საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

სტუ

# მათემატიკის საფუძვლები

ლექციების კურსი

„S.T. Tan. Applied Calculus for the Managerial, Life, and Social Sciences“ მიხედვით

( სტუ ბიბლიოთეკა # )

I კურსის „ აგრონომიის“ და „მეცხოველეობის“

სპეციალობების სტუდენტებისათვის

2014

EDITION
8

# APPLIED CALCULUS

## FOR THE MANAGERIAL, LIFE, AND SOCIAL SCIENCES

S. T. TAN
STONEHILL COLLEGE

BROOKS/COLE
CENGAGE Learning
Australia • Brazil • Japan • Korea • Mexico • Singapore • Spain • United Kingdom • United States

დ.ნატროშვილი, გ.ბერიკელაშვილი, შ.ზაზაშვილი

# მათემატიკის საფუძვლები

ლექციების კურსი მომზადებულია

„S.T. Tan.  Applied Calculus for the Managerial, Life, and Social Sciences“

მიხედვით

**2014**

*კურსის მიზანია სტუდენტებს შეასწავლოს მათემატიკის საფუძვლები, ფუნქციის ზღვრი, ფუნქციის უწყვეტობა, ფუნქციის პირველი და მაღალი რიგის წარმოებულები, დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემები და მისი გამოყენება მარტივი პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტაში, ერთი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი, ერთი ცვლადის ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება, რამდენიმე ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებული და ექსტრემუმი, განუსაზღვრელი და განსაზღვრული ინტეგრალი, მრუდწირული ფიგურის ფართობის გამოთვლა.*

შინაარსი

## პირველი ლექცია

**ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. რიცხვითი ღერძი.**

რიცხვის ცნება მათემატიკის ერთერთი ძირითადი ცნებაა. იგი წარმოიშვა უძველეს დროში და დიდი ხნის განმავლობაში ხდებოდა მისი გაფართოება და განზოგადოება.

თვლის შედეგად მიღებულ რიცხვებს ***ნატურალური რიცხვები*** ეწოდება და შემდეგნაირად აღინიშნება: $N=\{1,2,3,\dots\}$.

ნატურალურ რიცხვებს, მათ მოპირდაპირე რიცხვებს და ნულს ***მთელი რიცხვები*** ეწოდება და შემდეგნაირად აღინიშნება: $Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\}$.

$\frac{m}{n}$ სახის წილად რიცხვებს, სადაც $m\in Z$ და $n\in N$, ***რაციონალური რიცხვები*** ეწოდება და შემდეგნაირად აღინიშნება: $Q=\left\{\frac{m}{n},\ \mathrm{m}\in \mathrm{Z},\ \mathrm{n}\in \mathrm{N}\right\}$.

ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით.

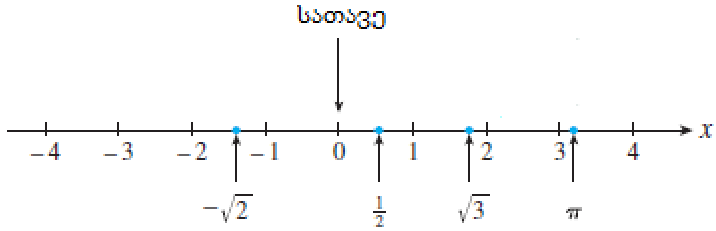
რიცხვებს, რომლებიც წარმოიდგინებიან უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით, ***ირაციონალური რიცხვები*** ეწოდებათ და აღინიშნება $I$ ასოთი. ასეთი რიცხვებია, მაგალითად, $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 5\text{-}\sqrt{6}$ და ა.შ.

რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებას ***ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს*** უწოდებენ და აღინიშნება $R$ ასოთი.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე დალაგებულია სიდიდის მიხედვით ანუ ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი $x$ და $y$ წყვილისათვის ადგილი აქვს ერთ და მხოლოდ ერთ თანაფარდობას შემდეგი სამი შესაძლო თანაფარდობიდან:

$$x<y,\quad x=y,\quad x>y.$$

ჩვენ შეგვიძლია ნამდვილი რიცხვები გეომეტრიულად წარმოვადგინოთ წერტილით ***ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე*** ანუ ***საკოორდინატო წრფეზე.*** ეს წრფე შეგვიძლია ავაგოთ შემდეგნაირად. ჰორიზონტალურ წრფეზე ნებისმიერად ავირჩიოთ წერტილი, დავარქვათ ***სათავე*** და იგი შევუსაბამოთ რიცხვ ნულს. ამ წრფეზე დადებით მიმართულებად ავირჩიოთ მიმართულება სათავიდან მარჯვნივ, ხოლო საპირისპირო მიმართულება - უარყოფით მიმართულებად. ავირჩიოთ სათავის მარჯვნივ წერტილი და იგი შევუსაბამოთ რიცხვ 1 -ს. მანძილი სათავიდან 1-ის შესაბამის წერტილამდე განსაზღვრავს მასშტაბის ერთეულს რიცხვით ღერძზე. მასშტაბის ერთეულს მიხედვით ყოველ დადებით ნამდვილ რიცხვს შეგვიძლია შევუსაბამოთ შესაბამისი წერტილი სათავის მარჯვნივ და ყოველ უარყოფით ნამდვილ რიცხვს შეგვიძლია შევუსაბამოთ შესაბამისი წერტილი სათავის მარცხნივ (ნახ. 1)



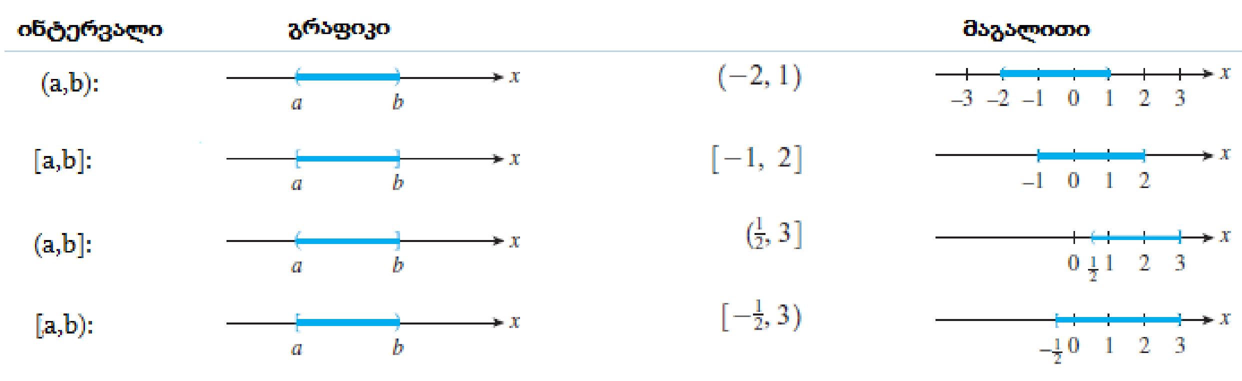

ნახაზი 1. ნამდვილ რიცხვთა ღერძი.

ამ გზით ჩვენ დავამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და საკოორდინატო წრფის წერტილთა სიმრავლეს შორის. ამრიგად, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი ნამდვილ რიცხვღა ღერძზე და პირიქით. ნამდვილ რიცხვს, რომელიც შეესაბამება რიცხვთა ღერძის წერტილს, ეწოდება ამ წერტილის ***კოორდინატი.***

## რიცხვითი შუალედები

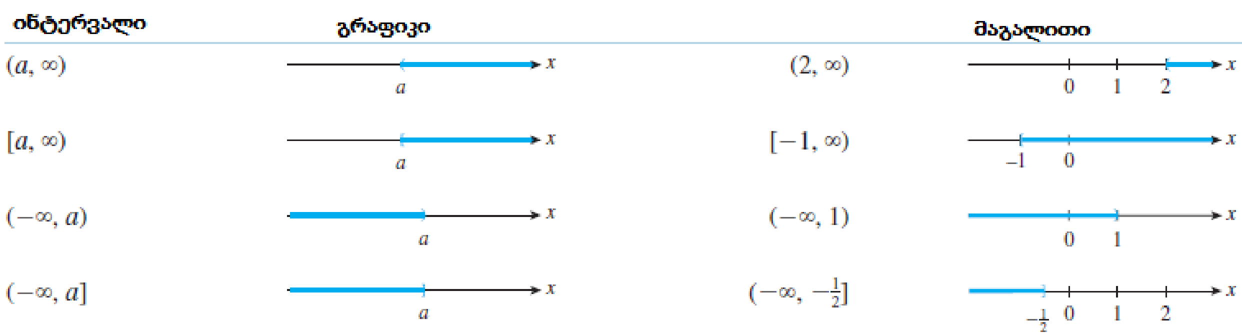
შემდგომში ჩვენ არაერთხელ შევაჩერებთ ყურადღებას ნამდვილ რიცხვთა ქვესიმრავლეებზე. მაგალითად, თუ $x$ აღნიშნავს ქარხნის მიერ ერთ დღეში გამოშვებული მანქანების რაოდენობას, მაშინ ცხადია, რომ $x$ უნდა იყოს არაუარყოფითი ე.ი. $x \ge 0$. თუ დავუშვებთ, რომ ქარხნის მენეჯმენტის გადაწყვეტილებით ერთ დღეში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს 150 მანქანას, მაშინ $x$ უნდა აკმაყოფილებდეს უტოლობას $0 \le x \le 150$.

უფრო ზოგადად, ჩვენ გვაინტერესებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის შემდეგი ქვესიმრავლეები: ღია ინტერვალი, დახურული ინტერვალი და ნახევრად ღია ინტერვალები. სიმრავლე ყველა იმ ნამდვილი რიცხვებისა, რომლებიც მკაცრად მოთავსებული არიან ორ ფიქსირებულ $a$ და $b$ რიცხვებს შორის ეწოდება ***ღია ინტერვალი*** და ასე აღინიშნება $(a,b)$. ეს ინტერვალი მოიცავს ყველა იმ ნამდვილ $x$ რიცხვს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a < x < b$. ღია ეწოდება იმის გამო, რომ ეს სიმრავლე არ შეიცავს ინტერვალის არცერთ ბოლო წერტილს. ***დახურული ინტერვალი*** მოიცავს ორივე ბოლო წერტილს. ამრიგად, სიმრავლე ყველა იმ ნამდვილი $x$ რიცხვისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a \le x \le b$, არის დახურული შუალედი $[a,b]$. კვადრატული ფრჩხილები გამოიყენება იმის მისათითებლად, რომ ინტერვალის ბოლო წერტილები ეკუთვნის ამ ინტერვალს. ***ნახევრად ღია*** ინტერვალი შეიცავს ინტერვალის მხოლოდ ერთ ბოლო წერტილს. ამრიგად, ინტერვალი $[a,b)$ არის სიმრავლე იმ ნადვილი $x$ რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a \le x < b$, მაშინ როდესაც ინტერვალი $(a,b]$ აღიწერება შემდეგი უტოლობით $a < x \le b$. ასეთი ***სასრული ინტერვალების*** მაგალითები განხილულია ქვემოთ (ნახ. 2).




ნახაზი 2.

სასრულ ინტერვალებთან ერთად განიხილება ***უსასრულო ინტერვალები.*** უსასრულო ინტერვალების მაგალითებია ნახევარ წრფეები: $(a,\infty)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,a)$ და $(-\infty,a]$, რომლებიც სიმრავლეებია ყველა იმ ნამდვილი $x$ რიცხვისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ შესაბამისად შემდეგ უტოლობებს $x>a,\ x\geq a,\ x<a$ და $x\leq a$. სიმბოლოს „$\infty$“ ეწოდება უსასრულობა და იგი არ არის ნამდვილი რიცხვი. აღნიშვნა $(-\infty,\infty)$ გამოიყენება ყველა ნადვილ $x$ რიცხვთა სიმრავლისათვის, რადგან $-\infty<x<\infty$ უტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი ნადვილი $x$ რიცხვისათვის. უსასრულო ინტერვალები და შესაბამისი მაგალითები მოცემულია ქვემოთ (ნახ. 3).




ნახაზი 3.

## ***ხარისხი და ფესვი***

გავიხსენოთ, რომ თუ $b$ არის ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი და $n$ არის დადებითი მთელი რიცხვი, მაშინ გამოსახულება $b^n$ (იკითხება ასე “$b$“ ხარისხად $n$) განსაზღვრულია როგორც შემდეგი რიცხვი

$$b^n=\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n}$$

$b$-ს ეწოდება ***ფუძე,*** $n$-ს ***ხარისხის მაჩვენებელი,*** ხოლო $b^n$-ს ***ხარისხი.*** მაგალითად,

$$3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=81,\ \text{და}\ \left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{243}.$$

თუ $b\neq0$, მაშინ შევთანხმდეთ, რომ

$$b^0 = 1.$$

მაგალითად, $(-1)^0 = 1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$, მაგრამ გამოსახულება $0^0$ არ არის განსაზღვრული.

ასევე გავიხსენოთ, რომ თუ $n$ დადებითი მთელი რიცხვია, მაშინ გამოსახულება $b^{1/n}$ განსაზღვრულია როგორც რიცხვი, რომლის $n-$ური ხარისხი $b$-ს ტოლია ანუ

$$(b^{1/n})^n = b.$$

ასეთ რიცხვს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება $n-$***ური ხარისხის ფესვი*** $b$-დან და ასე ჩაიწერება $\sqrt[n]{b}$. როცა $n$ ლუწია, მაშინ $n-$ური ხარისხის ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან არ არის განსაზღვრული. მაგალითად, კვადრატული ($n$=2) ფესვი -2-დან არ არის განსაზღვრული, რადგან არ არსებობს ისეთი ნამდვილი $b$ რიცხვი, რომ $b^2 = -2$. ასევე, მოცემული $b$-თვის, $n-$ური ხარისხის ფესვს $b$-დან, განმარტების მიხედვით, შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე მნიშვნელობა. მაგალითად $\sqrt{9}$ განმარტების მიხედვით შეიძლება იყოს 3 და -3, ვინაიდან ორივეს კვადრატი გვაძლევს 9-ს. ამდენად, რომ ავიცილოთ თავიდან გაურკვევლობა, $\sqrt[n]{b}$ მნიშვნელობად, როცა იგი არსებობს, ავიღოთ მისი დადებითი მნიშვნელობა. ამრიგად, $\sqrt{9} = 9^{1/2} = 3$. სწორედ ამიტომ გვაძლევს კალკულატორი პასუხად 3-ს, როცა ვითვლით $\sqrt{9}$-ის მნიშვნელობას.

ახლა გავიხსენოთ, რომ თუ $\frac{p}{q}$ რაციონალური რიცხვია, მაშინ ხარისხი $b^{\frac{p}{q}}$ განისაზღვრება როგორც $(b^{1/q})^p$ ან ეკვივალენტური ფორმით $\sqrt[q]{b^p}$. მაგალითად,

$$2^{\frac{3}{2}} = (2^{1/2})^3 = (1.4142)^3 \approx 2.8283.$$

ხარისხი უარყოფითი რაციონალური მაჩვენებლით ასე განისაზღვრება

$$b^{-p/q} = \frac{1}{b^{p/q}}.$$

ამრიგად, $8^{-5/3} = \frac{1}{8^{5/3}} = \frac{1}{(8^{1/3})^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.

