებში საჭირო ხდება ცდომილების „მიახლოებით“ შეფასება.

ამ განმარტების ხარვეზი იმაში მდგომარეობს, რომ იგი არ ითვალისწინებს განსახილავი ობიექტის სიდიდეს. მაგალითად, სანტიმეტრის სიდიდის ცდომილება არის გაცილებით მნიშვნელოვანი ლურსმნის სიგრძის გაზომვისას, ვიდრე ხიდის სიგრძის გაზომვისას. ამ უხერხულობის თავიდან ასაცილებლად ცდომილებას უნდა გაუკეთდეს ნორმალიზება:

$$\text{ქეშმარიტი ფარდობითი ცდომილება} = \frac{\text{ქეშმარიტი ცდომილება}}{\text{ქეშმარიტი სიდიდე}}.$$

ფარდობითი ცდომილება შეიძლება გამოვსახოთ პროცენტებშიც, თუ მას გავამრავლებთ 100%-ზე

$$\varepsilon_t = \frac{\text{ქეშმარიტი ცდომილება}}{\text{ქეშმარიტი სიდიდე}} 100\% \quad (3.3)$$

აქ ε_t აღნიშნავს ქეშმარიტ ფარდობით პროცენტულ ცდომილებას.

მაგალითი 3.1

ვთქვათ, გავზომეთ ხიდისა და ლურსმნის სიგრძე და შედეგად მივიღეთ 9999 და 9 სმ შესაბამისად. თუ მათი ქეშმარიტი ზომები არის 10 000 და 10 სმ შესაბამისად, გამოვთვალოთ (ა) ქეშმარიტი ცდომილება და (ბ) ქეშმარიტი ფარდობითი პროცენტული ცდომილებები.

ამოხსნა

(ა) (3.2)-ის თანახმად მივიღებთ ხიდის შემთხვევაში

$$E_t = 10\,000 - 9999 = 1 \text{ სმ},$$

$$\text{ლურსმნის შემთხვევაშიც} \quad E_t = 10 - 9 = 1 \text{ სმ}.$$

პროცენტული ფარდობითი ცდომილება იქნება

(ბ) (3.3)-ის თანახმად ხიდის შემთხვევაში

$$\varepsilon_t = \frac{1}{10000} 100\% = 0.01\%$$

ლურსმნის შემთხვევაში კი

$$\varepsilon_t = \frac{1}{10} 100\% = 10\%.$$

მაშასადამე, თუმცა ორივე შემთხვევაში გაზომვის ცდომილება იყო 1 სმ, ფარდობითი ცდომილება ლურსმნის შემთხვევაში ბევრად დიდია. აქედან ჩვენ ვასკვნით, რომ ხიდის გაზომვის დროს ჩვენ ადექვატურები ვიყავით, ხოლო ლურსმნის შემთხვევაში მეტი მონდომება გვმართებდა.

რეალურ ამოცანებში ინფორმაცია ჭეშმარიტი მნიშვნელობების შესახებ იშვიათად არის მოცემული. რიცხვით მეთოდებში ჭეშმარიტი მნიშვნელობები ცნობილი იქნება, თუ ჩვენ საქმე გვქვია ისეთ ამოცანებთან, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია ანალიზურად. საზოგადოდ, ცხადია, რომ ჭეშმარიტი პასუხი წინასწარ ცნობილი არ არის. ამგვარ შემთხვევებში გამოსავალი მდგომარეობს ცდომილების ნორმალიზებაში ჭეშმარიტი სიდიდის ხელმისაწვდომი საუკეთესო მიახლოების გამოყენებით; ამგვარად,

$$\varepsilon_a = \frac{\text{მიახლოებითი ცდომილება}}{\text{მიახლოებითი სიდიდე}} 100\% \quad (3.4)$$

აქ ინდექსი a მიუთითებს, რომ ცდომილება ნორმალიზებულია მიახლოებითი მნიშვნელობებით.

ერთ-ერთი გამოწვევა რიცხვით მეთოდებში არის ცდომილების შეფასება ჭეშმარიტი მნიშვნელობის არ ცოდნის ვითარებაში. მაგალითად, გარკვეული რიცხვითი მეთოდები იყენებენ იტერაციულ სქემებს, რომლებშიც რომელიმე ეტაპის აპროქსიმაცია ხორციელდება წინა აპროქსიმაციის საფუძველზე. ამ შემთხვევებში ცდომილება ხშირად ფასდება, როგორც სხვაობა წინა და მიმდინარე მიახლოებებს შორის. ამგვარად, ფარდობითი პროცენტული ცდომილება წარმოიდგინება შემდეგნაირად

$$\varepsilon_a = \frac{\text{მიმდინარე მიახლოება} - \text{წინა მიახლოება}}{\text{მიმდინარე მიახლოება}} 100\% \quad (3.5)$$

იმ მიზნით, რომ სხვაობის ნიშანმა არ შექმნას დისკომფორტი საკითხის განხილვაში, იყენებენ ცდომილების მოდულს (აბსოლუტურ სიდიდეს). ასეთ შემთხვევებში გამოთვლები მეორდება მანამ, სანამ

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s \quad (3.6)$$

თუ ამ თანადობას აქვს ადგილი, ვამბობთ, რომ შედეგი მიღებულია ε_s -ის სიზუსტით.

ამოცანები

3.5 უსასრულო მწკრივი $f(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^4}$ იკრიბება $\pi^4/90$ -საკენ, როცა n მიისწრაფის უსასრულობისკენ. დაწერეთ პროგრამა $f(10000)$ -ის გამოსათვლელად, როცა აჯამვა ხდება $i=1$ -დან 10000 -მდე. შემდეგ გამოვთვალოთ განმეორებით, მაგრამ შებრუნებული რიგით -- $i=10000$ -დან 1 -მდე, -1 ნაზრდით. ორივე შემთხვევაში გამოთვალეთ ჭეშმარიტი პროცენტული ფარდობითი ცდომილება. გაანალიზეთ შედეგები.

3.6 გამოთვალეთ e^{-5} ორი ხერხით

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{და} \quad e^{-x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots}.$$

თითოეულ შემთხვევაში გამოიყენეთ 20 წევრი. შედეგები შეადარეთ 6.737047×10^{-3} ჭეშმარიტ მნიშვნელობას. გამოთვალეთ ჭეშმარიტი და მიახლოებითი ფარდობითი ცდომილებები.

3.10 განსაზღვრეთ, რამდენი წევრია აუცილებელი $\cos x$ -ის გამოსათვლელად 8 ნიშნადი ციფრით, თუ გამოვიყენებთ მაკლორენის მწკრივს

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

მიახლოება გამოთვალეთ $x = 0.3\pi$ არგუმენტისათვის. შეადგინეთ პროგრამა თქვენი შედეგის მისაღებად.

წაკვეთის ცდომილება და ტეილორის მწკრივი

4.1 ტეილორის მწკრივი

ტეილორის თეორემა

თუ f ფუნქციას აქვს $n+1$ რიგამდე ჩათვლით წარმოებულები a და x -ის შემცველ ინტერვალზე, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა x წერტილში მოიცემა ფორმულით

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n, \quad (4.1.1)$$

სადაც R_n ნაშთი განსაზღვრულია ტოლობით

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \quad (4.1.2)$$

(4.1.1) ტოლობას ტეილორის ფორმულა ან ტეილორის მწკრივი ეწოდება. თუ ნაშთითი წევრს გამოვტოვებთ, მაშინ (4.1.1) -ისმარჯვრნა მხარე წარმოადგენს $f(x)$ -ის ტეილორის პოლინომურ აპროქსიმაციას. მაშასადამე, თეორემა ადგენს, რომ ნებისმიერი გლუვი ფუნქცია შეიძლება მივაახლოვოთ მრავალწევრებით.

(4.1.1)-ის R_n ნაშთის წარმოსადგენად იყენებენ აგრეთვე აკლტერნატულ ფორმულას

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x),$$

რომელსაც ნაშთის ლაგრანჟის ფორმა ეწოდება .

თუ (4.1.1) ფორმულაში ავიღებთ $x = x_{i+1}$, $a = x_i$ და $h = x_{i+1} - x_i$, გვექნება

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n, \quad (4.7)$$

რომლის ნაშთითი წევრია

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}). \quad (4.8)$$

აღნიშნოთ ორი ძირითადი ნაკლი, რაც (4.8) თანაფარდობას ზოგიერთ კონტექსტში შეიძლება ჰქონდეს. ჯერ ერთი, ξ -ს ზუსტი მნიშვნელობა უცნობია და ვიცით მხოლოდ რომ $\xi \in (x_i, x_{i+1})$. მეორეც, (4.8)-ის გამოსათვლელად საჭიროა შეგვეძლოს $f^{(n+1)}$ -ის გამოთვლა, რისთვისაც f -ის ცოდნაა საჭირო.

მიუხედავად ამისა, (4.8) მნიშვნელოვანია წაკვეთის ცდომილების არსში წვდომისათვის. ჩვენთვის ცნობილია h -ის მნიშვნელობა, რომლითაც შეგვიძლია ვაკონტროლოთ ნაშთითი წევრი. ამიტომ (4.8)-ს ჩვეულებრივ გამოსახვენ ხოლმე

$$R_n = O(h^{n+1})$$

ფორმით. ეს აღნიშნავს, რომ წაკვეთის ცდომილება არის h^{n+1} რიგის, ანუ R_n არის h^{n+1} -ის პროპორციული, როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ.

რიცხვითი გაწარმოება

ვთქვათ $f(x)$ მოცემული ფუნქციაა. $f(x+a) - f(x+b)$ ტიპის გამოსახულებას სასრული სხვაობა ეწოდება, ხოლო

$$\frac{f(x+b) - f(x+a)}{b-a}$$

გამოსახულებას კი -- სასრული გაყოფილი სხვაობა.

განვიხილოთ წერტილთა სიმრავლე $\dots, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots$, რომლისთვისაც მეზობელ წერტილებს შორის მანძილია h .

(4.7)-დან გამომდინარეობს

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \cong \frac{\Delta f_i}{h}. \quad (4.18)$$

$\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ სიდიდეს ეწოდება პირველი რიგის მარჯვენა სასრული სხვაობა.

"მარჯვენა" სხვაობა იმიტომ, რომ გამოიყენება მარჯვენა წარმოებულის გამოსათვლელად x_i -ში (ფიგ. 4.6 a).

(4.7)-ის ანალოგიურად გვაქვს

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) - \frac{h^3}{6} f'''(x_i) + \dots \quad (4.19)$$

საიდანაც

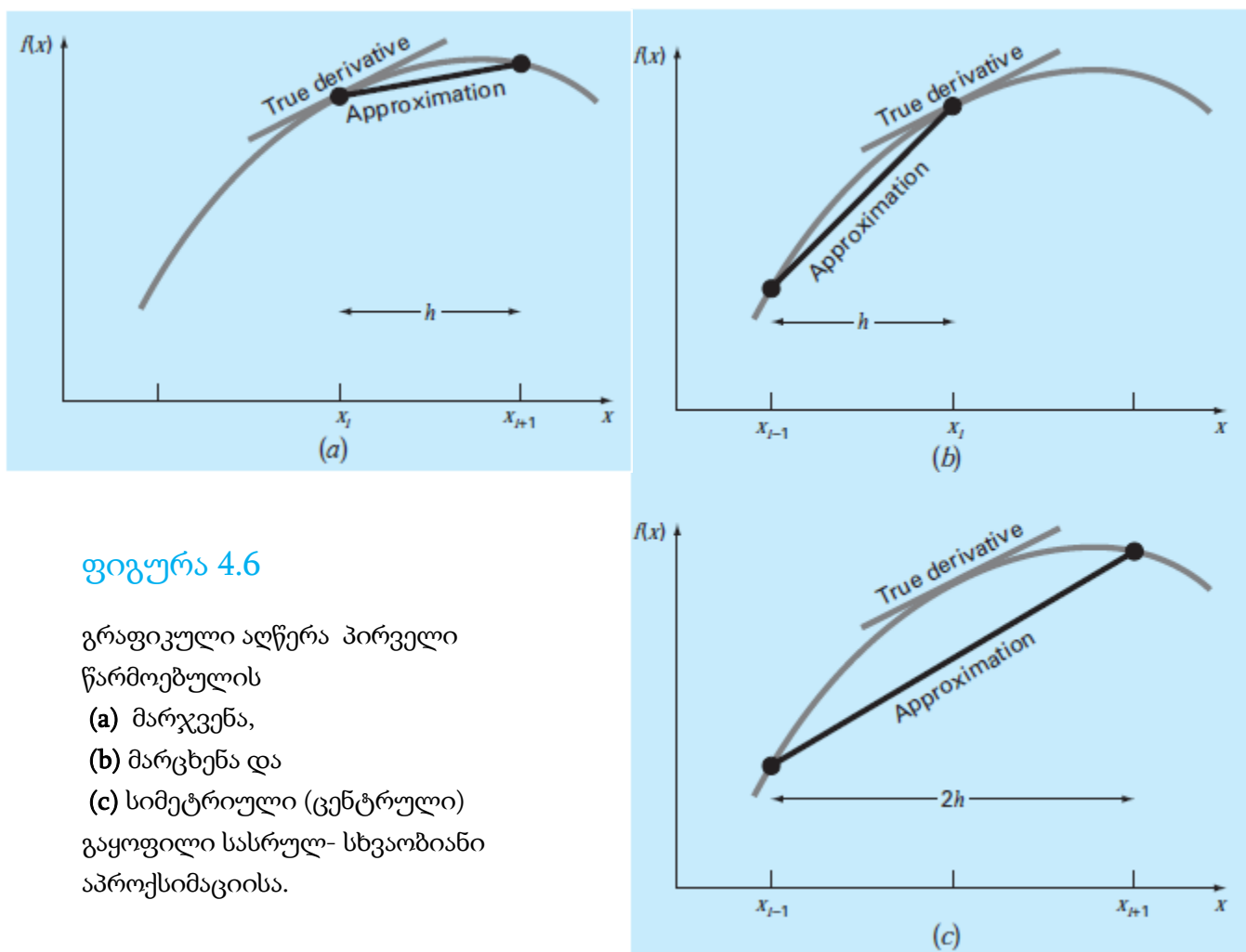
$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} = \frac{\nabla f_i}{h} \quad (4.20)$$

$\nabla f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ სიდიდეს ეწოდება პირველი რიგის მარცხენა სასრული სხვაობა.

"მარცხენა" სხვაობა იმიტომ, რომ გამოიყენება მარცხენა წარმოებულის გამოსათვლელად x_i -ში (ფიგ. 4.6 b).

(4.7)- დან (4.19)-ის გამოკლებით მიიღება

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - O(h^2). \quad (4.22)$$



ფიგურა 4.6

გრაფიკული აღწერა პირველი წარმოებულის
 (a) მარჯვენა,
 (b) მარცხენა და
 (c) სიმეტრიული (ცენტრული) გაყოფილი სასრულ- სხვაობიანი აპროქსიმაციისა.

(4.22) წარმოადგენს პირველი წარმოებულის სიმეტრიულ (ცენტრულ) სხვაობიან აპროქსიმაციას. მისი სიზუსტე უკეთესია, ვიდრე (4.18) და (4.20) ფორმულებისა (ფიგ. 4.6 c).

მაგალითი 4.4

მარჯვენა და მარცხენა სხვაობიანი $O(h)$ აპროქსიმაციით და ცენტრული

$O(h^2)$ აპროქსიმაციით გამოვთვალოთ

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

ფუნქციის პირველი წარმოებული $x = 0.5$ წერტილში $h = 0.5$ ბადის ბიჯით.

გამოთვლები გავიმეოროთ $h = 0.25$ ბიჯითაც. შევნიშნოთ, რომ

წარმოებული შეგვიძლია გამოვთვალოთ ანალიზურად

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25, \quad f'(0.5) = -0.9125.$$

ამოხსნა. თუ $h = 0.5$, განვსაზღვროთ

$$x_{i-1} = 0 \quad f(x_{i-1}) = 1.2$$

$$x_i = 0.5 \quad f(x_i) = 0.925$$

$$x_{i+1} = 1.00 \quad f(x_{i+1}) = 0.2$$

(4.17) ფორმულის მიხედვით:

$$f'(0.5) = \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45, \quad |\varepsilon_t| = 58.9\%$$

(4.20) ფორმულის მიხედვით:

$$f'(0.5) = \frac{0.925 - 1.2}{0.5} = -0.55, \quad |\varepsilon_t| = 39.7\%$$

(4.22) ფორმულის მიხედვით:

$$f'(0.5) = \frac{0.2 - 1.2}{1.0} = -1.0, \quad |\varepsilon_t| = 9.6\%$$

თუ $h = 0.25$, განვსაზღვროთ

$$x_{i-1} = 0.25 \quad f(x_{i-1}) = 1.10351563$$

$$x_i = 0.5 \quad f(x_i) = 0.925$$

$$x_{i+1} = 0.75 \quad f(x_{i+1}) = 0.63632813$$

(4.17) ფორმულის მიხედვით

$$f'(0.5) = \frac{0.63632813 - 0.925}{0.25} = -1.155, \quad |\varepsilon_t| = 26.5\%$$

(4.20) ფორმულის მიხედვით

$$f'(0.5) = \frac{0.925 - 1.10351563}{0.25} = -0.714, \quad |\varepsilon_t| = 21.7\%$$

(4.22) ფორმულის მიხედვით

$$f'(0.5) = \frac{0.63632813 - 1.10351563}{0.5} = -0.934, \quad |\varepsilon_t| = 2.4\%$$

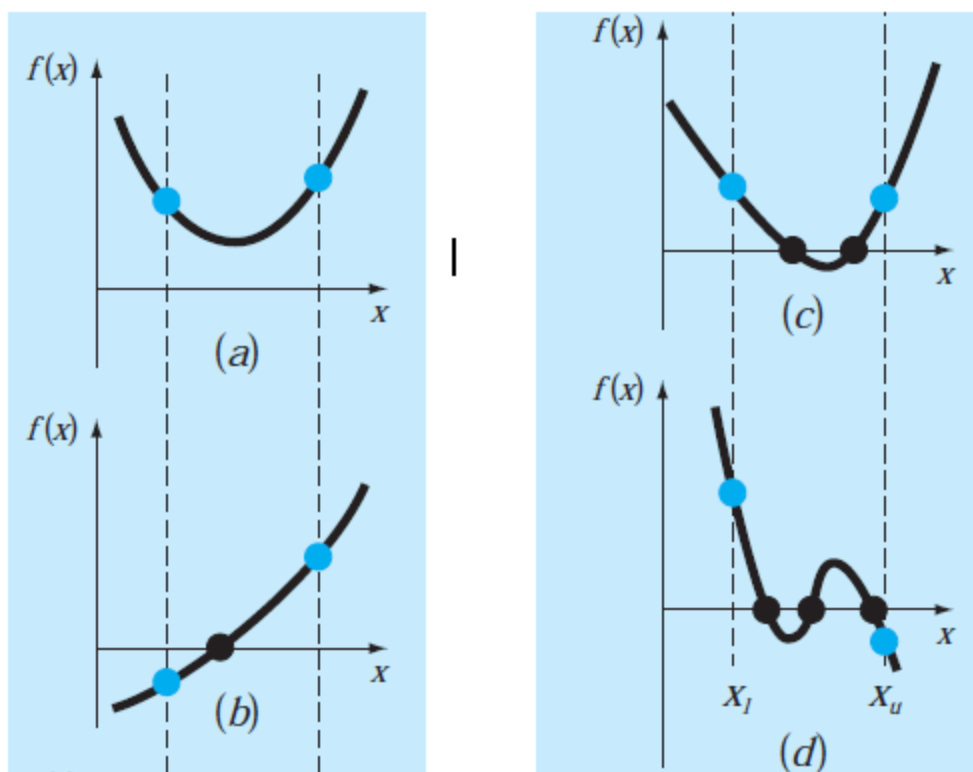
ცენტრული აპროქსიმაცია ორივე საფეხურზე უფრო ზუსტი აღმოჩნდა.

ბიჯის განახევრებამ $O(h)$ სქემების ცდომილება დაახლოებით ორჯერ

შეამცირა, $O(h^2)$ სქემისა კი -- ოთხჯერ.

5.2 ბისექციის მეთოდი

ვთქვათ, ნამდვილი $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია არგუმენტის რაიმე ორ x_l და x_u მნიშვნელობას შორის (x_l - lower bound - ქვედა საზღვარი; x_u - upper bound - ზედა საზღვარი). თუ ამ წერტილებში ფუნქციას ერთნაირი ნიშნები აქვს, მაშინ განსახილავ ინტერვალზე მას ფესვები არ აქვს (ფიგ. 5.2 a), ან აქვს ლუწი რაოდენობის ფესვები (ფიგ. 5.2 c). თუ ინტერვალის ბოლოებზე ფუნქციას განსხვავებული ნიშნები აქვს, მაშინ ამ ინტერვალში მას აქვს კენტი რაოდენობა ფესვებისა (ფიგ. 5.3 b,d).



ფიგურა 5.2

ფესვის მოძებნის ბისექციის მეთოდი (ან: მონაკვეთის შუაზე გაყოფის მეთოდი; ბოლცანოს მეთოდი) ასეთია. ვთქვათ

$$f(x_l) \cdot f(x_u) < 0 \quad (5.1)$$

მონაკვეთს ყოფენ შუაზე. საძიებელი ფესვი მოთავსებულია იმ ქვეინტერვალზე, რომლის ბოლოებზეც ფუნქცია ნიშანს იცვლის. შემდეგ კვლავ ყოფენ ამ ქვეინტერვალს შუაზე და

პროცესი მეორდება, ვიდრე საჭირო სიზუსტეს არ მივაღწევთ. ბისექციის მეთოდის ალგორითმი ნაჩვენებია ფიგურა 5.5-ზე.

ფიგურა 5.5

ბიჯი 1: შევარჩიოთ საძიებელი ფესვის x_l ქვედა და x_u ზედა მიახლოებები იმგვარად, რომ ფუნქცია ნიშანს იცვლიდეს ინტერვალზე. ეს მოწმდება $f(x_l) \cdot f(x_u) < 0$ პირობით.

ბიჯი 2: გამოვთვალოთ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}.$$

ბიჯი 3: შევამოწმოთ, რომელ ქვეინტერვალში მოხვდა ფესვი:

ა) თუ $f(x_l) \cdot f(x_r) < 0$, მაშინ ფესვი მარცხენა ქვეინტერვალზეა. ამ შემთხვევაში ავიღოთ $x_u = x_r$ და დავბრუნდეთ ბიჯ 2-ზე.

ბ) თუ $f(x_l) \cdot f(x_r) > 0$, მაშინ ფესვი მარჯვენა ქვეინტერვალზეა. ამ შემთხვევაში ავიღოთ $x_l = x_r$ და დავბრუნდეთ ბიჯ 2-ზე.

გ) თუ $f(x_l) \cdot f(x_r) = 0$, მაშინ ფესვი ყოფილა x_r . გამოთვლებს ვწყვეტთ.

მაგალითი 5.3

ვიპოვოთ $f(x) = \frac{667.38}{x} (1 - e^{-0.146843x}) - 40$

ფუნქციის ფესვი. გრაფიკული მეთოდით

შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ ფესვი მოთავსებულია $x_l = 12$ და $x_r = 16$ -ს შორის. ამიტომ ფესვის საწყისი მიახლოებაა

$$x_r = \frac{12 + 16}{2} = 14.$$

ამ სიდიდის ჭეშმარიტი ფარდობითი პროცენ-

ტული ცდომილებაა $\varepsilon_t = 5.3\%$ (შევნიშნოთ, რომ ფესვის ჭეშმარიტი სიდიდეა 14.7802). შემდეგი გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ

$$f(12) f(14) = 6.067 \cdot 1.569 = 9.517 > 0.$$

მაშასადამე, ფესვის საზღვრებია 14 და 16. ფესვის შემდეგი მიახლოებაა

$$x_r = \frac{14 + 16}{2} = 15.$$

მისი ჭეშმარიტი ფარდობითი პროცენტული ცდომილებაა $\varepsilon_t = 1.5\%$.

პროცესი შეგვიძლია გავაგრძელოთ უფრო ზუსტი მნიშვნელობის მისაღებად. მაგალითად,

$$f(14)f(15)=1.569 \cdot (-0.425) < 0.$$

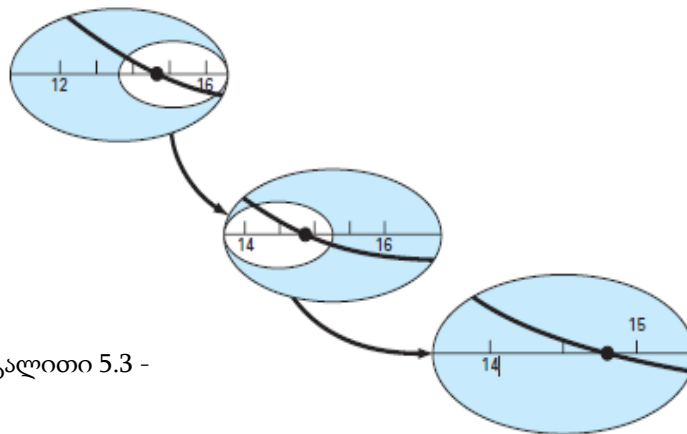
მაშასადამე, ფესვი 14 და 15-ს შორის ძევს. მესამე მიახლოება იქნება

$$x_r = \frac{14+15}{2} = 14.5.$$

ამ მიახლოების ჭეშმარიტი ფარდობითი პროცენტული ცდომილებაა $\varepsilon_t = 1.9\%$. გამოთვლები გრძელდება საჭირო სიზუსტის მიღწევამდე.

როგორც მოყვანილი მაგალითიდან ვხედავთ, ჭეშმარიტი ცდომილება იტერაციის ყოველ საფეხურზე შეიძლება არ კლებულობდეს.

ბისექციის ალგორითმი გრაფიკული წარმოდგენა კი მაგალითი 5.3-ის შემთხვევაში ნაჩვენებია ფიგურა 5.6-ზე.



ფიგურა 5.6

ნახაზი შეესაბამება მაგალითი 5.3 -
ის სამ იტერაციას

იტერაციის შეწყვეტის კრიტერიუმი

რადგან ჭეშმარიტი ფარდობითი პროცენტული ცდომილების გამოთვლა უცნობი ფესვის ძებნისას შეუძლებელია, სარგებლობენ მიახლოებითი ფარდობითი პროცენტული ცდომილებით:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{\text{ახალი}} - x_r^{\text{ძვ.}}}{x_r^{\text{ახალი}}} \right| \cdot 100 \%$$

(ტოლობის მარცხნივ ქვედა ინდექსი მიუთითებს მიახლოებითს - approximate).

მაგალითი 5.4

ვთქვათ, ზემოთ მოყვანილ მაგალითში შეჩერების კრიტერიუმია (stopping criterion) $\varepsilon_s = 0.5\%$. პირველი ორი მიახლოება იყო 14 და 15. ამიტომ

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{15-14}{15} \right| 100\% = 6.667\%,$$

რაც აღემატება შეჩერების კრიტერიუმს. შემდეგი გამოთვლები ცხრილშია მოყვანილი:

იტერაცია	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	12	16	14		5.279
2	14	16	15	6.667	1.487
3	14	15	14.5	3.448	1.896
4	14.5	15	14.75	1.695	0.204
5	14.75	15	14.875	0.840	0.641
6	14.75	14.875	14.8125	0.422	0.219

ამრიგად, ექვსი იტერაციის შემდეგ ε_a გახდა $\varepsilon_s = 0.5\%$ -ზე ნაკლები და ვწყვეტთ გამოთვლებს.

ფიგურა 5.10

ფსევდოკოდი
ბისექციის
მეთოდისათვის

FUNCTION Bisect (xl, xu, imax, xr, iter, ea)

iter=0

DO

xrold=xr

xr=(xl+xu)/2

iter=iter+1

IF xr ≠ 0 THEN

*ea=ABS((xr-xrold)/xr)*100*

END IF

*test =f(xl)*f(xr)*


```

        IF test<0 THEN

            xu=xr

        ELSE

            ea=0

        END IF

    IF ea<es OR iter ≥ imax EXIT

END DO

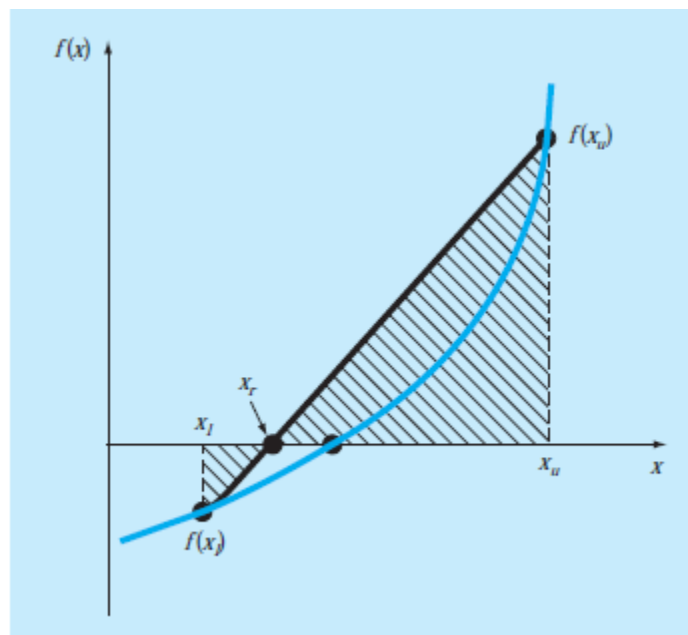
Bisect =xr

END Bisect

```

5.3 ყალბი პოზიციის მეთოდი

მონაკვეთის შუაზე გაყოფის მეთოდი თვალსაჩინოა და მარტივია, მაგრამ ძალზე ნელი კრებადობა ახასიათებს. მას უმეტეს შემთხვევებში იყენებენ ფესვის შემცველი საწყისი ინტერვალის სიგრძის შესამცირებლად. ყალბი პოზიციის მეთოდი წარმოადგენს გრაფიკულ შინაარსზე დაფუძნებულ ალტერნატივას.



ფიგურა 5.12

შუაზე გაყოფის მეთოდის ნაკლს წარმოადგენს ის ფაქტი, რომ საწყის (x_l, x_u) ვყოფთ შუაზე და მხედველობაში არ მიიღება $f(x_l)$ და $f(x_u)$ სიდიდეები. მაგალითად, თუ $f(x_l)$ სიდიდე უფრო ახლოსაა ნულთან ვიდრე $f(x_u)$, სავსებით მოსალოდნელია რომ ფესვი ახლოს იქნება x_l -თან (ფიგ. 5.12). ამ გრაფიკული მოსაზრების გამო $(x_l, f(x_l))$, $(x_u, f(x_u))$ წერტილებს აერთებენ წრფის მონაკვეთით და აბსცისათა ღერძთან მისი კვეთა წარმოადგენს ფესვის უკეთეს მიახლოებას. ჩვენი დაშვების შესაბამისად, ფუნქციის გრაფიკის რკალი შევცვალოთ წრფის მონაკვეთით. აქედან მოდის მეთოდის სახელი "ყალბი პოზიციის", ან ლათინურად "regula falsi" (ყალბი დაშვების).

ფიგ. 5.12-ზე წრფისა და აბსცისათა ღერძის გადაკვეთის მოსაძებნად გამოვიყენოთ სამკუთხედების მსგავსება. გვექნება

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}. \quad (5.6)$$

პროპორციის თვისების გამოყენებით აქედან ვღებულობთ

$$f(x_l)(x_r - x_u) = f(x_u)(x_r - x_l);$$

გადავაჯგუფოთ წევრები

$$x_r[f(x_l) - f(x_u)] = x_u f(x_l) - x_l f(x_u)$$

საიდანაც

$$x_r = \frac{x_u f(x_l)}{f(x_l) - f(x_u)} - \frac{x_l f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

მარჯვენა მხარეში დავამატოთ და გამოვაკლოთ x_u :

$$x_r = x_u + \frac{x_u f(x_l)}{f(x_l) - f(x_u)} - x_u - \frac{x_l f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

შევკრიბოთ მეორე და მესამე წევრები:

$$x_r = x_u + \frac{x_u f(x_l)}{f(x_l) - f(x_u)} - \frac{x_l f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

ანუ

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \quad (5.7)$$

მაგალითი 5.5

ვიპოვოთ მაგალით 5.3-ში მოცემული ფუნქციის ფესვი ყალბი პოზიციის მეთოდით. საწყისი მიახლოებები კვლავ იყოს $x_l = 12$ და $x_u = 16$.

პირველი იტერაცია:

$$x_l = 12 \quad f(x_l) = 6.0699,$$

$$x_u = 16 \quad f(x_u) = -2.2688$$

$$x_r = 16 - \frac{-2.2688(12-16)}{6.0669 - (-2.2688)} = 14.9113$$

ამ მნიშვნელობის ჭეშმარიტი ფარდობითი ცდომილებაა 0.89 %.

მეორე იტერაცია:

$$f(x_l)f(x_r) = -1.5426$$

ამიტომ ფესვი პირველ ქვეინტერვალშია და x_r გადაიქცევა მომდევნო იტერაციისათვის ზედა საზღვრად, $x_u = 14.9113$:

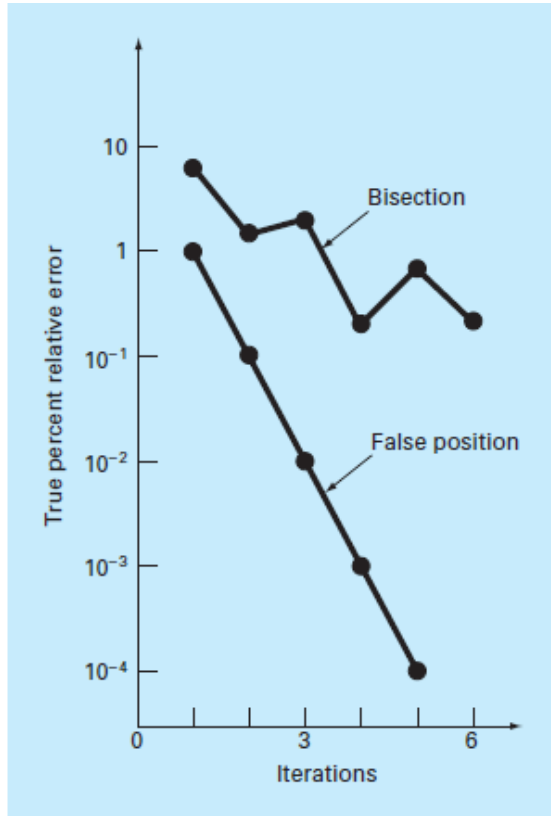
$$x_l = 12 \quad f(x_l) = 6.0699$$

$$x_u = 14.9113 \quad f(x_u) = -0.2543$$

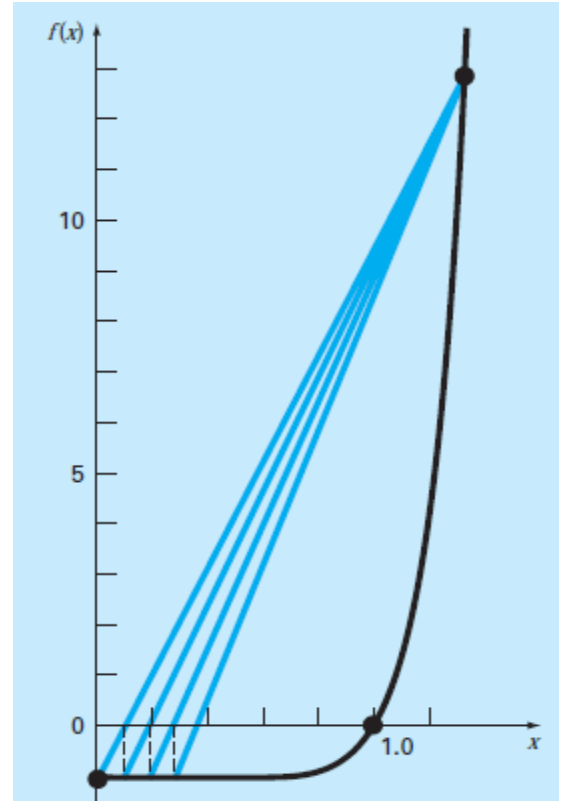
$$x_r = 14.9113 - \frac{-2.2543(12-14.9113)}{6.0669 - (-0.2543)} = 14.7942$$

ამ სიდიდის ჭეშმარიტი და მიახლოებითი ფარდობითი ცდომილებებია 0.09% და 0.79%. ფესვის დასაზუსტებლად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი იტერაცია.

ფიგურა 5.13 -ზე გრაფიკულად ნაჩვენებია ბისექციის და ყალბი დაშვების მეთოდების ჭეშმარიტი ფარდობითი ცდომილობები. როგორც ვხედავთ, ყალბი დაშვების მეთოდში ცდომილება გაცილებით სწრაფად კლებულობს.



ფიგურა 5.13



ფიგურა 5.14

ყალბი დაშვების მეთოდის სუსტი ადგილები

ქვემოთ მოვიყვანთ მაგალითს, რომელიც უჩვენებს, რომ ზოგ შემთხვევაში მონაკვეთის შუაზე გაყოფის მეთოდმა შეიძლება უკეთესი შედეგი მოგვცეს, ვიდრე ყალბი დაშვების მეთოდმა.

მაგალითი 5.6

ვიპოვოთ $f(x) = x^{10} - 1$ ფუნქციის ფესვი, რომელიც $x = 0$ და $x = 1.3$ შორისაა მოთავსებული. ბისექციით მიღებული შედეგები ასეთია:

იტერაცია	x_l	x_u	x_r	$\varepsilon_a(\%)$	$\varepsilon_t(\%)$
1	0	1.3	0.65	100.0	35
2	0.65	1.3	0.975	33.3	2.5
3	0.975	1.3	1.1375	14.3	13.8
4	0.975	1.1375	1.05625	7.7	5.6
5	0.975	1.05625	1.015625	0.840	0.641

ამრიგად, ხუთი იტერაციის შემდეგ ჭეშმარიტი ცდომილება ორ პროცენტზე ნაკლები გახდა. ყალბი დაშვების მეთოდში კი ხუთი იტერაციის შედეგები ასეთია:

იტერაცია	x_l	x_u	x_r	$\varepsilon_a(\%)$	$\varepsilon_t(\%)$
1	0	1.3	0.09430		90.6
2	0.09430	1.3	0.18176	48.1	81.8
3	0.18176	1.3	0.26287	30.9	73.7
4	0.26287	1.3	0.33811	22.3	66.2
5	0.33811	1.3	0.40788	17.1	59.2

ხუთი იტერაციის შემდეგ ჭეშმარიტი ცდომილება მხოლოდ 59%-მდე შემცირდა. ამასთან $\varepsilon_a < \varepsilon_t$. როგორც ვხედავთ, მიახლოებითი ცდომილება არასწორ ინფორმაციას გვაძლევს. ასეთი შედეგების არსს შეიძლება გრაფიკული წარმოდგენით ჩავწვდეთ (ფიგ. 5.14). მოცემული მრუდისათვის დარღვეულია ის პირობა, რასაც ყალბი დაშვების მეთოდი ეფუძნება. ე.ი. განსახილავ მაგალითში არაა მართებული მოსაზრება "თუ $f(x_l)$ უფრო ახლოსაა ნულთან ვიდრე $f(x_u)$, მაშინ ფესვი უფრო ახლოსაა x_l -სთან, ვიდრე x_u ".

ამრიგად, ყოველთვის საჭიროა შემოწმდეს ფესვის სიზუსტე ფუნქციაში ჩასმითაც.

ამოცანები

5.1 იპოვეთ $f(x) = -0.6x^2 + 2.4x + 5.5$ ფუნქციის ნამდვილი ფესვები:

ა) გრაფიკულად.

ბ) კვადრატული განტოლების ფორმულით.

გ) ბისექციის სამი იტერაციით უდიდესი ფესვის მოსაძებნად. საწყის მიახლოებად აიღეთ $x_l = 5$ და $x_u = 10$.

ყოველი იტერაციის შემდეგ გამოთვალეთ ε_a შეფასებითი ცდომილება და ε_r ჭეშმარიტი ცდომილება

5.2 იპოვეთ $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7x - 2.3$ ფუნქციის ნამდვილი ფესვები:

ა) გრაფიკულად.

ბ) ბისექციით ფესვის მდებარეობის დასადგენად. საწყის მიახლოებად აიღეთ $x_l = 0$ და $x_u = 1$. იტერაცია გააგრძელეთ, ვიდრე ε_a შეფასებითი ცდომილება $\varepsilon_s = 10\%$ -ზე ნაკლები არ გახდება.

5.3 იპოვეთ $f(x) = -26 + 85x - 91x^2 + 44x^3 - 8x^4 + x^5$ ფუნქციის ნამდვილი ფესვები:

ა) გრაფიკულად.

ბ) ბისექციის მეთოდით $\varepsilon_s = 10\%$ სიზუსტით. საწყის მიახლოებებად აიღეთ $x_l = 0.5$ და $x_u = 1$.

გ) ჩაატარეთ ბ)-ს ანალოგიური გამოთვლები ყალბი დაშვების მეთოდით, $\varepsilon_s = 0.2\%$

5.5 განსაზღვრეთ $\sin x = x^3$ განტოლების პირველი არანულოვანი ფესვი, სადაც x რადიანებშია. გამოიყენეთ გრაფიკული ტექნიკა და ბისექცია 0.5-დან 1-მდე საწყის ინტერვალში. გამოთვლები ჩაატარეთ ვიდრე ε_a ნაკლები არ გახდება $\varepsilon_s = 2\%$ -ზე. გადაამოწმეთ ცდომილება მიახლოებითი ფესვის ჩასმით თავდაპირველ განტოლებაში.

5.9 ყალბი დაშვების მეთოდით იპოვეთ $x^2 |\cos \sqrt{x}| = 5$ განტოლების უმცირესი დადებითი ფესვი (x რადიანებშია). იმ შუალედის დასადგენად, რომელშიც ძევს ფესვი, თავდაპირველად ააგეთ გრაფიკი 0-დან 5-მდე შუალედში. გამოთვლები ჩაატარეთ ვიდრე ε_a ნაკლები არ გახდება $\varepsilon_s = 1\%$ -ზე. შეამოწმეთ საბოლოო პასუხი თავდაპირველ განტოლებაში ჩასმით.

5.11 იპოვეთ $x^{3.5} = 80$ განტოლების ნამდვილი ფესვი: ა) ანალიზურად, და ბ) ყალბი დაშვების მეთოდით, როცა $\varepsilon_s = 2.5\%$. საწყისი მიახლოებებია 2.0 და 5.0.

მეხუთე თავში განხილული მეთოდები ჩაკეტილი მეთოდებია: ისინი იყენებენ ორ საწყის მიახლოებას, რომელთა შორისაც ფესვია მოთავსებული. ამ თავში შევისწავლით ღია მეთოდებს, რომლებიც საჭიროებენ ერთ ან რამდენიმე საწყის მიახლოებას. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში საძიებელი ფესვი საწყისი მიახლოებებით არაა შემოსაზღვრული.

6.1 მარტივი უძრავი წერტილის იტერაცია

$f(x) = 0$ განტოლების ამოსახსნელად მას ისე გარდაქმნიან, რომ ტოლობის მარცხენა მხარე იყოს x :

$$x = g(x) . \quad (6.1)$$

მაგალითად $x^2 - 2x + 3 = 0$ შეიძლება გადავწეროთ $x = \frac{x^2 + 3}{2}$ სახით, $\sin x = 0$ განტოლება --

$x = \sin x + x$ სახით და ა.შ. თუ გვეცოდინება (6.1)-ის ფესვის რაიმე მიახლოება x_i , მაშინ მომდევნო მიახლოება x_{i+1} შეგვიძლია გამოვთვალოთ ფორმულით

$$x_{i+1} = g(x_i) . \quad (6.2)$$

მიახლოებითი ცდომილება გამოითვლება ფორმულით

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\% .$$

მაგალითი 6.1

მარტივი უძრავი წერტილის იტერაციის გამოყენებით ვიპოვოთ $f(x) = e^{-x} - x$ ფუნქციის ფესვი. ჩავწეროთ მისთვის (6.2) ფორმულა

$x_{i+1} = e^{-x_i}$. თუ საწყის მიახლოებად ავიღებთ $x_0 = 0$, მაშინ გამოთვლების შედეგები ასეთ სახეს მიიღებს

იტერაცია	x_i	$\varepsilon_a(\%)$	$\varepsilon_t(\%)$
0	0		100
1	1.000000	100.0	76.3
2	0.367879	171.8	35.1
3	0.692201	46.9	22.1
4	0.500473	38.3	11.8
5	0.606244	17.4	6.89
6	0.545396	11.2	3.83
7	0.579612	5.90	2.20
8	0.560115	3.48	1.24
9	0.571143	1.93	0.705
10	0.564879	1.11	0.399

როგორც ვხედავთ, ყოველი მომდევნო იტერაცია უახლოვდება ჭეშმარიტ 0.56714329 მნიშვნელობას.

მაგალითი 6.2

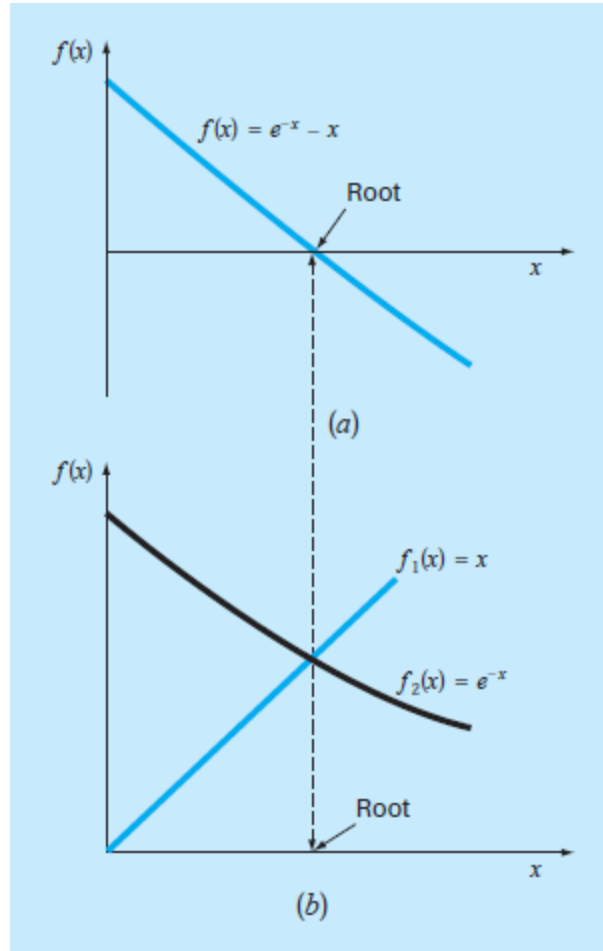
ორ მრუდიანი გრაფიკული მეთოდი

გავაცალკევოთ $e^{-x} - x = 0$ განტოლება ორ $y_1 = x$ და $y_2 = e^{-x}$ ნაწილად და გამოვთვალოთ მათი მნიშვნელობები

x	y_1	y_2
0.0	0.0	1.000
0.2	0.2	0.819
0.4	0.4	0.670
0.6	0.6	0.549
0.8	0.8	0.449
1.0	1.0	0.368

ეს წერტილები ფიგ. 6.2b-ზე არის აგებული. ორი მრუდის თანაკვეთა შეესაბამება განტოლების ფესვს, რომელიც დაახლოებით 0.57-ის ტოლია. ფიგ. 6.2b-ზე ეს რიცხვი შეესაბამება მრუდის თანაკვეთას x ღერძთან.

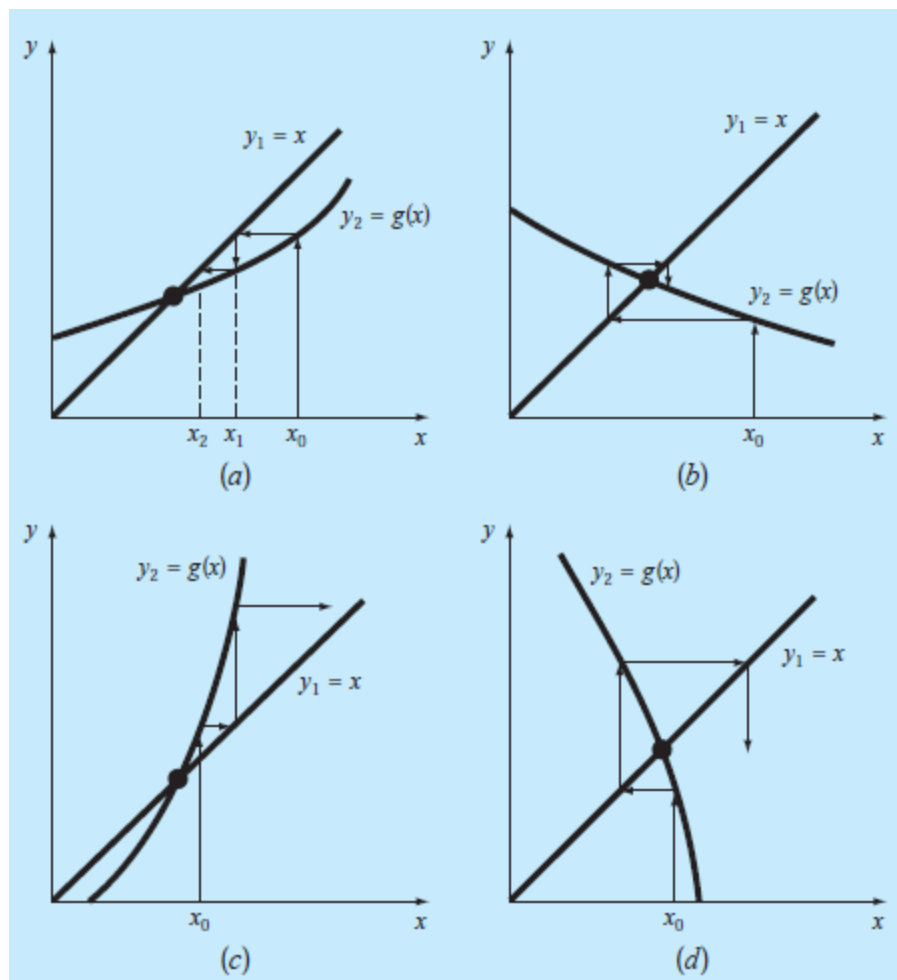
ფიგურა 6.2 $f(x) = e^{-x} - x$
განტოლების ფესვის მოძებნის
ორი ალტერნატიული გრაფიკული
მეთოდი



$x = g(x)$ წარმოდგენაზე დაფუძნებული მარტივი იტერაციის მეთოდი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ორ მრუდიანი მეთოდი: საძიებელია $y = x$ და $y = g(x)$ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის აბსცისა. ასეთი მიდგომის მეშვეობით ვუჩვენოთ მარტივი იტერაციის მეთოდის კრებადობის და განშლადობის შემთხვევები.

ფიგ. 6.3a, 6.3b - ზე ნაჩვენები იტერაციები კრებადია, ფიგ. 6.3c, 6.3 d -ზე კი -- განშლადი. კრებადობის ანალიზური პირობაა $|g'(x)| < 1$. გეომეტრიულად კი ეს ნიშნავს, რომ $y = g(x)$ ფუნქციის დახრილობის მოდული ნაკლებია $y = x$ -ის დახრილობაზე.

ფიგურა 6.3



უძრავი წერტილის იტერაციის ფსევდოკოდი ფიგ. 6.4-ზეა მოცემული.

```
FUNCTION Fixp(x0,es, imax, iter, ea)
```

```
  xr=x0
```

```
  iter=0
```

```
  Do
```

```
    xrold= xr
```

```
    xr=g(xrold)
```

```
    iter=iter+1
```

```
    IF xr ≠ 0 THEN
```

$$ea = \left| \frac{xr - xrold}{xr} \right| \cdot 100$$

```
  END IF
```

ფიგურა 6.4

```

IF ea<es OR iter≥imax EXIT
END DO
Fixpt=xr
END Fixpt

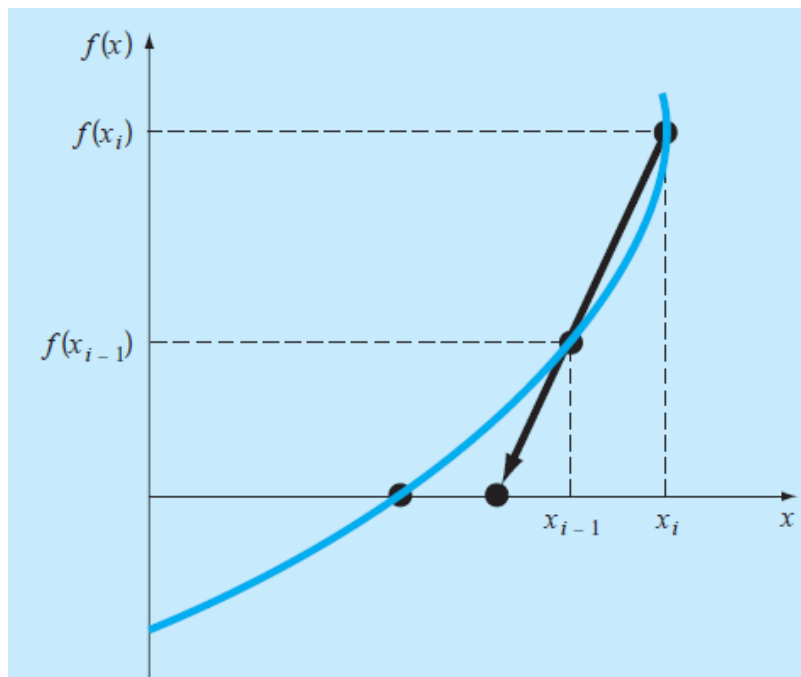
```

6.3 მკვეთა მეთოდი

სამიუბელია $f(x) = 0$ განტოლების ფესვი და გვაქვს ორი საწყისი მიახლოება x_{-1} და x_0 . შემდეგი მიახლოებები გამოითვლება ფორმულით

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \quad (6.7)$$

(6.7) წარმოადგენს მკვეთა მეთოდის ფორმულას. შევნიშნოთ, რომ ყალბი დაშვების მეთოდის მსგავსად, ეს მეთოდიც საჭიროებს ორ საწყისი მიახლოებას. მაგრამ არ მოითხოვება, რომ ფონქციას ამ ორ მიახლოებაზე განსხვავებული ნიშნები ჰქონდეთ. მეთოდის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ფიგ. 6.7-ზეა ნაჩვენები.



ფიგურა 6.7

მაგალითი 6.6

მკვეთთა მეთოდით ვიპოვოთ $f(x) = e^{-x} - x$ ფუნქციის ფესვი. საწყის მიახლოებებად ავიღოთ $x_{-1} = 0$ და $x_0 = 1.0$.

ამოხსნა. გავიხსენოთ, რომ ზუსტი ფესვია 0.56714329. . . .

პირველი იტერაცია:

$$x_{-1} = 0 \quad f(x_{-1}) = 1.00000$$

$$x_0 = 1.0 \quad f(x_0) = -0.63212$$

$$x_1 = 1 - \frac{-0.63212(0-1)}{1 - (-0.63212)} = 0.61270 \quad \varepsilon_t = 8.0\%$$

მეორე იტერაცია:

$$x_0 = 1 \quad f(x_{-1}) = 1.00000$$

$$x_1 = 0.61270 \quad f(x_1) = -0.07081$$

(შევნიშნოთ, რომ ორივე მიახლოება კვლავ ფესვის ერთ მხარესაა.)

$$x_2 = 0.61270 - \frac{-0.07081(1-0.61270)}{-0.63212 - (-0.07081)} = 0.56384 \quad \varepsilon_t = 0.58\%$$

მესამე იტერაცია:

$$x_1 = 0.61270 \quad f(x_1) = -0.07081$$

$$x_2 = 0.56384 \quad f(x_2) = 0.00518$$

$$x_3 = 0.56384 - \frac{0.00518(0.61270 - 0.56384)}{-0.07081 - (0.00518)} = 0.56717 \quad \varepsilon_t = 0.0048\%$$

ამოცანები

6.1 გამოიყენეთ უძრავი წერტილის იტერაცია $f(x) = 2\sin(\sqrt{x}) - x$ ფუნქციის ფესვის მოსაძებნად. საწყის მიახლოებად აიღეთ $x_0 = 0.5$ და იტერაციები ჩაატარეთ $\varepsilon_a \leq 0.001\%$ მიღწევამდე .

6.2 იპოვეთ $f(x) = 2x^3 - 11.7x^2 + 17.7x - 5$ ფუნქციის უდიდესი ფესვი:

ა) გრაფიკულად.

ბ) უძრავი წერტილის იტერაციით (სამი იტერაცია, $x_0 = 3$). შეამოწმეთ რომ მიღებული მიმდევრობა კრებადია ფესვისაკენ.

გ) მკვეთათა მეთოდით (სამი იტერაცია, $x_{-1} = 3$, $x_0 = 4$)

6.6 იპოვეთ $f(x) = -12 - 21x + 18x^2 - 2.4x^3$ ფუნქციის ფესვი:

ა) გრაფიკულად; ბ) მკვეთათა მეთოდით სამი ნიშნადი ციფრის სიზუსტით.

6.7 იპოვეთ $f(x) = \sin x + \cos(1 + x^2) - 1$ ფუნქციის პირველი დადებითი ფესვი (რადიანებში).

გამოიყენეთ მკვეთათა მეთოდის ოთხი იტერაცია, სადაც: ა) $x_{i-1} = 1.0$ და $x_i = 3.0$; ბ)

$x_{i-1} = 1.5$ და $x_i = 2.5$; გ) $x_{i-1} = 1.5$ და $x_i = 2.25$. დ) გრაფიკული მეთოდით

იმსჯელეთ მიღებულ შედეგებზე.

6.9 იპოვეთ $f(x) = 0.95x^3 - 5.9x^2 + 10.9x - 6$ ფუნქციის უდიდესი ნამდვილი ფესვი:

ა) გრაფიკულად.

ბ) მკვეთათა მეთოდით (სამი იტერაცია, $x_{i-1} = 2.5$ და $x_i = 3.5$)

6.10 იპოვეთ $f(x) = 8\sin(x)e^{-x} - 1$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი ფესვი:

ა) გრაფიკულად.

ბ) მკვეთათა მეთოდით (ხუთი იტერაცია, $x_{i-1} = 0.5$, $x_i = 0.4$)

7.7 ფესვების მოძებნა პროგრამული პაკეტებით

პროგრამულ პაკეტებს დიდი შესაძლებლობები აქვს ფესვების მოსაძებნად. გავეცნოთ რამდენიმე მათგანს.

მატლაბის ფუნქცია `fzero` ეძებს განტოლების ამონახსნს გარკვეულ ინტერვალში, ან წინასწარ მითითებული საწყისი მნიშვნელობის უახლოეს ფესვს. ფუნქცია გამოიყენება შემდეგი სინტაქსით $x = fzero('funname', x_0)$, სადაც x_0 რიცხვია ან ინტერვალი.

მაგალითი 7.6

მატლაბის გამოყენება ფესვების მოსაძებნად.

მატლაბის ფუნქცია `fzero` -ს გამოყენებით ვიპოვოთ

$$f(x) = x^{10} - 1$$

ფუნქციის ფესვები $[0, 4]$ შუალედში. ამ ფუნქციას ორი ნამდვილი ფესვი აქვს: -1 და 1. დადებითი ფესვის მოძებნისას საწყის შუალედად ავიღოთ $[0, 1.3]$. ამოხსნა.

```
>> x0 = [0 1.3];
>> x = fzero(@(x) x ^ 10 - 1, x0)
x =
    1
```

ასევე მოიძებნება უარყოფითი ფესვი, თუ საწყის ინტერვალად ავიღებთ -1.3-დან 0-მდე შუალედს:

```
>> x0 = [-1.3 0];
>> x = fzero(@(x) x ^ 10 - 1, x0)
x =
   -1
```

საწყის მიახლოებად ცალკეული რიცხვის მიცემაც შეიძლება. საინტერესო შემთხვევაა საწყისად 0-ის აღება:

```
>> x0 = 0;
>> x = fzero(@(x) x ^ 10 - 1, x0)
x =
   -1
```

ამ შემთხვევაში ორივე ნამდვილი ფესვი თანაბრად იყო დაშორებული საწყისი მიახლოებიდან და მატლაბმა მათგან უმცირესი შეარჩია.