შემდეგი ცხრილის მეშვეობით ამოწერილია $a^n$ $(a>0)$ ხარისხის განმარტება $n$-ის ყველა რაციონალური მნიშვნელობისათვის.

ცხრილი 1.

| $a^n$ $(a>0)$-ის განსაზღვრა | მაგალითი |
|---|---|
| 1. ხარისხის მაჩვენებელი დადებითი მთელი რიცხვია, მაშინ $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ ($n$ რაოდენობა მამრავლი); | 1. $2^6 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 64$ (6 მამრავლი); |
| 2. თუ $n$ ნულის ტოლია, მაშინ $a^0 = 1$ | 2. $(-3)^0 = 1$; |

| | |
|---|---|
| ($0^0$ არ არის განსაზღვრული);<br>3. თუ $n$ დადებითი მთელია, მაშინ<br>$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $(a\neq 0)$;<br>4. თუ $n$ დადებითი მთელია, მაშინ<br>$a^{1/n}$ ან $\sqrt[n]{a}$<br>აღნიშნავს $n$–ური ხარისხის ფესვს;<br>5. თუ $n$ და $m$ დადებითი მთელი რიცხვებია, მაშინ<br>$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$;<br>6. თუ $n$ და $m$ დადებითი მთელი რიცხვებია, მაშინ<br>$a^{-m/n}=\frac{1}{a^{m/n}}$, $(a\neq 0)$; | 3. $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$;<br>4. $81^{1/2}=\sqrt{81}=9$;<br>5. $27^{2/3}=(\sqrt[3]{27})^2=9$;<br>6. $16^{-3/2}=\frac{1}{16^{3/2}}=\frac{1}{64}$ |

შევნიშნოთ, რომ ამ ცხრილის პირველი სამი განმარტება სამართლიანია აგრეთვე $a$-ს უარყოფითი მნიშვნელობზისათვისაც. მეოთხე განმარტებას ადგილი აქვს $a$-ს უარყოფითი მნიშვნელობებისთვისაც როცა $n$ კენტია და $a$-ს მხოლოდ არაუარყოფითი მნიშვნელობებისათვის, როცა $n$ ლუწია.

ამრიგად

$(-27)^{1/3}=\sqrt[3]{-27}=-3$, რადგან $n$ კენტია;

$(-9)^{1/2}$ არ აქვს ნამდვილი მნიშვნელობა, რადგან $n$ ლუწია.

შევნიშნოთ, რომ $a^n$ აქვს მნიშვნელობა ნებისმიერი ნამდვილი $n$ რიცხვისათვის. მაგალითად, კალკულატორის გამოყენებით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ $2^{\sqrt{2}}\approx 2.665144$.

ხარისხებზე მოქმედებებისას მეტად მნიშვნელოვანია, ვიცოდეთ შემდეგი ხუთი ფორმულა:

ცხრილი 2.

| წესი | მაგალითი |
|---|---|
| 1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ | $x^3\cdot x^4=x^{3+4}=x^7$ |
| 2. $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $(a\neq 0)$ | $\frac{x^6}{x^3}=x^{6-3}=x^3$ |
| 3. $(a^m)^n=a^{mn}$ | $(x^3)^4=x^{3\cdot 4}=x^{12}$ |
| 4. $(ab)^n=a^n\cdot b^n$ | $(3x)^3=3^3\cdot x^3=27x^3$ |
| 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $(\mathrm{b}\neq 0)$ | $\left(\frac{x}{2}\right)^3=\frac{x^3}{2^3}=\frac{x^3}{8}$ |

ეს წესები სამართლიანია ნებისმიერი ნამდვილი $a$, $b$, $m$ და $n$ რიცხვებისათვის, როდესაც მნიშვნელი არ უდრის ნულს.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

**მაგალითი 1.** გავამარტივოთ გამოსახულება:

$$a.\ (3x^2)(4x^3) \qquad b.\ \frac{16^{5/4}}{16^{1/2}} \qquad c.\ (6^{2/3})^3 \qquad d.\ (x^3y^{-2})^{-2} \qquad e.\ \left(\frac{y^{3/2}}{x^{1/4}}\right)^{-2}$$

**ამოხსნა:**

$$a.\ (3x^2)(4x^3)=12x^{2+3}=12x^5;$$

$$b.\ \frac{16^{5/4}}{16^{1/2}}=16^{5/4-1/2}=16^{3/4}=(\sqrt[4]{16})^3=2^3=8;$$

$$c.\ (6^{2/3})^3=6^{(2/3)3}=6^{6/3}=6^2=36;$$

$$d.\ (x^3y^{-2})^{-2}=(x^3)^{-2}(y^{-2})^{-2}=x^{3(-2)}y^{-2(-2)}=x^{-6}y^4=\frac{y^4}{x^6};$$

$$e.\ \left(\frac{y^{3/2}}{x^{1/4}}\right)^{-2}=\frac{y^{(3/2)(-2)}}{x^{(1/4)(-2)}}=\frac{y^{-3}}{x^{-1/2}}=\frac{x^{1/2}}{y^3}$$

ზემოაღნიშნული წესები შეგვიძლია გამოვიყენოთ გამოსახულებების გასამარტივებლად, რომლებიც რადიკალებს შეიცავენ.

**მაგალითი 2.** ვიგულისხმოთ, რომ $x$, $y$, $m$ და $n$ დადებითი რიცხვებია და გავამარტივოთ გამოსახულება.:

$$a.\ \sqrt[4]{16x^4y^8} \qquad b.\ \sqrt{12m^3n}\cdot\sqrt{3m^5n} \qquad c.\ \frac{\sqrt[3]{-27x^6}}{\sqrt[3]{8y^3}}$$

**ამოხსნა:**

$$a.\ \sqrt[4]{16x^4y^8}=(16x^4y^8)^{1/4}=16^{1/4}\cdot x^{4/4}y^{8/4}=2xy^2;$$

$$b.\ \sqrt{12m^3n}\cdot\sqrt{3m^5n}=\sqrt{36m^8n^2}=(36m^8n^2)^{1/2}=36^{1/2}m^{8/2}n^{2/2}=6m^4n;$$

$$c.\ \frac{\sqrt[3]{-27x^6}}{\sqrt[3]{8y^3}}=\frac{(-27x^6)^{1/3}}{(8y^3)^{1/3}}=\frac{-27^{1/3}x^{6/3}}{8^{1/3}y^{3/3}}=-\frac{3x^2}{2y}.$$

**მაგალითი 3.** წარმოვადგინოთ $\frac{3x}{2\sqrt{x}}$ წილადის მნიშვნელი რაციონალური გამოსახულებით.

**ამოხსნა:**

$$\frac{3x}{2\sqrt{x}}=\frac{3x}{2\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{3x\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2}}=\frac{3x\sqrt{x}}{2x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

**მაგალითი 4.** წარმოვადგინოთ $\frac{3\sqrt{x}}{2x}$ წილადის მნიშვნელი რაციონალური გამოსახულებით.

**ამოხსნა:**

$$\frac{3\sqrt{x}}{2x}=\frac{3\sqrt{x}}{2x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x^2}}{2x\sqrt{x}}=\frac{3x}{2x\sqrt{x}}=\frac{3}{2\sqrt{x}}$$

## ალგებრული გამოსახულება

ჩვენ ხშირად შეგვხვდება შემდეგი სახის ალგებრული გამოსახულებები

$$2x^{4/3}-x^{1/3}+1 \qquad 2x^2-x-\frac{2}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{3xy+2}{x+1}, \qquad 2x^3+2x+1.$$

$ax^n$ სახის ალგებრულ გამოსახულებას, სადაც $a$ კოეფიციენტი ნამდვილი რიცხვია და $n$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ეწოდება ***ერთწევრი.*** მაგალითად, $5x^3$ არის ერთწევრი. ორი და მეტი ერთწევრის ჯამს ***მრავალწევრი*** ეწოდება. მაგალითად,

$$x^2+3x+2 \qquad x^3+7 \qquad x^4+3x^2+5 \qquad x^3y^2+xy-2x$$

მრავალწევრები ანუ ***პოლინომები.***

მუდმივ წევრებს და წევრებს, რომლებიც ერთი და იმავე ცვლადებს შეიცავენ ერთი და იმავე ხარისხის მაჩვენებლით, ***მსგავსი წევრები*** ეწოდებათ. მსგავსი ერთწევრები შეგვიძლია შევაერთოთ მათი რიცხვითი კოეფიციენტების შეკრებითა და გამოკლებით. მაგალითად,

$$5x+3x=8x \quad \text{და} \quad \frac{1}{3}x^2y+2x^2y=\frac{7}{2}x^2y.$$

ფაქტობრივად, ეს წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის **დისტრიბუციულობის** თვისებას:

$$ab+ac=a(b+c).$$

ამრიგად, რომ შევკრიბოთ ან გამოვაკლოთ ორი ალგებრული გამოსახულება, ამისათვის უნდა გავხსნათ ფრჩხილები და შევაერთოთ მსგავსი წევრები. ჯამი უნდა დავწეროთ მარცხნიდან მარჯვნივ ხარისხის მაჩვენებლის კლების მიხედვით.

**მაგალითი 5.** გავამარტივოთ შემდეგი ალგებრული გამოსახულება:

$$(2x^4+3x^3+4x+6)-(3x^4+9x^3+3x^2)=$$
$$2x^4+3x^3+4x+6\ -3x^4-9x^3-3x^2=$$
$$2x^4-3x^4\ +3x^3-9x^3-3x^2+4x+6=$$
$$-x^4\ -6x^3-3x^2+4x+6$$

ვიტყვით, რომ ალგებრული გამოსახულება გამარტივებულია, თუ მასში არ გვაქვს მსგავსი წევრები.

როცა ალგებრულ გამოსახულებებს ერთმანეთზე ვამრავლებთ, ერთი გამოსახულების თითოეული წევრი უნდა გადავამრავლოთ მეორე გამოსახულების თითოეულ

წევრზე და შედეგად მიღებული გამოსახულება გავამარტივოთ ანუ მსგავსი წევრები შევკრიბოთ.

**მაგალითი 6.** შევასრულოთ მითითებული ოპერაცია:

$$a)\quad (x^2+1)(3x^2+10x+3)$$

$$b)\quad (e^t+e^{-t})e^t-e^t(e^t-e^{-t})$$

**ამოხსნა:**

$$a)\quad (x^2+1)(3x^2+10x+3)=x^2(3x^2+10x+3)+1(3x^2+10x+3)$$
$$=3x^4+10x^3+3x^2+3x^2+10x+3$$
$$=3x^4+10x^3+6x^2+10x+3$$

$$b)\quad (e^t+e^{-t})e^t-e^t(e^t-e^{-t})=e^{2t}+e^0-e^{2t}+e^0$$
$$=e^{2t}-e^{2t}+e^0+e^0$$
$$=1+1=2$$

ხშირად გამოიყენება გამრავლების შემოკლებული ფორმულები, რომლებიც შემდეგი ცხრილითაა მოცემული.

ცხრილი 3.

| ფორმულა | მაგალითი |
|---|---|
| $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ | $(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$ $=4x^2+12xy+9y^2$ |
| $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ | $(4x-2y)^2=(4x)^2-2(4x)(2y)+(2y)^2$ $=16x^2-16xy+4y^2$ |
| $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ | $(2x+y)(2x-y)=(2x)^2-(y)^2$ $=4x^2-y^2$ |

## მამრავლებად დაშლა

მამრავლებად დაშლა არის მოქმედება, რომლის შედეგად ალგებრული გამოსახულება წარმოიდგინება ალგებრული გამოსახულებების ნამრავლის სახით. მაგალითად, დისტრიბუციულობის თვისების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$3x^2+x=x(3x+1).$$

ალგებრული გამოსახულება რომ დავშალოთ მამრავლებად პირველად უნდა შევამოწმოთ, ხომ არ შეიცავენ წევრები საერთო მამრავლს. თუ საერთო მამრავლები აქვთ, მაშინ საერთო მამრავლლები ფრჩხილებს გარეთ უნდა გავიტანოთ. მაგალითად, $2a^2x+4ax+6a$ ალგებრულ გამოსახულებაში $2a$ არის საერთო მამრავლი, ამიტომ

$$2a^2x+4ax+6a=2a\cdot ax+2a\cdot 2x+2a\cdot 3=2a(ax+2x+3)$$

**მაგალითი 7.** დავშალოთ მამრავლებად შემდეგი ალგებრული გამოსახულებები საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანის ხერხით:

$$a)\quad -0.3t^2+3t \quad b)\quad 2x^{3/2}-3x^{1/2} \quad c)\quad 4x(x+1)^{1/2}-2x^2\left(\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-1/2}$$

**ამოხსნა:**

$$a)\quad -0.3t^2+3t=-0.3t(t-10)$$

$$b)\quad 2x^{3/2}-3x^{1/2}=x^{1/2}(2x-3)$$

$$c)\quad 4x(x+1)^{1/2}-2x^2\left(\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-1/2}=4x(x+1)^{1/2}-x^2(x+1)^{-1/2}$$

$$=x(x+1)^{-1/2}[4(x+1)^{1/2}(x+1)^{1/2}-x]$$

$$=x(x+1)^{-1/2}[4(x+1)-x]$$

$$=x(x+1)^{-1/2}[4x+4-x]=x(x+1)^{-1/2}[3x+4]$$

ხშირად გამოსახულების მამრავლებად დაშლა შესაძლებელია დაჯგუფების გზით.
**მაგალითი 8.** დავშალოთ მამრავლებად:

$$a)\quad 2ax+2ay+bx+by \qquad b)\quad 3x\sqrt{y}-4-2\sqrt{y}+6x$$

**ამოხსნა:**

$a)$ პირველ ორ შესაკრებში საერთო მამრავლია $2a$, ხოლო მესამე და მეოთხე შესაკრებებში კი საერთო მამრავლია $b$. ამიტომ

$$2ax+2ay+bx+by=2a(x+y)+b(x+y)$$

რადგან ამ უკანასკნელში $(x+y)$ საერთო მამრავლია, ამიტომ იგი შეგვიძლია გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ:

$$2a(x+y)+b(x+y)=(2a+b)(x+y)$$

$$b)\quad 3x\sqrt{y}-4-2\sqrt{y}+6x=3x\sqrt{y}-2\sqrt{y}+6x-4$$

$$=\sqrt{y}(3x-2)+2(3x-2)$$

$$=(3x-2)(\sqrt{y}+2)$$

მამრავლებად დაშლისათვის სასარგებლოა აგრეთვე შემოკლებული გამრავლების ფორმულები, რომლებიც შემდეგი ცხრილით არის მოცემული.