დამატებით თუ გამოვიყენებთ ფუნქცია `optimset`-ს, დისპლაიზე გამოჩნდება იტერაციული პროცესის ფაქტიური მსვლელობა:

```
>> x0 = 0;
>> option = optimset('display','iter');
>> x = fzero(@(x) x ^ 10 - 1, x0, option)
```

Func-count	x	f (x)	Procedure
1	0	-1	initial
2	-0.0282843	-1	search
3	0.0282843	-1	search
4	-0.04	-1	search
•			
•			
•			
21	0.64	-0.988471	search
22	-0.905097	-0.631065	search
23	0.905097	-0.631065	search
24	-1.28	10.8059	search
Looking for a zero in the interval [-1.28], 0.9051]			
25	0.784528	-0.911674	interpolation
26	-0.247736	-0.999999	bisection
27	-0.763868	-0.932363	bisection
28	-1.02193	0.242305	bisection
29	-0.968701	-0.27239	interpolation
30	-0.996873	-0.0308299	interpolation
31	-0.999702	-0.00297526	interpolation
32	-1	5.53132e-006	interpolation
33	-1	-7.41965e-009	interpolation
34	-1	-1.88738e-014	interpolation
35	-1	0	interpolation

Zero found in the interval: [-1.28, 0.9051].

```
x =
-1
```

ეს შედეგი გვიჩვენებს ფუნქცია `fzero` -ს მოქმედების სტრატეგიას ცალკეული საწყისი მნიშვნელობის შემთხვევაში. პირველ რიგში მიმდინარეობს ნიშანცვლის შუალედის მოძებნა. იტერაციის 25-ე საფეხურზე ეს შუალედი დგინდება. შემდეგ გამოიყენება ბისექცია და ინტერპოლაცია.

ინტერპოლაციად გამოიყენება მკვეთთა მეთოდი და შებრუნებული კვადრატული ინტერპოლაცია.

მაგალითი 7.7

მატლაბის გამოყენება მრავალწევრებზე მოქმედებებისთვის და ფესვთა განსაზღვრისათვის

ვთქვათ

$$f_5(x) = x^5 - 3.5x^4 + 2.75x^3 + 2.125x^2 - 3.875x + 1.25. \quad (E7.7.1)$$

ამ მრავალწევრს აქვს სამი ნამდვილი ფესვი: 0.5, -1.0 და 2, და ერთი წყვილი კომპლექსური ფესვები: $1 \pm 0.5i$.

ამოხსნა. მრავალწევრის შეტანა მატლაბში ხდება მისი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი ვექტორის შეტანით. ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში ">>"

მატლაბის მიწვევის ნიშნაკის შემდეგ ვკრებთ a ვექტორს:

$$\gg a = [1 \quad -3.5 \quad 2.75 \quad 2.125 \quad -3.875 \quad 1.25].$$

თუ გვინდა ამ მრავალწევრის მნიშვნელობის გამოთვლა $x=1$ წერტილში, ვიყენებთ ფუნქციას "polyval"-ს (polynomial value -- პოლინომის მნიშვნელობა):

$$\gg \text{polyval}(a, 1)$$

ამ ოპერაციამ უნდა მოგვცეს

$$1(1)^5 - 3.5(1)^4 + 2.75(1)^3 + 2.125(1)^2 - 3.875(1) + 1.25 = -0.25.$$

მართლაც, მატლაბი გვიბრუნებს:

ans=

-0.2500

ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ წარმოებულიც ფუნქცია "polyder"-ით (polynomial derivative -- პოლინომის წარმოებული):

$$\gg \text{polyder}(a)$$

ans =

5.0000 -14.0000 8.2500 4.2500 -3.8750

რაც შეესაბამება წარმოებულს

$$f'(x) = 5x^4 - 14x^3 + 8.25x^2 + 4.25x - 3.875.$$

შევქმნათ ახლა მრავალწევრი, რომლის ფესვებია 0.5 და 1:

$(x - 0.5)(x - 1) = x^2 + 0.5x - 0.5$ და შევიტანოთ ის მატლაბში b ვექტორის სახით:

$$\gg b = [1 \quad 0.5 \quad -0.5];$$

თუ შევასრულებთ ოპერაციას "deconv(a,b)"-ს (deconvolution -- აქ "გაყოფა", convolution -ის საპირისპირო მოქმედება), შედეგად ვექტორთა წყვილი მიიღება, რომელთაგან პირველი შეესაბამება განაყოფს, მეორე კი -- ნაშთს.

ჩვენს შემთხვევაში მოქმედება და შედეგი ასე გამოიყურება

$$\gg [d, e] = \text{deconv}(a, b)$$

d =

1.0000 -4.0000 5.2500 -2.5000

e =

0 0 0 0 0 0

რადგან a უნაშთოდ იყოფა b -ზე, ამიტომ ნაშთით პოლინომს ნულოვანი კოეფიციენტები აქვს. ვთქვათ ახლა გვინდა d მრავალწევრის ფესვების მოძებნა. ამისათვის გამოვიყენოთ ფუნქცია "roots" (roots -- ფესვები). ცხადია, მატლაბი დაგვიბრუნებს ჩვენთვის ცნობილ სამ ფესვს:

```
>> roots(d)
ans =
    2.0000
    1.0000 + 0.5000i
    1.0000 - 0.5000i
```

გადავამრავლოთ d და b "conv(d, b)" (convolution -- ნახვევი).

ალგებრულად ეს იგივეა, რაც მრავალწევრების გამრავლება, რომელთა კოეფიციენტებია d და b ვექტორთა ელემენტები:

```
>> conv(d, b)
ans =
    1.0000   -3.5000    2.7500    2.1250   -3.8750    1.2500
```

და ბოლოს, ფუნქცია roots(a) მოგვცემს საწყისი მრავალწევრის ყველა ფესვს:

```
>> r = roots(a)
r =
   -1.0000
    2.0000
    1.0000 + 0.5000i
    1.0000 - 0.5000i
    0.5000
```

ამოცანები

7.1 გავყოთ $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ მრავალწევრი $x - 2$ ერთწევრზე. არის $x = 2$ ფესვი?

7.2 გავყოთ $f(x) = x^5 - 6x^4 + x^3 - 7x^2 - 7x + 12$ მრავალწევრი $x - 2$ ერთწევრზე.

7.3 მატლაბის გამოყენებით იპოვეთ მოცემული ფუნქციების დადებითი ფესვები

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

(b) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 + 4x - 2$

7.4 იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ნამდვილი და კომპლექსური ფესვები

(a) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$

(b) $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 8$

(c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$

9.2 გაუსის გამორიცხვის მეთოდი

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ამოხსნის ყველაზე გავრცელებულ მეთოდს წარმოადგენს უცნობების თანმიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდი, რომელსაც გაუსის მეთოდი ეწოდება.

განვიხილოთ სისტემა

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (9.12a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (9.12b)$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad (9.12c)$$

საწყის ბიჯს წარმოადგენს უცნობი x_1 -ის გამორიცხვა ყველა განტოლებიდან, დაწყებული მე-2-დან. ამისათვის (9.12a)-ს ვამრავლებთ a_{21}/a_{11} -ზე და ვაკლებთ (9.12b)-დან. მიიღება

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\right)x_2 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\right)x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

ანუ

$$a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

სადაც

$$a'_{2i} = a_{2i} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1i}, \quad b'_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1.$$

იგივე პროცედურა მეორდება დანარჩენი განტოლებებისთვისაც. მაგალითად, (9.12a)-ს ვამრავლებთ a_{31}/a_{11} -ზე და ვაკლებთ მესამე განტოლებიდან. ყველა დანარჩენი განტოლებისათვის ამ პროცედურის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგ მოდიფიცირებულ სისტემას

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (9.14a)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad (9.14b)$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \quad (9.14c)$$

$$\vdots$$

$$a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n \quad (9.12d)$$

ყველაფერი ანალოგიურად გავიმეოროთ და გამოვრიცხოთ x_2 უცნობი (9.14c)-დან (9.14d)-მდე ყველა განტოლებაში. მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\ &\vdots \\ a''_{n3}x_3 + \cdots + a''_{nn}x_n &= b''_n \end{aligned}$$

აქ ზედა ორი შტრიხები მიუთითებს, რომ კოეფიციენტები მოდიფიცირებულია ორჯერ. პროცედურების გამეორებით მიიღწევა, რომ მიიღება განტოლებათა სისტემა ზედა სამკუთხა მატრიცით:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (9.15a)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad (9.15b)$$

$$a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \quad (9.15c)$$

$$\vdots$$

$$a^{(n-1)}_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n \quad (9.15d)$$

წინასწარი გამორიცხვების ეტაპი დასრულდა. შესაბამისი ფსევდოკოდი ნაჩვენებია ფიგ. 9.4a-ზე.

ფიგურა 9.4

```
(a)  DOFOR k = 1, n - 1
      DOFOR i = k + 1, n
        factor = ai,k / ak,k
        DOFOR j = k + 1 to n
          ai,j = ai,j - factor * ak,j
        END DO
        bi = bi - factor * bk
      END DO
    END DO

(b)  xn = bn / an,n
      DOFOR i = n - 1, 1, -1
        sum = bi
        DOFOR j = i + 1, n
          sum = sum - ai,j * xj
        END DO
        xi = sum / ai,i
      END DO
```

მეორე ეტაპს წარმოადგენს ჩასმები დაწყებული ბოლო განტოლებიდან ზევით. (9.15d)-დან ვპოულობთ

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad (9.16)$$

მნიშვნელობას შევითანთ ბოლოსწინა განტოლებაში და ვპოულობთ x_{n-1} -ს. და ა.შ.

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}, \quad \text{როცა } i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (9.17)$$

(9.16) და (9.17) ტოლობების განხორციელების შესაბამისი ფსევდოკოდი ფიგ. 9.4b-ზეა წარმოდგენილი.

მაგალითი 9.5

გაუსის გამორიცხვის მეთოდით ამოვხსნათ სისტემა

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \quad (9.5.1)$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 \quad (9.5.2)$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4 \quad (9.5.3)$$

გამოთვლებისას შევინარჩუნოთ ექვსი ნიშნადი ციფრი.

ამოხსნა. განტოლება (9.5.1) გავამრავლოთ (0.1)/3-ზე და გამოვაკლოთ (9.5.2)-დან. მიიღება

$$7.00333x_2 - 0.29333x_3 = -19.5617$$

შემდეგ (9.5.1) გავამრავლოთ (0.3)/3 -ზე და გამოვაკლოთ (9.5.3)-დან. შედეგად გვექნება სისტემა

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \quad (9.5.4)$$

$$7.00333x_2 - 0.29333x_3 = -19.5617 \quad (9.5.5)$$

$$-0.190000x_2 + 10.0200x_3 = 70.6150 \quad (9.5.6)$$

გამორიცხვების ეტაპის დასასრულებლად, საჭიროა (9.5.6)-დან x_2 -ის გამორიცხვა. ამისათვის (9.5.5) გავამრავლოთ (-0.190000)/(7.00333)-ზე და შედეგი გამოვაკლოთ (9.5.6)-დან. საბოლოოდ მივიღებთ ზედა სამკუთხა მატრიციან სისტემას

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \quad (9.5.7)$$

$$7.00333x_2 - 0.29333x_3 = -19.5617 \quad (9.5.8)$$

$$10.0120x_3 = 70.0843 \quad (9.5.9)$$

ახლა გადავდივართ ბოლოდან თავისკენ განტოლებების ამოხსნას ჩასმების გამოყენებით. უპირველესად, (9.5.9)-დან გვაქვს

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7.0000 \quad (9.5.10)$$

ეს მნიშვნელობა ჩავსვით (9.5.8)-ში და ვიპოვოთ x_2 :

$$\begin{aligned} 7.00333x_2 - 0.293333(7.0000) &= -19.5617 \\ x_2 &= \frac{-19.5617 + 0.293333(7.0000)}{7.00333} = -2.50000 \end{aligned} \quad (9.5.11)$$

და ბოლოს, (9.5.10), (9.5.11)-ის (9.5.4)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1(-2.50000) - 0.2(7.0000) &= 7.85 \\ x_1 &= \frac{7.85 + 0.1(-2.50000) + 0.2(7.0000)}{3} = 3.00000 \end{aligned}$$

მიღებული შედეგი $x_1 = 3$, $x_2 = -2.5$, $x_3 = 7$ ზუსტი ამონახსნის იდენტურია.

აღწერილ გაუსის გამორიცხვის მეთოდს ვერ გამოვიყენებთ, თუ მთავარ დიაგონალზე ნულოვანი ელემენტები გვქვნება. გარდა ამისა, თუ ეს ელემენტები მცირეა, იზრდება დამრგვალების ცდომილებები გაყოფისას. ამიტომ იყენებენ **გაუსის გამორიცხვის მეთოდს მთავარი ელემენტის შერჩევით**.

მეთოდის არსი ასეთია. პირველ საფეხურზე, პირველ სტრიქონად გადმოაადგილებენ იმ განტოლებას, რომლისთვისაც a_{i1} , $i=1, 2, \dots, n$ კოეფიციენტი უდიდესია. ამ განტოლებების მეშვეობით ყველა დანარჩენი განტოლებიდან გამოვრიცხავთ x_1 უცნობს. მეორე საფეხურზე ანალოგიურად ვიქცევით დარჩენილი $n-1$ განტოლებისთვის. და საზოგადოდ, k -ურ საფეხურზე ჯერ k -ურ სტრიქონში გადმოგვაქვს დარჩენილი განტოლებებიდან ის, რომელსაც k -ურ სვეტში მოდულით უდიდესი კოეფიციენტი აქვს და შემდეგ ვახდენთ x_k უცნობების გამორიცხვას.

ამოცანები

9.1a ჩაწერეთ განტოლებათა სისტემა მატრიცული სახით

$$40 = 5x_3 + 2x_1$$

$$10 - x_2 = x_3$$

$$3x_2 + 8x_1 = 20$$

9.4 გრაფიკული მეთოდით ამოხსენით

$$2x_1 - 6x_2 = -18$$

$$-x_1 + 8x_2 = 40$$

შედეგი შეამოწმეთ განტოლებებში ჩასმით.

9.8 მოცემულია განტოლებები

$$10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27$$

$$-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -61.5$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = -21.5$$

a) ამოხსენით გაუსის გამორიცხვის მეთოდით. აჩვენეთ გამოთვლების ყველა საფეხური.

b) შედეგები ჩასვით თავდაპირველ განტოლებებში შემოწმების მიზნით.

9.9 ამოხსენით გაუსის მეთოდით სისტემა

$$4x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$6x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

გამოიყენეთ მთავარი ელემენტების შერჩევა და შეამოწმეთ პასუხი სისტემაში ჩასმით

9.10 მოცემულია სისტემა

$$2x_1 - 6x_2 - x_3 = -38$$

$$-3x_1 - x_2 + 7x_3 = -34$$

$$8x_1 + x_2 - 2x_3 = -20$$

a) გამოიყენეთ გაუსის მეთოდი მთავარი ელემენტების შერჩევით. უჩვენეთ გამოთვლების ყველა საფეხური.

b) შეამოწმეთ პასუხი სისტემაში ჩასმით.

9.11 მოცემულია განტოლებათა სისტემა

$$-3x_2 + 7x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$5x_1 - 2x_2 = 2$$

c) გამოიყენეთ გაუსის მეთოდი მთავარი ელემენტების შერჩევით.

d) შეამოწმეთ პასუხი სისტემაში ჩასმით.

9.13 ამოხსენით სისტემა

$$x_1 + x_2 - x_3 = -3$$

$$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$$

$$-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1$$

a) გაუსის მეთოდით. **b)** გაუსის მეთოდით მთავარი ელემენტების შერჩევით.

11.2 გაუს- ზეიდელის მეთოდი

განტოლებათა სისტემების ამოხსნის იტერაციული მეთოდები წარმოადგენენ გამორიცხვის მეთოდების ალტერნატივას. ეს მიდგომა ანალოგიურია განტოლების ფესვის იტერაციული მეთოდით მოძებნისა, რომელიც თავ 6-ში იყო განხილული. ამ მეთოდებს შორის ყველაზე ხშირად გამოყენებადი გაუს ზეიდელის მეთოდი მეთოდია.

ვთქვათ, მოცემულია წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

გადმოცემის სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ ეს სისტემა 3×3 ზომისაა და დიაგონალური ელემენტები არანულოვანებია. პირველი განტოლება ამოვხსნათ x_1 , მორე -- x_2 , მესამე კი -- x_3 ცვლადების მიმართ:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \quad (11.5a)$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \quad (11.5b)$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \quad (11.5c)$$

ამოხსნის პროცესს ვიწყებთ უცნობებისთვის საწყისი მნიშვნელობების დასახელებით. ყველაზე მარტივია ყველა უცნობისათვის ნულოვანი საწყისი მნიშვნელობის აღება. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (11.5a) განტოლებაში. მაშინ x_1 -სათვის მივიღებთ პირველ მიახლოებას: $x_1 = b_1/a_{11}$. შემდეგ, ეს მნიშვნელობა და x_3 -ის მნიშვნელობა (რომელიც ჯერ ნულია) ჩავსვათ (11.5b)-ში და გამოვთვალოთ x_2 -ის პირველი მიახლოება. ახლა გამოთვლილი x_1 , x_2 -ის პირველი მიახლოებები შევიტანოთ (11.5c)-ში და გამოვთვალოთ x_3 -ის პირველი მიახლოება. შემდეგ ჩვენ კვლავ ვიწყებთ პირველი განტოლებიდან და ანალოგიურად გამოვთვლით მეორე მიახლოებებს და ა.შ. კრებადობა შეიძლება შევამოწმოთ

$$|\varepsilon_{a,i}| = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| 100\% < \varepsilon_s \quad (11.6)$$

კრიტერიუმით ყოველი i -სათვის, სადაც j და $j-1$ ზედა ინდექსები მიუთითებს ახლანდელ და წინა იტერაციებს.

მაგალითი 11.3

გაუს-ზეიდელის მეთოდით ამოვხსნათ სისტემა

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

გავიხსენოთ, რომ ზუსტი ამონახსნია $x_1=3$, $x_2=-2.5$, $x_3=7$.

ამოხსნა. პირველ რიგში, თითოეული განტოლებიდან ამოვხსნათ დიაგონალზე მდგომი უცნობები:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3} \quad (11.3.1)$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7} \quad (11.3.2)$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10} \quad (11.3.3)$$

იმ პირობით, რომ x_2 და x_3 ნულებია, (11.3.1)-დან ვპოულობთ

$$x_1 = \frac{7.85 + 0 + 0}{3} = 2.616667.$$

ეს მნიშვნელობა და $x_3=0$ ჩავსვით (11.3.2)-ში და გამოვთვალოთ

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0}{7} = -2.794524.$$

x_1 და x_2 -ის გამოთვლილი მნიშვნელობების ჩასმით (11.3.3)-დან გვაქვს

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610.$$

მეორე იტერაციისთვის ვიყენებთ იგივე პროცესს

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = -2.990557 \quad |\varepsilon_t| = 0.31\%$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625 \quad |\varepsilon_t| = 0.015\%$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.000291 \quad |\varepsilon_t| = 0.0042\%$$

როგორც ვხედავთ, იტერაცია კრებადია ზუსტი ამონახსნისაკენ. დამატებითი იტერაცია შედეგს გააუმჯობესებს. თუმცა რეალურ ამოცანაში ჩვენ ზუსტი პასუხი არ გვეცოდინება. ამიტომ (11.6) ტოლობა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ცდომილება. მაგალითად, x_1 -სათვის

$$|\varepsilon_{a,1}| = \left| \frac{2.990557 - 2.616667}{2.990557} \right| 100\% = 12.5\%$$

x_2 და x_3 -სათვის ცდომილების შეფასებებია $|\varepsilon_{a,2}| = 11.8\%$ და $|\varepsilon_{a,3}| = 0.076\%$.

$n \times n$ რიგის $[A]\{X\} = \{B\}$ სისტემის შემთხვევაში გაუს-ზეიდელის მეთოდის ფორმულას ასეთი სახე აქვს:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

კრებადობის გაუმჯობესება რელაქსაციის გამოყენებით

რელაქსაცია წარმოადგენს გაუს-ზეიდელის მეთოდის უმნიშვნელო მოდიფიკაციას და განკუთვნილია კრებადობის გასაუმჯობესებლად. ფესვის ყოველი ახალი მნიშვნელობის გამოთვლის შემდეგ ხდება ამ მნიშვნელობის შეცვლა შეცვლა წინა და მიმდინარე მნიშვნელობების წონიანი საშუალოთი

$$x_i^{\text{ახალი}} := \lambda x_i^{\text{ახალი}} + (1-\lambda) x_i^{\text{ძველი}}$$

სადაც რელაქსაციის პარამეტრი (წონა) მოთავსებულია $(0, 2)$ შუალედში. თუ $\lambda=1$, მაშინ $(1-\lambda)=0$ და შედეგი არაა მოდიფიცირებული. თუ $\lambda \in (0,1)$, მაშინ შედეგი წინა და მიმდინარე სიდიდეების წონიანი საშუალოა და ამ ტიპის მოდიფიკაციას მიმდევრობითი ქვედა რელაქსაცია (successive underrelaxation) ეწოდება. როგორც წესი ეს გამოიყენება არაკრებადი შემთხვევებში ოსცილაციის შესამცირებლად.

$\lambda \in (1, 2)$ შემთხვევას მიმდევრობით ზედა რელაქსაციას (successive overrelaxation) უწოდებენ. რელაქსაციის პარამეტრის შერჩევა საკმაოდ რთული ამოცანაა.

ხშირ შემთხვევებში ეს პარამეტრი ექსპერიმენტული გზით შეირჩევა.
 გაუს-ზეიდელის რელაქსაციურ ფორმულას ასეთი სახე აქვს:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\lambda)x_i^{(k)} + \frac{\lambda}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

მაგალითი 11.5

MATLAB - ის გამოყენება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად

ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2/3 & 1/2 \\ 1 & 3/4 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.833333 \\ 2.166667 \\ 2.35 \end{bmatrix}$$

ამოხსნა. პირველ რიგში შევიტანოთ $[A]$ მატრიცი და $\{B\}$ ვექტორი:

```
>> A = [ 1 1/2 1/3 ; 1 2/3 2/4 ; 1 3/4 3/5 ]
```

```
A =
    1.0000    0.5000    0.3333
    1.0000    0.6667    0.5000
    1.0000    0.7500    0.6000
```

```
>> B = [ 1+1/2+1/3; 1+2/3+2/4; 1+3/4+3/5 ]
```

```
B =
    1.8333
    2.1667
    2.3500
```

ახლა ამოვხსნათ სისტემა ორი განსხვავებული ხერხით. ჯერ გამოვიყენოთ "მარცხენა გაყოფა" (მატლაბი აქ იყენებს გაუს-ზეიდელის მეთოდს):

```
>> X=A\B
```

```
X =
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

ახლა ამოვხსნათ შებრუნებული მატრიცის გამოყენებით:

```
>> X = inv(A)*B
```

```
X =
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

(ზუსტი ამონახსნია $\{X\}^T = [1 \ 1 \ 1]$)

ამოცანები

11.8 გაუს-ზეიდელის მეთოდით ამოვხსნათ სისტემა ($\varepsilon_s = 5\%$)

$$\begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 \\ & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 41 \\ 25 \\ 105 \end{Bmatrix}$$

გამოიყენეთ რელაქსაცია $\lambda = 1.2$ პარამეტრით.

11.11 გაუს-ზეიდელის მეთოდით ამოვხსნათ სისტემა ისე, რომ ფარდობითი პროცენტული ცდომილება ნაკლები იყოს $\varepsilon_s = 5\%$ -ზე

$$10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27$$

$$-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -61.5$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = -21.5$$

11.12 მოცემული სისტემის ამოსახსნელად გამოიყენეთ გაუს-ზეიდელის მეთოდი (ა) რელაქსაციის გარეშე და (ბ) $\lambda = 0.95$ რელაქსაციით. $\varepsilon_s = 5\%$. საჭიროების შემთხვევაში, გადაალაგეთ განტოლებები კრებადობის მისაღწევად.

$$-3x_1 + x_2 + 12x_3 = 50$$

$$6x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

$$6x_1 + 9x_2 + x_3 = 40$$

11.13 მოცემული სისტემის ამოსახსნელად გამოიყენეთ გაუს-ზეიდელის მეთოდი (ა) რელაქსაციის გარეშე და (ბ) $\lambda = 0.95$ რელაქსაციით. $\varepsilon_s = 5\%$. საჭიროების შემთხვევაში, გადაალაგეთ განტოლებები კრებადობის მისაღწევად.

$$2x_1 - 6x_2 - x_3 = -38$$

$$-3x_1 - x_2 + 7x_3 = -34$$

$$-8x_1 + x_2 - 2x_3 = -20$$

11.22 ჩაწერეთ სისტემა მატრიცული სახით და ამოხსენით მატლაბის გამოყენებით

$$50 = 5x_3 - 7x_2$$

$$4x_2 + 7x_3 + 30 = 0$$

$$x_1 - 7x_3 = 40 - 3x_2 + 5x_1$$

..

ოპტიმიზაცია შეზღუდვებით

განხილული იქნება შეზღუდვებიანი ოპტიმიზაციის ამოცანები. მიმოხილულ იქნება პროგრამული პაკეტები, რომლებიც შეიძლება გამოყენებულ იქნას ოპტიმიზაციისათვის.

15.1 წრფივი დაპროგრამება

წრფივი დაპროგრამება წარმოადგენს ოპტიმიზაციის მდგომარეობას, რომელსაც ხშირად იყენებენ ისეთი მიზნების მისაღწევად როგორცაა მოგების მაქსიმიზირება (ან ხარჯების მინიმიზირება) შეზღუდული რესურსების პირობებში. თერმინი *წრფივი* გულისხმობს რომ მათემატიკური ფუნქციები, რომლებიც გამოხატავენ ოპტიმიზაციის მიზანსა და შეზღუდვებს, წრფივებია, ხოლო თერმინი *დაპროგრამება* გულისხმობს უფრო დაგეგმვას, და არა კომპიუტერულ დაპროგრამებას.

როგორც წესი, წრფივი დაპროგრამების ამოცანა შედგება ორი ნაწილისაგან: მიზნის ფუნქციისა და შეზღუდვათა სიმრავლისაგან. მაქსიმიზირების ამოცანისათვის მიზნის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$\text{Maximize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

სადაც c_i არის i -ური პროდუქციის/აქტივობის ღირებულება, ხოლო x_i არის i -ური პროდუქციის/აქტივობის რაოდენობა/სიდიდე.

შეზღუდვებს აქვთ შემდეგი სახე

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

სადაც a_{ij} არის j -ური პროდუქციის/აქტივობის ერთეულზე მოხმარებული i -ური რესურსის რაოდენობა, b_i არის i -ური რესურსის ხელმისაწვდომი რაოდენობა.

მეორე ტიპის შეზღუდვები ეხება იმ ფაქტს, რომ პროდუქტის/აქტივობის რაოდენობა/სიდიდე არაუარყოფითია

$$x_i \geq 0.$$

მაგალითი 15.1

განვიხილოთ მაგალითი ქიმიური ინდუსტრიიდან, კერძოდ გაზის წარმოების დარგიდან, თუმცა ეს მაგალითი მრავალ სხვა საინჟინრო დარგსაც ეხება.

ამოცანა. დავუშვათ, რომ გაზის მწარმოებელი ქარხანა ყოველკვირეულად მოიპოვებს ნედლ გაზს და აწარმოებს ორი ხარისხის გაზს: რეგულარულსა და პრემიალურს. ორივე ხარისხის გაზზე არის მაღალი მოთხოვნილება (ანუ მათი გაყიდვა გარანტირებულია). მათი წარმოება დაკავშირებულია დროისა და შენახვის შეზღუდვებთან. მაგალითად, ქარხანას შეუძლია აწარმოოს მხოლოდ ერთი ხარისხის გაზი, და ქარხანა მუშაობს მხოლოდ 80 სთ/კვირაში. თითოეული პროდუქტისათვის შენახვის პირობები შეზღუდულია. წარმოებასთან დაკავშირებულ ფაქტორთა სრული სია იხილეთ ცხრილში.

პროდუქტი

რესურსი	რეგულარი	პრემიუმი	რესურსის ხელმისაწვდ.
ნედლი გაზი	7 მ ³ /ტონა	11 მ ³ /ტონა	77 მ ³ /კვირა
წარმოების დრო	10 სთ/ტონა	8 სთ/ტონა	80 სთ/კვირა
შენახვა	9 ტონა	6 ტონა	
მოგება	150/ტონა	175/ტონა	

გამოვიყენოთ წრფივი დაპროგრამების მიდგომა მოგების მაქსიმიზირებისათვის.