ცხრილი 4.

| ფორმულა | მაგალითი |
|---|---|
| კვადრატების სხვაობა<br>$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ | $x^2-36=(x-6)(x+6)$<br>$8x^2-18y^2=2(4x^2-9y^2)$<br>$=2(2x-3y)(2x+3y)$<br>$9-a^6=(3-a^3)(3+a^3)$ |

| | |
|---|---|
| სრული კვადრატი $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ | $x^2+8x+16=(x+4)^2$ $4x^2-4xy+y^2=(2x-y)^2$ |
| კუბების ჯამი $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ | $x^3+8=x^3+2^3$ $=(x+2)(x^2-2x+4)$ |
| კუბების სხვაობა $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ | $8x^3-z^6=(2x)^3-(z^2)^3$ $=(2x-z^2)(4x^2+2xz^2+z^4)$ |

მთელ კოეფიციენტებიანი კვადრატული სამწევრის $px^2+qx+r$ დაშლა მამრავლებად ანუ $(ax+b)(cx+d)$ სახით წარმოდგენა, სადაც $a,b,c$ და $d$ აგრეთვე მთელი რიცხვებია, ამასთან $ac=p$, $ad+bc=q$ და $bd=r$ შესაძლებელია მხოლოდ შეზღუდული რაოდენობა სამწევრებისათვის. მაგალითად, $x^2-2x-3$ სამწევრის დაშლისას პირველ რიგში უნდა შევნიშნოთ, რომ $x^2$-ს კოეფიციენტი 1-ის ტოლია და ამიტომ $a$ და $c$ კოეფიციენტები უნდა იყოს ერთის ტოლი. ასევე, რადგან $r=-3$, ამიტომ $b$ და $d$ კოეფიციენტების მნიშვნელობები შეიძლება იყოს შესაბამისად 3 და -1 ან -3 და 1. მაგრამ რადგანაც ამ კოეფიციენტების ჯამი უნდა გვაძლევდეს -2-ს, ამიტომ დავადგენთ, რომ $b=-3$, $d=1$, საბოლოოდ გვექნება $x^2-2x-3=(x-1)(x+3)$.

## მრავალწევრის ფესვები

$n$-ური ხარისხის მრავალწევრს $x$ ცვლადის მიმართ აქვს შემდეგი სახე

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

სადაც $n$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ხოლო $a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$ ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $a_n\neq 0$. შესაბამისად, $n$-ური ხარისხის განტოლებას $x$ ცვლადის მიმართ აქვს შემდეგი სახე

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0.$$

მაგალითად,

$$-2x^5+8x^3-6x^2+3x+1=0$$

არის მე-5 ხარისხის მრავალწევრი $x$-ის მიმართ. ასეთი სახის განტოლების ***ფესვები*** არის $x$ ცვლადის ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ განტოლებას. მაგალითად, $x^3-3x^2+2x=0$ განტოლების ფესვები მარტივად შეგვიძლია მოვძებნოთ, თუ მას ასეთი სახით ჩავწერთ: $x(x^2-3x+2)=0$ ან $x(x-1)(x-2)=0$. რადგან ნამრავლი ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როცა ერთ-ერთი

თანამამრავლი ნულის ტოლია; ამიტომ დავასკვნით: $x=0, \quad x=1, \quad x=2$. მაშასადამე მოცემული განტოლების ფესვებია 0, 1 და 2.

გავიხსენოთ, რომ $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების ფესვების მოსაძებნად გვაქვს შემდეგი ფორმულა

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

## რაციონალური გამოსახულებები

მრავალწევრების შეფარდებას უწოდებენ ***რაციონალურ გამოსახულებას.*** რაციონალური გამოსახულებების მაგალითებია

$$\frac{6x-1}{2x+5}, \qquad \frac{3x^2y^3-2xy}{5x}, \qquad \frac{2}{5ab}.$$

რაციონალურ გამოსახულებებზე შეკრების, გამრავლების და გაყოფის ოპერაციები ზუსტად ისევე სრულდება, როგორც ჩვეულებრივ არითმეტიკულ წილადებზე. მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის თვისების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b},$$

სადაც $a,b$ და $c$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $b$ და $c$ განსხვავდებიან ნულისაგან. ანალოგიურად, საერთო მამრავლზე ***"შეკვეცით"*** ვღებულობთ

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x+2}{x-2}, \qquad (x\neq 2,3).$$

**მაგალითი 9.** გავამარტივოთ შემდეგი გამოსახულებები:

$$a)\ \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3} \qquad b)\ \frac{(x^2+1)^2(-2)+(2x)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

**ამოხსნა:**

$$a)\ \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} b)\ \frac{(x^2+1)^2(-2)+(2x)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} &= \frac{(x^2+1)[(x^2+1)(-2)+(2x)(2)(2x)]}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(x^2+1)(-2x^2-2+8x^2)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(x^2+1)(6x^2-2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

რაციონალური გამოსახულებების გამრავლების და გაყოფის ოპერაციები მოცემულია შემდეგი ცხრილით.

ცხრილი 5.

| მოქმედება | მაგალითი |
|---|---|
| თუ $P, Q, R$ და $S$ მრავალწევრებია, მაშინ | |
| **გადამრავლება** | |
| $\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS} \quad (Q,S\neq 0)$ | $\frac{2x}{y}\cdot\frac{(x+1)}{(y-1)}=\frac{2x(x+1)}{y(y-1)}=\frac{2x^2+2x}{y^2-y}$ |
| **გაყოფა** | |
| $\frac{P}{Q}:\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{S}{R}=\frac{PS}{QR} \quad (Q,R,S\neq 0)$ | $\frac{x^2+3}{y}:\frac{y^2+1}{x}=\frac{x^2+3}{y}\cdot\frac{x}{y^2+1}=\frac{x^3+3x}{y^3+y}$ |

როცა რაციონალურ გამოსახულებებს ერთნაირი მნიშვნელები აქვთ, მაშინ მათი შეკრების და გამოკლების ოპერაციების სრულდება შემდეგი ცხრილის მიხედვით.

ცხრილი 6.

| მოქმედება | მაგალითი |
|---|---|
| თუ $P, Q$ და $R$ მრავალწევრებია, მაშინ | |
| **შეკრება** | |
| $\frac{P}{R}+\frac{Q}{R}=\frac{P+Q}{R} \quad (R\neq 0)$ | $\frac{2x}{x+2}+\frac{6x}{x+2}=\frac{2x+6x}{x+2}=\frac{8x}{x+2}$ |
| **გამოკლება** | |
| $\frac{P}{R}-\frac{Q}{R}=\frac{P-Q}{R} \quad (R\neq 0)$ | $\frac{3y}{y-x}-\frac{y}{y-x}=\frac{3y-y}{y-x}=\frac{2y}{y-x}$ |

იმისათვის, რომ შევკრიბოთ ან გამოვაკლოთ ალგებრული წილადები, რომელთაც აქვთ სხვადასხვა მნიშვნელები, ამისათვის პირველ რიგში უნდა მოვძებნოთ ***უმცირესი საერთო მნიშვნელი (უსმ)*** და გამოვიყენოთ მე-6 ცხრილში მოცემული წესი.
ორი ან რამოდენიმე რაციონალური გამოსახულების უსმ-ს მოსაძებნად:

1. *დავშალოთ თითოეული მნიშვნელი მარტივ მამრავლებად;*
2. *თითოეული მნიშვნელიდან ავიღოთ განსხვავებული მარტივი მამრავლები უმაღლესი ხარისხის მაჩვენებლით და გადავამრავლოთ.*

**მაგალითი 10.** გავამარტივოთ გამოსახულებები:

$$a)\quad \frac{2x}{x^2+1}+\frac{6(3x^2)}{x^3+2}, \qquad\qquad b)\quad \frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}.$$

**ამოხსნა:**

$$a)\quad \frac{2x}{x^2+1}+\frac{6(3x^2)}{x^3+2}=\frac{2x(x^3+2)+6(3x^2)x^2+1}{(x^2+1)(x^3+2)}$$
$$=\frac{2x^4+4x+18x^4+18x^2}{(x^2+1)(x^3+2)};$$
$$=\frac{20x^4+18x^2+4x}{(x^2+1)(x^3+2)}=\frac{2x(10x^3+9x+2)}{(x^2+1)(x^3+2)}$$
$$b)\quad \frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}=\frac{-h}{x(x+h)}$$

რაციონალური გამოსახულებების გამარტივების ტექნიკა შეიძლება გამოყენებული იქნეს ალგებრული წილადების გასამარტივებლად, რომლებშიც მრიცხველი და მნიშვნელი არ არიან მრავალწევრები. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

**მაგალითი 11.** გავამარტივოთ შემდეგი გამოსახულებები:

$$a)\quad \frac{1+\dfrac{1}{x+1}}{x-\dfrac{4}{x}},\qquad\qquad b)\quad \frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}+y^{-2}}.$$

**ამოხსნა:**

$$a)\quad \frac{1+\dfrac{1}{x+1}}{x-\dfrac{4}{x}}=\frac{\dfrac{x+1+1}{x+1}}{\dfrac{x^2-4}{x}}=\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x}{x^2-4}=\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x}{(x+1)(x-2)}$$

$$b)\quad \frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}+y^{-2}}=\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}}=\frac{\dfrac{y+x}{xy}}{\dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2}}=\frac{y+x}{xy}\cdot\frac{x^2y^2}{y^2-x^2}=\frac{y+x}{xy}\cdot\frac{(xy)^2}{(y-x)(y+x)}=\frac{xy}{y-x}$$

## უტოლობები

რიცხვითი უტოლობის ძირითადი თვისებები მოცემულია შენდეგ ცხრილში

ცხრილი 7.

| თვისება | მაგალითი |
|---|---|
| თუ $a$, $b$ და $c$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ: **თვისება 1.** თუ $a<b$ და $b<c$, მაშინ $a<c$; | $2<3$ და $3<8$, მაშინ $2<8$; |
| **თვისება 2.** თუ $a<b$, მაშინ $a+c<b+c$; | $-5<-3$, მაშინ $-5+2<-3+2$ ანუ $-3<-1$; $-5<-3$ და რადგან $2>0$ ამიტომ |

| | |
|---|---|
| **თვისება 3.** თუ $a<b$ და $c>0$, მაშინ $ac<bc$;<br>**თვისება 4 .** თუ $a<b$ და $c<0$, მაშინ $ac>bc$. | $(-5)2<(-3)2$ ე.ი. $-10<-6$;<br>$-2<5$ და რადგან $-4<0$ ამიტომ<br>$(-2)(-4)>(5)(-4)$ ე.ი. $8>-20$. |

მეოთხე თვისება გვეუბნება, რომ უტოლობის ორივე მხარის უარყოფით რიცხვზე გადამრავლებისას უტოლობის ნიშანი იცვლება საპირისპირო უტოლობით. ეს თვისებები სამართლიანია არამკაცრი უტოლობის ≤, >, ≥ ნიშნებისთვისაც.

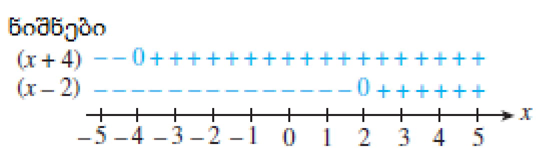
რიცხვითი უტოლობის ეს თვისებები შეიძლება გამოვიყენოთ აგრეთვე ცვლადის შემცველი უტოლობების ამოსახსნელად. ნამდვილ რიცხვს ეწოდება ცვლადის შემცველი ***უტოლობის ამონახსენი,*** თუ მისი ჩასმით უტოლობაში იგი გადაიქცევა ჭეშმარიტ უტოლობად. ყველა იმ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას ***ამონახსნთა სიმრავლე*** ეწოდება. უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლის ჩასაწერად ინტერვალებს გამოვიყენებთ.

**მაგალითი 12.** ვიპოვეთ სიმრავლე ნამდვილი რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $-1\le 2x-5<7$.

**ამოხსნა:** თუ ორმაგი უტოლობის ორივე მხარეს მივუმატებთ 5-ს, მივიღებთ $4\le 2x<12$. შემდეგ, თუ გადავამრავლებთ უტოლობის ორივე მხარეს $\dfrac{1}{2}$-ზე, საბოლოოდ გვექნება $2\le x<6$. ამრიგად უტოლობის ამონახსენია $x$-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლებიც მოთავსებულია $[2,6)$ ინტერვალში.

**მაგალითი 13.** ამოვხსნათ უტოლობა $x^2+2x-8<0$.

**ამოხსნა:** შევნიშნოთ, რომ $x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$. ამიტომ მოცემული უტოლობა ეკვივალენტურია $(x+4)(x-2)<0$ უტოლობისა. რადგან ორი რიცხვის ნამრავლი უარყოფითია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თანამამრავლებს საწინააღმდეგო ნიშანი აქვთ, ამიტომ ამ უტოლობას ამოვხსნით მამრავლების ნიშნის შესწავლით. ცხადია, რომ $x+4>0$ როცა $x>-4$ და $x+4<0$ როცა $x<-4$. ასევე $x-2>0$ როცა $x>2$ და $x-2<0$ როცა $x<2$. ამ მამრავლების ნიშნები ასახულია ქვემოთ ნახაზზე

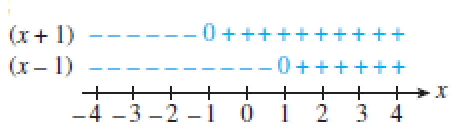



ნახაზი 4.

ამ ნახაზიდან ჩვენ ვხედავთ, რომ $x+4$ და $x-2$ მამრავლებს საწინააღმდეგო ნიშნები აქვთ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x$ მკაცრად მოთავსებულია -4 და 2 შორის. მაშასადამე, უტოლობის ამონახსენია (-4,2) ინტერვალი.

**მაგალითი 14.** ამოვხსნათ უტოლობა $\dfrac{x+1}{x-1}\ge 0$.

**ამოხსნა:** შეფარდება $(x+1)/(x-1)$ მკაცრად დადებითია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მრიცხველს და მნიშვნელს ერთნაირი ნიშნები აქვთ. $x+1$ და $x-1$ მამრავლების ნიშნები მოცემულია ნახაზზე




ნახაზი 5.

ნახაზიდან ჩანს, რომ $x+1$ და $x-1$ მამრავლებს ერთნაირი ნიშნები აქვთ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x<-1$ ან $x>1$ . შეფარდება $(x+1)/(x-1)$ ნულის ტოლი ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=-1$. მაშასადამე, უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $(-\infty,-1]$ და $(1,\infty)$ ინტერვალების გაერთიანება.

### აბსოლუტური სიდიდე და მისი თვისებები

$a$ რიცხვის ***აბსოლუტური სიდიდე,*** რომელიც ასე აღინიშნება $|a|$, განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

რადგან $-a$ დადებითი რიცხვია, როცა $a$ უარყოფითია, ამიტომ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე ყოველთვის არაუარყოფითია. მაგალითად, $|5|=5$ და $|-5|=-(-5)=5$. გეომეტრიულად $|a|$ არის მანძილი რიცხვით ღერძზე სათავიდან $a$ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე.
რიცხვის აბსოლუტური სიდიდის თვისებები მოცემულია შემდეგი ცხრილით

ცხრილი 8.

| თვისება | მაგალითი |
|---|---|
| თუ $a$ და $b$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ | |
| **თვისება 1.** $\lvert -a\rvert=\lvert a\rvert$ | $\lvert -3\rvert=-(-3)=3=\lvert 3\rvert$ |
| **თვისება 2.** $\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\lvert b\rvert$ | $\lvert (2)(-3)\rvert=\lvert -6\rvert=6=(2)(3)=\lvert 2\rvert\lvert 3\rvert$ |
| **თვისება 3.** $\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ | $\left\lvert \frac{(-3)}{(-4)}\right\rvert=\left\lvert \frac{3}{4}\right\rvert=\frac{3}{4}=\frac{\lvert -3\rvert}{\lvert -4\rvert}$ |
| **თვისება 4.** $\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ | $\lvert 8+(-5)\rvert=\lvert 3\rvert=3\le\lvert 8\rvert+\lvert -5\rvert=13$ |

მე-4 თვისებას ეწოდება ***სამკუთხედის უტოლობა.***
**მაგალითი 15.** გამოვითვალოთ შემდეგი გამოსახულებები

$$a)\quad |\pi-5|+3,\qquad b)\quad |\sqrt{3}-2|+|2-\sqrt{3}|$$

**ამოხსნა:**

$a$) რადგან $\pi-5<0$, ამიტომ $|\pi-5|=-(\pi-5)$. მაშასადამე, $|\pi-5|+3=-(\pi-5)+3=8-\pi$.