ამოხსნა. ცხადია, რომ უნდა დადგინდეს თითოეული ხარისხის რამდენი გაზი უნდა აწარმოოს ქარხანამ მაქსიმალური მოგებისათვის. თუ ქარხანა კვირაში აწარმოებს x_1 და x_2 რაოდენობის რეგულარ და პრემიუმ გაზს, მაშინ მისი მოგებაა

$$\text{Total profit} = 150x_1 + 175x_2,$$

ან თუ ჩავწერთ წრფივი დაპროგრამების მიზნის ფუნქციის სახით

$$\text{Maximize } Z = 150x_1 + 175x_2.$$

ამასთან, გამოყენებულია

$$\text{Total gas used} = 7x_1 + 11x_2$$

ნედლი გაზი, რომელიც კვირაში არ უნდა აღემატებოდეს 77 მ³, რაც გამოიხატება შეზღუდვის სახით

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77.$$

გარდა ამისა, ვიცით რომ ქარხანა კვირაში მუშაობს 80 სთ. ამიტომ გვაქვს შემდეგი შეზღუდვაც

$$10x_1 + 8x_2 \leq 80.$$

გაზის შენახვასთან დაკავშირებულ შეზღუდვებს აქვთ შემდეგი სახე

$$x_1 \leq 9, x_2 \leq 6,$$

და ბოლოს, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

საბოლოოდ ამოცანა ჩაიწერება ასე

$$\text{Maximize } Z = 150x_1 + 175x_2$$

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77 \quad (\text{მასალის შეზღუდვა})$$

$$10x_1 + 8x_2 \leq 80 \quad (\text{დროის შეზღუდვა})$$

$$x_1 \leq 9, x_2 \leq 6 \quad (\text{შენახვის შეზღუდვები})$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\text{დადებითობის შეზღუდვები})$$

მაგალითი 15.2

გრაფიკული ამოხსნა

გრაფიკული ხერხით ამოვხსნათ გაზის წარმოების ამოცანა:

$$\text{Maximize } Z = 150x_1 + 175x_2$$

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77 \quad (1)$$

$$10x_1 + 8x_2 \leq 80 \quad (2)$$

$$x_1 \leq 9 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 6 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5)$$

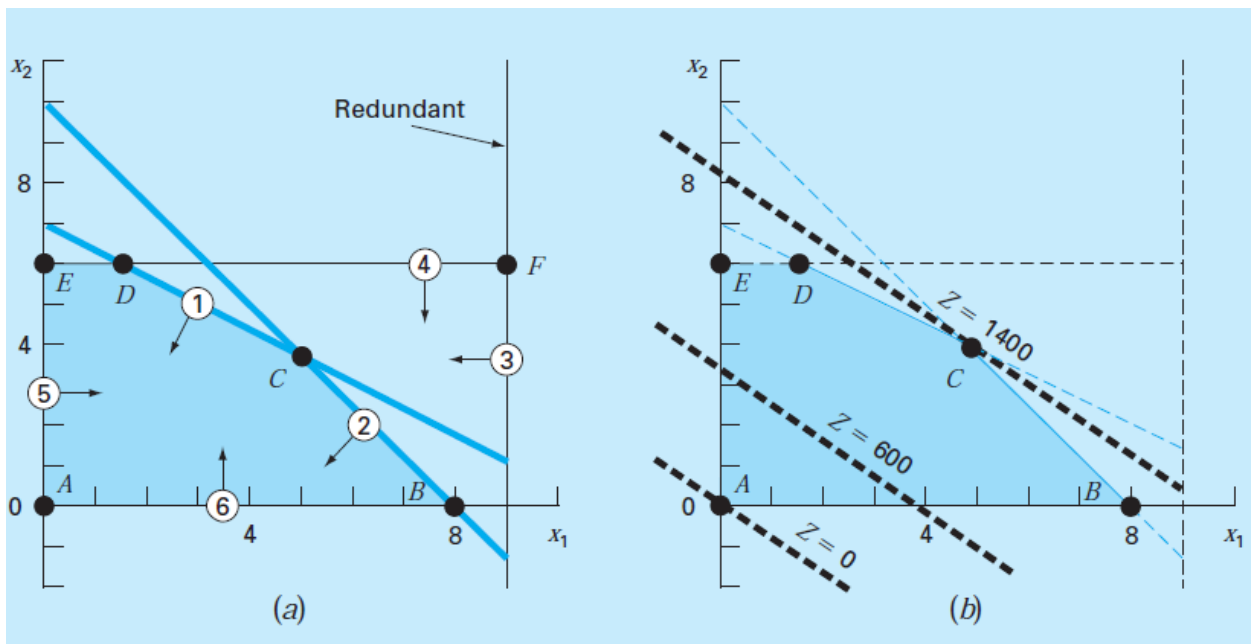
$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$

ამოხსნა. $x_1 O x_2$ სიბრტყეს ვუწოდოთ ამონახსნთა სივრცე. ცხადია, რომ თითოეული შეზღუდვა ამონახსნთა სივრცეში განსაზღვრავს გარკვეულ ქვესივრცეს. მაგალითად, პირველი შეზღუდვიდან გვაქვს წრფის განტოლება

$$x_2 = -\frac{7}{11}x_1 + 7,$$

და ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ შეზღუდვა (1)-ს, წარმოადგენს ამ წრფის დაბლა მყოფ ნახევარსიბრტყეს. ფიგ. 15.1a-ზე მოცემულია ყველა შეზღუდვის შესაბამისი წრფეები.

ადვილი დასანახია, რომ ამ შემთხვევაში არსებობს ამონახსნთა სივრცეში ისეთი არე, კერძოდ ABCDE ხუთკუთხედი, რომლის წერტილების (x_1, x_2) კოორდინატები აკმაყოფილებენ ყველა შეზღუდვას. ასეთ არეს ეწოდება შესაძლო ამონახსნთა სივრცე. ნახაზიდან ჩანს, რომ შეზღუდვა 3 ზედმეტია, მისი გაუქმებით სურათი არ იცვლება.



ფიგურა 15.1

დავუშვათ, რომ $Z = 0$, მაშინ მიზნის ფუნქციიდან მივიღებთ

$$0 = 150x_1 + 175x_2,$$

საიდანაც

$$x_2 = -\frac{150}{175}x_1,$$

რაც ფიგ. 15.1b-ზე მოცემულია კოორდინატთა სათავეზე გამავალი პუნქტირით წარმოდგენილი წრფით.

ადვილი მისახვედრია, რომ Z -ის გაზრდით მიიღება პარალელური წრფეები, კერძოდ, ფიგ. 15.1b-ზე პუნქტირით მოცემულია წრფეები $Z = 600$ და $Z = 1400$ მნიშვნელობებისათვის. ცხადია აგრეთვე, რომ თუ $Z > 1400$, მაშინ მიღებული წრფის ვერცერთი წერტილი ვერ დააკმაყოფილებს ყველა შეზღუდვას, რადგან წრფე გადის შესაძლო ამონახსნთა სივრციდან.

მივიღეთ, რომ Z -ის მაქსიმალური მნიშვნელობაა 1400, რომელიც მიიღწევა $x_1 \approx 4,9$, $x_2 \approx 3,9$ მნიშვნელობებისათვის. ე.ი. გრაფიკულმა მიდგომამ გვიჩვენა, რომ, თუ რეგულარ და პრემიუმ გაზს ვაწარმოებთ $x_1 \approx 4,9$, $x_2 \approx 3,9$ რაოდენობით, მაშინ მოგება მაქსიმალურია და უდრის 1400.

შეზღუდვებში $x_1 \approx 4,9$, $x_2 \approx 3,9$ მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ

$$7(4,9) + 11(3,9) \cong 77$$

$$4,9 \leq 9$$

$$10(4,9) + 8(3,9) \cong 80$$

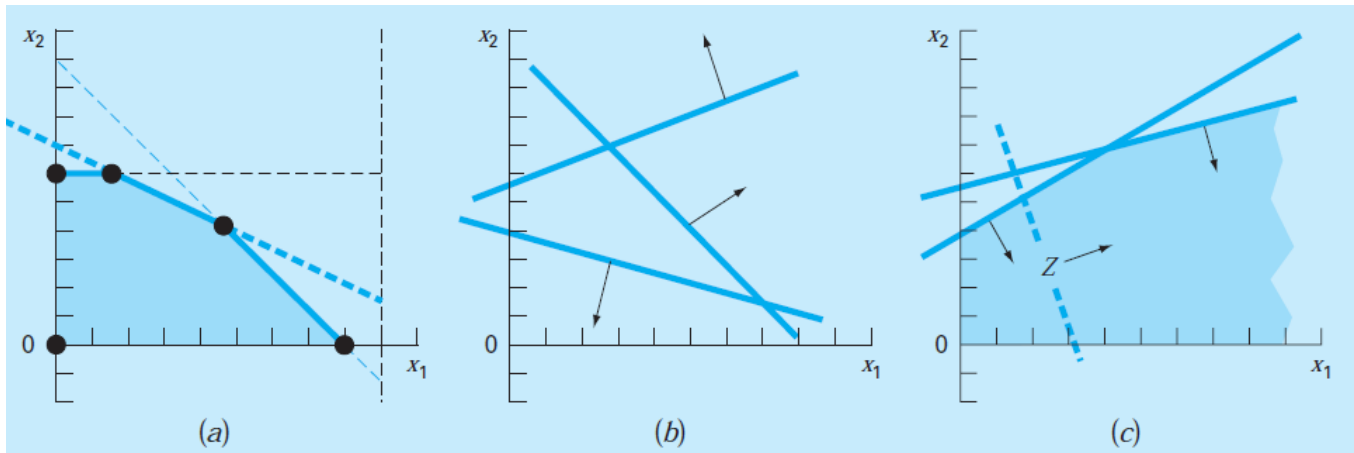
$$3,9 \leq 6$$

რაც იმის მაუწყებელია, რომ მოგების გაზრდა შესაძლებელია ან მასალის (ნედლი გაზი) გაზრდით, ან სამუშაო საათების გაზრდით, ხოლო უკანასკნელი ორი შეზღუდვის თანახმად შესაძლებელია მოგების გაზრდას მოგებაზე გავლენა არა აქვს.

ჩვენს მიერ განხილული წრფივი დაპროგრამების ამოცანის შედეგი იყო ერთერთი ოთხი შესაძლო შემთხვევებისაგან. მოვიყვანოთ ყველა შესაძლო შედეგი.

1. ერთადერთი ამონახსნი. როგორც ჩვენს ამოცანაში, როცა მიზნის ფუნქცია კვეთს შესაძლო ამონახსნთა სივრცეს მხოლოდ ერთ წერტილში.

2. ალტერნატიული ამონახსნები. წარმოვიდგინოთ შემთხვევა, როცა მიზნის ფუნქცია კვეთს შესაძლო ამონახსნთა სივრცეს რომელიმე შეზღუდვის გასწვრივ (ფიგ. 15.2a).



ფიგურა 15.2

3. ამონახსნი არ არის. ეს არის შემთხვევა, როცა შეზღუდვები გადატვირთულია, შესაძლო ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია (ფიგ. 15.2b).

4. შემოუსაზღვრელი ამოცანები. ეს არის შემთხვევა, როცა შეზღუდვები არასაკმარისად შემოსაზღვრულია, ამონახსნთა სივრცე რაიმე მიმართულებით შემოუსაზღვრავია (ფიგ. 15.2c).

ამოცანის მოყვანილი ამოხსნიდან გამომდინარეობს ერთი საინტერესო ფაქტი, კერძოდ, ერთადერთი ამონახსნის შემთხვევაში სამიზნე ფუნქცია თავის უდიდეს/უმცირეს მნიშვნელობას აღწევს შესაძლო ამონახსნთა მრავალკუთხედის წვეროში. ასეთ წერტილებს ექსტრემალურ წერტილებს უწოდებენ. ე.ი. მიება უნდა განხორციელდეს ექსტრემალური წერტილებისათვის, თუმცა, როგორც ეს ჩვენს შემთხვევაში მოხდა (იხ. ფიგ. 15.1a, წერტილი F), არა ყველა, არამედ შესაძლო ექსტრემალური წერტილებისათვის.

15.3 ოპტიმიზაცია პროგრამული პაკეტების გამოყენებით

პროგრამულ პაკეტებს გააჩნიათ დიდი შესაძლებლობები ოპტიმიზაციის ამოცანების გამოკვლევაში. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების გამოკვლევაში, ყველაზე ხელმისაწვდომობის გამო, განვიხილავთ პროგრამულ პაკეტს Excel-ს.

დავუბრუნდეთ ჩვენს მიერ განხილულ წრფივი დაპროგრამების ამოცანას გაზის წარმოების შესახებ.

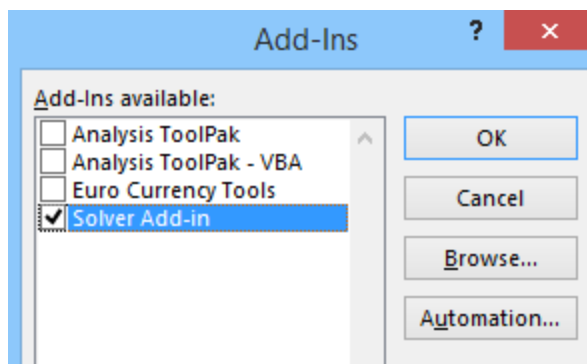
მაგალითი 15.3

გამოვიყენოთ პროგრამული პაკეტი Excel ამ თავში განხილულ ამოცანაში გაზის წარმოების შესახებ (მაგალითი 15.1, 15.2).

ამოხსნა. შევიტანოთ Excel-ის ფურცელში ამოცანის მონაცემები და ისრით მითითებულ უჯრედებში განვსაზღვროთ შესატყვისი ფორმულები (იხ. ნახაზი).

	A	B	C	D	E	F
1	გაზის წარმოების ამოცანა					
2						
3		რეგულარული	პრემიალური	მთლიანი	ხელმისაწვდომია	
4	წარმოებულია	0	0			$=B6*B4+C6*C4$
5						
6	ნედლი	7	11	0	77	$=B7*B4+C7*C4$
7	დრო	10	8	0	80	
8	რეგულარულის შენახვა			0	9	$=B4$
9	პრემიალურის შენახვა			0	6	
10						$=C4$
11	მოგება ერთეულისაგან	150	175			
12	მოგება	0	0	0		
13						
14						
15		$=B4*B11$	$=C4*C11$	$=B12+C12$		
16						
17						

FILE ჩანართში ავირჩიოთ Options და მასში Add-Ins ფანჯარაში დავაწკაპუნოთ Manage ... Go...-ზე, მივიღებთ ფანჯარას



ავირჩიოთ მიღებულ ფანჯარაში Solver-Add-in და დავხუროთ ფანჯარა OK-ზე დაწკაპუნებით.

DATA ჩანართში Solver-ის გამოძახებით მივიღებთ Solver Parameters ფანჯარას, რომელიც შევავსოთ ისე, როგორც ნახაზზე:

Solver Parameters

Set Objective:

To: ☒ Max ☐ Min ☐ Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

- \$B\$4 >= 0
- \$C\$4 >= 0
- \$D\$6 <= \$E\$6
- \$D\$7 <= \$E\$7
- \$D\$8 <= \$E\$8
- \$D\$9 <= \$E\$9

☒ Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:

Solving Method

Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Buttons: Add, Change, Delete, Reset All, Load/Save, Options, Help, Solve, Close

ამ უკანასკნელ ფანჯარაში Solve ღილაკზე დაწკაპუნებით მივიღებთ პასუხს:

	A	B	C	D	E
1	გაზის წარმოების ამოცანა				
2					
3		რეგულარული	პრემიალური	მთლიანი	ხელმისაწვდომია
4	წარმოებულია	4.888888889	3.888888889		
5					
6	ნედლი	7	11	77	77
7	დრო	10	8	80	80
8	რეგულარულის შენახვა			4.888888889	9
9	პრემიალურის შენახვა			3.888888889	6
10					
11	მოგება ერთეულისაგან	150	175		
12	მოგება	733.3333333	680.5555556	1413.888889	
13					

Excel-ის გამოყენება არაწრფივი ოპტიმიზაციის ამოცანებში

Excel-ის Solver-ის გამოყენება არაწრფივი ოპტიმიზაციის ამოცანის გამოკვლევაში ანალოგიურია ჩვენს მიერ განხილული ამოცანისა. როგორც წესი, საჭიროა Excel-ის ფურცელზე მოხდეს ერთი ისეთი უჯრედის განსაზღვრა, რომლის სიდიდის ოპტიმიზირებას ვახდენთ და რომელიც წარმოადგენს სხვა განსაზღვრული უჯრედების ფუნქციას.

განვიხილოთ ამოცანა პარამუტის შესახებ.

მაგალითი 15.4

აღრე განხილული მაგალითი PT4-ის საფუძველზე საჭიროა მოხდეს ლტოლვილთა ბანაკში პარამუტით ჩაშვებული ტვირთის ღირებულების მინიმიზირება არაწრფივი შეზღუდვებით, ამოცანის პარამეტრები მოცემულია ცხრილით.

პარამეტრი	სიმბოლო	სიდიდე	ერთეული
მთლიანი მასა	M_t	2000	კგ
მიზიდულობის აჩქარება	g	9.8	მ/წმ ²
ღირებულების კოეფიციენტი (მუდმივი)	c_0	200	\$
ღირებულების კოეფიციენტი (სიგრძე)	c_1	56	\$/მ
ღირებულების კოეფიციენტი (ფართობი)	c_2	0.1	\$/მ ²
კრიტიკული სიჩქარე	v_c	20	მ/წმ
არის ეფექტი წინაღობაზე	k_c	3	კგ/[წმ · მ ²]
ტვირთის ჩამოგდების საწყისი სიმაღლე	z_0	500	მ

მოცემული მნიშვნელობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ამოცანას

$$\text{Minimize } C = n(200 + 56l + 0.1A^2),$$

სადაც

$$v \leq 20$$

$$n \geq 1$$

აქ n პარამეტრების რაოდენობა მთელია, ხოლო ყველა დანარჩენი ცვლადი ნამდვილი. ამასთან

$$A = 2\pi r^2$$

$$l = \sqrt{2}r$$

$$c = 3A$$

$$m = \frac{M_t}{n} \quad (\text{E15.4.1})$$

$$t = \text{root} \left[500 - \frac{9.8m}{c}t + \frac{9.8m^2}{c^2} (1 - e^{-(c/m)t}) \right] \quad (\text{E15.4.2})$$

$$v = \frac{9.8m}{c} (1 - e^{-(c/m)t})$$

გამოიყენეთ Excel-ი აღნიშნული ამოცანის გადასაჭრელად.

ამოხსნა. ვიდრე გადავიდოდეთ ამოცანის განხორციელებაზე Excel-ის ფურცელზე, საჭიროა მოიძებნოს შეზღუდვებში მყოფი (E15.4.2) კვადრატული განტოლების ფესვი.

ეს შეიძლება განხორციელდეს იტერაციის გზით

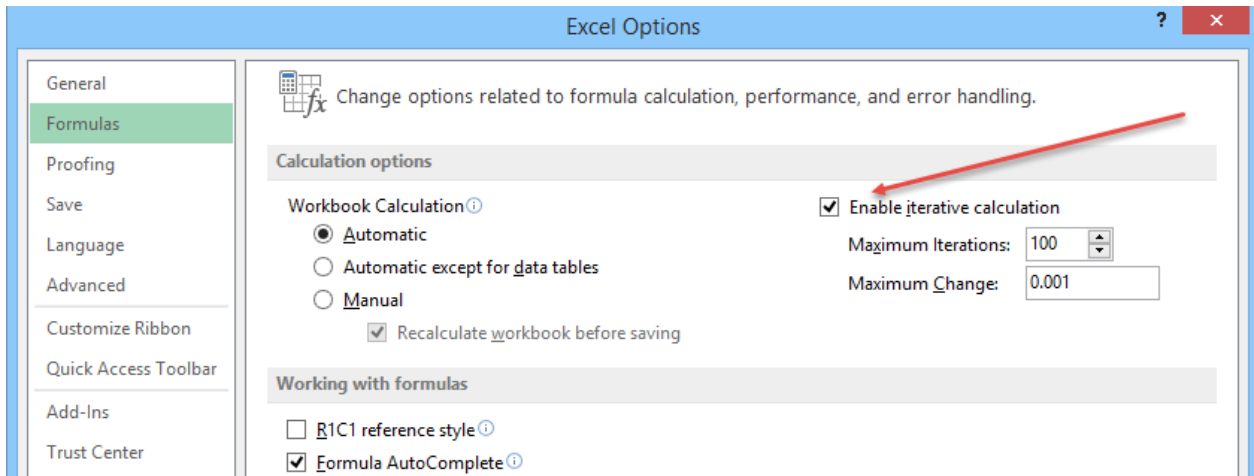
$$t_{i+1} = \left[500 + \frac{9.8m^2}{c^2} (1 - e^{-(c/m)t_i}) \right] \frac{c}{9.8m}, \quad (\text{E.15.4.3})$$

რომელიც კრებადია ამოცანის მოცემული პარამეტრების შემთხვევაში. იტერაციის განხორციელების მიზნით გამოვყოთ ფურცელზე ორი უჯრედი (B20, B21) t და $f(t)$ მნიშვნელობებისათვის, სადაც

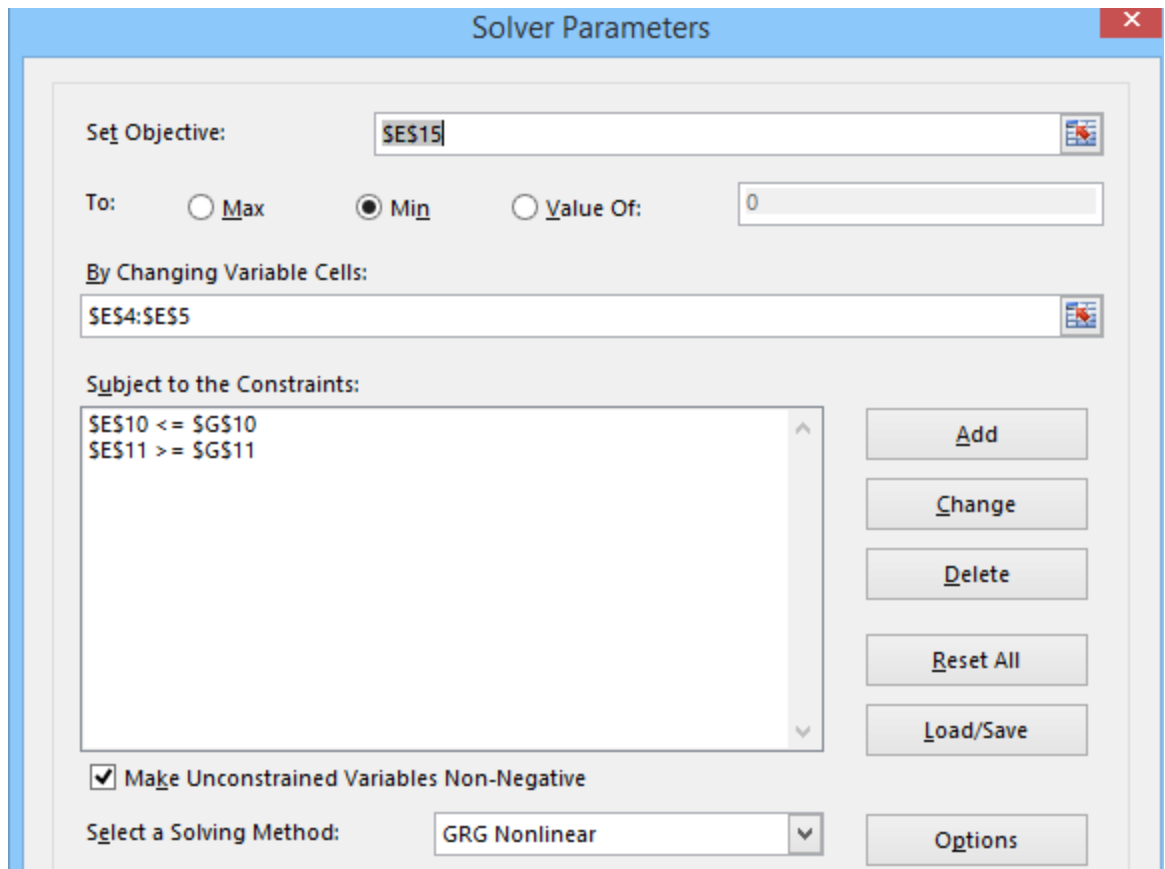
$$f(t) = \left[z_0 + \frac{9.8m^2}{c^2} (1 - e^{-(c/m)t}) \right] \frac{c}{9.8m}, \text{ იხ. ნახაზი.}$$

B21 : =(500+9.8*(B17/B16)^2*(1-EXP(-(B16/B17)*B20)))*B16/9.8/B17									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19	ფესვის მდებარეობა:								
20	t	10.26439							
21	f(t)	10.26439							
22									

იტერაციის შესასრულებლად, B21 უჯრედში შეტანილი ფორმულის შემდეგ, B20 უჯრედს უნდა მივანიჭოთ B21-ის მნიშვნელობა, ამასთან Excel Options ფანჯარაში, ჩანართში Formulas ავირჩიოთ Enable iterative calculation



Excel-ის ფურცელში და Solver-ში ამოცანის პარამეტრების შეტანით გვექნება



E15					=E11*(B6+B7*B15+B8*B14^2)				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	პარამეტრების ოპტიმიზაციის ამოცანა								
2									
3	პარამეტრები			დიზაინის ცვლადები					
4	Mt	2000		r	1				
5	g	9.8		n	1				
6	ღირ. კოეფ1	200							
7	ღირ. კოეფ2	56		შეზღუდვები:					
8	ღირ. კოეფ3	0.1							
9	vc	20		ცვლადი		ტიპი	ზღვარი		
10	kc	3		v	95.8786	<=	20		
11	z0	500		n	1	>=	1		
12									
13	გაოთვლილი მნიშვნელობები			სამიზნე ფუნქცია:					
14	A	6.283185							
15	I	1.414214		ღირებულება	283.1438				
16	c	18.84956							
17	m	2000							
18									
19	ფესვის მდებარეობა:								
20	t	10.26439							
21	f(t)	10.26439							

თუ ავიღებთ $r = 2.9$, $n = 6$, მივიღებთ

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	პარამეტრების ოპტიმიზაციის ამოცანა							
2								
3	პარამეტრები			დიზაინის ცვლადები				
4	Mt	2000		r	2.943653			
5	g	9.8		n	6			
6	ღირ. კოეფ1	200						
7	ღირ. კოეფ2	56		შეზღუდვები:				
8	ღირ. კოეფ3	0.1						
9	vc	20		ცვლადი		ტიპი	ზღვარი	
10	kc	3		v	19.99999	<=	20	
11	z0	500		n	6	>=	1	
12								
13	გაოთვლილი მნიშვნელობები			სამიზნე ფუნქცია:				
14	A	54.44437						
15	I	4.162953		ღირებულება	4377.266			
16	c	163.3331						
17	m	333.3333						
18								
19	ფესვის მდებარეობა:							
20	t	27.04078						
21	f(t)	27.04078						

ამოცანები

15.4 განვიხილოთ წრფივი პროგრამირების ამოცანა.

ვიპოვოთ $f(x, y) = 6x + 8y$ -ის მაქსიმუმი შემდეგი პირობებით:

$$5x + 2y \leq 40$$

$$6x + 6y \leq 60$$

$$2x + 4y \leq 32 \quad .$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

ამონახსნი მოვძებნოთ

(ა) გრაფიკულად.

(ბ) სიმპლექს მეთოდით.

(გ) პროგრამული პაკეტებით.

15.5 გამოიყენეთ პროგრამული პაკეტები შემდეგი შეზღუდვებიანი არაწრფივი ოპტიმიზაციის ამოცანა.

ვიპოვოთ $f(x, y) = 1.2x + 2y - y^3$ -ის მაქსიმუმი შემდეგი შეზღუდვებით:

$$2x + y \leq 2$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

15.6 გამოიყენეთ პროგრამული პაკეტები შემდეგი შეზღუდვებიანი არაწრფივი ოპტიმიზაციის ამოცანა:

ვიპოვოთ $f(x, y) = 15x + 15y$ -ის მაქსიმუმი შემდეგი შეზღუდვებით:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$x + 2y \leq 2.1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

15.7 განვიხილოთ შეზღუდვებიანი არაწრფივი ოპტიმიზაციის ამოცანა.

ვიპოვოთ $f(x, y) = (x-3)^2 + (y-3)^2$ -ის მინიმუმი შემდეგი შეზღუდვით:

$$x + 2y = 4.$$

მოძებნეთ ამონახსნი (ა) გრაფიკულად და (ბ) პროგრამული პაკეტების გამოყენებით.

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

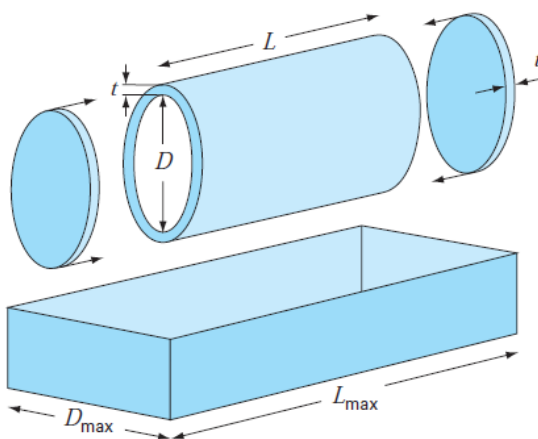
$$x + 2y \leq 2.1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

16.1 კონტეინერის დაპროექტება უმცირესი დანახარჯებით

ქიმიურ ინდუსტრიაში (აგრეთვე სხვა დარგებში) ხშირად არის საჭირო ისეთი ამოცანის გადაწყვეტა, როგორიცაა სითხისა და აირის კონტეინერის დაპროექტება. დავუშვათ, რომ საჭიროა ნარჩენი მასალების გადასაზიდი ცილინდრული კონტეინერის შექმნა, რომელიც რაიმე სატვირთო მანქანის ძარაზე უნდა დაიდგას და ამასთან კონტეინერის ღირებულება მინიმალური უნდა იყოს. გარდა ამისა, კონტეინერში უნდა ეტეოდეს გარკვეული რაოდენობის სითხე და ისეთი ზომების უნდა იყოს, რომ შეიძლებოდეს მისი განთავსება სატვირთო მანქანაზე. კონტეინერის სქემა მოცემულია ფიგ. 16.1-ზე.



ფიგურა 16.1

პარამეტრები ცილინდრული კონტეინერის ოპტიმალური ზომების დასადგენად

ცხრილი 16.1 პარამეტრები კონტეინერის ოპტიმალური ზომების დასადგენად

პარამეტრი	სიმბოლო	სიდიდე	ერთეული
საჭირო მოცულობა	V_0	0.8	მ^3
სისქე	t	3	სმ
სიმკვრივე	ρ	8000	კგ/მ^3
ძარის სიგრძე	$L_{\max}$	2	მ
ძარის სიგანე	$D_{\max}$	1	მ
მასალის ფასი	c_m	4.5	$\$/\text{კგ}$
შედულების ფასი	c_w	20	$\$/\text{მ}$

ავზის ფასში უნდა გავითვალისწინოთ ორი კომპონენტი: მასალის ფასი და შედუღების ხარჯი. მონაცემები, რომლებიც ამოცანაში მოითხოვება, მოცემულია ცხრილ 16.1-ში.

ამოხსნა. ჩვენი მიზანია ავაგოთ ავზი მინიმალური დანახარჯებით. ფასი დამოკიდებულია დიზაინის ცვლადებზე (დიამეტრზე და სიგრძეზე), რომლებიც გავლენას ახდენენ ავზის მასაზე და შედუღების სიგრძეებზე. ამოცანა შეზღუდვებითაა, რადგან ავზი უნდა დაეტიოს სატვირთო მანქანაზე და მას უნდა შეეძლოს მასალის მოთხოვნილი მოცულობის განთავსება.