$b$) რადგან $\sqrt{3}-2<0$, ამიტომ $\left|\sqrt{3}-2\right|=-(\sqrt{3}-2)$. მაშასადამე,

$$\left|\sqrt{3}-2\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|=-(\sqrt{3}-2)+2-\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}=2(2-\sqrt{3})$$

**მაგალითი 16.** ამოვხსნათ უტოლობები: $|x|\le 5$ და $|x|\ge 5$.

**ამოხსნა:** ჯერ განვიხილოთ უტოლობა $|x|\le 5$. როცა $x\ge 0$, მაშინ $|x|=x$ და უტოლობა მიიღებს სახეს $x\le 5$. როცა $x<0$, მაშინ $|x|=-x$ და უტოლობა მიიღებს სახეს $-x\le 5$ ე.ი. $x\ge -5$. ამრიგად $|x|\le 5$ უტოლობა ტოლფასია $-5\le x\le 5$ უტოლობისა.

ანალოგიური განხილვით დავადგენთ, რომ $|x|\ge 5$ უტოლობის ამონახსნია $x$-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $x\le -5$ და $x\ge 5$.

**მაგალითი 17.** ამოვხსნათ უტოლობა $|2x-3|\le 1$.

**ამოხსნა:** წინა მაგალითის მიხედვით დავასკვნით, რომ ეს უტოლობა ტოლფასია $-1\le 2x-3\le 1$ უტოლობისა. ამრიგად, გვექნება $2\le 2x\le 4$ ანუ $1\le x\le 2$ და საბოლოო ამონახსნია $[1,2]$ ინტერვალი.

## სავარჯიშო

**გაამარტივეთ გამოსახულებები:**

**1.** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^0$ **2.** $\left[\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3}\right]^{-2}$ **3.** $\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^{-3}$ **4.** $\left(\dfrac{7^{-5}\cdot 7^2}{7^{-2}}\right)^{-1}$ **5.** $\dfrac{16^{5/8}16^{1/2}}{16^{7/8}}$ **6.** $\dfrac{6^{25}6^{-19}}{6^{-14}}$

**ჩაწერეთ შემდეგი გამოსახულებები დადებითი ხარისხის მაჩვენებლის გამოყენებით:**

**7.** $(xy)^{-2}$ **8.** $\dfrac{x^{-1/3}}{x^{1/2}}$ **9.** $\sqrt{x^{-1}}\cdot\sqrt{9x^{-3}}$ **10.** $(x-y)(x^{-1}+y^{-1})$

**ცვლადების დადებითი მნიშვნელობებისათვის გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:**

**11.** $\dfrac{x^{3/4}}{x^{-1/4}}$ **12.** $\left(\dfrac{x^3}{-27y^{-6}}\right)^{-2/3}$ **13.** $\left(\dfrac{e^x}{e^{x-2}}\right)^{-1/2}$ **14.** $\left(\dfrac{x^{-3}}{y^{-2}}\right)^2\left(\dfrac{y}{x}\right)^4$ **15.** $\dfrac{(r^n)^4}{r^{5-2n}}$ **16.** $\sqrt{81x^6y^{-4}}$

**დაიყვანეთ რაციონალურ გამოსახულებაზე შემდეგი წილადების მნიშვნელები:**

**17.** $\dfrac{2y}{\sqrt{3y}}$ **18.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **19.** $\dfrac{3}{\sqrt{xy}}$ **20.** $\dfrac{5x^2}{\sqrt{3x}}$

**დაიყვანეთ რაციონალურ გამოსახულებაზე შემდეგი წილადების მრიცხველები:**

**21.** $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3}$ **22.** $\sqrt{\dfrac{2y}{x}}$ **23.** $\sqrt[3]{\dfrac{2x}{3y}}$ **24.** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2z}}{y}$

**შეასრულეთ მითითებული მოქმედებები:**

**25.** $(7x^2-2x+5)+(2x^2+5x-4)$ **26.** $(3x^2+5xy+2y)+(4-3xy-2y^2)$

**27.** $3x^2-\{x^2+1-x[x-(2x-1)]\}+2$ **28.** $-\dfrac{3}{4}y-\dfrac{1}{4}x+100+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y-120$

**29.** $3\sqrt{8}+8-2\sqrt{y}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}-\dfrac{3}{4}\sqrt{y}$ **30.** $(5x+2)(3x-4)$ **31.** $(a+5)^2$ **32.** $(x+2y)^2$

**33.** $(3x+2)(2-3x)$ **34.** $(x^{1/2}+1)\left(\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)-(x^{1/2}-1)\left(\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)$ **35.** $2(t+\sqrt{t})^2-2t^2$

**გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ უდიდესი საერთო მამრავლი:**

**36.** $4x^5-12x^4-6x^3$ **37.** $4x^2y^2z-2x^5y^2+6x^3y^2z^2$ **38.** $3x^{2/3}-2x^{1/3}$ **39.** $2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2}$

**40.** $2x^{-5/2}-\dfrac{3}{2}x^{-3/2}$

**დაშალეთ მამრავლებად შემდეგი გამოსახულებები:**

**41.** $6ac+3bc-4ad-2bd$ **42.** $3x^3-x^2+3x-1$ **43.** $4a^2-b^2$ **44.** $12x^2-3y^2$

**45.** $10-14x-12x^2$ **46.** $3x^2-4x-4$ **47.** $(x+y)^2-1$ **48.** $x^6+125$

**შეასრულეთ მითითებული მოქმედებები და გაამარტივეთ გამოსახულებები:**

**49.** $(x^2+y^2)x-xy(2y)$ **50.** $2(x-1)(2x+2)^3\left[4(x-1)+(2x+2)\right]$

**51.** $(x^2+1)(4x^3-3x^2+2x)-(x^4-x^3+x^2)(2x)$

**იპოვეთ შემდეგი განტოლების ფესვები მამრავლებად დაშლის გზით:**

**52.** $x^2+x-12=0$ **53.** $3x^2-x-4=0$ **54.** $4t^2+2t-2=0$ **55.** $-6x^2+x+12=0$

**56.** $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$ **57.** $\frac{1}{2}a^2 + a - 12 = 0$

ამოხსენით შემდეგი კვადრატული განტოლებები ამონახსნის ფორმულის გამოყენებით:

**58.** $4x^2 + 5x - 6 = 0$ **59.** $3x^2 - 4x + 1 = 0$ **60.** $8x^2 - 8x - 3 = 0$ **61.** $2x^2 + 7x - 15 = 0$

გაამარტივეთ გამოსახულებები:

**62.** $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$ **63.** $\frac{2a^2 - 3ab - 9b^2}{2ab^2 + 3b^3}$ **64.** $\frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{-2x^2 - x + 3}$ **65.** $\frac{(4x-1)(3) - (3x+1)(4)}{(4x-1)^2}$

შეასრულეთ აღნიშნული მოქმედებები და გაამარტივეთ გამოსახულებები:

**66.** $\frac{2a^2 - 2b^2}{b - a} \cdot \frac{4a + 4b}{a^2 + 2ab + b^2}$ **67.** $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{3x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$ **68.** $\frac{3x^2 - 4xy - 4y^2}{x^2 y} : \frac{(2y - x)^2}{x^3 y}$

**69.** $\frac{2x}{2x - 1} - \frac{3x}{2x + 5}$ **70.** $\frac{4}{x^2 - 9} - \frac{5}{x^2 - 6x + 9}$ **71.** $\frac{4x^2}{2\sqrt{2x^2 + 7}} + \sqrt{2x^2 + 7}$

**72.** $\frac{(x^2 + 1)^{1/2} - 2x^2 (x^2 + 1)^{-1/2}}{1 - x^2}$

იპოვეთ $x$ -ს ყველა მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ უტოლობებს:

**73.** $2x + 4 < 8$ **74.** $-6 > 4 + 5x$ **75.** $-6 < x - 2 < 4$ **76.** $0 \le x + 1 \le 4$

**77.** $x + 1 > 4$ ან $x + 2 < -1$ **78.** $(x + 3)(x - 5) \le 0$ **79.** $(2x - 3)(x - 1) \ge 0$

**80.** $\frac{x + 3}{x - 2} \ge 0$ **81.** $\frac{2x - 1}{x + 2} \le 4$

გაამარტივეთ გამოსახულებები:

**82.** $|-6 + 2|$ **83.** $\frac{|-12 + 4|}{|16 - 12|}$ **84.** $\sqrt{3}|-2| + 3|-\sqrt{3}|$ **85.** $|\pi - 1| + 2$ **86.** $|\sqrt{2} - 1| + |3 - \sqrt{2}|$

**87.** $|2\sqrt{3} - 3| - |\sqrt{3} - 4|$

## მეორე ლექცია

### დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე

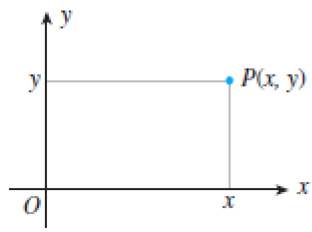
წინა ლექციაზე ჩვენ ვნახეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და წრფის (რიცხვითი ღერძის) წერტილებს შორის და წრფის წერტილის შესაბამის ნამდვილ რიცხვს ვუწოდეთ ამ წერტილის კოორდინატი. ამ შესაბამისობით ჩვენ მივდივართ კოორდინატთა სისტემამდე წრფეზე (ერთგანზომილებიანი სივრცე).

სიბრტყის წერტილების წარმოდგენა ანალოგიური გზით შესაძლებელია დეკარტეს კოორდინატთა სისტემით (ორგანზომილებიანი სივრცე), რომელიც აგებულია შემდეგნაირად: ავიღოთ ორი ურთიერთპერპენდიკულარული წრფე, რომელთაგან ერთერთი ჰორიზონტალური წრფეა. ეს წრფეები იკვეთებიან $O$ წერტილში, რომელსაც ***სათავე*** ეწოდება. ჰორიზონტალურ წრფეს ვუწოდოთ $x$ ***ღერძი*** ანუ ***აბსცისთა ღერძი*** და ვერტიკალურ წრფეს ვუწოდოთ $y$ ***ღერძი*** ანუ ***ორდინატთა ღერძი.*** $x$ ღერძზე აღებული მასშტაბის ერთეულის მიხედვით დადებითი რიცხვები დალაგებულია სათავიდან მარჯვნივ, ხოლო უარყოფითი რიცხვები - სათავიდან მარცხნივ. ანალოგიურად, $y$ ღერძზე აღებული იგივე მასშტაბის ერთეულის მიხედვით დადებითი რიცხვები დალაგებულია სათავიდან ზემოთ, ხოლო უარყოფითი რიცხვები - სათავიდან ქვემოთ.

კოორდინატთა სისტემის აღების შემდეგ სიბრტყის ყოველი წერტილი ცალსახად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ რიცხვთა ***დალაგებული წყვილით*** $(x, y)$, სადაც $x$ პირველი რიცხვია და $y$ მეორე რიცხვი. ამის საჩვენებლად, ვთქვათ, $P$ არის სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი და დაუშვათ ამ წრტილიდან პერპენდიკულარები $x$ და $y$ ღერძებზე შესაბამისად. ვთქვათ, $x$ არის $P$ წერტილიდან დაშვებული პერპენდიკულარის $x$ ღერძთან გადაკვეთის წერტილის შესაბამისი რიცხვი. ანალოგიურად, ვთქვათ, $y$ არის $P$ წერტილიდან დაშვებული პერპენდიკულარის $y$ ღერძთან გადაკვეთის წერტილის შესაბამისი რიცხვი.

პირიქით, როცა მოცემულია დალაგებული წყვილი $(x, y)$, სადაც $x$ პირველი რიცხვია და $y$ მეორე რიცხვი, მაშინ ცალსახად განისაზღვრება სიბრტყის $P$ წერტილი შემდეგნაირად: ავიღოთ $x$ ღერძზე წერტილი, რომლის შესაბამისი ნამდვილი რიცხვია $x$ და ამ წერტილზე გავავლოთ $y$ ღერძის პარალელური წრფე. შემდეგ ავიღოთ $y$ ღერძზე წერტილი, რომლის შესაბამისი ნამდვილი რიცხვია $y$ და ამ წერტილზე გავავლოთ $x$ ღერძის პარალელური წრფე. ამ ორი გავლებული წრფის გადაკვეთის წერტილი იქნება $P$ წერტილი.

$(x, y)$ დალაგებულ წყვილში $x$-ს ეწოდება ***აბსცისა,*** ან $x$ ***კოორდინატი;*** $y$-ს ეწოდება ***ორდინატი,*** ან $y$ ***კოორდინატი;*** $x$ და $y$ რიცხვების წყვილს უწოდებენ $P$ ***წერტილის კოორდინატებს.***




ნახაზი 6.

## ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულა. წრეწირის განტოლება

დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის უშუალო გამოყენებით შეგვიძლია გამოვითვალოთ სიბრტყეზე ორ წერტილს შორის მანძილი ამ წერტილების კოორდინატების გამოყენებით. მაგალითად, დაუშვათ, რომ $P_1(x_1, y_1)$ და $P_2(x_2, y_2)$ სიბრტყის ორი წერტილია. მაშინ ამ წერტილებს შორის მანძილი $d$ შეგვიძლია გამოვითვალოთ შემდეგი ფორმულით

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

ეს ფორმულა მარტივად მტკიცდება პითაგორას თეორემის გამოყენებით.

**მაგალითი 1.** გამოვითვალოთ მანძილი $(-4,3)$ და $(2,6)$ წერტილებს შორის.

**ამოხსნა:** ვთქვათ, $P_1(-4,3)$ და $P_2(2,6)$ სიბრტყის წერტილებია. მაშინ გვექნება

$$x_1 = -4 , \qquad y_1 = 3 , \qquad x_2 = 2 , \qquad y_2 = 6 .$$

მანძილის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$d = \sqrt{[2-(-4)]^2 + (6-3)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

**მაგალითი 2.** ვთქვათ, $P(x, y)$ წერტილი ძევს წრეწირზე ცენტრით $C(h,k)$ წერტილში და რადიუსით $r$. ვიპოვოთ $x$ და $y$ კოორდინატებს შორის დამოკიდებულება.

**ამოხსნა:** წრეწირის განმარტების თანახმად მანძილი $C(h,k)$ ცენტრიდან წრეწირის $P(x, y)$ წერტილამდე რადიუსის ტოლია. ამიტომ მანძილის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r .$$

ამ ტოლობის ორივე მხარის კვადრატში აყვანით მივიღებთ განტოლებას

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 ,$$

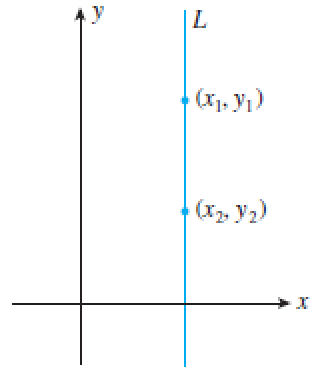
რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს $P(x, y)$ წერტილის კოორდინატები.