ფასი შედგება ავზის მასალისაგან და შედუღების ფასისაგან, ამიტომ მოითხოვება მინიმალური იყოს მიზნის ფუნქცია

$$C = c_m m + c_w l_w, \quad (16.1)$$

სადაც C = ღირებულება (\$), m = მასალის მასა (კგ), ხოლო l_w = შედუღების სიგრძე (მ), c_m და c_w კი -- ღირებულების მამრავლი მასისთვის (\$/კგ) და შედუღების სიგრძისათვის (\$/მ), შესაბამისად.

შემდეგ, გავარკვეოთ როგორ კავშირშია მასა და შედუღების სიგრძე ტევადობასთან. პირველ ყოვლისა, მასა შეიძლება გამოითვალოს, როგორც მასალის მოცულობა გამრავლებული სიმკვრივეზე. მასალის მოცულობა, რაც გვერდითი კედლის (ცილინდრის) დამზადებისთვისაა საჭირო, შეიძლება გამოითვალოს როგორც

$$V_{\text{ცილინდ.}} = L\pi \left[\left(\frac{D}{2} + t \right)^2 - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right].$$

ორივე ბოლოზე საჭიროა წრიული ფირფიტა; თითოეულის მოცულობაა

$$V_{\text{ფირფიტ.}} = \pi \left(\frac{D}{2} + t \right)^2 t.$$

ამრიგად, ავზის დასამზადებლად გამოყენებული მასალის მოცულობაა

$$V_{\text{ცილინდ.}} + 2V_{\text{ფირფიტ.}} = L\pi \left[\left(\frac{D}{2} + t \right)^2 - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right] + 2\pi \left(\frac{D}{2} + t \right)^2 t$$

შესაბამისად, ავზის დასამზადებლად გამოყენებული მასალის მასაა

$$m = \rho \left\{ L\pi \left[\left(\frac{D}{2} + t \right)^2 - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right] + 2\pi \left(\frac{D}{2} + t \right)^2 t \right\}, \quad (16.2)$$

სადაც ρ = სიმკვრივე (კგ/მ³).

ფირფიტების მისადულებლად სიგრძე დაითვლება როგორც ცილინდრის შიდა და გარე წრეწირთა სიგრძეების ჯამი აღებული ორჯერ (ავზს ორი ფუძე აქვს)

$$l_w = 2 \left[2\pi \left(\frac{D}{2} + t \right) + 2\pi \frac{D}{2} \right] = 4\pi (D + t). \quad (16.3)$$

D და L სიდიდეების მოცემით (გავიხსენოთ, რომ t ფიქსირებულია) (16.1)-(16.3) ტოლობები უზრუნველყოფენ ღირბულების გამოთვლას. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ როცა (16.2) და (16.3)-ს ჩავსვამთ (16.1)-ში, მიზნის ფუნქცია არაწრფივი აღმოჩნდება.

ჩამოვყალიბოთ ახლა შეზღუდვები. პირველი შეზღუდვა უკავშირდება საჭირო მოცულობას

$$V = \frac{\pi D^2 L}{4} = V_0,$$

ხოლო ორი დანარჩენი ავტომატურად ზომებს

$$L \leq L_{\max},$$

$$D \leq D_{\max}.$$

ცხრილ 16.1-ში მოცემული მნიშვნელობების გათვალისწინებით ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება:

$$\text{Minimize } C = 4.5m + 20l_w$$

შეზღუდვებით

$$\frac{\pi D^2 L}{4} = 0.8,$$

$$L \leq 2,$$

$$D \leq 1,$$

სადაც

$$m = 8000 \left\{ L\pi \left[\left(\frac{D}{2} + 0.03 \right)^2 - \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right] + 2\pi \left(\frac{D}{2} + 0.03 \right) 0.03 \right\}, \quad l_w = 4\pi (D + 0.03).$$

ამოცანა მზადაა რიცხვითი ამოხსნისათვის. ამოხსნის ყველაზე მარტივ გზას ამ შემთხვევაში Excel Solver-ის გამოყენება წარმოადგენს.

პირველ რიგში საჭიროა შევითვინოთ ამოცანის პარამეტრები Excel-ის ფურცელში. შევნიშნოთ, რომ ნაცრისფერ უჯრედებში გვაქვს ფორმულები. შესაბამისი სამუშაო ფურცელი ნაჩვენებია ფიგ. 16.2-ზე.

ნაჩვენები შემთხვევისთვის ჩვენ შეტანილი გვაქვს D და L -ის ზედა ზღვრები. ოპტიმალური ვარიანტის განსაზღვრამდე ვხედავთ, რომ ავზის მოცულობა მეტია მიღებული, ვიდრე მოითხოვება ($1.57 > 0.8$).

ფიგურა 16.2

ავზის საფასურის გამოსათვლელად მომზადებული ექსელის სამუშაო ფურცელი

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ავზის ოპტიმალური დიზაინი							
2								
3	პარამეტრები:			დიზაინის ცვლადები:				
4	V0	0.8		D	1			
5	t	0.03		L	2			
6	rho	8000						
7	Lmax	2		შეზღუდვები:				
8	Dmax	1		D	1 <=		1	
9	cm	4.5		L	2 <=		2	
10	cw	20		Vol	1.570796		0.8	
11								
12	გამოთვლილი სიდიდეები			სამიზნე ფუნქცია:				
13	m	1976.791		C	9154.425			
14	Iw	12.94336						
15								
16	Vshell	0.19415						
17	Vends	0.052948						
18								

მას შემდეგ, რაც ექსელის სამუშაო ფურცელი მომზადდება, მენიუდან შევარჩიოთ Solver. ამ მომენტში გამოჩნდება დიალოგური ფანჯარა, რომელიც საჭიროებს შესაბამის ინფორმაციას. Solver-ის დიალოგური ბოქსის შესაბამისი უჯრედები შევსებული იქნება ასე

Solver Parameters

Set Target Cell:

Equal To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value of:

By Changing Cells:

Subject to the Constraints:

-
-
-

Buttons: Solve, Close, Options, Add, Change, Delete, Reset All, Help

Solve ღილაკზე დაწკაპუნებით მივიღებთ ამოცანის გადაწყვეტის ოპტიმალურ ვარიანტს (ფიგ. 16.3): მითითებულია ცილინდრული ავზის დიამეტრისა და სიგრძის ზომები, რომლებიც მნიშვნელოვნად ამცირებენ ხარჯებს.

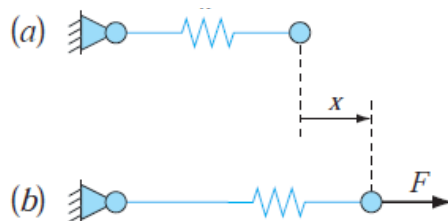
ფიგურა 16.3

მინიმიზაციის შედეგი. $D=0.98$ მ და $l=1.05$ მ პირობებში დამზადების ხარჯი შემცირდა 9154 \$-დან 5723 \$-მდე.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ავზის ოპტიმალური დიზაინი									
2										
3	პარამეტრები:			დიზაინის ცვლადები:						
4	V0	0.8		D	0.983661					
5	t	0.03		L	1.05271					
6	rho	8000								
7	Lmax	2		შეზღუდვები:						
8	Dmax	1		D	0.983661	<=	1			
9	cm	4.5		L	1.05271	<=	2			
10	cw	20		Vol	0.8	=	0.8			
11										
12	გამოთვლილი სიდიდეები			სამიზნე ფუნქცია:						
13	m	1215.198		C	5723.15					
14	lw	12.73804								
15										
16	Vshell	0.100571								
17	Vends	0.051329								
18										
19										

16.4 წონასწორობა და პოტენციური ენერგიის მინიმუმი

ვთქვათ, კედელზე მიმაგრებული ზამბარა იჭიმება მასზე მოდებული ჰორიზონტალურად მოქმედი ძალით (ფიგ. 16.14a).



ფიგურა 16.14

გადაადგილებასა და ძალას შორის კავშირი აღიწერება ჰუკის კანონით:

$$F = kx .$$

დეფორმირებულ მდგომარეობაში მყოფი ზამბარის პოტენციური ენერგია ტოლია დეფორმაციის ენერგიას გამოკლებული ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა

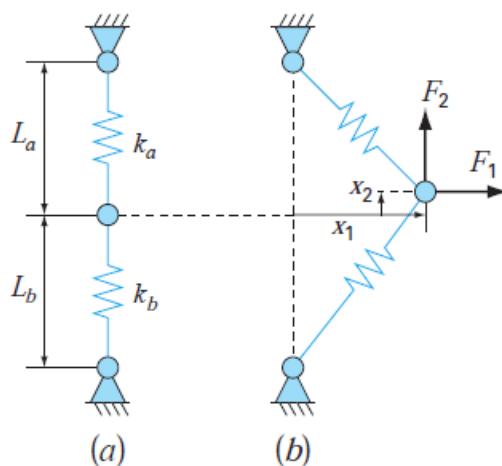
$$PE(x) = 0.5kx^2 - Fx . \quad (16.12)$$

(16.12) განტოლება წარმოადგენს პარაბოლას, ამიტომ ზამბარის პოტენციური ენერგია მიაღწევს მინიმუმს წონასწორობის მდგომარეობაში, და ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება ერთგანზომილებიანი ოპტიმიზაციის ამოცანამდე. რადგან აღნიშნული განტოლების გაწარმოება იოლია, მაშინ მინიმუმის წერტილია

$$x = F / k .$$

მაგალითად, თუ $k = 25/\text{სმ}$ და $F = 56$, მაშინ $x = 56 / (25/\text{სმ}) = 2.24 \text{ სმ}$.

უფრო საინტერესოა ფიგ. 16.15-ზე ნაჩვენები შემთხვევა, როცა სისტემის თავისუფლების ხარისხი ორის ტოლია -- სისტემას შეუძლია გადაადგილება როგორც ჰორიზონტალურად, ისე ვერტიკალურად.



ფიგურა 16.5

ორ ზამბარიანი სისტემა

(a) დაუტვირთავი

(b) დატვირთული

ამ შემთხვევაში პოტენციური ენერგია გამოითვლება ფორმულით

$$PE(x_1, x_2) = 0.5k_a \left(\sqrt{x_1^2 + (L_a - x_2)^2} - L_a \right)^2 + 0.5k_b \left(\sqrt{x_1^2 + (L_b + x_2)^2} - L_b \right)^2 - F_1 x_1 - F_2 x_2 . \quad (16.13)$$

დეფორმაციის წონასწორობა x_1, x_2 გადაადგილებათა იმ მნიშვნელობებს შეესაბამება, რომლებისთვისაც პოტენციური ენერგია მინიმალურია. თუ პარამეტრებია

$k_a = 9 \text{ ნ/სმ}, \quad k_b = 2 \text{ ნ/სმ}, \quad L_a = 10 \text{ სმ}, \quad L_b = 10 \text{ სმ}, \quad F_1 = 2 \text{ ნ}, \quad F_2 = 4 \text{ ნ}$, ამოვხსნით გადაადგილებებს და პოტენციურ ენერგიას.

ამოცანის ამოხსნაში გამოვიყენოთ პროგრამული პაკეტი MATLAB. M-ფაილი შევქმნათ შემდეგი კოდით

```
function p=PE(x,ka,kb,La,Lb,F1,F2)

PEa=0.5*ka*(sqrt(x(1)^2+(La-x(2))^2)-La)^2;

PEb=0.5*kb*(sqrt(x(1)^2+(Lb+x(2))^2)-Lb)^2;

W=F1*x(1)+F2*x(2);

p=PEa+PEb-W;

პასუხი მიიღება fminsearch ფუნქციის გამოყენებით:

>> ka=9; kb=2; La=10; Lb=10; F1=2; F2=4;

>> [x,f]=fminsearch(@PE,[-0.5, 0.5],[], ka, kb, La, Lb, F1, F2)

x =
    4.9523    1.2769
f =
   -9.6422
```

მივიღეთ რომ პოტენციური ენერგიის მინიმუმია -9.6422 ნ*სმ და ის მიიღწევა $x_1 = 4.9523$, $x_2 = 1.2769$ გადაადგილებებისათვის.

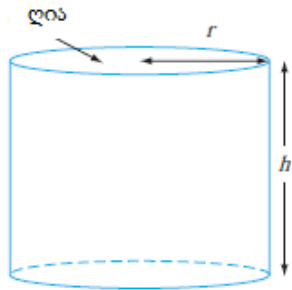
ამოცანები

16.1 განზრახულია ოპტიმალური ცილინდრული კონტეინერის დამზადება, რომელიც ერთი ბოლოდან ღიაა და რომლის კედლის სისქე უმნიშვნელოა (ფიგ. P16.1). კონტეინერი უნდა იტევდეს 0.2 მ^3 . დაგეგმეთ იგი ისე, რომ ძირის და გვერდითი ზედაპირის ფართობი იყოს მინიმალური.

16.2 (ა) დაგეგმეთ კონუსური კონტეინერი (ფიგ. P16.2) რომელსაც აქვს სახურავი და რომლის კედლის სისქე უმნიშვნელოა. კონტეინერი უნდა იტევდეს 0.2 მ^3 . დაგეგმეთ იგი ისე, რომ სახურავის და გვერდითი ზედაპირის ფართობი იყოს მინიმალური. **(ბ)** გაიმეორეთ (ა) იმ განსხვავებით, რომ კონტეინერს არ აქვს სახურავი.

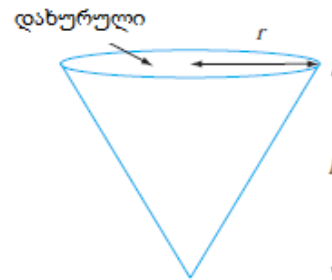
ფიგურა P16.1

თავლია ცილინდრული კონტეინერი

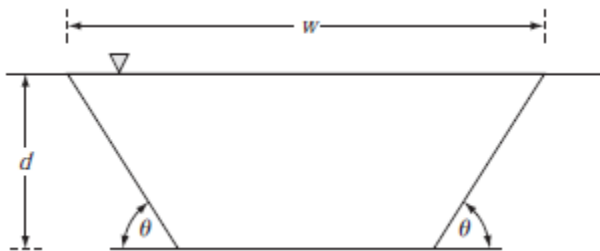


ფიგურა P16.2

თავდახურული კონუსური კონტეინერი



16.13 როგორც აგრარულ ინჟინერს, თქვენ დავალებული გაქვთ დაგეგმოთ ტრაპეციული კვეთის მქონე სარწყავი არხი (ფიგ.P16.13). განსაზღვრეთ ოპტიმალური ზომები, თუ მოითხოვება რომ განივი კვეთის ფართობი იყოს 50 კვ.მ, ამასთან კვეთის დასველებადი პერიმეტრი იყოს მინიმალური. არის ფარდობითი ზომები უნივერსალური?



ფიგურა P16.13



ფიგურა P16.15

16.15 მოითხოვება კონსოლური ძელის ოპტიმიზაცია დატვირთვისა და მომენტების გათვალისწინებით (ფიგ. P16.15). ამოცანის სასრულ-ელემენტური მოდელი მოცემულია განტოლებით

$$f(x, y) = 5x^2 - 5xy + 2.5y^2 - x - 1.5y,$$

სადაც x არის ძელის ბოლოს გადაადგილება, y კი ბოლოს მომენტი. იპოვეთ x -ის და y -ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $f(x, y)$ მინიმალურია.

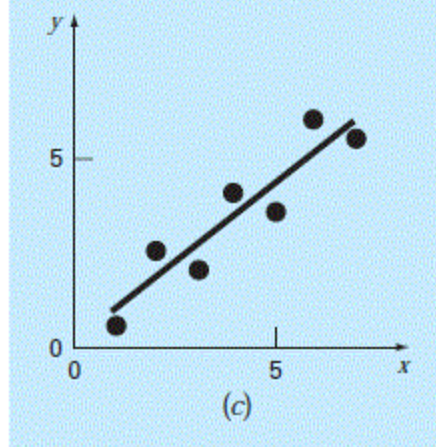
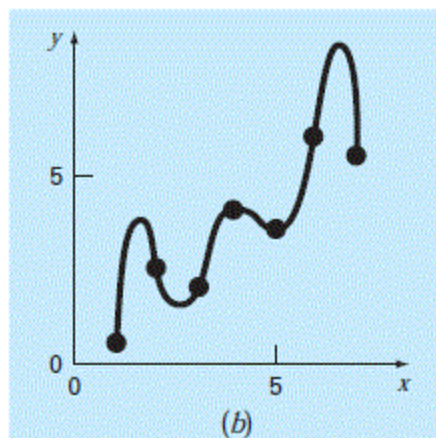
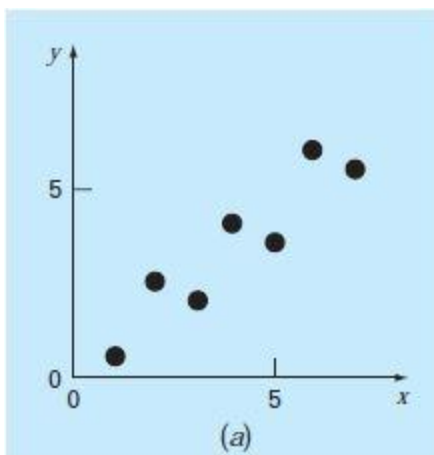
16.18 დამაბინძურებელი ნივთიერების კონცენტრაციის ორგანოზომილებიანი გავრცელება არხში აღიწერება განტოლებით

$$c(x, y) = 7.7 + 0.15x + 0.22y - 0.05x^2 - 0.016y^2 - 0.007xy.$$

განსაზღვრეთ პიკური კონცენტრაციის ადგილმდებარეობა მოცემული ფუნქციის მიხედვით, თუ ცნობილია, რომ პიკი მდებარეობს $-10 \leq x \leq 10$ და $0 \leq y \leq 20$ საზღვრებში.

უმცირეს-კვადრატული რეგრესია

თუ მონაცემები მნიშვნელოვან ცდომილებებს შეიცავენ, პოლინომურმა ინტერპოლაციამ შესაძლოა მიგვიყვანოს არადამაკმაყოფილებელ შედეგებამდე საშუალოდ მნიშვნელობების განსაზღვრისას. ექსპერიმენტული მონაცემები კი ხშირად ასეთია. მაგალითად, ფიგ. 17.1a-ზე მოცემულია ექსპერიმენტულად მიღებული მონაცემების მიხედვით აგებული შვიდი წერტილი. ვიზუალური დაკვირვება გვიჩვენებს y -ის ზრდის ტენდენციას x -ის ზრდასთან დაკავშირებით. ჩვენ შეგვიძლია მოვძებნოთ მეექვსე ხარისხის მრავალწევრი, რომლის გრაფიკი ზუსტად ამ წერტილებზე გაივლის (ფიგ. 17.1b). თუმცა გრაფიკი განიცდის მნიშვნელოვან ოსცილაციას და, მაგალითად, $x=1.5$ და $x=6.5$ წერტილებში ინტერპოლაციით მიღებული მნიშვნელობები ძალზე დაშორებულია მონაცემების საზღვრებიდან. ასეთ შემთხვევებში უფრო შესაფერი სტრატეგიაა გამოვიყენოთ მიახლოების ფუნქცია, რომელიც ფორმით და ზოგადი ტენდენციით შეესაბამება მონაცემებს და არ მოვითხოვთ მხოლოდ ცალკეულ წერტილებთან შესაბამისობა (ფიგ. 17.1 c). ერთ-ერთ ასეთ მიდგომას უმცირეს -კვადრატული რეგრესია წარმოადგენს.



ფიგურა 17.1

17.1 წრფივი რეგრესია

უმცირეს-კვადრატული აპროქსიმაციის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს წრფის აგება ექსპერიმენტულად მიღებული $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ დაწყვილებული მონაცემებისათვის. წრფის მათემატიკური გამოსახულებაა

$$y = a_0 + a_1 x + e \quad (17.1)$$

სადაც a_1 წრფის დახრილობაა, a_0 -- ორდინატთა ღერძთან კვეთა, e -- ცდომილებაა (განსხვავება) მოდელის ჭეშმარიტ y მნიშვნელობასა და ექსპერიმენტულ $a_0 + a_1 x$ სიდიდეს შორის:

$$e = y - a_0 - a_1 x.$$

a_0 , a_1 კოეფიციენტების შერჩევის სტრატეგია მდგომარეობს მინიმიზაცია მოვახდინოთ e ცდომილებათა კვადრატების ჯამისა:

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2. \quad (17.3)$$

/ S_r -ში S = Sum, r = residual/.

ამ კრიტერიუმის ერთ-ერთი უპირატესობაა, რომ კონკრეტული მონაცემებისთვის გვაძლევს ერთადერთ წრფეს (ამონახსნს). აღვწეროთ უცნობი კოეფიციენტების მოძებნის ტექნიკა.

გავაწარმოოთ (17.3) a_0 და a_1 კოეფიციენტების მიმართ:

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i),$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n [(y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i].$$

გავუტოლოთ 0-ს ეს წარმოებულები:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i \\ 0 &= \sum y_i x_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 x_i^2 \end{aligned}$$

(ჩაწერის სიმარტივისათვის გავამარტივეთ ჯამის სიმბოლო, აქ იგულისხმება აჯამვა $i = 1$ -დან n -მდე). შევცვალოთ $\sum a_0 = n a_0$. გვაქვს ორ უცნობიანი (a_0 და a_1) ორი განტოლების სისტემა:

$$na_0 + \left(\sum x_i\right)a_1 = \sum y_i \quad (17.4)$$

$$\left(\sum x_i\right)a_0 + \left(\sum x_i^2\right)a_1 = \sum y_i x_i \quad (17.5)$$

აქედან ვპოულობთ

$$a_1 = \frac{n \sum y_i x_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad (17.6)$$

რაც (17.4)-თან ერთად გვაძლევს

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}, \quad (17.7)$$

სადაც $\bar{y}$ და $\bar{x}$ წარმოადგენენ y_i და x_i მონაცემთა საშუალო არითმეტიკულს:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}, \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

მაგალითი 17.1

წრფივი რეგრესია

ავაგოთ წრფე ცხრილი 17.1-ის პირველი და მეორე სვეტის მონაცემებით.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ

$$n = 7 \quad \sum x_i y_i = 119.5 \quad \sum x_i^2 = 140$$

$$\sum x_i = 28 \quad \bar{x} = 28/7 = 4$$

$$\sum y_i = 24 \quad \bar{y} = 24/7 = 3.428571$$

$$a_1 = \frac{7(119.5) - 28(24)}{7(140) - (28)^2} = 0.8392857$$

$$a_0 = 3.428571 - 0.8392857(4) = 0.07142857$$

ცხრილი 17.1 გამოთვლები ცდომილების ანალიზისათვის

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$
1	0.5	8.5765	0.1687
2	2.5	0.8622	0.5625
3	2.0	2.0408	0.3473
4	4.0	0.3265	0.3265
5	3.5	0.0051	0.5896
6	6.0	6.6122	0.7972
7	5.5	4.2908	0.1993
Σ	24.0	22.7143	2.9911

ამრიგად, უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული წრფეა

$$y = 0.07142857 + 0.8392857x.$$

ეს წრფე ნაჩვენებია ფიგ. 17.1c -ზე .

აპროქსიმაციის შედეგების შეფასებები

მაგალით 17.1-ში გამოთვლილისგან განსხვავებული ნებისმიერი წრფე ნაშთების კვადრატების ჯამში უფრო დიდ სიდიდეს მოგვცემდა. ამასთან, ეს წრფე ერთადერთია და ჩვენი კრიტერიუმით საუკეთესოა. დამატებითი თვისებების დასადგენად სხვა გამოთვლების ჩატარებაა საჭირო. გავიხსენოთ, რომ კვადრატების ჯამი გამოითვლება ფორმულით

$$S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2. \quad (17.8)$$

რეგრესიის წრფისგან სტანდარტული გადახრაა (სტანდარტული ცდომილება)

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - a_1 x_i - a_0)^2}{n-2}}. \quad (17.9)$$

ცდომილების ერთ-ერთ მახასიათებელს წარმოადგენს საშუალოდან გადახრების კვადრატების ჯამი (total Sum)

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2.$$

დეტერმინაციის კოეფიციენტი

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}. \quad (17.10)$$

r სიდიდეს კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება. კომპიუტერული გამოთვლებისათვის გვაქვს მისი ალტერნატიული გამოსახულება:

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}. \quad (17.11)$$

მაგალითი 17.2

ცდომილებათა შეფასებები

მაგალითი 17.1-ის მონაცემების შემთხვევაში გამოვთვალოთ ტოტალური სტანდარტული გადახრა, შეფასების (სავარაუდოს) სტანდარტული ცდომილება და კორლაციის კოეფიციენტი.

ამოხსნა. შეჯამებების შედეგები მოცემულია ცხრილ 17.1-ში. სტანდარტული გადახრაა

$$S_y = \sqrt{\frac{22.7143}{7-1}} = 1.9457.$$

სტანდარტული ცდომილებაა

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{2.9911}{7-2}} = 0.7735$$

რადგან ამიტომ წრფივი რეგრესიული მოდელი საფუძვლიანია . გაუმჯობესების ხარისხი შეიძლება შევაფასოთ (17.10)-ით

$$r^2 = \frac{22.7143 - 2.9911}{22.7143} = 0.868, \quad r = \sqrt{0.868} = 0.932.$$

ეს შედეგები უჩვენებენ, რომ თავდაპირველი განუსაზღვრელობა განმარტებულია წრფივი მოდელით.

ფიგურა 17.6

წრფივი რეგრესიის ალგორითმი

SUB Regress(x, y, n, a1, a0, syx, r2)

```
sumx = 0: sumxy = 0: st = 0
sumy = 0: sumx2 = 0: sr = 0
DOFOR i = 1, n
    sumx = sumx + xi
    sumy = sumy + yi
    sumxy = sumxy + xi*yi
    sumx2 = sumx2 + xi*xi
END DO
xm = sumx/n
ym = sumy/n
a1 = (n*sumxy - sumx*sumy)/(n*sumx2 - sumx*sumx)
a0 = ym - a1*xm
DOFOR i = 1, n
    st = st + (yi - ym)2
    sr = sr + (yi - a1*xi - a0)2
END DO
syx = (sr/(n - 2))0.5
r2 = (st - sr)/st
```

END Regress

ამოცანები

17.3 უმცირეს კვადრატული რეგრესიის გამოყენებით ააგეთ წრფე შემდეგი მონაცემებისათვის

x	0	2	4	6	9	11	12	15	17	19
y	5	6	7	6	9	8	7	10	12	12

გამოთვალეთ შეფასების სტანდარტული ცდომილება და კორელაციის კოეფიციენტი. ააგეთ მონაცემები და რეგრესიის წრფე. შეუცვალეთ x და y -ს ადგილები და შეასრულეთ იგივე დავალება.

17.4 უმცირეს კვადრატული რეგრესიის გამოყენებით ააგეთ წრფე შემდეგი მონაცემებისათვის

x	6	7	11	15	17	21	23	29	29	37	39
y	29	21	29	14	21	15	7	7	13	0	3

გამოთვალეთ შეფასების სტანდარტული ცდომილება და კორელაციის კოეფიციენტი. ააგეთ მონაცემები და რეგრესიის წრფე.

17.5 ისეთივე მიდგომით, როგორც (17.5) და (17.6)-ის გამოყვანისას, მთარგეთ უმცირეს კვადრატული მეთოდი $y = a_1x + e$ მოდელს. მოდელთან ერთად წარმოადგინეთ გრაფიკულად აქ მოყვანილი მონაცემებიც

x	2	4	6	7	10	11	14	17	20
y	1	2	5	2	8	7	6	9	12

17.6 უმცირეს კვადრატული რეგრესიის გამოყენებით ააგეთ წრფე შემდეგი მონაცემებისათვის

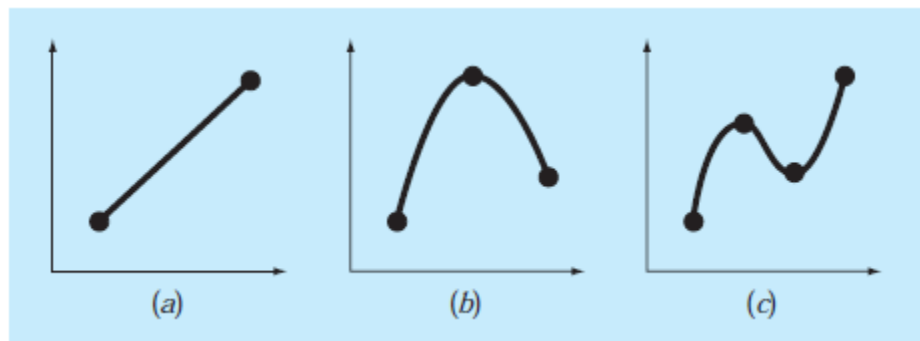
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	1.5	2	3	4	5	8	10	13

გარდა რეგრესიის კოეფიციენტებისა, გამოთვალეთ შეფასების სტანდარტული ცდომილება და კორელაციის კოეფიციენტი. ააგეთ მონაცემები და რეგრესიის წრფე.

ინტერპოლება

ხშირად ხდება, რომ მოცემულია ფუნქცია ცხრილის სახით და საჭიროა ამ ფუნქციის მნიშვნელობის გაგება სხვა წერტილებშიც. ამისთვის ყველაზე მეტად გავრცელებულ მეთოდს პოლინომური ინტერპოლაცია წარმოადგენს. პოლინომური ინტერპოლაციის ამოცანაა ისეთი n ხარისხის მრავალწევრის აგება, რომელიც მონაცემთა $(n+1)$ წყვილს მოერგება. მაგალითად, არსებობს ერთადერთი წრფე (ე.ი. პირველი ხარისხის მრავალწევრი), რომელიც ორ წერტილს აერთებს (ფიგ. 18.1a). ასევე, მხოლოდ ერთადერთი პარაბოლა აერთებს სამ წერტილს (ფიგ. 18.1b).

ფიგურა 18.1



18.2 ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი

ვთქვათ, რაიმე $[a, b]$ მონაკვეთზე მოცემულია არგუმენტის $n+1$ განსხვავებული მნიშვნელობა: $x_0, x_1, \dots, x_n$ და ცნობილია ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n).$$

ჩვენი მიზანია ავაგოთ ისეთი არაუმეტეს n ხარისხის მრავალწევრი $f_n(x)$, რომლისთვისაც

$$f_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

ასეთი მრავალწევრია

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i), \quad (18.20)$$

სადაც

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} . \quad (18.21)$$

მართლაც, ეს გამომდინარეობს $L_i(x)$ პოლინომების თვისებიდან:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } j = i \\ 0, & \text{როცა } j \neq i \end{cases} ,$$

რაც იოლი შესამჩნევია.