ამ მაგალითის შედეგზე დაყრდნობით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ***წრეწირის განტოლებას*** ცენტრით $C(h,k)$ წერტილში და რადიუსით $r$ აქვს სახე

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 .$$

## წრფის საკუთხო კოეფიციენტი

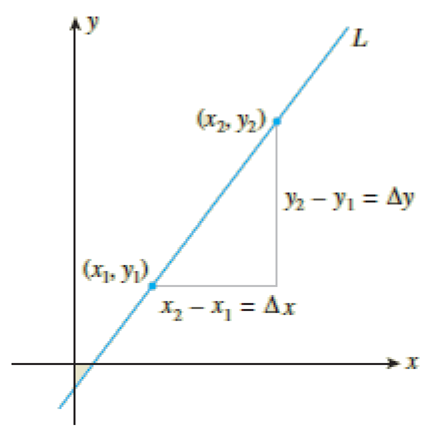
სიბრტყეზე მოცემული წრფის ალგებრული სახით ჩასაწერად გავიხსენოთ წრფის ზოგიერთი თვისება. ვთქვათ, $L$ აღნიშნავს წრფეს, რომელიც გადის ორ სხვადასხვა $(x_1, y_1)$ და $(x_2, y_2)$ წერტილზე. თუ $x_1 = x_2$, მაშინ $L$ ვერტიკალური წრფეა და საკუთხო კოეფიციენტი განუსაზღვრელია (ნახ. 7)




ნახაზი 7.

თუ $x_1 \neq x_2$, მაშინ $L$ წრფის საკუთხო კოეფიციენტს განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

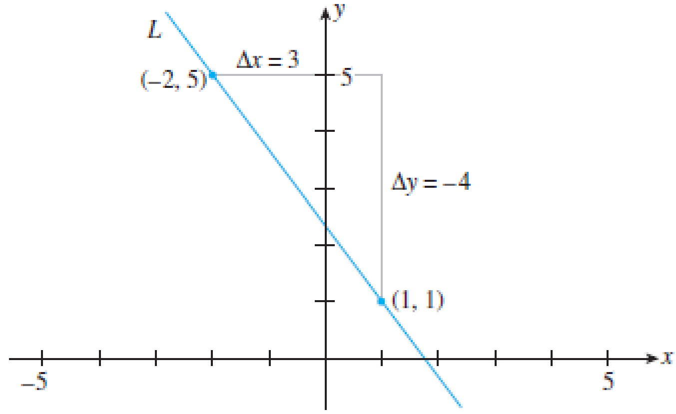



ნახაზი 8.

შევნიშნოთ, რომ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი მუდმივი რიცხვია, როცა იგი განსაზღვრულია. $\Delta y = y_2 - y_1$ არის $y$ ცვლადის ცვლილება ორდინატთა ღერძის გასწვრივ, ხოლო $\Delta x = x_2 - x_1$ არის $x$ ცვლადის ცვლილება აბსცითა ღერძის გასწვრივ. ნახაზიდან შეგვიძლია დავინახოთ, რომ $L$ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი $m$ არის $y$-ის ცვლილების ზომა $x$-ის მიმართ. კერძოდ, $x$-ის ერთი ერთეულით ცვლილებას, $\Delta x = 1$, შეესაბამება $y$-ის $m$ ერთეულით ცვლილება $\Delta y = m$.

**მაგალითი 3.** ავაგოთ წრფე, რომელიც გადის $(-2,5)$ წერტილზე და რომელსაც აქვს $-\frac{4}{3}$ საკუთხო კოეფიციენტით.

**ამოხსნა:** პირველ რიგში ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა და მოვძებნოთ $(-2,5)$ წერტილი.




ნახაზი 9.

შემდეგ, გავიხსენოთ რომ საკუთხო კოეფიციენტი $-\dfrac{4}{3}$ გვიჩვენებს, რომ $x$ -ის ერთი ერთეულით გაზრდა იწვევს $y$-ის $\dfrac{4}{3}$ ერთეულით შემცირებას. ეს ტოლფასია იმისა, რომ $x$-ის $3$ ერთეულით გაზრდა იწვევს $y$-ის $4$ ერთეულით შემცირებას. აქედან გამომდინარე, რადგან წრფე გადის $(-2,5)$ წერტილზე, ამიტომ მან ასევე უნდა გაიაროს $(1,1)$ წერტილზეც. ამ ორ წერტილზე წრფის გატარებით ავაგებთ საძიებელ წრფეს.

**მაგალითი 4.** ვიპოვოთ $(-1,1)$ და $(5,3)$ წერტილებზე გამავალი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი.

**ამოხსნა:** ავირჩიოთ $(x_1, y_1)$ წერტილად $(-1,1)$ წერტილი და $(x_2, y_2)$ წერტილად $(5,3)$ წერტილი. მაშინ $x_1 = -1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 3.$ ამიტომ მივიღებთ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{5-(-1)}.$$

შეეცადეთ დარწმუნდეთ, რომ იგივე შედეგს მივიღებდით, თუ $(-1,1)$ წერტილს ავიღებდით $(x_2, y_2)$ წერტილად, ხოლო $(5,3)$ წერტილს $(x_1, y_1)$ წერტილად.

ზოგადად, შევნიშნოთ, რომ ***ჰორიზონტალური წრფის საკუთხო კოეფიციენტი ნულის ტოლია.***

წრფის საკუთხო კოეფიციენტის გამოყენებით შეგვიძლია დავადგინოთ წრფეთა პარალელურობა.

***ორი წრფე პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი საკუთხო კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია ან მათი საკუთხო კოეფიციენტები არ არიან განსაზღვრული.***

**მაგალითი 5.** ვთქვათ, $L_1$ წრფე გადის $(-2,9)$ და $(1,3)$ წერტილებზე, ხოლო $L_2$ წრფე გადის $(-4,10)$ და $(3,-4)$ წერტილებზე. დავადგინოთ, არიან თუ არა ეს წრფეები პარალელური.

**ამოხსნა:** $L_1$ წრფის საკუთხო კოეფიციენტია

$$m_1 = \frac{3-9}{1-(-2)} = -2.$$

$L_2$ წრფის საკუთხო კოეფიციენტია

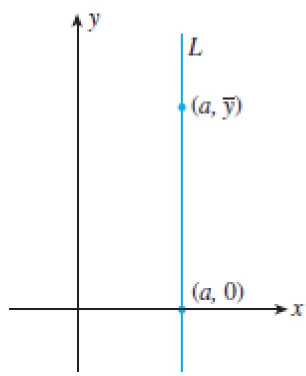
$$m_2 = \frac{-4-10}{3-(-4)} = -2.$$

რადგან $m_1 = m_2$, ამიტომ $L_1$ და $L_2$ წრფეები არიან პარალელური.

## წრფის განტოლებები

ჩვენ ახლა ვაჩვენებთ, რომ სიბრტყეზე მდებარე ყოველი წრფე შეიძლება წარმოვადგინოთ განტოლებით, რომელიც შეიცავს $x$ და $y$ ცვლადებს. წრფის წარმოდგენა განტოლების სახით სასარგებლოა იმ თვალსაზრისით, რომ წრფეებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელი იქნება ალგებრულად.

ვთქვათ, $L$ წრფე პარალელურია $y$ ღერძის (ანუ პერპენდიკულარულია $x$ ღერძის) (ნახ. 10).




ნახაზი 10.

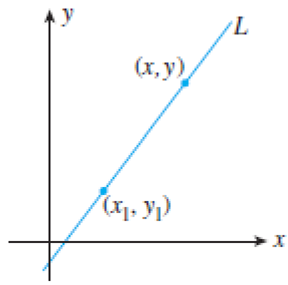
მაშინ $L$ წრფე გადაკვეთს $x$ ღერძს $(a,0)$ წერტილში, რომლის აბსცისაა $x=a$, სადაც $a$ რაიმე ნამდვილი რიცხვია. ნებისმიერ სხვა წერტილს $L$ წრფეზე აქვს სახე $(a,\bar{y})$, სადაც $\bar{y}$ შესაბამისი რიცხვია. მაშასადამე, ვერტიკალური $L$ წრფე აღიწერება ერთი პირობით

$$x = a$$

და, შესაბამისად, ეს არის $L$ წრფის განტოლება. მაგალითად, განტოლება $x=-2$ წარმოადგენს ვერტიკალურ წრფეს, რომელიც გავლებულია 2 ერთეულით მარცხნივ $y$ ღერძიდან. ასევე $x=3$ წარმოადგენს ვერტიკალურ წრფეს, რომელიც გავლებულია 3 ერთეულით მარჯვნივ $y$ ღერძიდან.

ახლა ვთქვათ, $L$ წრფე არ არის ვერტიკალური წრფე. მაშინ მას აქვს სავსებით განსაზღვრული საკუთხო კოეფიციენტი $m$. ვთქვათ, $(x_1, y_1)$ არის $L$ წრფეზე

მდებარე ფიქსირებული წერტილი და $(x, y)$ არის $(x_1, y_1)$ წერტილისაგან განსხვავებული ცვლადი წერტილი $L$ წრფეზე (ნახ. 11).




ნახაზი 11.

თუ გამოვიყენებთ საკუთხო კოეფიციენტის გამოსათვლელ ფორმულას, სადაც $(x_2, y_2) = (x, y)$, მივიღებთ

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავამრავლებთ $(x - x_1)$-ზე მივიღებთ წრფის განტოლებას შემდეგი ფორმით

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{1}$$

ამრიგად, წრფის განტოლება, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $m$ და გადის $(x_1, y_1)$ წერტილზე მოიცემა (1) განტოლებით. (1) განტოლებას ***წრფეთა კონის განტოლება ეწოდება.***

**მაგალითი 6.** ვიპოვოთ წრფის განტოლება, რომელის საკუთხო კოეფიციენტია 2 და გადის $(1,3)$ წერტილზე.

**ამოხსნა :** წრფეთა კონის განტოლების გამოყენებით მივიღებთ

$$y - 3 = 2(x - 1),$$

რომელიც გამარტივების შემდეგ ასე გადაიწერება

$$2x - y + 1 = 0.$$

საკუთხო კოეფიციენტის გამოყენებით შგვიძლია დავადგინოთ, პერპენდიკულარულია თუ არა მოცემული წრფეები.

***თუ $L_1$ და $L_2$ წრფეები არავერტიკალური წრფეებია შესაბამისად $m_1$ და $m_2$ საკუთხო კოეფიციენტებით, მაშინ $L_1$ არის $L_2$-ის პერპენდიკულარული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა***

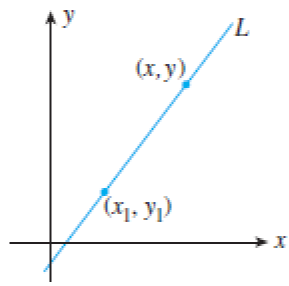
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

***და ასე ჩავწერთ $L_1 \perp L_2$.***

**მაგალითი 7.** ვიპოვოთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $(3,1)$ წერტილზე $y - 3 = 2(x - 1)$ წრფის პერპენდიკულარულად.

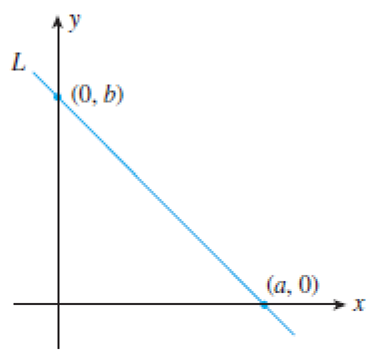
**ამოხსნა:** რადგან მოცემული წრფის საკუთხო კოეფიციენტი 2-ის ტოლია, ამიტომ საძიებელი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი იქნება $m=-\frac{1}{2}$. წრფეთა კონის განტოლების გამოყენებით საბოლოოდ მივიღებთ

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-3)$$
$$2y-2=-x+2$$
$$x+2y-5=0$$




ნახაზი 12.

$L$ წრფე, რომელიც არც ჰორიზონტალურია და არც ვერტიკალური, კვეთს $x$ და $y$ შესაბამისად ღერძებს $(a,0)$ და $(0,b)$ წერტილებში. $a$ და $b$ რიცხვებს ეწოდება $L$ წრფის მიერ შესაბამისად $x$ ***და*** $y$ ***ღერძებიდან მოკვეთილი მონაკვეთები***.




ნახაზი 13.

ახლა ვთქვათ, $L$ არის წრფე, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $m$ და $y$ ღერძიდან მოკვეთს $b$ მონაკვეთს. თუ დავწერთ $(0,b)$ წერტილში გამავალ წრფეთა კონის განტოლებას და ავირჩევთ წრფეს, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $m$, გვექნება

$$y-b=m(x-0),$$
$$y=mx+b.$$

ამრიგად წრფე, რომელიც $y$ ღერძს კვეთს $(0,b)$ წერტილში და საკუთხო კოეფიციენტი აქვს $m$-ის ტოლი, აღიწერება განტოლებით

$$y=mx+b. \qquad (2)$$

წრფის (2) სახის განტოლებას ეწოდება ***წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით.***

**მაგალითი 8.** განვსაზღვროთ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი და $y$ ღერძიდან მოკვეთილი მონაკვეთი, თუ იგი მოცემულია განტოლებით $3x-4y=8$.

**ამოხსნა:** გადავწეროთ წრფის მოცემული განტოლება საკუთხო კოეფიციენტიანი სახით

$$3x-4y=8$$
$$-4y=8-3x$$
$$y=\frac{3}{4}x-2$$

თუ შევადარებთ წრფის (2) სახის განტოლებას დავრწმუნდებით, რომ საკუთხო კოეფიციენტი $m=\frac{3}{4}$ და ღერძიდან მოკვეთილი მონაკვეთი $b=-2$.

ჩვენ განვიხილეთ წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებები სიბრტყეზე. წრფის განტოლებების ეს განსხვავებული ფორმები ერთმანეთის ეკვივალენტურია. რეალურად, თითოეული ფორმა არის კონკრეტული შემთხვევა ზოგადი სახის წრფივი განტოლებისა.

***განტოლებას***

$$Ax+By+C=0 \qquad (2)$$

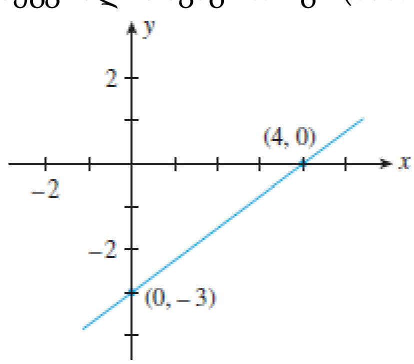
***სადაც $A$, $B$ და $C$ მუდმივი რიცხვებია, ამასთან $A$ და $B$ ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის, ეწოდება წრფივი განტოლების ზოგადი სახე $x$ და $y$ ცვლადების მიმართ.***

ჩვენ ახლა ჩამოვაყალიბებთ (დამტკიცების გარეშე) ერთ მნიშვნელოვან შედეგს, რომელიც ეხება სიბრტყეზე წრფის ალგებრული სახით წარმოდგენას.

**თეორემა 1. წრფის განტოლება არის წრფივი განტოლება და პირიქით, ყოველი წრფივი განტოლება წარმოადგენს წრფეს.**

**მაგალითი 9.** ავაგოთ წრფე, რომელიც წარმოდგენილია $3x-4y-12=0$ განტოლებით.

**ამოხსნა:** რადგან ყოველი წრფე ცალსახად განისაზღვრება მასზე მდებარე ორი წერტილით, ამიტომ წრფის ასაგებად საკმარისია ვიპოვოთ ორი წერტილი, რომლებზედაც გადის საძიებელი წრფე. კერძოდ, ვიპოვოთ $x$ და $y$ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები. თუ დაუშვებთ, რომ $x=0$, მაშინ მივიღებთ $y=-3$. ასევე, თუ დაუშვებთ, რომ $y=0$, მაშინ $x=4$. ამრიგად, წრფე გადის $(0,-3)$ და $(4,0)$ წერტილებზე და მარტივად შეგვიძლია ავაგოთ იგი (ნახ.14)




ნახაზი 14.

და ბოლოს, ამოვწეროთ ცხრილის სახით ამ ლექციაზე განხილული წრფის ყველა სახის განტოლება

| წრის განტოლებები | |
|---|---|
| ვერტიკალური წრფე: | $x=a$ |
| ჰორიზონტალური წრფე: | $y=b$ |
| წრფეთა კონის განტოლება: | $y-y_1=m(x-x_1)$ |
| წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით: | $y=mx+b$ |
| წრფის ზოგადი სახის განტოლება: | $Ax+By+C=0$ |

## სავარჯიშო

**იპოვეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი:**

**1.** $(4,3)$ და $(5,8)$; **2.** $(4,5)$ და $(3,8)$; **3.** $(-2,3)$ და $(4,8)$; **4.** $(-2,-2)$ და $(4,-4)$;

**5.** $(a,b)$ და $(c,d)$; **6.** $(-a+1,b-1)$ და $(a+1,-b)$;

**7.** მოცემულია განტოლება $y=4x-3$.

უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს: ა) თუ $x$ გაიზრდება 1 ერთეულით, რა იქნება $y$ -ის შესაბამისი ცვლილება; ბ) თუ $x$ შემცირდება 2 ერთეულით, რა იქნება $y$ -ის შესაბამისი ცვლილება.

**დაადგინეთ არიან თუ არა პარალელური შესაბამისად $A,B$ და $C,D$ წერტილებზე გამავალი წრფეები:**

**8.** $A(1,-2),\ B(-3,-10)$ და $C(1,5),\ D(-1,1)$. **9.** $A(2,3),\ B(2,-2)$ და $C(-2,4),\ D(-2,5)$.

**დაადგინეთ არიან თუ არა პერპენდიკულარები შესაბამისად $A,B$ და $C,D$ წერტილებზე გამავალი წრფეები:**

**10.** $A(-2,5),\ B(4,2)$ და $C(-1,-2),\ D(3,6)$. **11.** $A(2,0),\ B(1,-2)$ და $C(4,2),\ D(-8,4)$.

**12.** განსაზღვრეთ $a$-ს მნიშვნელობა, თუ $(1,a)$ და $(4,-2)$ წერტილებზე გამავალი წრფე პარალელურია $(2,8)$ და $(-7,a+4)$ წერტილებზე გამავალი წრფისა.

**13.** იპოვეთ $(-4,-3)$ წერტილზე გამავალი ჰორიზონტალური წრფის განტოლება.

**14.** იპოვეთ $(0,\ 5)$ წერტილზე გამავალი ვერტიკალური წრფის განტოლება.

**იპოვეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის მოცემულ წერტილზე მოცემული საკუთხო კოეფიციენტით:**

**15.** $(-3,4)$; $m=2$. **16.** $(2,4)$; $m=-1$. **17.** $(-3,2)$; $m=0$. **18.** $(1,2)$; $m=-\frac{1}{2}$.

**იპოვეთ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება:**

**19.** $(2,4)$ და $(3,7)$; **20.** $(2,1)$ და $(2,5)$; **21.** $(1,2)$ და $(-3,-2)$; **22.** $(-1,-2)$ და $(-3,-4)$.

**იპოვეთ წრფის განტოლება, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია** $m$ **და** $y$ **ღერძზე მოვეთილი მონაკვეთია** $b$**:**

**23.** $m=3, \quad b=4;$ **24.** $m=-2, \quad b=-1;$ **25.** $m=0, \quad b=5;$ **26.** $m=-\frac{1}{2}, \quad b=\frac{3}{4};$

**ჩაწერეთ შემდეგი განტოლებები საკუთხო კოეფიციენტიანი სახით და იპოვეთ წრფის მიერ** $y$ **ღერძზე მოვეთილი მონაკვეთი და საკუთხო კოეფიციენტი:**

**27.** $x-2y=0$; **28.** $y-2=0$; **29.** $2x-3y-9=0$; **30.** $2x-3y-9=0$; **31.** $3x-4y+8=0$;

**32.** იპოვეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $(-2,2)$ წერტილზე $2x-4y-8=0$ წრფის პარალელურად.

**33.** იპოვეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $(2,4)$ წერტილზე $3x+4y-22=0$ წრფის პერპენდიკულარულად.

**იპოვეთ წრფის განტოლება, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ პირობას:**

**34.** წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე და პარალელურია $(2,4)$ და $(4,7)$ წერტილებზე გამავალი წრფისა.

**35.** წრფე გადის $(a,b)$ წერტილზე ნულის ტოლი საკუთხო კოეფიციენტით.

**36.** წრფე გადის $(-3,-4)$ წერტილზე და პარალელურია $x$ ღერძის.

**37.** წრფე გადის $(-5,-4)$ წერტილზე და პარალელურია $(-3,2)$ და $(6,8)$ წერტილებზე გამავალი წრფისა.

**38.** წრფე გადის $(-2,-4)$ წერტილზე და პერპენდიკულარულია $2x-3y-24=0$ განტოლებით მოცემული წრფისა.

**39.** $P(-3,5)$ წერტილი ძევს $kx+3y+9=0$ წრფეზე. იპოვეთ $k$ .

**ააგეთ შემდეგი წრფივი განტოლებებით მოცემული წრფეები საკოორდინატო ღერძებიდან მოკვეთილი მონაკვეთების მოძებნის გზით:**

**40.** $3x-2y+6=0;$ **41.** $2x-5y+10=0;$ **42.** $x+2y-4=0;$ **43.** $2x+3y-15=0;$

**44.** აჩვენეთ, რომ $(a,0)$ და $(0,b)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება, როცა $a\neq 0$ და $b\neq 0$ , შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

(გავიხსენოთ, რომ $a$ და $b$ რიცხვები შესაბამისად წრფის მიერ $x$ და $y$ ღერძებიდან მოკვეთილი მონაკვეთებია. ამიტომ წრფის ამ სახით ჩაწერილ განტოლებას ეწოდება ***წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში).***

**44-ე ამოცანაში მიღებული შედეგის გამოყენებით იპოვეთ წრფის განტოლება ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთების მიხედვით:**

**45.** $a=3, \quad b=4;$ **46.** $a=-2, \quad b=-4;$ **47.** $a=-\dfrac{1}{2}, \quad b=\dfrac{3}{4};$ **48.** $a=4, \quad b=-\dfrac{1}{2};$

**განსაზღვრეთ ძევს თუ არა მოცემული წერტილები ერთ წრფეზე:**

**49.** $A(-1,7), \ B(2,-2)$ და $C(5,-9)$; **40.** $A(-2,1), \ B(1,7)$ და $C(4,13)$;

# მესამე ლექცია

## ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკი

ბუნებაში გვაქვს უამრავი მაგალითი იმისა, თუ როგორ არის ერთი სიდიდე დამოკიდებული მეორეზე. მაგალითად, მწარმოებელს სურს იცოდეს, თუ როგორ არის მისი კომპანიის მოგება დამოკიდებული წარმოების დონეზე; ბიოლოგს სურს იცოდეს, თუ როგორ შეიცვლება გარკვეული სახეობის ბაქტერიის რაოდენობა დროში; ქიმიკოსს სურს იცოდეს, თუ როგორ არის დაკავშირებული ქიმიური რეაქციის საწყისი სიჩქარე გამოყენებული სუბსტრატის რაოდენობაზე და ა.შ. ზოგადად, ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულება მათემატიკურად მოხერხებულად აღიწერება ფუნქციის ცნების გამოყენებით.

დავიწყოთ ფუნქციის ზოგადი განმარტებით. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი ორი $A$ და $B$ სიმრავლე.

***ფუნქცია არის წესი, რომელიც*** $A$ ***სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს*** $B$ ***სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთ ელემენტს.***

$A$ სიმრავლეს ეწოდება ***ფუნქციის განსაზღვრის არე.*** ფუნქციას ჩვეულებრივ აღნიშნავენ ლათინური ანბანის ასოებით, მაგალითად, $f$-ით. თუ $x$ არის $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არის ელემენტი, მაშინ $B$ სიმრავლის ის ელემენტი, რომელსაც $f$ შეუსაბამებს $x$ ელემენტს აღინიშნება $f(x)$ სიმბოლოთი და მას ეწოდება ***ფუნქციის მნიშვნელობა*** $x$ ***ელემენტზე.*** სიმრავლეს ყველა იმ ელემენტისა, რომელსაც ღებულობს $y=f(x)$ ფუნქცია, როცა $x$ მიიღებს ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს განსაზღვრის არიდან, ეწოდება $f$ ***ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.***

$f$ ფუნქცია განიხილება აგრეთვე როგორც ***ასახვა***, რომლის დროსაც განსაზღვრის არის $x$ ელემენტს შეესაბამება $B$ სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი $f(x)$. შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ელემენტს უწოდებენ ***სახეს,*** ხოლო $x$-ს ***წინასახეს.***

როგორც განმარტებიდან ჩანს, $A$ და $B$ შეიძლება იყოს სრულიად ნებისმიერი სიმრავლეები, მაგრამ ჩვენ განვიხილავთ მათ როგორც რიცხვით სიმრავლეებს.

ფუნქციის მაგალითად შეიძლება განვიხილოთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი დამოკიდებულება წრის ფართობსა და რადიუსს შორის. ვთქვათ, $x$ და $y$ აღნიშნავენ შესაბამისად წრის რადიუსს და ფართობს. მაშინ ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილი ფორმულის თანახმად

$$y=\pi x^2$$

ეს განტოლება განსაზღვრავს $y$ სიდიდეს როგორც $x$-ის ფუნქციას, რადგანაც $x$-ის ყოველ დასაშვებ მნიშვნელობას (ე.ი. წრის რადიუსის ყოველ დადებით რიცხვით მნიშვნელობას) შეესაბამება წრის ფართობის ერთი $y=\pi x^2$ მნიშვნელობა. ამიტომ ფუნქციის განმარტების მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ

$$f(x)=\pi x^2. \qquad (1)$$

5-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრის ფართობის გამოსათვლელად უნდა ჩავსვათ (1) ფორმულაში $x$-ის მაგივრად 5. მივიღებთ

$$f(5) = \pi 5^2 = 25\pi$$

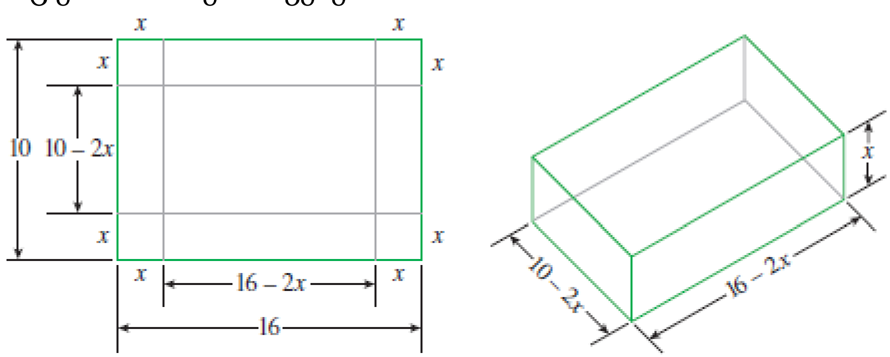
ანუ $25\pi$ კვადრატული ერთეული.

## ფუნქციის განსაზღვრის არის დადგენა

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $y = f(x)$ ფუნქცია. მაშინ $x$ ცვლადს ეწოდება ***დამოუკიდებელი ცვლადი.*** $y$ ცვლადს, რომლის მნიშვნელობა დამოკიდებულია $x$-ზე, ეწოდება ***დამოკიდებელი ცვლადი.***

ფუნქციის არის დასადგენად ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ, თუ რა შეზღუდვებს უნდა აკმაყოფილებდეს დამოუკიდებელი $x$ ცვლადი. მრავალ გამოყენებით მაგალითში ფუნქციის განსაზღვრის არე ნაკარნახევია თვით ამოცანის შინაარსით. ამის საჩვენებლად განვიხილოთ მაგალითი.

**მაგალითი 1.** მართკუთხედის ფორმის მუყაოს ფურცლისაგან, რომლის სიგრძე 16 სმ-ია და სიგანე 10 სმ, უნდა დამზადდეს ღია ყუთი, ფურცლის კუთხეებიდან $x$ სმ სგრძის გვერდის მქონე კვადრატების ამოჭრით და შემდგომ გვერდების გადაკეცვით ისე, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები.




**ა)** ყუთი აგებულია თითოეული კუთხიდან კვადრატის ჩამოჭრით

**ბ)** ყუთის განზომილებაა: სიგანე 10-2x, სიგრძე 16-2x, სიმაღლე x.

ნახაზი 15.

ვიპოვოთ ყუთის V მოცულობის გამოსახულება $x$-ის საშუალებით და დავადგინოთ მიღებული ფუნქციის განსაზღვრის არე.

**ამოხსნა:** ცხადია, ყუთის ფუძის განზომილებები იქნება $16-2x$ და $10-2x$, ხოლო სიმაღლე $x$. ამიტომ მოცულობა

$$\begin{aligned} V &= (16-2x)(10-2x)x = \\ &= (160-52x+4x^2)x = \\ &= 4x^3-52x^2+160x, \end{aligned}$$

რადგან ყუთის თითოეული განზომილება უნდა იყოს დადებითი, ამიტომ ერთდროულად ადგილი უნდა ჰქონდეს პირობებს

$$16-2x>0, \qquad 10-2x>0, \qquad x>0$$

ე.ი.

$$x<8, \qquad x<5, \qquad x<0.$$

სამივე უტოლობა ერთდროულად შესრულება, როცა $0 < x < 5$. ამრიგად, V მოცულობის, როგორც $x$-ის ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(0,5)$ ინტერვალი.

**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე:

$$a) \quad f(x)=\sqrt{x-1}; \qquad b) \quad f(x)=\frac{1}{x^2-4}; \qquad c) \quad f(x)=x^2+3$$

**ამოხსნა:** $a)$ რადგან კვადრატული ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან არ არსებობს, ამიტომ აუცილებელია, რომ $x-1\geq 0$. ეს უტოლობა შესრულდება რიცხვთა იმ სიმრავლისათვის, რომლისთვისაც $x\geq 1$. ამრიგად, $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[1,\infty)$ ინტერვალი;

$b)$ რადგან წილადის მნიშვნელი უნდა განსხავდებოდეს ნულისაგან, ამიტომ $x$ ცვლადზე გვექნება მხოლოდ შემდეგი შეზღუდვა: $x^2-4\neq 0$. მაგრამ $x^2-4=(x+2)(x-2)=0$, როცა $x=2$ და $x=-2$. ამრიგად, $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა შემდეგი ინტერვალების $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ და $(2,\infty)$ გაერთიანება;

$c)$ ამ შემთხვევაში ნებისმიერი ნამდვილი $x$ რიცხვისათვის აზრი აქვს $x^2+3$ გამოსახულებას, ამიტომ $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება ნამდვილ რიცხვთა მთელი სიმრავლე.