(18.20) ტოლობით განსაზღვრულ მრავალწევრს ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი ეწოდება.

$n=1$ შემთხვევაში გვაქვს წრფივი ვერსია

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) , \quad (18.22)$$

მეორე რიგის ვერსია კი არის

$$\begin{aligned} f_1(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) . \end{aligned} \quad (18.23)$$

მაგალითი 18.1

ლაგრანჟის პირველი და მეორე რიგის საინტერპოლაციო მრავალწევრებით გამოვთვალოთ $\ln 2$, თუ ვიცით, რომ:

$$\begin{aligned} x_0 = 1 & \quad f(x_0) = 0 \\ x_1 = 4 & \quad f(x_1) = 1.386294 \\ x_2 = 6 & \quad f(x_2) = 1.791760 \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ ჭეშმარიტი მნიშვნელობაა 0.6931472.

ამოხსნა. (18.22) პირველი რიგის მრავალწევრით გვაქვს

$$f_1(2) = \frac{2-4}{1-4} 0 + \frac{2-1}{4-1} 1.386294 = 0.4620981$$

ასევე, (18.23) მეორე რიგის მრავალწევრით გვაქვს

$$\begin{aligned} f_2(2) = & \frac{(2-4)(2-6)}{(1-4)(1-6)} 0 + \frac{(2-1)(2-6)}{(4-1)(4-6)} 1.386294 + \\ & + \frac{(2-1)(2-4)}{(6-1)(6-4)} 1.791760 = 0.56584444 \end{aligned}$$

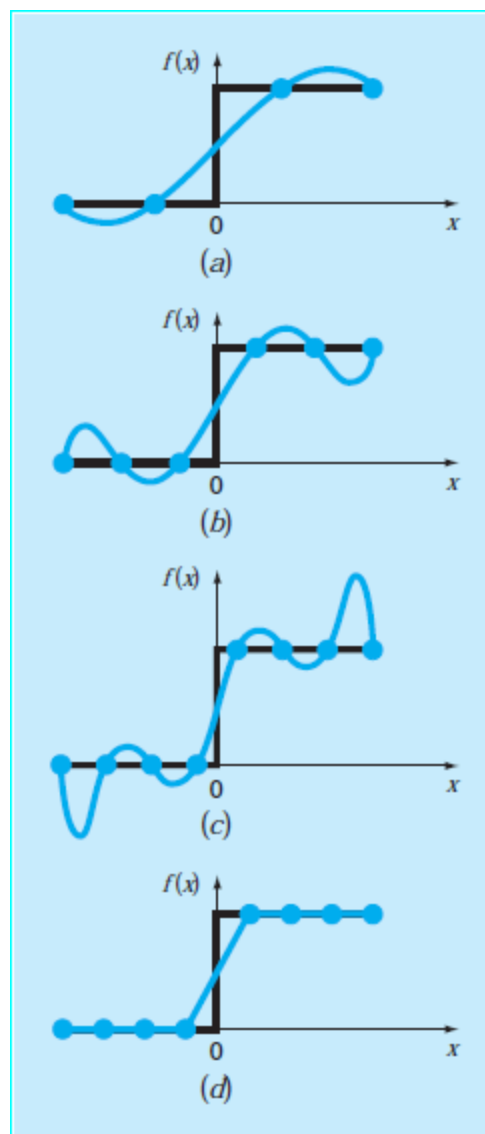
(18.20) და (18.21) ფორმულები ძალზე იოლად პროგრამირდება გამოყენებისათვის. შესაბამისი ფსევდოკოდი ნაჩვენებია ფიგ.18.11-ზე.

```

FUNCTION Lagrng(x, y, n, xx)
  sum=0
  DOFOR i=0, n
    product = yi
    DOFOR j=0, n
      IF i ≠ j THEN
        product = product * (xx - xj) / (xi - xj)
      ENDIF
    END DO
    sum = sum + product
  END DO
  Lagrng = sum
END Lagrng

```

ფიგურა 18.11



ფიგურა 18.14

18.6 სპლაინ ინტერპოლაცია

ლაგრანჟის, ნიუტონის და სხვ. საინტერპოლაციო ფორმულებს საინტერპოლაციო კვანძების დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ცუდ მიახლოებამდე მივყავართ. მიზეზი გამოთვლების პროცესში ცდომილებათა დაგროვებაა. გარდა ამისა, პროცესის განშლადობის გამო დიდი რაოდენობის კვანძების გამოყენებამ შეიძლება სიზუსტის მომატება არ გამოიწვიოს.

ალტერნატიულ მიდგომას წარმოადგენს დაბალი რიგის პოლინომების გამოყენება კვანძთა ცალკეულ ქვესიმრავლეებზე. ასეთ "შეწყებულ" ფუნქციას სპლაინ ფუნქცია ეწოდება. მისი

აგების დროს ითვალისწინებენ, რომ გადაბმის ადგილებში საინტერპოლაციო ფუნქციას საკმაო სიგლუვე ჰქონდეს.

ფიგ. 18.14-ზე ნაჩვენებია, რომ თუ ფუნქცია რომელიმე უბანზე განიციდის მკვეთრ ცვლილებას, მაშინ სპლაინის გამოყენება უფრო ხელსაყრელია ვიდრე მაღალი რიგის მრავალწევრისა. ფიგ. 18.14 a,b,c გვიჩვენებს ოსცილაციის მკვეთრ ზრდას საინტერპოლაციო მრავალწევრში კვანძთა რიცხვის გაზრდისას. ფიგ. 18.14d- ზე კი სპლაინია ნაჩვენები.

საინტერპოლაციო სპლაინებში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია კუბურ სპლაინებს.

ვთქვათ $[a, b]$ -ზე მოცემულია არგუმენტის $n+1$ განსხვავებული მნიშვნელობა:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ და ცნობილია ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n).$$

კუბური სპლაინი ეწოდება ისეთ $s(x)$ ფუნქციას, რომელიც:

- ყოველ $[x_{i-1}, x_i]$ მონაკვეთზე წარმოადგენს მესამე ხარისხის მრავალწევრს
 $s(x) = f_i(x)$, სადაც

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (18.35)$$

- $[a, b]$ -ზე აქვს პირველი და მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები

- $s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$

$n+1$ წერტილია და შესაბამისად n ქვეშეუალედი. ამიტომ შესარჩევია $4n$ მუდმივი, რისთვისაც საჭიროა $4n$ პირობა.

1. $f_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad f_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$ ტოლობების შესრულება წარმოადგენს $2n$ პირობას.

2. შიგა $n-1$ კვანძში პირველი და მეორე წარმოებულების უწყვეტობის მოთხოვნა

$$f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i), \quad f''_i(x_i) = f''_{i+1}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

წარმოადგენს $2(n-1) = 2n - 2$ პირობას.

3. დარჩენილ 2 პირობად მიიჩნევენ მეორე წარმოებულის განულებას a, b წერტილებში. ამ ორი პირობის შესრულებისას სპლაინს უწოდებენ "ბუნებრივს".

სპლაინის აგება. შევამჩნიოთ, რომ ყოველ ქვეინტერვალზე სპლაინის (ჩვენს შემთხვევაში მესამე ხარისხის მრავალწევრის) წარმოებული წრფივი ფუნქციაა. ამიტომ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ პირველი რიგის ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრით (ფორმულა (18.22)):

$$f_i''(x) = f_i''(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i''(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით მიიღება $f_i(x)$ -ის გამოსახულება, მაგრამ ის შეიცავს ორ ინტეგრების მუდმივას. ეს მუდმივები შეგვიძლია გამოვთვალოთ $f_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$,

$$f_i(x) = \frac{f''_i(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f''_i(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''_i(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''_i(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1}) \quad (18.36)$$

$f_i(x_i) = f(x_i)$ ტოლობების საფუძველზე. შედეგად მიიღება

შევნიშნოთ, რომ (18.36) შეიცავს ორ უცნობ "კოეფიციენტს" -- მეორე წარმოებულის მნიშვნელობებს ქვეშეაღედის ბოლოებზე, $f''(x_{i-1})$ და $f''(x_i)$. ამ მნიშვნელობების გამოთვლა შეგვიძლია $f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i)$ პირველი წარმოებულის უწყვეტობის პირობის გამოყენებით:

(18.36) ტოლობის გაწარმოებით მივიღოთ პირველი წარმოებულის გამოსახულებები მეზობელ $(i-1)$ და i -ურ ინტერვალებზე; გავუტოლოთ ისინი კვანძში. მიიღება

$$(x_i - x_{i-1}) f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i) f''(x_{i+1}) = \frac{6}{x_{i+1} - x_i} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}} [f(x_{i-1}) - f(x_i)] \quad (18.37)$$

(18.37)-ს ვწერთ შიგა $n-1$ კვანძში. ამასთან თუ გავიხსენებთ მეორე წარმოებულის ნულობის პირობას a, b წერტილებში, მიღებული სისტემიდან ამოიხსნება მეორე წარმოებულის მნიშვნელობები.

მაგალითი 18.10 | შევუსაბამოთ მესამე რიგის სპლაინი მოცემული ცხრილის

მონაცემებს და გამოვთვალოთ ფუნქცია $x = 5$ წერტილში.

ამოხსნა. გვაქვს:

$$\begin{aligned} x_0 = 3 & \quad f(x_0) = 2.5 \\ x_1 = 4.5 & \quad f(x_1) = 1 \\ x_2 = 7 & \quad f(x_2) = 2.5 \end{aligned}$$

x	$f(x)$
3.0	2.5
4.5	1.0
7.0	2.5
9.0	0.5

ეს მნიშვნელობები ჩავსვით (18.37)-ში:

$$\begin{aligned} & (4.5-3)f''(3) + 2(7-3)f''(4.5) + (7-4.5)f''(7) = \\ & = \frac{6}{7-4.5}(2.5-1) - \frac{6}{4.5-3}(2.5-1) \end{aligned}$$

რადგან სპლაინის ნატურალობის პირობით $f''(3) = 0$, ამიტომ

$$8f''(4.5) + 2.5f''(7) = 9.6.$$

ანალოგიურად, (18.37)-ის გამოყენება მეორე შიგა კვანძისათვის გვაძლევს

$$2.5f''(4.5) + 9f''(7) = -9.6.$$

ამ ორი განტოლებიდან ვპოულობთ

$$f''(4.5) = 1.67909$$

$$f''(7) = -1.53308$$

და (18.36)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} f_1(x) = & \frac{1.67909}{6(4.5-3)}(x-3)^3 + \frac{2.5}{4.5-3}(4.5-x) \\ & + \left[\frac{1}{4.5-3} - \frac{1.67909(4.5-3)}{6} \right](x-3) \end{aligned}$$

$$f_1(x) = 0.186566(x-3)^3 + 1.666667(4.5-x) + 0.246894(x-3)$$

ანალოგიურად, მეორე და მესამე ინტერვალებისათვის მიიღება

$$f_2(x) = 0.111939(7-x)^3 - 0.102205(x-4.5)^3 - 0.299621(7-x) +$$

$$+1.638783(x-4.5)$$

და

$$f_3(x) = -0.127757(9-x)^3 + 1.761027(9-x) + 0.25(x-7).$$

ეს სამი ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ მნიშვნელობები ნებისმიერ ინტერვალში. მაგალითად, $x = 5$ სიდიდე მეორე ინტერვალშია, ამიტომ

$$\begin{aligned} s(5) = f_2(5) = & 0.111939(7-5)^3 - 0.102205(5-4.5)^3 - 0.299621(7-5) + \\ & + 1.638783(5-4.5) = 1.102886. \end{aligned}$$

ამოცანები

18.1 გამოთვალეთ $\lg 10$ წრფივი ინტერპოლაციით

(ა) $\lg 8 = 0.9030900$ და $\lg 12 = 1.0791812$ შორის;

(ბ) $\lg 9 = 0.9542425$ და $\lg 11 = 1.0413927$ შორის.

ჭეშმარიტი მნიშვნელობის გამოყენებით თითოეულ შემთხვევაში გამოთვალეთ პროცენტული ფარდობითი ცდომილება.

18.4 $\lg 8 = 0.9030900$, $\lg 9 = 0.9542425$ და $\lg 11 = 1.0413927$ მონაცემებით ააგეთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრი და გამოთვალეთ $\lg 10$. შეაფასეთ პროცენტული ფარდობითი ცდომილება.

18.7 მოცემულია

x	1	2	3	5	7	8
$f(x)$	3	6	19	99	291	444

გამოთვალეთ $f(4)$ სიდიდე ლაგრანჟის პირველი, მეორე და მესამე რიგის პოლინომებით. შეარჩიეთ კვანძები კარგი შედეგის მისაღებად

18.14 ააგეთ კუბური სპლაინი ამოცანა 18.7-ის მონაცემებით. (ა) გამოთვალეთ $f(4)$ და $f(2.5)$. (ბ) შეამოწმეთ, რომ $f_2(3)$ და $f_3(3) = 19$.

18.16 განსაზღვრეთ იმ კუბური მრავალწევრის კოეფიციენტები, რომლის გრაფიკი გადის 18.7 ამოცანის პირველ ოთხ წერტილზე.

18.28 შემდეგი მონაცემები განსაზღვრავენ მტკნარ წყალში გახსნილი ჟანგბადის კონცენტრაციას ზღვის დონეზე, როგორც ტემპერატურის ფუნქციას:

$T^{\circ}C$	0	8	16	24	32	40
σ მგ/ლ	14.621	11.843	9.870	8.418	7.305	6.413

გამოთვალეთ $\sigma(27)$ (ა) ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით, (ბ) კუბური სპლაინით.

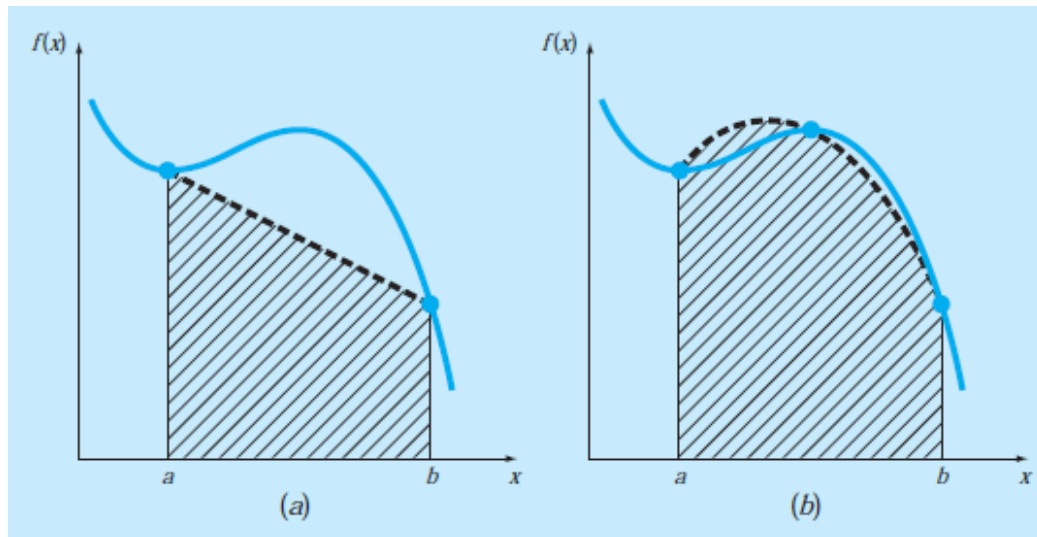
ზუსტი სიდიდეა 7.986 მგ/ლ.

ნიუტონ-კოტესის კვადრატული ფორმულები

ერთი ცვლადის ფუნქციის რიცხვითი ინტეგრების ფორმულებს კვადრატული ფორმულები ეწოდება. მათ შორის ყველაზე მეტად გავრცელებული ნიუტონ-კოტესის ფორმულებია, რომლებიც საინტეგრო ფუნქციის საინტერპოლაციო მრავალწევრით შეცვლას ეფუძნება:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_n(x) dx \quad (21.1)$$

სადაც $f_n(x)$ არის n რიგის მრავალწევრი. მაგალითად, ფიგ. 21.1a -ზე წრფეა (პირველი რიგის მრავალწევრი) გამოყენებული აპროქსიმაციისთვის, ფიგ. 21.1b-ზე კი -- პარაბოლა (მეორე რიგის მრავალწევრი).



ფიგურა 21.1

ინტეგრალის აპროქსიმაცია

(ა) წრფის მონაკვეთის ქვეშ მდგომი ფართობით

(ბ) პარაბოლის რკალის ქვეშ მდგომი ფართობით

21.1 ტრაპეციის ფორმულა

ტრაპეციების ფორმულა წარმოადგენს ნიუტონ-კოტესის ფორმულების შემთხვევას, როცა (21.1)-ში პირველი რიგის მრავალწევრია გამოყენებული:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_1(x) dx.$$

$[a, b]$ შუალედზე პირველი რიგის საინტერპოლაციო მრავალწევრია

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad (21.2)$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) dx = \\ &= \left(f(a)x + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(x - a)^2}{2} \right) \Big|_a^b = f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b - a)^2}{2}. \end{aligned}$$

აქედან

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad (21.3)$$

რომელსაც ტრაპეციის ფორმულა ეწოდება.

გეომეტრიულად ეს ფორმულა წარმოადგენს ინტეგრალის აპროქსიმაციას ტრაპეციის ფართობით.

ტრაპეციის ფორმულის ცდომილებაა

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b - a)^3 \quad (21.6)$$

სადაც ξ რომელიღაც წერტილია (a, b) ინტერვალდან. (21.6) ფორმულა მიგვანიშნებს, რომ თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წრფივია, მაშინ ტრაპეციის ფორმულა ზუსტია.

მაგალითი 21.1 (21.3) ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ფუნქციიდან $a = 0$ -დან $b = 0.8$ -მდე შუალედში. შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობაა 1.640533.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ

$$f(0) = 0.2, \quad f(0.8) = 0.232$$

და ჩავსვათ (21.3)-ში:

$$I \cong 0.8 \frac{0.2 + 0.232}{2} = 0.1728.$$

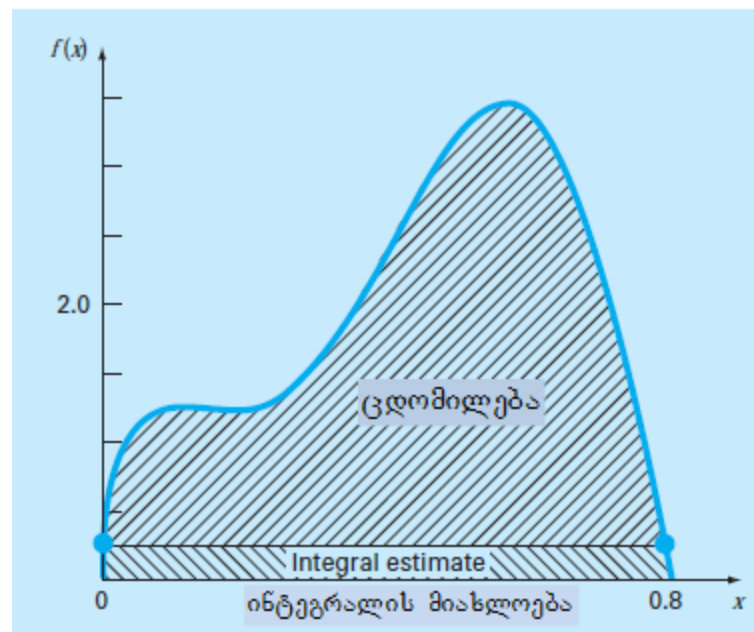
მიღებული შედეგის ცდომილებაა

$$E_t = 1.640533 - 0.1728 = 1.467733.$$

შესაბამისი ფარდობითი პროცენტული სდომილებაა $\varepsilon_t = 89.5\%$.

ასეთი დიდი ცდომილების მიზეზი ნათლად ჩანს ფიგ. 21.6-დან: მონაკვეთის ქვეშ მდგომი ფართობი გაცილებით მეტია უგულვებელყოფილ ნაწილზე.

ფიგურა 21.6



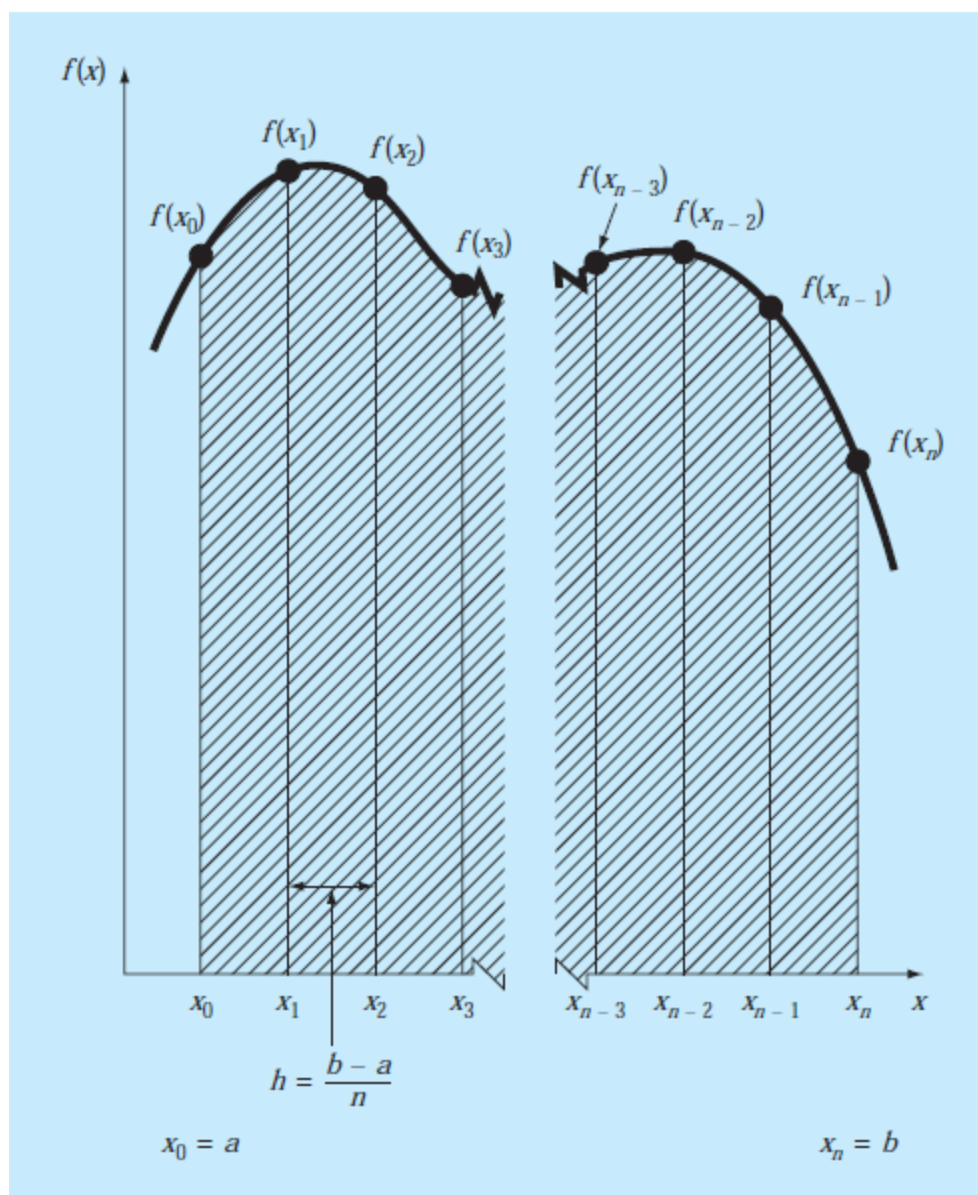
ტრაპეციის ფორმულის სიზუსტის გაზრდა შესაძლოა, თუ საინტეგრო შუალედს დავყოფთ ქვეინტერვალებად და ფორმულას გამოვიყენებთ თითოეულ ქვეინტერვალისათვის (ფიგ. 21.7). ცალკეულ სეგმენტზე გამოთვლილი ინტეგრალების შეკრებით მივიღებთ ინტეგრალს მთლიანი ინტერვალისათვის. მიღებულ ტოლობაზე ვიტყვით, რომ ის არის შედგენილი საინტეგრო ფორმულა.

დავყოთ (a, b) შუალედი n ტოლ ნაწილად $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ წერტილებით (ფიგ.21.8) ;
 $a = x_0, b = x_n$. თითოეული ქვეშუალედის სიგრძეა

$$h = \frac{b-a}{n} . \quad (21.7)$$

მთლიანი ინტეგრალი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx .$$



ფიგურა 21.8

მაშინ ტრაპეციის ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$I = h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \quad (21.8)$$

ან, თუ დავაჯგუფებთ წევრებს,

$$I = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \quad (21.9)$$

ტრაპეციების შედგენილი ფორმულის ცდომილებაა

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \quad ,$$

ხოლო მიახლოებითი ცდომილებაა:

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}'' \quad (21.13)$$

როგორც ვხედავთ, ქვესეგმენტების რიცხვის გაორმაგებით ცდომილება 4-ჯერ შემცირდება.

მაგალითი 21.2

ორ სეგმენტია ტრაპეციის ფორმულით გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ფუნქციიდან

$a = 0$ -დან $b = 0.8$ -მდე შუალედში. შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალის სწორი მნიშვნელობაა 1.640533.

ამოხსნა.

$n = 2$ ($h = 0.4$):

$f(0) = 0.2 \quad f(0.4) = 2.456 \quad f(0.8) = 0.232$

$I = 0.8 \frac{0.2 + 2(2.456) + 0.232}{4} = 1.0688$

$E_t = 1.640533 - 1.0688 = 0.57173 \quad \varepsilon_t = 34.9\%$

ტრაპეციის ფორმულის გამოყენების ორი მარტივი ალგორითმია ნაჩვენები ფიგ. 21.9-ზე.

პირველია (ფიგ. 21.9 a) ერთ სეგმენტია ვერსია.

მეორეა (ფიგ. 21.9b) მრავალ სეგმენტია ვერსია ტოლი სიგრძის სეგმენტებით.

ცხრილი 21.1 ტრაპეციის წესის ჯერადი გამოყენების შედეგები
 $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$
 ფუნქციიდან ინტეგრალის გამოსათვლელად (0; 0.8)
 შუალედში. ზუსტი სიდიდეა 1.640533

2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

(a) Single-segment

```
FUNCTION Trap (h, f0, f1)
  Trap = h * (f0 + f1)/2
END Trap
```

(b) Multiple-segment

```
FUNCTION Trapm (h, n, f)
  sum = f0
  DOFOR i = 1, n - 1
    sum = sum + 2 * fi
  END DO
  sum = sum + fn
  Trapm = h * sum / 2
END Trapm
```

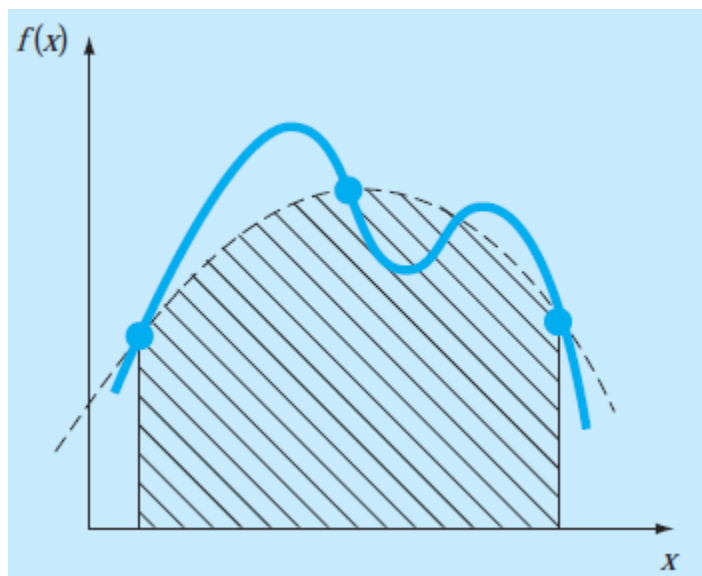
ფიგურა 21.9 ტრაპეციის წესის გამოყენების ალგორითმები

(a) ერთი სეგმენტის შემთხვევაში

(b) მრავალი სეგმენტის შემთხვევაში

21.2 სიმპსონის ფორმულა

როგორც ტრაპეციების ფორმულაში ვნახეთ, სიზუსტის გადიდების ერთ გზას შუალედის დანაწილება წარმოადგენს. მეორე გზას წარმოადგენს საინტეგრო ფუნქციის აპროქსიმაცია უფრო მაღალი რიგის მრავალწევრებით. მაგალითად, თუ a და b წერტილებს შორის ავიღებთ კიდევ ერთ წერტილს, მაშინ გრაფიკის სამ წერტილზე შეგვიძლია გავავლოთ პარაბოლა (ფიგ. 21.10).



ფიგურა 21.10

(21.1)-ში გამოვიყენოთ მეორე რიგის საინტერპოლაციო მრავალწევრი:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_2(x) dx$$

თუ a და b წერტილებს აღვნიშნავთ x_0 და x_2 -ით და $f_2(x)$ წარმოადგენს მეორე რიგის ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრს, გვექნება

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

ინტეგრებისა და ალგებრული გარდაქმნების შემდეგ აქედან მიიღება ფორმულა

$$I \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (21.14)$$

სადაც $h = (b-a)/2$.

ამ ფორმულას სიმპსონის 1/3-ის წესი ეწოდება. იგი ასეც შეიძლება ჩავწეროთ:

$$I \cong (b-a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}. \quad (21.15)$$

შეიძლება ჩვენება, რომ (21.14) სიმპსონის ფორმულის აპროქსიმაციის ცდომილებაა

$$E_t = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi),$$

ან რადგან $h = (b-a)/2$,

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad (21.16)$$

აქ ξ რაღაც რიცხვია a და b -ს შორის. სიმპსონის ფორმულა უფრო ზუსტია, ვიდრე ტრაპეციების.

მაგალითი 21.4

გამოვიყენოთ (21.15) სიმპსონის ფორმულა და ვაინტეგროთ

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \text{ ფუნქცია}$$

$a = 0$ -დან $b = 0.8$ -მდე შუალედში. შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალის სწორი მნიშვნელობაა 1.640533.

ამოხსნა.

$$f(0) = 0.2 \quad f(0.4) = 2.456 \quad f(0.8) = 0.232$$

$$I = 0.8 \frac{0.2 + 4(2.456) + 0.232}{6} = 1.367467$$

ზუსტი ცდომილებაა

$$E_t = 1.640533 - 1.367467 = 0.2730667 \quad \varepsilon_t = 16.6\%,$$

რაც დაახლოებით 5-ჯერ ნაკლებია ტრაპეციის ფორმულის ცდომილებაზე (მაგალ. 21.1)

ამოცანები

21.1 გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int_0^{\pi/2} (8 + 4 \cos x) dx$

(ა) ანალიზურად; (ბ) ტრაპეციის ფორმულით მთელს ინტერვალზე;

(გ) ტრაპეციის წესის ჯერადი გამოყენებით, $n=2$ და 4.

(დ) სიმპსონის ფორმულის ერთჯერადად გამოყენებით;

(ე) სიმპსონის ფორმულის ჯერადი გამოყენებით, $n=4$.

ყველა შემთხვევაში გამოთვალეთ პროცენტული ფარდობითი ცდომილებები.

21.2 გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int_0^3 (1 - e^{-x}) dx$

- (ა) ანალიზურად; (ბ) ტრაპეციის ფორმულით მთელს ინტერვალზე;
 (გ) ტრაპეციის წესის ჯერადი გამოყენებით, $n=2$ და 4.
 (დ) სიმპსონის ფორმულის ერთჯერადად გამოყენებით;
 (ე) სიმპსონის ფორმულის ჯერადი გამოყენებით, $n=4$.
 ყველა შემთხვევაში გამოთვალეთ პროცენტული ფარდობითი ცდომილებები.

21.3 გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int_{-2}^4 (1 - x - 4x^3 + 2x^5) dx$

- (ა) ანალიზურად; (ბ) ტრაპეციის ფორმულით მთელს ინტერვალზე;
 (გ) ტრაპეციის წესის ჯერადი გამოყენებით, $n=2$ და 4.
 (დ) სიმპსონის ფორმულის ერთჯერადად გამოყენებით;
 (ე) სიმპსონის ფორმულის ჯერადი გამოყენებით, $n=4$.
 ყველა შემთხვევაში გამოთვალეთ პროცენტული ფარდობითი ცდომილებები.

21.4 გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int_1^2 (x + 1/x)^2 dx$

ანალიზურად და ტრაპეციის ფორმულით, როცა $n=1, 2, 3$ და 4.

21.10 გამოთვალეთ ინტეგრალი ცხრილურად მოცემული ფუნქციიდან (ა) ტრაპეციების წესით და (ბ) სიმპსონის წესით:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	8	4	3.5	5	1

21.11 გამოთვალეთ ინტეგრალი ცხრილურად მოცემული ფუნქციიდან (ა) ტრაპეციების წესით და (ბ) სიმპსონის წესით:

x	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	35	5	-10	2	5	3	20

22.4 გაუსის კვადრატურული ფორმულა

ნიუტონ კოტესის ფორმულების გამოყენება ეფუძნება საინტეგრო ფუნქციის შეცვლას საინტერპოლაციო მრავალწევრით. მაგალითად, ტრაპეციის ფორმულა

$$I \cong (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (22.16)$$

მიიღება ინტეგრალქვეშა ფუნქციის აპროქსიმაციით პირველი რიგის საინტერპოლაციო მრავალწევრით. მოვიყვანოთ ახლა ამ ფორმულის მიღების სხვა გზა, განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდი. (22.16) ფორმულას ასეთი სახე აქვს

$$I \cong c_0 f(a) + c_1 f(b) , \quad (22.17)$$

სადაც c_0, c_1 ჯერ-ჯერობით განუსაზღვრელი მუდმივებია. მათ მოსაძებნად მოვითხოვთ, რომ (22.17) იგივეობას წარმოადგენდეს, როცა $y=1, x$. ასეთ შემთხვევაში ვღებულობთ

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 &= \int_a^b 1 \, dx = b - a \\ c_0 a + c_1 b &= \int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

ამ ტოლობებიდან ვპოულობთ

$$c_0 = c_1 = \frac{b-a}{2} ,$$

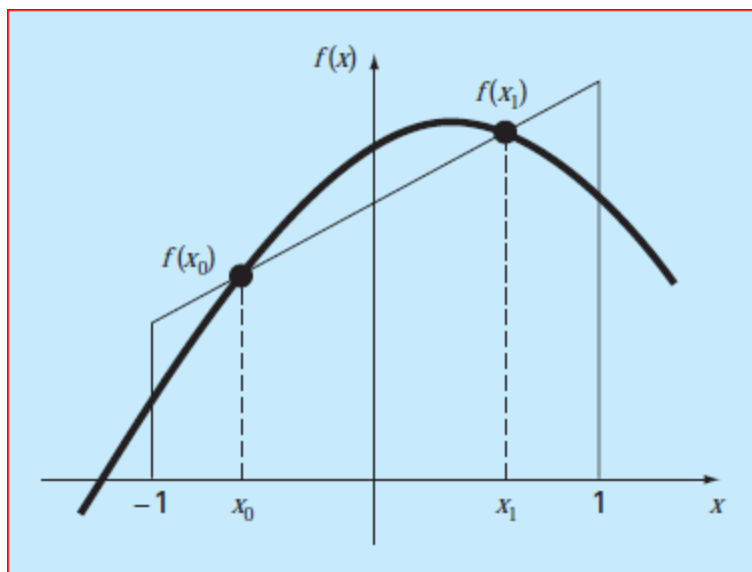
რაც შეესაბამება (22.16) ფორმულას. ამ ფორმულაში თავიდანვე დაფიქსირებული იყო ინტეგრების კვანძითი წერტილები -- შუალედის ბოლოები. ახლა დავუშვათ, რომ ეს კვანძებიც უცნობია ჯერ-ჯერობით და ვეძებთ კვადრატურული ფორმულა ასეთი სახით:

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) . \quad (22.18)$$

აქ უკვე ოთხი განუსაზღვრელი მუდმივი გვაქვს, რომელთა შერჩევის ხარჯზეც შევეცადოთ ფორმულის სიზუსტის გაზრდას (ფიგ. 22.8).

ფიგურა 22.8

გაუსის კვანძების
მოძებნის წარმოდგენა



საინტერესოდ ავიღოთ სტანდარტული სეგმენტი $[-1; 1]$. ზოგადი შემთხვევა იოლად დაიყვანება ამ შემთხვევაზე დამოუკიდებელი ცვლადის წრფივი გარდაქმნით.

მოვითხოვთ, რომ საძიებელი ფორმულა ზუსტი იყოს $y = 1, x, x^2, x^3$ ფუნქციებზე. ასეთ შემთხვევაში (22.18)-დან ვპოულობთ

$$c_0 + c_1 = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 = \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

ამ სისტემის ამონახსნებია კოეფიციენტები და კვანძები

$$c_0 = c_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.5773503\dots$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773503\dots$$

(22.18) ფორმულაში მათი ჩასმა გვაძლევს გაუსის კვადრატურულ ფორმულას

$$I \cong f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (22.23)$$

ახლა ვთქვათ გამოსათვლელია ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$.

მოვახდინოთ დამოუკიდებელი ცვლადის გარდაქმნა

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t. \quad (22.29)$$

მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt.$$

თუ ამ ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ (22.23) გაუსის ფორმულას, გვექნება გაუსის ფორმულა ზოგადი საზღვრების შემთხვევისათვის:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right].$$

მაგალითი 22.3

გამოვიყენოთ (22.23) გაუსის ფორმულა და ვაინტეგრირებთ

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \text{ ფუნქცია}$$

$a = 0$ -დან $b = 0.8$ -მდე შუალედში. შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალის სწორი მნიშვნელობაა 1.640533.

ამოხსნა. უპირველესად საჭიროა საინტეგრირებელი ცვლადის გარდაქმნა, რომელიც მიგვიყვანს $[-1; 1]$ შუალედზე. (22.29) ფორმულაში $a = 0$ -და $b = 0.8$ ჩასმა გვაძლევს $x = 0.4 + 0.4t$, $dx = 0.4dt$. ამიტომ

$$\begin{aligned} & \int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx = \\ & = \int_{-1}^1 (0.2 + 25(0.4 + 0.4t) - 200(0.4 + 0.4t)^2 + 675(0.4 + 0.4t)^3 - \\ & - 900(0.4 + 0.4t)^4 + 400(0.4 + 0.4t)^5) 0.4 dt. \end{aligned}$$

ახლა უკვე შეგვიძლია მარჯვენა მხარეში გაუსის ფორმულის გამოყენება.

გარდაქმნილი ფუნქცია უნდა გამოითვალოს $t = -1/\sqrt{3}$ -ზე, რაც

გვაძლევს 0.516741-ს, და $t = 1/\sqrt{3}$ -ზე, რაც გვაძლევს 1.305837-ს.

ამიტომ (22.23)-ის თანახმად

$$I \cong 0.516 + 1.305837 = 1.822578.$$

პროცენტული ფარდობითი ცდომილებაა -11.1%

ამოცანები

22.4 გაუსის ფორმულით გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$I = \int_1^2 \left(2x + \frac{3}{x} \right)^2 dx .$$

ანალიზური ამონახსნის საფუძველზე გამოთვალეთ ε_t .

22.5 გაუსის ფორმულით გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^3 x e^x dx .$$

ანალიზური ამონახსნის საფუძველზე გამოთვალეთ ε_t .

22.6 გაუსის ფორმულით გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^2 \frac{e^x \sin x}{1+x^2} dx .$$

22.8 გაუსის ფორმულით გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{1+x^2} dx .$$

22.10 შეადგინეთ მომხმარებლისთვის მოსახერხებელი კომპიუტერული პროგრამა მულტისეგმენტისათვის (ა) ტრაპეციების ფორმულის და (ბ) სიმპსონის 1/3 ფორმულის გამოყენებაზე. შეამოწმეთ პროგრამის გამართულობა

$$\int_0^1 x^{0.1} (1.2 - x) (1 - e^{20(x-1)}) dx$$

ინტეგრალის გამოთვლაზე. $n = 4$ -ზე ε_t -ს გამოსათვლელად გამოიყენეთ ზუსტი მნიშვნელობა 0.602298 .

რიცხვითი გაწარმოება

23.1 მაღალი სიზუსტის გაწარმოების ფორმულები

მაღალი სიზუსტის გაყოფილ-სხვაობიანი ფორმულების მიღება შეიძლება მათი გამოყენებისას ტეილორის ფორმულაში დამატებითი შესაკრებების შენარჩუნებით. მაგალითად, გვაქვს

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \dots \quad (23.1)$$

საიდანაც ვპოულობთ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2). \quad (23.2)$$

თუ ამ ფორმულაში უკუვაგდებთ მეორე წარმოებულთან წევრს, გვექნება h -ის მიმართ პირველი რიგის სიზუსტის ფორმულა

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h). \quad (23.3)$$

დავწეროთ ახლა $f(x_{i+2})$ -ის გაშლა ტეილორის მწკრივად x_i წერტილის მიმართ:

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2}(2h)^2 + \dots$$

ამ ტოლობიდან გამოვაკლოთ გაორკეცებული (23.1) და ამოვხსნათ მეორე წარმოებულის მიმართ. მიიღება

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h), \quad (23.4)$$

რომლის ჩასმით (23.2)-დან ვპოულობთ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2)$$

ან, თუ მსგავს წევრებს შევაერთებთ,

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2). \quad (23.5)$$

მამასადამე, ტეილორის მწკრივში მეორე წარმოებულთან წევრის შენარჩუნებამ სიზუსტე გაზარდა.

ანალოგიური ხერხით მიიღება ფორმულები მაღალი რიგის წარმოებულებისათვის.

ფიგურა 23.1

მარჯვენა გაყოფილი
სასრულ-სხვაობიანი
ფორმულები

პირველი წარმოებული :	ცდომილება
$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
მეორე წარმოებული:	
$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
მესამე წარმოებული:	
$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
მეოთხე წარმოებული:	
$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

ფიგურა 23.2

მარცხენა გაყოფილი
სასრულ-სხვაობიანი
ფორმულები

პირველი წარმოებული :	ცდომილება
$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
მეორე წარმოებული:	
$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
მესამე წარმოებული:	
$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
მეოთხე წარმოებული:	
$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

ფიგურა 23.3

ცენტრული გაყოფილი
სასრულ-სხვაობიანი
ფორმულები

პირველი წარმოებული :	ცდომილება
$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$	$O(h^4)$
მეორე წარმოებული:	
$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2}$	$O(h^4)$
მესამე წარმოებული:	
$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_i) - f(x_{i-1}))}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3}$	$O(h^4)$
მეოთხე წარმოებული:	
$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{6h^4}$	$O(h^4)$

მაგალითი 23.1

მაღალი სიზუსტის გაწარმოების ფორმულები

გავიხსენოთ, რომ მაგალით 4.4-ში გამოვთვალეთ

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

ფუნქციის პირველი წარმოებული $x = 0.5$ წერტილში $h = 0.25$ ბიჯით:

	მარჯვენა $O(h)$	მარცხენა $O(h)$	ცენტრული $O(h^2)$
მიახლოება	-1.155	-0.714	-0.934
$\varepsilon_t(\%)$	-26.5	21.7	-2.4

სადაც ცდომილება გამოთვლილია -0.9125 ჰემმარიტი მნიშვნელობის საფუძველზე. გავიმეორეთ ეს გამოთვლები, მაგრამ გამოვიყენოთ ფიგ. 23.1, 23.2, 23.3 -ზე მოცემული მაღალი სიზუსტის ფორმულები.

ამოხსნა. საჭირო მონაცემებია

$x_{i-2} = 0$	$f(x_{i-2}) = 1.2$
$x_{i-1} = 0.25$	$f(x_{i-1}) = 1.1035156$
$x_i = 0.5$	$f(x_i) = 0.925$
$x_{i+1} = 0.75$	$f(x_{i+1}) = 0.6363281$
$x_{i+2} = 1$	$f(x_{i+2}) = 0.2$

$O(h^2)$ სიზუსტის მარჯვენა სხვაობიანი გაწარმოებით (ფიგ. 23.1) :

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 4(0.6363281) - 3(0.925)}{2(0.25)} = -0.859375, \quad \varepsilon_t = 5.82\%$$

$O(h^2)$ სიზუსტის მარცხენა სხვაობიანი გაწარმოებით (ფიგ. 23.2) :

$$f'(0.5) = \frac{3(0.925) - 4(1.1035165) + 1.2}{2(0.25)} = -0.878125, \quad \varepsilon_t = 3.77\%$$

$O(h^4)$ სიზუსტის ცენტრული სხვაობიანი გაწარმოებით (ფიგ. 23.3) :

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 8(0.6363281) - 8(1.1035165) + 1.2}{12(0.25)} = -0.9125, \quad \varepsilon_t = 0\%$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, მარჯვენა და მარცხენა სხვაობიანი გაწარმოების სიზუსტე გაცილებით უკეთესია, ვიდრე მაგალით 4.4-ში. სიურპრიზს წარმოადგენს ცენტრული სხვაობიანი გაწარმოებით მიღებული შეფასების დამოუკიდებლობა ზუსტ პასუხთან. მიზეზი ისაა, რომ მეოთხე რიგის მრავალწევრის შემთხვევაში ნაშთითი წევრი ნულის ტოლია.

23.2 რიჩარდსონის ექსტრაპოლაცია

ჩვენ უკვე ვნახეთ ორი გზა გაყოფილი სასრული სხვაობებით წარმოებულის გამოთვლის სიზუსტის გასაუმჯობესებლად: (1) ბიჯის შემცირება ან (2) მაღალი სიზუსტის ფორმულების გამოყენება, რომლებიც მეტ კვანძებს საჭიროებენ. მესამე, რიჩარდსონის ექსტრაპოლაციაზე დაფუძნებული მეთოდი, ორი მიახლოების კომბინაციით გვაძლევს უფრო მაღალი სიზუსტის ამონახსნს.

ვთქვათ, განსახილავ წერტილში წარმოებულის ზუსტი მნიშვნელობაა D , ხოლო h ბიჯით გამოთვლილი მიახლოებითი სიდიდე და ცდომილება კი შესაბამისად $D(h)$ და $E(h)$. ცხადია, მართებულია ტოლობა

$$D = D(h) + E(h). \quad (*)$$

თუ იგივე ფორმულით, ოდონდ $h/2$ ბიჯით ჩავატარებთ გამოთვლებს, მართებულია ანალოგიური ტოლობა

$$D = D(h/2) + E(h/2). \quad (**)$$

თუ გამოყენებული ფორმულა არის h -ის მიმართ მეორე რიგის, მაშინ $E(h) \cong Ch^2$ და

$$\frac{E(h)}{E(h/2)} \cong \frac{Ch^2}{C(h/2)^2} = 4, \quad \text{ანუ} \quad E(h) \cong 4E(h/2).$$

(*), (**) ტოლობების საფუძველზე

$$D(h/2) + E(h/2) = D(h) + E(h) \cong D(h) + 4E(h/2),$$

საიდანაც

$$E(h/2) \cong \frac{1}{3}[D(h/2) - D(h)].$$

შედეგად (**) -დან მიიღება საექსტრაპოლაციო ფორმულა:

$$D \cong \frac{4}{3}D(h/2) - \frac{1}{3}D(h). \quad (23.8)$$

ცენტრული მეორე რიგის სხვაობიანი აპროქსიმაციის შემთხვევაში, (23.8) ფორმულის გამოყენება წარმოებული სიზუსტეს ზრდის მეოთხე რიგამდე.

მაგალითი 23.2

რიჩარდსონის ექსტრაპოლაცია

ოიგვე ფუნქციისათვის, რაც მაგალით 23.1-ში, გამოვთვალოთ პირველი წარმოებული $x = 0.5$ წერტილში $h_1 = 0.5$ და $h_2 = 0.25$ ზიჯებით. შემდეგ გამოვიყენოთ (23.8) ფორმულა რიჩარდსონის ექსტრაპოლაციით დაზუსტებული მნიშვნელობის გამოსათვლელად. გავიხსენოთ, რომ ზუსტი მნიშვნელობაა -0.9125 .

ამოხსნა. პირველი წარმოებული გამოვთვალოთ ცენტრული ფორმულით:

$$D(0.5) = \frac{0.2 - 1.2}{1} = -1.0 \quad \varepsilon_t = -9.6\%$$

$$D(0.25) = \frac{0.6363281 - 1.1035156}{0.5} = -0.934375 \quad \varepsilon_t = -2.4\%.$$

დაზუსტებული მნიშვნელობა გამოვთვალოთ (23.8) ფორმულით

$$D = \frac{4}{3}(-0.934375) - \frac{1}{3}(-1) = -0.9125,$$

რაც განსახილავ შემთხვევაში ზუსტ სიდიდეს ემთხვევა.

ამოცანები

23.1 გამოიყენეთ მარჯვენა და მარცხენა $O(h)$ და $O(h^2)$ სხვაობიანი აპროქსიმაციები, აგრეთვე $O(h^2)$ და $O(h^4)$ ცენტრული სხვაობიანი აპროქსიმაციები, $y = \sin x$ -ის პირველი წარმოებულის გამოსათვლელად $x = \pi/4$ წერტილში, $h = \pi/12$ ბიჯის შემთხვევაში. თითოეულ შემთხვევაში შეაფასეთ ჭეშმარიტი პროცენტული ფარდობითი ცდომილება ε_t .

23.2 გაიმეორეთ ამოცანა 23.1, მაგრამ $y = \log x$ სათვის, $x = 25$ წერტილში $h = 2$ ბიჯით.

23.3 გამოიყენეთ $O(h^2)$ და $O(h^4)$ ცენტრული სხვაობიანი აპროქსიმაციები $y = e^x$ -ის პირველი და მეორე წარმოებულების გამოსათვლელად $x = 2$ წერტილში, $h = 0.1$ ბიჯით.

23.4 გამოიყენეთ რიჩარდსონის ექსტრაპოლაცია $y = \cos x$ -ის პირველი წარმოებულის გამოსათვლელად $x = \pi/4$ წერტილში, $h_1 = \pi/3$ და $h_2 = \pi/6$ ბიჯებით. საწყისი მიახლოებებისათვის ისარგებლეთ $O(h^2)$ ცენტრული აპროქსიმაციით.

23.8 გამოთვალეთ პირველი რიგის ცენტრული სხვაობიანი $O(h^4)$ მიახლოებები შემდეგი ფუნქციებისათვის მითითებულ წერტილებში და მითითებული ბიჯით:

(a) $y = x^3 + 4x - 15$	$x = 0, \quad h = 0.25$
(b) $y = x^2 \cos x$	$x = 0.4, \quad h = 0.1$
(c) $y = \tan(x/3)$	$x = 3, \quad h = 0.5$
(d) $y = \sin(0.5\sqrt{x})/x$	$x = 1, \quad h = 0.2$
(e) $y = e^x + x$	$x = 2, \quad h = 0.2$

23.9 მოყვანილი მონაცემები შეესაბამება რაკეტის მიერ გავლილ მანძილებს დროის გარკვეულ მომენტებში.

t (წმ)	0	25	50	75	100	125
y (კმ)	0	32	58	78	92	100

რიცხვითი გაწარმოების გამოყენებით გამოთვალეთ რაკეტის სიჩქარე და აჩქარება დროის ყოველ მომენტში.

25.1 ეილერის მეთოდი

განვიხილოთ პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება საწყის პირობასთან ერთად

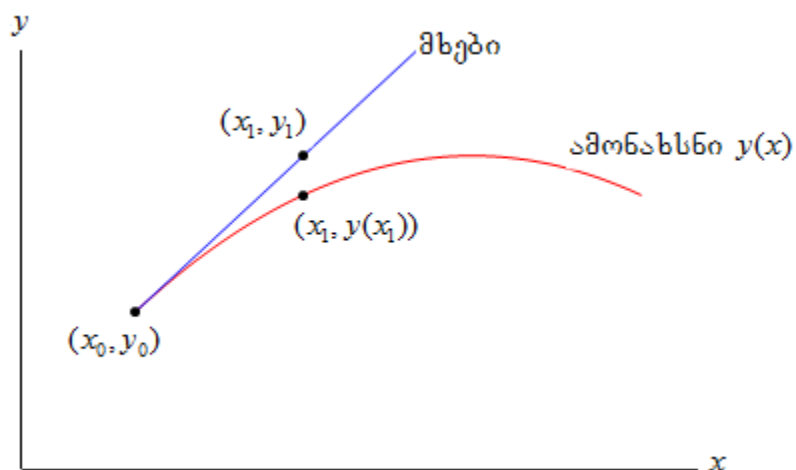
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (*)1$$

სადაც $f(x, y)$ ცნობილი ფუნქციაა და საწყის პირობაში შემავალი სიდიდეებიც ცნობილია. ვეძებთ (1)-ის მიახლოებით ამონახსნს $x = x_0$ -ის სიახლოვეს. ამონახსნის შესახებ ჩვენთვის ცნობილია ა) ამონახსნის სიდიდე $x = x_0$ წერტილში და ბ) წარმოებულის სიდიდე $x = x_0$ წერტილში

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f(x_0, y_0).$$

გავიხსენოთ კალკულუსიდან, რომ ამ ინფორმაციის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ (x_0, y_0) წერტილში ამონახსნის გრაფიკისასდმი გავლებული მხეზის განტოლება

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$



თუ x_1 ახლოსაა x_0 -სთან, მაშინ მხეზი წრფის y_1 წერტილი ახლოს იქნება x_1 წერტილში

ამონახსნის მნიშვნელობასთან, ე.ი. $y(x_1)$ -თან. ამიტომ მხეზის განტოლებიდან ვპოულობთ y_1 -ის აპროქსიმაციას:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) . \quad (*)2$$

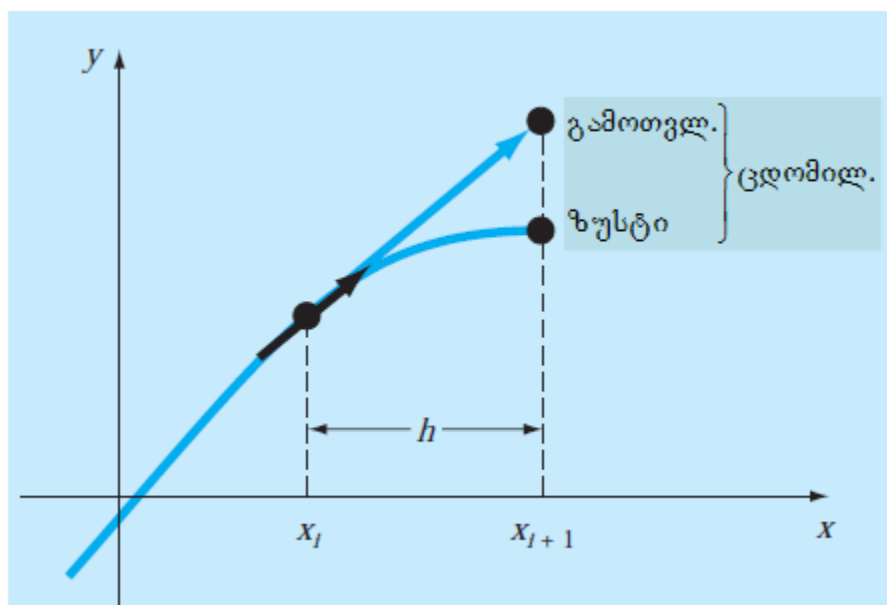
შევარჩიოთ რაიმე $h > 0$ ბიჯი და განვიხილოთ წერტილები

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_i = x_0 + ih, \dots$$

თუ y_i კარგი მიახლოებაა $y(x_i)$ -სათვის, მაშინ მომდევნო მიახლოებას ვპოულობთ (*)2 -ის ანალოგიურად

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h \quad (25.2)$$

(*1) განტოლების ამონახსნის მოძებნას (25.2) ფორმულათ ეილერის მეთოდი ეწოდება



მაგალითი 25.1

გამოვიყენოთ ეილერის მეთოდი და $[0, 4]$ შუალედში ამოვხსნათ

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

განტოლება $y(0) = 1$ საწყისი პირობით. ბიჯის სიდიდე იყოს $h = 0.5$.

ამოხსნა. (25.2) ფორმულით გვაქვს

$$y(0.5) = y(0) + f(0, 1)0.5,$$

სადაც $y(0)=1$ და

$$f(0,1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5 .$$

ამიტომ

$$y(0.5) = 1.0 + 8.5(0.5) = 5.25 .$$

$x = 0.5$ -ში ზუსტი მნიშვნელობაა

$$y = -0.5(0.5)^4 + 4(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5(0.5) + 1 = 3.21875 ,$$

ამიტომ ცდომილებაა

$$E_t = 3.21875 - 5.25 = -2.03125 ,$$

ან, თუ პროცენტულ ფარდობით ცდომილებად გამოვსახავთ, $\varepsilon_t = -63.1\%$.

მეორე ბიჯზე,

$$y(1) = y(0.5) + f(0.5, 5.25)0.5 =$$

$$5.25 + [-2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5]0.5 = 5.875$$

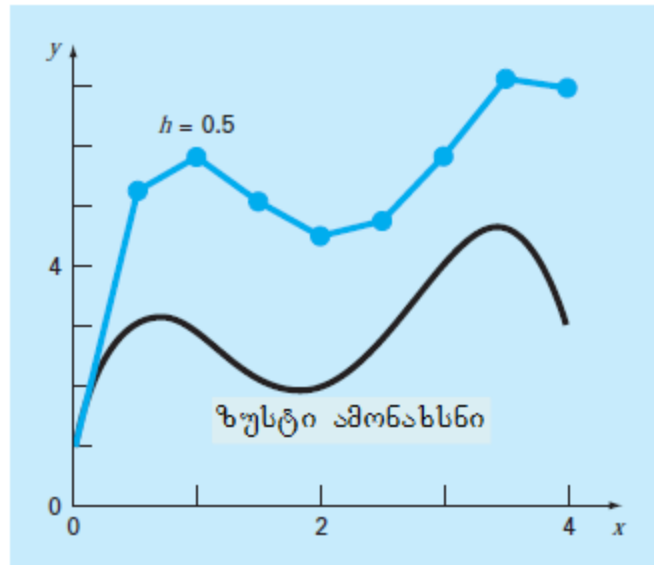
$x = 1.0$ -ში ზუსტი მნიშვნელობაა 3.0 და პროცენტული ფარდობითი ცდომილება -95.8% . გამოთვლები გაგრძელებულია და მიღებული შედეგები წარმოდგენილია ცხრილ 25.1-ში და ფიგ. 25.3-ზე.

ცხრილი 25.1 ზუსტი და მიახლოებითი მნიშვნელობების შედარება.

ლოკალური ცდომილება ერთ ბიჯზე დაშვებული
ცდომილებაა. გლობალური -- წინა და მიმდინარე
საფეხურზე დაშვებულ ცდომილებათა ჯამი.

x	$y_{\text{ზუსტი}}$	$y_{\text{ეილერი}}$	პროცენტ. ფარდ. ცდომილ.	
			გლობალ.	ლოკალ.
0.0	1.00000	1.00000		
0.5	3.21875	5.25000	-63.1	-63.1
1.0	3.00000	5.87500	-95.8	-28.0
1.5	2.21875	5.12500	131.0	-1.41
2.0	2.00000	4.50000	-125.0	20.5
2.5	2.71875	4.75000	-74.7	17.3
3.0	4.00000	5.87500	46.9	4.0
3.5	4.71875	7.12500	-51.0	-11.3
4.0	3.00000	7.00000	-133.3	-53.0

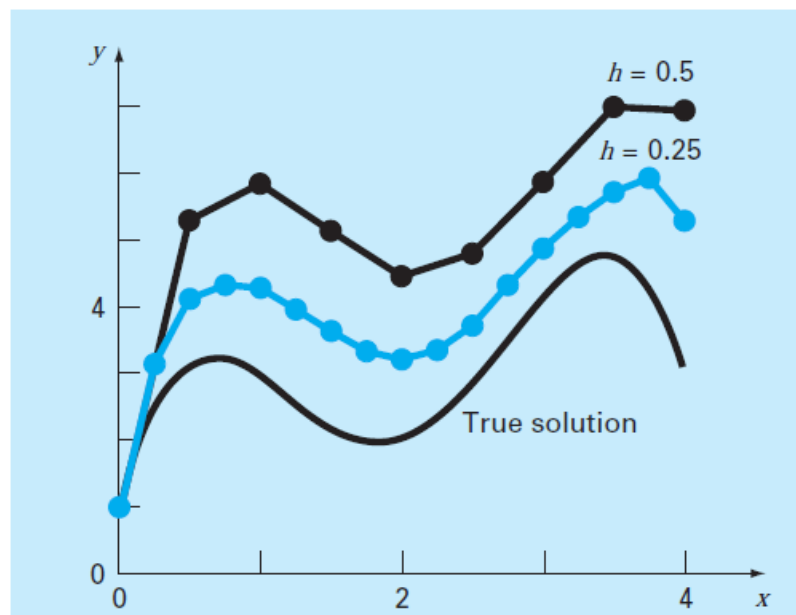
ფიგურა 25.3



მტკიცდება, რომ ეილერის მეთოდი პირველი რიგის სიზუსტისაა:

$$|y_i - y(x_i)| = O(h).$$

ამიტომ ბიჯის ორჯერ შემცირება გლობალურ ცდომილებას დაახლოებით ორჯერ შემცირებს. ეს კარგად ჩანს მაგალითი 25.1-სათვის ჩატარებული გამოთვლებიდან:



25.2 ეილერის მეთოდის გაუმჯობესებები

ეილერის მეთოდში ცდომილების ძირითად წყაროს წარმოადგენს ინტერვალის დასაწყისში გამოთვლილი წარმოებულის გამოყენება მთელს ინტერვალზე. ჩვენ განვიხილავთ ამ ნაკლის აღმოფხვრის ორ მარტივ მოდიფიკაციას, რომლებიც ფაქტიურად უფრო ფართო კლასის მეთოდებს -- რუნგე-კუტას მეთოდებს მიეკუთვნებიან.