## ფუნქციის გრაფიკი

როგორც აღვნიშნეთ, თუ $f$ არის ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა $A$ სიმრავლე, მაშინ ყოველ ნამდვილ $x$ რიცხვს $A$-დან შეესაბამება მხოლოდ ერთი ნამდვილი რიცხვი $f(x)$. ჩვენ შეგვიძლია, აგრეთვე, ეს ფაქტი წარმოვადგინოთ ნამდვილ რიცხვთა ***დალაგებული წყვილის*** გამოყენებით. დავწეროთ $A$ სიმრავლის ყოველი $x$ რიცხვი დალაგებული წყვილის პირველ წევრად და $x$ რიცხვის შესაბამისი $f(x)$ რიცხვი დალაგებული წყვილის მეორე წევრად. ეს მოგვცემს მხოლოდ ერთ დალაგებულ წყვილს $(x,f(x))$ ყოველი $x$ რიცხვისათვის $A$-დან. ასეთი მიდგომით შეგვიძლია ფუნქცია განვსაზღვროთ კიდევ შემდეგნაირად.

$f$ ***ფუნქცია, განსაზღვრის*** $A$ ***არით, არის ყველა დალაგებული*** $(x,f(x))$ ***წყვილების სიმრავლე, სადაც*** $x$ ***ეკუთვნის*** $A$***-ს.***

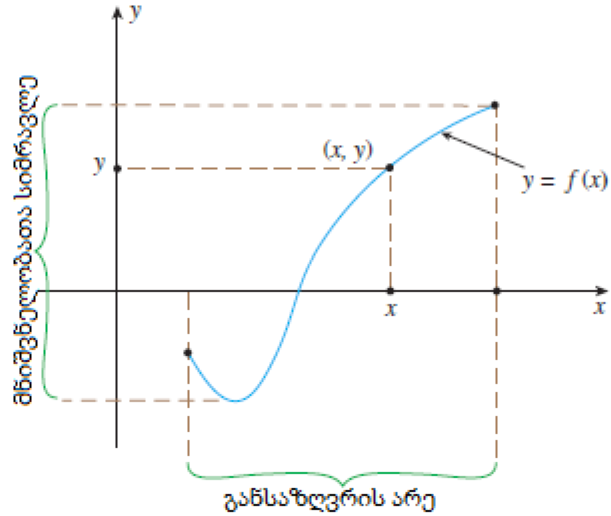
შევნიშნოთ, რომ პირობა - ყოველ $x$ რიცხვს $A$-დან შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი $f(x)$ რიცხვი, გამორიცხავს *ორი დალაგებული წყვილის არსებობას, რომელთაც ექნებათ ერთიდაიგივე პირველი რიცხვი.*

რადგან ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილებს შეესაბამება წერტილები სიბრტყეზე, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია, ფუნქცია წარმოვადგინოთ გრაფიკულად.

***ერთი ცვლადის*** $f$ ***ფუნქციის გრაფიკი არის სიმრავლე ყველა იმ*** $(x,y)$ ***წერტილებისა*** $xy$ ***სიბრტყეზე, რომელშიც*** $x$ ***ეკუთვნის*** $f$ ***ფუნქციის განსაზღვრის არეს და*** $y=f(x)$.

მე-16 ნახაზზე მოცემულია $f$ ფუნქციის გრაფიკი. ამ გრაფიკის მიხედვით ჩანს, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკის $(x,y)$ წერტილის $y$ კოორდინატი არის მანძილი $x$ ღერძიდან ამ წერტილამდე. ეს მანძილი არის $f(x)$-ის ტოლი, როცა $(x,y)$ წერტილი

მდებარეობს $x$ ღერძის ზემოთ და $-f(x)$-ის ტოლია, როცა $(x,y)$ წერტილი მდებარეობს $x$ ღერძის ქვემოთ. ასევე ჩანს, რომ $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არე არის $x$ ღერძზე მდებარე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, მაშინ როცა $f$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე მოთავსებულია $y$ ღერძზე.



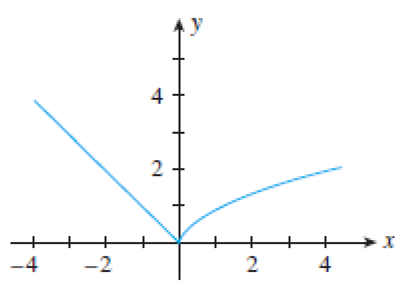

ნახაზი 16. $f$ ფუნქციის გრაფიკი.

ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ერთზე მეტი წესით, ეწოდება ***უბან-უბან განსაზღვრული ფუნქცია.***

**მაგალითი 3.** ავაგოთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}.$$

**ამოხსნა:** $f$ უბან-უბან განსაზღვრული ფუნქციაა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე. $(-\infty,0)$ ქვესიმრავლეზე ფუნქცია მოცემულია ფორმით $f(x)=-x$. ამიტომ $y=-x$ წარმოადგენს წრფის განტოლებას განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტიანი სახით. კერძოდ, საკუთხო კოეფიციენტი უდრის $-1$-ს, ხოლო $y$ ღერძიდან მოჭრილი მონაკვეთი კი - ნულს. მაშასადამე, $(-\infty,0)$ ქვესიმრავლეზე ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს ნახევარწრფე, რომელიც მე-17 ნახაზზეა მოცემული.




ნახაზი 17. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $(-\infty,0)$ ინტერვალზე $y=-x$, ხოლო $[0,\infty)$ ინტერვალზე $y=\sqrt{x}$ ფუნქციების გრაფიკების აგებით.

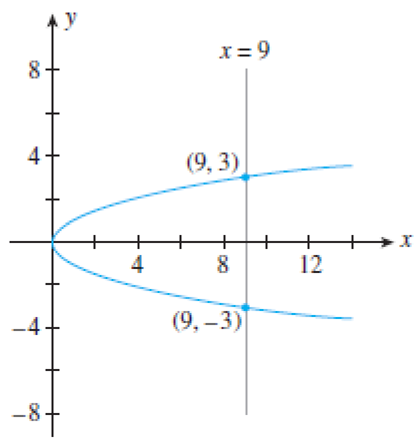
$[0,\infty)$ ქვეშუალედზე ფუნქცია მოცემულია შემდეგი წესით $f(x)=\sqrt{x}$. ფუნქციის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამებიან $x=0,1,2,3,4,9,16$ მნიშვნელობებს მოცემულია ცხრილით:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 9 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | 2 | 3 | 4 |

ამ ცხრილის გამოყენებით ავაგებთ ფუნქციის გრაფიკს, რომელიც მე-17 ნახაზზეა მოცემული.

## ვერტიკალური წრფის წესი

ცხადია, რომ ყოველ ფუნქციას აქვს გრაფიკი, თუმცა $xy$ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი წირი არ შეიძლება იყოს რაიმე ფუნქციის გრაფიკი. მაგალითად, განვიხილოთ მე-18 ნახაზზე გამოსახული წირი. იგი არის $y^2=x$ განტოლების გრაფიკი. ზოგადად, ***განტოლების გრაფიკი*** არის სიმრავლე ყველა იმ $(x,y)$ წყვილებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ განტოლებას.

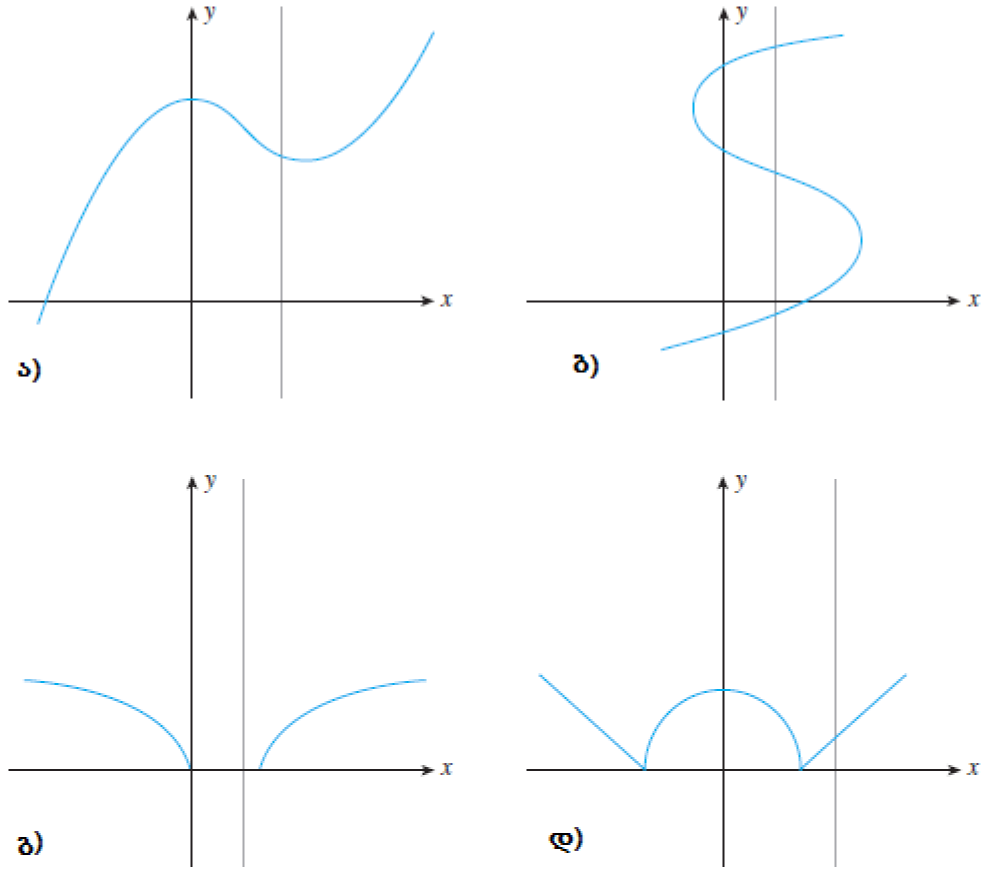



ნახაზი 18. რადგან ვერტიკალური წრფე წირს კვეთს ერთზე მეტ წერტილში, ამიტომ ეს წირი არ წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკს.

დავაკვირდეთ, რომ წრტილები $(9,-3)$ და $(9,3)$ ძევს ამ წირზე, რაც გვიჩვენებს, რომ რიცხვს $x=9$ შეესაბამება $y$-ის ორი მნიშვნელობა: $y=-3$ და $y=3$. ეს ნიშნავს, რომ დარღვეულია ფუნქციის განმარტებაში მოთხოვნილი ერთადერთობის პირობა. ამიტომ ჩვენ დავასკვნით, რომ მოცემული წირი არ შეიძლება იყოს ფუნქციის გრაფიკი.

არსებობს მარტივი ტესტი, რომლის გამოყენებითაც მარტივად შეგვიძლია დავადგინოთ, არის თუ არა მოცემული წირი ფუნქციის გრაფიკი. ეს ტესტი ცნობილია ***ვერტიკალური წრფის წესის*** სახელწოდებით, რომელიც ასე ყალიბდება: $xy$ ***სიბრტყეზე მდებარე წირი არის*** $y=f(x)$ ***ფუნქციის გრაფიკი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი ვერტიკალური წრფე ამ წირს კვეთს არაუმეტეს ერთ წერტილში.***

**მაგალითი 4.** მე-19 ნახაზზე მოცემული წირებიდან რომელია ფუნქციის გრაფიკი?

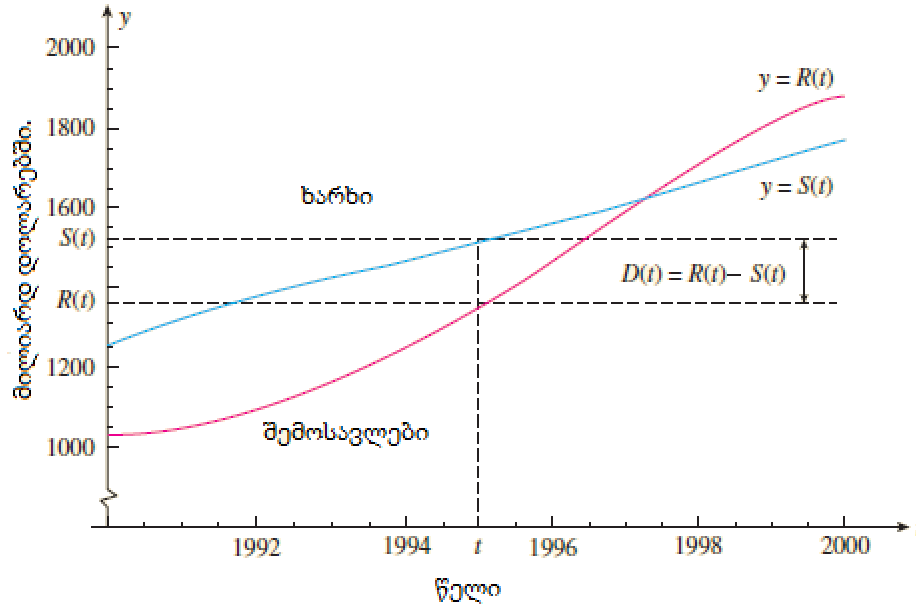



ნახაზი 19. შეგვიძლია გამოვიყენოთ ვერტიკალური წრფის წესი, რათა დავადგინოთ რომელია მოცემული წირებიდან ფუნქციის გრაფიკი.

**ამოხსნა:** მე-19 ნახაზზე გამოსახული ა), გ) და დ) წირები ფუნქციების გრაფიკებია, რადგან სამივე წირი აკმაყოფილებს ვერტიკალური წრფის წესს. შევნიშნოთ, რომ გ) წირის შემთხვევაში ვერტიკალური წრფე არ კვეთს გრაფიკს, რადგან წერტილი, რომელშიც კვეთს ვერტიკალური წრფე $x$ ღერძს, არ ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს. ბ) წირი არ არის ფუნქციის გრაფიკი, რადგან ვერტიკალური წრფე წირს კვეთს სამ წერტილში.