ჰოინის მეთოდი

დახრილობის გაუმჯობესებული მნიშვნელობის გამოთვლის ერთ-ერთ ხერხს წარმოადგენს წარმოებულის გამოთვლა ორ წერტილში -- შუალედის თავში და ბოლოში. შემდეგ ხდება წარმოებულის ამ ორი მნიშვნელობის გასაშუალება მთელი ინტერვალისთვის გამოყენებადი გაუმჯობესებული დახრილობის მისაღებად. ეს მიდგომა, რომელსაც ჰოინის მეთოდი ეწოდება, გამოსახულია ფიგ. 25.9-ზე.

გავიხსენოთ, რომ ეილერის მეთოდში, ინტერვალის დასაწყისში გამოთვლილი

$$y'_i = f(x_i, y_i) \quad (25.12)$$

დახრილობა გამოიყენება y_{i+1} -ის საექსტრაპოლაციოდ:

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h. \quad (25.13)$$

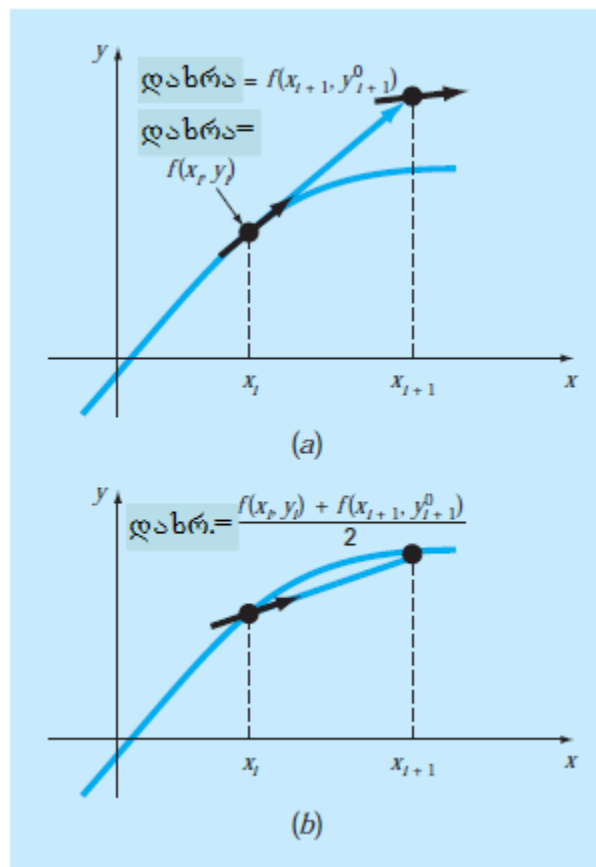
ეილერის სტანდარტული მეთოდი აქ ჩერდება. ჰოინის მეთოდისათვის კი (25.13)-ით y_{i+1}^0 -ის გამოთვლა საბოლოო პასუხი არაა, არამედ საშუალოდ პროგნოზს წარმოადგენს. ამიტომაც მიუწერეთ მას ზედა ინდექსად 0. ფორმულა (25.13)-ს პროგნოზის განტოლება ("პრედიქტორი") ეწოდება. ეს უზრუნველყოფს შევამოთ დახრილობა შუალედის ბოლოზე:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0). \quad (25.14)$$

ფიგურა 25.9

ჰოინის მეთოდის გრაფიკული წარმოდგენა.

- (a) პრედიქტორი (პროგნოზი) და
- (b) კორექტორი (კორექცია).



(25.12) და (25.14) ტოლობებით ნაპოვნი ორი დახრილობის კომბინაციით ვპოულობთ გასაშუალებულ დახრილობას მთელი ინტერვალისათვის:

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2},$$

შემდეგ კი ეილერის მეთოდით ხდება ექსტრაპოლაცია y_i -დან y_{i+1} -სკენ:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h.$$

ამ ტოლობას კორექტორის განტოლება ეწოდება.

ჰოინის მეთოდი არის პროგნოზისა და კორექციის ერთბიჯიანი მეთოდი (პრედიქტორ-კორექტორი). იგი მოკლედ ასე შეიძლება ჩავეწეროთ:

პრედიქტორი (ფიგ. 25.9a): $y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$ (25.15)

კორექტორი (ფიგ. 25.9b): $y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$ (25.16)

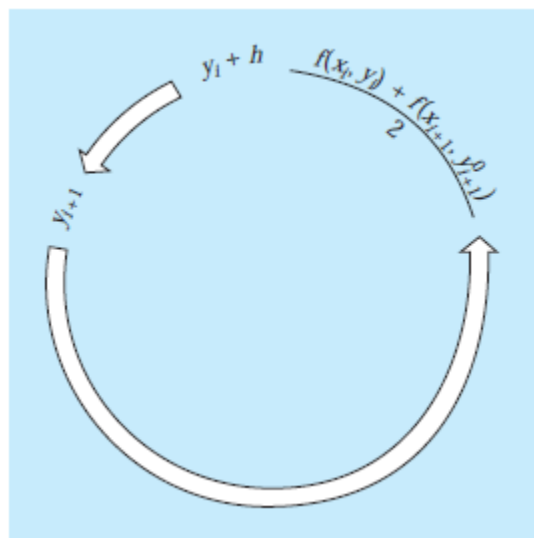
შევნიშნოთ, რომ (25.16) ტოლობის ორივე მხარეში გვაქვს y_{i+1} , რაც იტერაციისთვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ. ე.ი., y_{i+1} -ის გამოთვლილ მნიშვნელობებს ვაბრუნებთ ტოლობის მარჯვენა მხარეში და ხელახლა გამოვთვლით გაუმჯობესებულ ახალ მნიშვნელობას. პროცესი ნაჩვენებია 25.10 ფიგურაზე. უნდა გვესმოდეს, რომ იტერაციული პროცესი შესაძლოა არ იყოს კრებადი ზუსტი ამონახსნისაკენ, მაგრამ კრებადი იყოს სასრული ცდომილებით, როგორც ეს ჩანს მომდევნო მაგალითში. იტერაციის პროცესის შეჩერების კრიტერიუმად გამოვიყენებთ სიდიდეს

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{y_{i+1}^j - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^j} \right| 100\%, \quad (25.17)$$

სადაც y_{i+1}^{j-1} და y_{i+1}^j კორექტორის ადრინდელი და მიმდინარე მნიშვნელობებია, შესაბამისად.

ფიგურა 25.10

გრაფიკული წარმოდგენა კორექტორის იტერაციისა ჰოინის მეთოდში გაუმჯობესებული მიახლოების მისაღებად



მაგალითი 25.5

ჰოინის მეთოდში ავიღოთ ბიჯი $h=1$ და ამოვხსნათ განტოლება

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y, \quad x \in [0, 4], \quad y(0) = 2.$$

ამოხსნა. ამოცანის მიახლოებით ამოხსნამდე, კალკულუსის მეთოდებით ვიპოვოთ ანალიზური ამონახსნი

$$y = \frac{4}{1.3} (e^{0.8x} - e^{-0.5x}) + e^{-0.5x}$$

ამ ფორმულას გამოვიყენებთ ჭეშმარიტი მნიშვნელობების დასადგენად ცხრილ 25.2-ში.

პირველ რიგში, ვპოულობთ დახრილობას (x_0, y_0) წერტილში

$$y'_0 = 4e^0 - 0.5(2) = 3.$$

ეს შედეგი განსხვავდება $(0, 1)$ ინტერვალზე დახრილობის საშუალო სიდიდისაგან:

$$\text{საშუალო} = (y(1) - y(0)) / (1 - 0) = 4.1946.$$

(25.15)-დან ვპოულობთ y -ის მიახლოებას $x=1.0$ წერტილში:

$$y_1^0 = 2 + 3(1) = 5$$

ცხრილი 25.2

ინტეგრაციები ჰოინის მეთოდში					
x	$y_{\text{ზუსტი}}$	1		15	
		$y_{\text{ჰოინი}}$	$ e_f $ (%)	$y_{\text{ჰოინი}}$	$ e_f $ (%)
0	2.0000000	2.0000000	0.00	2.0000000	0.00
1	6.1946314	6.7010819	8.18	6.3608655	2.68
2	14.8439219	16.3197819	9.94	15.3022367	3.09
3	33.6771718	37.1992489	10.46	34.7432761	3.17
4	75.3389626	83.3377674	10.62	77.7350962	3.18

შევნიშნოთ, რომ ეს შედეგი სტანდარტული ეილერის მეთოდითაა მიღებული. ზუსტი მნიშვნელობა ცხრილ 25.2-ში გვიჩვენებს, რომ შესაბამისი პროცენტული ფარდობითი ცდომილებაა 19.3%.

ახლა, y_{i+1} შედეგის გასაუმჯობესებლად ჩვენ გამოვიყენებთ y_1^0 სიდიდეს დახრილობის პროგნოზირებისთვის ინტერვალის ბოლოზე

$$y'_1 = f(x_1, y_1^0) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(5) = 6.402164.$$

ეს საწყის დახრილობასთან ერთად კომბინაციაში გვაძლევს საშუალო დახრილობას $x=0$ -დან 1-მდე ინტერვალზე

$$y' = (3 + 6.40264) / 2 = 4.701082,$$

რაც ახლოსაა 4.1946 ჭეშმარიტ საშუალო დახრილობასთან.

ამ შედეგის შეტანა კორექტორის (25.16) განტოლებაში გვაძლევს პროგნოზს $x=1$ წერტილში

$$y_1 = 2 + 4.701082(1) = 6.701082.$$

ამ მნიშვნელობის პროცენტული ფარდობითი ცდომილებაა -8.18%. ამრიგად, ჰოინის მეთოდმა კორექტორის იტერაციის გარეშე 2.4-ჯერ შეამცირა ცდომილების აბსოლუტური სიდიდე ეილერის მეთოდთან შედარებით.

ახლა ეს სიდიდე შეგვიძლია დავაბრუნოთ (25.16)-ის მარჯვენა მხარეში y_1 -ის დასაზუსტებლად:

$$y_1 = 2 + \frac{[3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.701082)]}{2} = 6.275811.$$

პროცენტული ფარდობითი ცდომილების აბსოლუტური მნიშვნელობა 1.31%-მდე შემცირდა. y_1 -ის ეს მნიშვნელობა კვლავ შევიტანოთ (25.16)-ის მარჯვენა მხარეში:

$$y_1 = 2 + \frac{[3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.275811)]}{2} = 6.382129, \quad |\varepsilon_t| = 3.03\%.$$

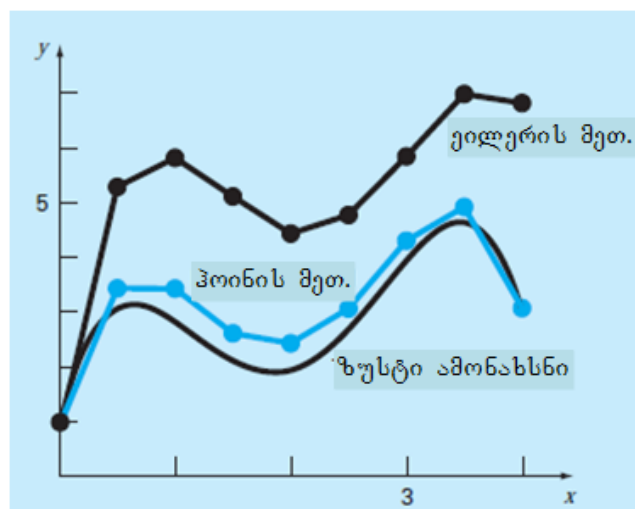
მივაქციოთ ყურადღება, რომ ცდომილება ზოგჯერ იზრდება იტერაციის მსვლელობისას. ეს შეიძლება ხდებოდეს განსაკუთრებით მაშინ, როცა ბიჯი დიდია. მიუხედავად ამისა, მცირე ბიჯების შემთხვევაში იტერაცია კრებადია.

მტკიცდება, რომ ჰოინის მეთოდი მეორე რიგის სიზუსტისაა:

$$|y_i - y(x_i)| = O(h^2).$$

ამიტომ ბიჯის შემცირებასთან ერთად მისი ცდომილება უფრო სწრაფად მცირდება, ვიდრე ეილერის მეთოდში. ფიგურა 25.11-ზე მაგალითი 25.1-ის ზუსტი ამონახსნი შედარებულია ეილერის და ჰოინის მეთოდებით მიღებულ ამონახსნებთან.

ფიგურა 25.11



შუა წერტილების მეთოდი

ფიგურა 25.12-ზე ნაჩვენებია ეილერის მეთოდის სხვა მარტივი მოდიფიკაცია. ეილერის მეთოდით ხდება y -ის პროგნოზირება ინტერვალის შუა წერტილში (ფიგ. 25.12a):

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i) \frac{h}{2} \quad (25.25)$$

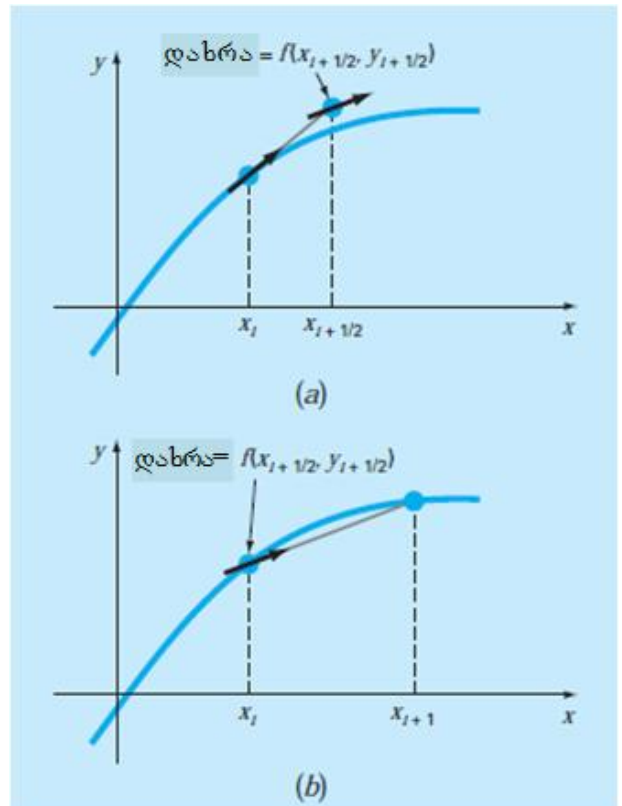
შემდეგ ეს სიდიდე გამოიყენება დახრილობის გამოსათვლელად შუა წერტილში:

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}), \quad (25.26)$$

და ბოლოს ხდება წრფივი ექსტრაპოლაცია x_i -დან x_{i+1} -ში (ფიგ. 25.12b):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h. \quad (25.27)$$

შუა ქერტილების მეთოდის მეორე რიგის სიზუსტისაა $|y_i - y(x_i)| = O(h^2)$.



ფიგურა 25.12

ფსევდოკოდეები:

(a) ჰოინის მარტივი მეთოდი

```
SUB Heun (x, y, h, ynew)
  CALL Derivs (x, y, dy1dx)
  ye = y + dy1dx * h
  CALL Derivs(x + h, ye, dy2dx)
  Slope = (dy1dx + dy2dx)/2
  ynew = y + Slope * h
  x = x + h
END SUB
```

(b) შუა წერტილების მეთოდი

```
SUB Midpoint (x, y, h, ynew)
  CALL Derivs(x, y, dydx)
  ym = y + dydx * h/2
  CALL Derivs (x + h/2, ym, dymdx)
  ynew = y + dymdx * h
  x = x + h
END SUB
```

(c) ჰოინის მეთოდი იტერაციებით

```
SUB HeunIter (x, y, h, ynew)
  es = 0.01
  maxit = 20
  CALL Derivs(x, y, dy1dx)
  ye = y + dy1dx * h
  iter = 0
  DO
    yeold = ye
    CALL Derivs(x + h, ye, dy2dx)
    slope = (dy1dx + dy2dx)/2
    ye = y + slope * h
    iter = iter + 1
    ea = | (ye - yeold) / ye | * 100%
  IF (ea <= es OR iter > maxit) EXIT
  END DO
  ynew = ye
  x = x + h
END SUB
```


25.3 მეორე რიგის რუნგე-კუტას მეთოდები

/ C.Runge (1856-1927), M.Kutta (1867-1944) გერმანელი მათემატიკოსები/

არსებობს რუნგე-კუტას მეთოდების მრავალი სახეცვლილება. ჩვენ განვიხილავთ მეორე რიგის სიზუსტის ფორმულებს.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ ფორმულით

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \quad (25.30)$$

სადაც

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (25.30a)$$

$$k_2 = f(x_i + ph, y_i + pk_1 h) \quad (25.30b)$$

$$a_1 + a_2 = 1 \quad (25.31)$$

$$a_2 p = \frac{1}{2} \quad (25.32)$$

a_1, a_2, p სამი უცნობი კოეფიციენტისათვის გვაქვს ორი განტოლება. მათი შერჩევით მიიღება მეთოდის სხვადასხვა ვარიანტები.

კერძოდ, თუ შევარჩევთ $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $p = 1$, გვექნება ჰოინის მარტივი მეთოდი (ერთი კორექციით).

თუ შევარჩევთ $a_1 = 0, a_2 = 1$, $p = \frac{1}{2}$, მიიღება შუა წერტილების მეთოდი

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h \quad (25.37)$$

სადაც

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (25.37a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \quad (25.37b)$$

თუ შევარჩევთ $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{3}$, $p = \frac{3}{4}$, მიიღება რალსტონის მეთოდი:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h, \quad (25.38)$$

სადაც

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (25.38a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right) \quad (25.38b)$$

მაგალითი 25.6

მეორე რიგის სხვადასხვა რუნგე-კუტას მეთოდის შედარება

(25.37) შუა წერტილების მეთოდით და (25.38) რალსტონის მეთოდით ($h = 0.5$) ამოვხსნათ ამოცანა

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x \in [0, 4], \quad y(0) = 1,$$

სადაც

$$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5.$$

შედეგები შევადაროთ ჰოინის მეთოდით მიღებულ მნიშვნელობებს (ცხრ. 25.3).

ამოხსნა. შუაწერტილების მეთოდის პირველი საფეხურია (25.37a) ტოლობის გამოყენება:

$$k_1 = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5.$$

რადგან დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარე მხოლოდ x -ის ფუნქციაა, k_1 -ის ეს მნიშვნელობა მეორე საფეხურზე არ დაგვჭირდება:

$$k_2 = -2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5 = 4.87521.$$

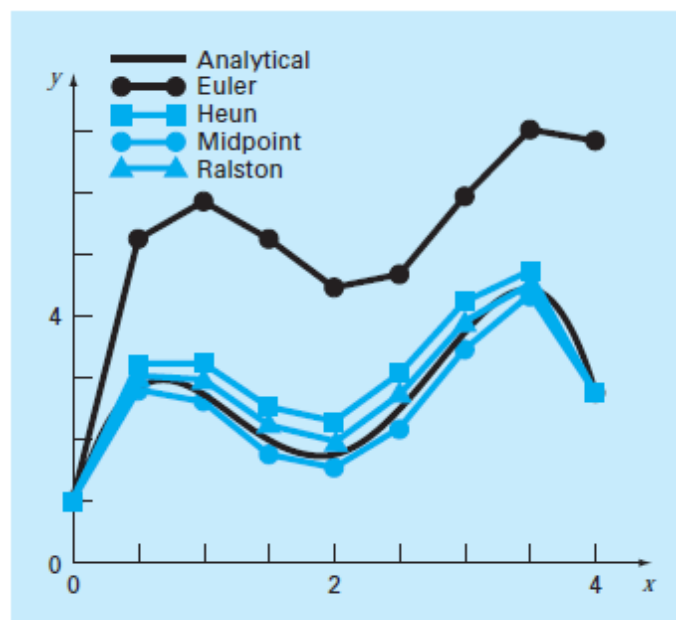
შუაწერტილის შესაბამისი დახრილობა ჩავსვით (25.37)-ში

$$y(0.5) = 1 + 4.21875(0.5) = 3.109375, \quad \varepsilon_t = 3.4\%.$$

გამოთვლები მეორდება, შედეგები მოთავსებულია ფიგ.25.14 და ცხრ.25.3-ში.

ფიგურა 25.14

ზუსტი ამონახსნის შედარება ეილერის და რუნგე-კუტას მეთოდებით (ჰოინის, შუა წერტილების და რალსტონის) მიღებულ რიცხვით ამონახსნებთან



ცხრილი 25.3

ზუსტი		პოინი		შუა წერტილ.		რალსტონი	
x	y _{true}	y	ε _t (%)	y	ε _t (%)	y	ε _t (%)
0.0	1.00000	1.00000	0	1.00000	0	1.00000	0
0.5	3.21875	3.43750	6.8	3.109375	3.4	3.277344	1.8
1.0	3.00000	3.37500	12.5	2.81250	6.3	3.101563	3.4
1.5	2.21875	2.68750	21.1	1.984375	10.6	2.347656	5.8
2.0	2.00000	2.50000	25.0	1.75	12.5	2.140625	7.0
2.5	2.71875	3.18750	17.2	2.484375	8.6	2.855469	5.0
3.0	4.00000	4.37500	9.4	3.81250	4.7	4.117188	2.9
3.5	4.71875	4.93750	4.6	4.609375	2.3	4.800781	1.7
4.0	3.00000	3.00000	0	3	0	3.031250	1.0

რალსტონის მეთოდისათვის, პირველ ინტერვალზე k_1 აგრეთვე 8.5-ის ტოლია და (25.38b)-დან

$$k_2 = -2(0.375)^3 + 12(0.375)^2 - 20(0.375) + 8.5 = 2.58203125 .$$

საშუალო დახრილობაა

$$\phi = \frac{1}{3}(8.5) + \frac{2}{3}(2.58203125) = 4.5546875 ,$$

რასაც ვიყენებთ პროგნოზისათვის

$$y(0.5) = 1 + 4.5546875(0.5) = 3.27734375, \quad \varepsilon_t = -1.82\% .$$

გამოთვლები გაგრძელებულია და შედეგები ასახულია ფიგ.25.14 -სა და ცხრილ 25.3-ზე. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი რუნგე-კუტას მეთოდი უკეთესია ეილერის მეთოდზე.

მეოთხე რიგის რუნგე-კუტას მეთოდი

მეოთხე რიგის რუნგე-კუტას მეთოდებს შორის ყველაზე პოპულარული ქვემოთმოყვანილია, ამიტომ მას *კლასიკურ მეოთხე რიგის რუნგე-კუტას მეთოდს* უწოდებენ:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h , \quad (25.40)$$

სადაც

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (25.40 a)$$

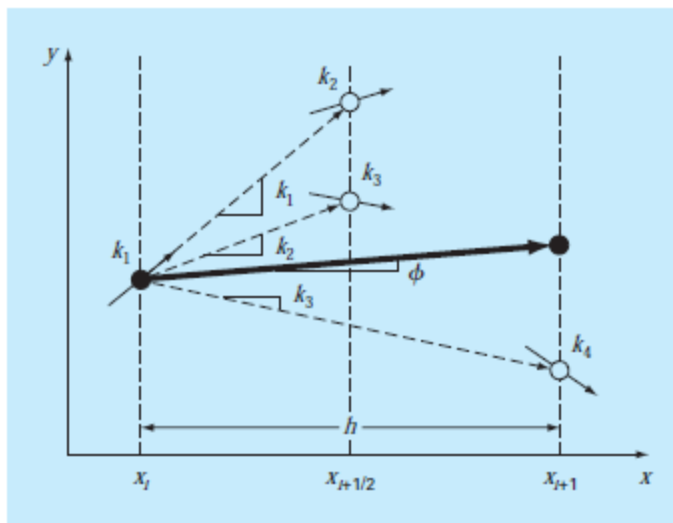
$$k_1 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (25.40b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad (25.40 \text{ c})$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad (25.40 \text{ d})$$

ფიგურა 25.15

რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის მეთოდში დახრილობათა გამოთვლის გრაფიკული წარმოდგენა



კლასიკური მეოთხე რიგის რკ მეთოდი

გამოვიყენოთ (25.40) მეთოდი $h = 0.5$ ზოგით შემდეგი ამოცანების ამოსახსნელად:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x \in [0, 0.5],$$

სადაც

$$(ა) \quad f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5, \quad y(0) = 1$$

და

$$(ბ) \quad f(x, y) = 4e^{0.8x} - 0.5y, \quad y(0) = 2.$$

ამოხსნა.

(ა) (25.40 a) -- (25.40b) ფორმულებით მიიღება

$$k_1 = 8.5, \quad k_2 = 4.21875, \quad k_3 = 4.21875 \quad \text{და} \quad k_4 = 1.25,$$

რომელთა (25.40)-ში ჩასმა გვაძლევს

$$y(0.5) = 1 + \left\{ \frac{1}{6} [8.5 + 2(4.21875) + 2(4.21875) + 1.25] \right\} = 3.21875$$

რაც ზუსტი შედეგია.

(ბ) ჯერ გამოვთვლით

$$k_1 = f(0.2) = 4e^{0.8(0)} - 0.5(2) = 3.$$

ამ მნიშვნელობით გამოითვლება y და დახრილობა შუა წერტილში

$$y(0.25) = 2 + 3(0.25) = 2.75$$

$$k_2 = f(0.25, 2.75) = 4e^{0.8(0.25)} - 0.5(2.75) = 3.510611.$$

შემდეგ ვპოულობთ y -ის და დახრილობის სხვა მნიშვნელობებს შუა წერტილისათვის:

$$y(0.25) = 2 + 3.510611(0.25) = 2.877653$$

$$k_3 = f(0.25, 2.877653) = 4e^{0.8(0.25)} - 0.5(2.877653) = 3.446785.$$

შემდეგ, ამ დახრილობას ვიყენებთ y -ის და დახრილობის გამოსათვლელად ინტერვალის ბოლო წერტილში

$$y(0.5) = 2 + 3.071785(0.5) = 3.723392$$

$$k_4 = f(0.5, 3.723392) = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(3.723392) = 4.105603.$$

და ბოლოს, ვპოულობთ მიღებული ოთხი დახრილობის მიახლოებათა საშუალოს. ეს საშუალო დახრილობა გამოიყენება ფინალური პროგნოზირებისთვის ინტერვალის ბოლოზე

$$\phi = \frac{1}{6}[3 + 2(3.510611) + 2(3.446785) + 4.105603] = 3.503399$$

$$y(0.5) = 2 + 3.503399(0.5) = 3.751699$$

რაც კარგად ედრება ზუსტ 3.751521 მნიშვნელობას.

ამოცანები

25.1 ამოხსენით შემდეგი ამოცანა

$$\frac{dy}{dt} = yt^3 - 1.5y, \quad t \in [0, 2], \quad y(0) = 1$$

(ა) ანალიზურად;

(ბ) ეილერის მეთოდით, როცა $h = 0.5$ და $h = 0.25$;

(გ) შუა წერტილების მეთოდით როცა $h = 0.25$.

25.2 ამოხსენით შემდეგი ამოცანა

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2x)\sqrt{y}, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad h = 0.25$$

(ა) ანალიზურად;

(ბ) ეილერის მეთოდით;

(გ) ჰოინის მეთოდით იტერაციების გარეშე;

(დ) რალსტონის მეთოდით.

ყველა შედეგი წარმოადგინეთ ერთი და იგივე გრაფიკზე.

25.5 ამოხსენით შემდეგი ამოცანა

$$\frac{dy}{dt} = y \sin^3(t), \quad t \in [0, 3], \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1$$

(ა) ჰოინის მეთოდით (კორექტორის გარეშე);

(ბ) რალსტონის მეთოდით.

25.6 ამოხსენით შემდეგი ამოცანა

$$\frac{dy}{dt} = -y + t^2, \quad t \in [0, 3], \quad y(0) = 1.$$

გამოთვლები შეასრულეთ რალსტონის მეთოდით $h = 0.5$ ბიჯით.

25.17 თუ წყალი გაედინება ვერტიკალური ცილინდრული რეზერვუარიდან მის ძირში

ონკანის გახსნით, წყალი მით უფრო სწრაფად გადის, რაც მაღალია მისი დონე ავზში.

დადგენილია, რომ წყლის გადინების სიჩქარეა

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y},$$

სადაც k მუდმივი დამოკიდებულია ნახვრეტის ფორმაზე, აგრეთვე რეზერვუარის და სადინარის განივი კვეთის ფართობებზე. წყლის დონე y იზომება მეტრებში, t დრო კი წუთებში. განსაზღვრეთ რამდენ ხანში დაიცლება რეზერვუარი, თუ სითხის საწყისი დონეა 3მ და $k = 0.06$. განტოლება ამოხსენით ეილერის მეთოდით და დაწერეთ კომპიუტერული პროგრამა ან ისარგებლეთ ექსელით. გამოიყენეთ $h = 0.5$ ბადის ბიჯი.