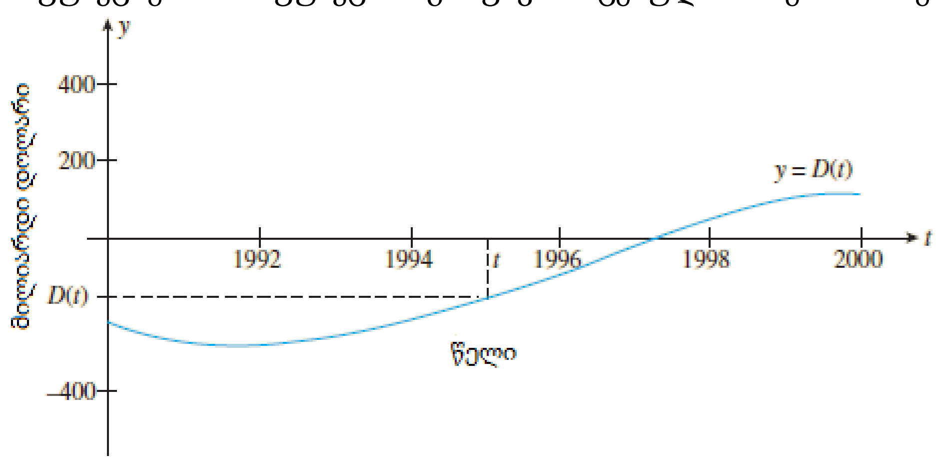
## ფუნქციათა ალგებრა

ვთქვათ, $S(t)$ და $R(t)$ ფუნქციები აღნიშნავენ შესაბამისად მთავრობის ხარჯებს და შემოსავალს დროის ნებისმიერ $t$ მომენტში, გათვლილს მილიარდ დოლარებში. ამ ფუნქციათა გრაფიკები 1990 წლიდან 2000 წლამდე პერიოდში მოცემულია მე-20 ნახაზზე.




ნახაზი 20. $R(t)-S(t)$ გვაძლევს ფედერალური ბიუჯეტის დეფიციტს (ნამეტს) დროის ნებისმიერ $t$ მომენტში.

ფუნქციათა სხვაობა $R(t)-S(t)$ გვაძლევს დეფიციტს (ნამეტს) მილიარდ დოლარებში დროის ნებისმიერ $t$ მომენტში, თუ $R(t)-S(t)$ უარყოფითია (დადებითია). აქედან გამომდინარე, ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ $D$ ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობა დროის ნებისმიერ $t$ მომენტში მოიცემა სხვაობით $R(t)-S(t)$. $D$ ფუნქცია იქნება ორი $R(t)$ და $S(t)$ ფუნქციების სხვაობა და ასე ჩავწერთ $D=R(t)-S(t)$. მას შეიძლება ვუწოდოთ „დეფიციტის (ნამეტის) ფუნქცია“. $D$ ფუნქციის განსაზღვრის არე იგივეა რაც $S$ და $R$ ფუნქციების. $D$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 21-ე ნახაზზე.




ნახაზი 21. $D$ ფუნქციის გრაფიკი.

მრავალი ფუნქცია აგებულია სხვადასხვა ელემენტარული ფუნქციებით. მაგალითად, $f(x)=2x+4$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ორი $g(x)=2x$ და $h(x)=4$ ფუნქციის ჯამი. ზოგადად, თუ მოცემული გვაქვს $f$ და $g$ ფუნქციები, ჩვენ

შეგვიძლია განვსაზღვროთ მათი ჯამი $f+g$ სხვაობა $f-g$, ნამრავლი $fg$ და შეფარდება $\frac{f}{g}$ შემდეგნაირად.

ვთქვათ, მოცემულია $f$ და $g$ ფუნქციები შესაბამისად $A$ და $B$ განსაზღვრის არეებით. მაშინ $f$ და $g$ ფუნქციების ჯამი $f+g$, სხვაობა $f-g$ და ნამრავლი $fg$ აგრეთვე ფუნქციებია $A\cap B$ ($A$ და $B$ სიმრავლეების თანაკვეთა) განსაზღვრის არით და მოიცემა შემდეგი წესით

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

შეფარდება $\frac{f}{g}$ მოიცემა წესით

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

და მისი განსაზღვრის არეა სიმრავლე, რომელიც მიიღება $A\cap B$ თანაკვეთიდან იმ $x$ წერტილების ამოგდებით, რომელზედაც $g(x)=0$.

**მაგალითი 5.** ვთქვათ, $f(x)=\sqrt{x+1}$ და $g(x)=2x+1$. ვიპოვოთ $f$ და $g$ ფუნქციათა ჯამი $s$, სხვაობა $d$, ნამრავლი $p$ და შეფარდება $q$.

**ამოხსნა:** რადგან $f$ და $g$ ფუნქციების განსაზღვრის არეებია შესაბამისად $A=[-1,\infty)$ და $B=(-\infty,\infty)$, ამიტომ $s$, $d$ და $p$ ფუნქციების განსაზღვრის არე იქნება $A\cap B=[-1,\infty)$. ამრიგად,

$$s(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+1}+2x+1$$
$$d(x)=(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+1}-2x-1$$
$$p(x)=(fg)(x)=f(x)g(x)=(2x+1)\sqrt{x+1}$$

შეფარდება $q$ მოიცემა

$$q(x)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+1}}{2x+1}$$

სახით, რომლის განსაზღვრის არე იქნება სიმრავლე, რომელიც მიიღება $[-1,\infty)$ ინტერვალიდან $x\neq-\frac{1}{2}$ წერტილის ამოგდებით, ანუ $[-1,-0.5)\cup(-0.5,\infty)$.

ეკონომიკური ამოცანების მათემატიკური ფორმულირების დროს ხშირად მივდივართ გამოსახულებამდე, რომელიც შეიცავს ფუნქციათა კომბინაციას. მაგალითად, განვიხილოთ ბიზნესის წარმოებასთან დაკავშირებული ხარჯები. ხარჯები, რომლებიც მეტნაკლებად არაა დამოკიდებული წარმოების დონეზე, ეწოდება ***ფიქსირებული ხარჯები.*** ფიქსირებული ხარჯების მაგალითებია, იჯარის გადასახადი, ფიქსირებული ხელფასები. მეორეს მხრივ ხარჯები, რომლებიც იცვლება

გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობის ან მათი გასაღების მიხედვით, ეწოდება ***ცვალებადი ხარჯები.*** ცვალებადი ხარჯების მაგალითებია ნედლეულზე გაწეული ხარჯები და გამომუშავებაზე დამოკიდებული ხელფასები. ამრიგად, ბიზნესის წარმოებისას ***მთლიანი დანახარჯი*** მოიცემა ფიქსირებული და ცვალებადი დანახარჯების ჯამის სახით. განვიხილოთ მაგალითი.

**მაგალითი 5.** ვთქვათ, წყლის ფილტრების მწარმოებელის თვიური ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს $10 000, ხოლო ცვალებადი დანახარჯია

$$-0.0001x^2+10x \qquad (0\le x\le 40\,000)$$

დოლარი, სადაც $x$ აღნიშნავს ერთ თვეში გამოშვებული ფილტრების რაოდენობას. ვიპოვოთ $C$ ფუნქცია, რომელიც გვაძლევს თვიურ მთლიან დანახარჯს $x$ რაოდენობა ფილტრის წარმოებისას.

**ამოხსნა:** წარმოების დონის მიუხედავად ფიქსირებული თვიური დანახარჯი შეადგენს $10 000 და აღიწერება მუდმივი $F(x)=10\,000$ ფუნქციით. ცვალებადი დანახარჯი აღიწერება ფუნქციით $V(x)=-0.0001x^2+10x$. რადგან მთლიანი დანახარჯი წარმოების ნებისმიერი დონის დროს არის ფიქსირებული და ცვალებადი დანახარჯების ჯამი, ამიტომ საძიებელი ფუნქცია იქნება

$$C(x)=V(x)+F(x)=-0.0001x^2+10x+10\,000 \qquad (0\le x\le 40\,000).$$

ფირმის მიერ პროდუქციის რეალიზაციით მიღებული ***მთლიანი მოგება*** გამოითვლება მთლიანი შემოსავლისა და მთლიანი დანახარჯის ფუნქციების სხვაობით ანუ

$$P(x)=R(x)-C(x).$$

**მაგალითი 6.** ვთქვათ, წინა მაგალითში განხილული წარმოების მიერ $x$ რაოდენობა ფილტრის გაყიდვით მიღებული მთლიანი ამონაგების ფუნქცია მოცემულია ფორმულით

$$R(x)=-0.0005x^2+20x \qquad (0\le x\le 40\ 000).$$

ა) ვიპოვოთ მთლიანი მოგების ფუნქცია ანუ ფუნქცია, რომელიც აღწერს ერთ თვეში $x$ რაოდენობა ფილტრის წარმოებით და გაყიდვით მიღებულ მთლიან მოგებას;

ბ) რა იქნება მოგება, როცა წარმოების დონე არის 10 000 ფილტრი თვეში?

**ამოხსნა:** თვეში $x$ რაოდენობა ფილტრის წარმოებით და გაყიდვით მიღებული მთლიანი მოგება არის სხვაობა მთლიან ამონაგებსა და მთლიან დანახარჯს შორის. ამიტომ მთლიანი მოგების ფუნქცია ასე განისაზღვრება

$$\begin{aligned}P(x)&=R(x)-C(x)=\\&=(-0.0005x^2+20x)-(-0.0001x^2+10x+10\,000)=\\&=-0.0004x^2+10x-10\,000\end{aligned}$$

ბ) მოგება, რომელიც განისაზღვრება წარმოების დონით 10 000 ფილტრი თვეში, იქნება

$$P(10\,000)=-0.0004(10\,000)^2+10(10\,000)-10\,000=50\,000$$

ანუ $50 000 თვეში.

**ფუნქციათა კომპოზიცია**

ფუნქციის გამოსახვა შესაძლებელია აგრეთვე ფუნქციათა კომპოზიციის საშუალებით. განვიხილოთ, მაგალითად, $h$ ფუნქცია რომელიც მოცემულია წესით $h(x)=\sqrt{x^2-1}$. ვთქვათ, $f$ და $g$ ფუნქციები განსაზღვრულია შემდეგი წესით: $f(x)=x^2-1$ და $g(x)=\sqrt{x}$. გამოვითვალოთ $g$ ფუნქცია $f(x)$ წერტილზე, მივიღებთ

$$g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1},$$

რომელიც ემთხვევა $h$ ფუნქციის მოცემის წესს!

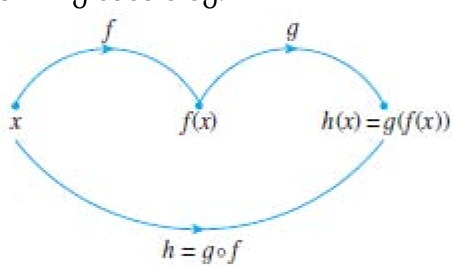
განვმარტოთ ორი ფუნქციის კომპოზიცია.

***თუ $f$ და $g$ მოცემული ფუნქციებია, მაშინ $g$ და $f$ ფუნქციების კომპოზიცია $g\circ f$ არის ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად***

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

***$g\circ f$ ფუნქციის განსაზღვრის არე არის სიმრავლე ყველა იმ $x$ რიცხვისა $f$-ის განსაზღვრის არიდან, რომლისთვისაც $f(x)$ ეკუთვნის $g$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს.***

$g\circ f$ ფუნქციას უწოდებენ აგრეთვე ***კომპოზიტურ ფუნქციას.*** $h=g\circ f$ ფუნქცია, როგორც ასახვა მოცემულია 22-ე ნახაზზე.




ნახაზი 22.

**მაგალითი 7.** ვთქვათ, $f(x)=x^2-1$ და $g(x)=\sqrt{x}+1$. ვიპოვოთ:

ა) კომპოზიტური ფუნქცია $g\circ f$;

ბ) კომპოზიტური ფუნქცია $f\circ g$.

**ამოხსნა:** ა) იმისათვის რომ ვიპოვოთ $g\circ f$ კომპოზიტური ფუნქცია, უნდა დავითვალოთ $g$ ფუნქცია $f(x)$ წერტილზე. გვექნება

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}+1=\sqrt{x^2+1}+1.$$

ბ) ახლა ვიპოვოთ $f\circ g$ კომპოზიტური ფუნქცია. ამისათვის უნდა დავითვალოთ $f$ ფუნქცია $g(x)$ წერტილზე. გვექნება

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^2-1=(\sqrt{x}+1)^2-1=x+2\sqrt{x}+1-1=x+2\sqrt{x}.$$

## სავარჯიშო

**1.** მოცემულია $f$ ფუნქცია: $f(x)=5x+6$. იპოვეთ $f(3)$, $f(-3)$, $f(a)$, $f(-a)$ და $f(a+3)$.

**2.** მოცემულია $f$ ფუნქცია: $f(x)=3x^2-6x-3$. იპოვეთ $f(0)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(-a)$ და $f(x+1)$.

**3.** მოცემულია $h$ ფუნქცია: $h(x)=x^3-x^2+x+1$. იპოვეთ $h(0)$, $h(-5)$, $h(0)$, $h(a)$ და $h(-a)$.

**4.** მოცემულია $f$ ფუნქცია: $f(x)=2x+5$. იპოვეთ $f(a+h)$, $f(-a)$, $f(a^2)$, $f(a-2h)$ და $f(2a-h)$.

**5.** მოცემულია $f$ ფუნქცია: $f(t)=\dfrac{2t^2}{\sqrt{t-1}}$. იპოვეთ $f(2)$, $f(a)$, $f(x+1)$ და $f(x-1)$.

**6.** მოცემულია $f$ ფუნქცია:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+1, & x<2\\ \sqrt{x-2}, & x\ge 2\end{cases}.$$

იპოვეთ $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$ და $f(4)$.

**7.** მოცემულია $f$ ფუნქცია:

$$f(x)=\begin{cases}2+\sqrt{1-x}, & x\le 1\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1\end{cases}.$$

იპოვეთ $f(0)$, $f(1)$ და $f(2)$.

**შეამოწმეთ ძევს თუ არა მოცემული წერტილი ფუნქციის გრაფიკზე**

**8.** $(2,\sqrt{3})$; $g(x)=\sqrt{x^2-1}$. **9.** $(3,3)$; $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+7}}+2$. **10.** $(-2,-3)$; $f(t)=\dfrac{|t-1|}{t+1}+2$.

**შეარჩიეთ $c$ მუდმივი ისე, რომ $P(a,b)$ წერტილი ეკუთვნოდეს $f$ ფუნქციის გრაფიკს**

**11.** $f(x)=2x^2-4x+c$; $P(1,5)$. **12.** $f(x)=x\sqrt{9-x^2}+c$; $P(2,4)$.

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არე**

**13.** $f(x)=x^2+3$. **14.** $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2}$. **15.** $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **16.** $f(x)=\sqrt{x-5}$.

**17.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$. **18.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$. **19.** $f(x)=(x+3)^{3/2}$. **20.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}$.

ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკი. იპოვეთ მათი განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

**21.** $f(x)=2x^2+1$. **22.** $f(x)=9-x^2$. **23.** $f(x)=\sqrt{1-x}$. **24.** $f(x)=|x|-1$.

**25.** $f(x)=\begin{cases}4-x, & x<2\\ 2x-2, & x\ge 2\end{cases}$. **26.** $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x\le 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$.

მოცემულია $f(x)=x^3+5$, $g(x)=x^2-2$ და $h(x)=2x+4$. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციები:

**27.** $f+g$. **28.** $f-g$. **29.** $fg$. **30.** $\dfrac{f-g}{h}$. **31.** $\dfrac{fg}{h}$. **32.** $fgh$.

იპოვეთ $f+g$, $f-g$, $fg$ და $\dfrac{f}{g}$, თუ მოცემულია რომ:

**33.** $f(x)=\sqrt{x+3}$; $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$. **34.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

**35.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$. **36.** $f(x)=x^2+1$; $g(x)=\sqrt{x+1}$.

იპოვეთ $f\circ g$ და $g\circ f$ კომპოზიტური ფუნქციები, თუ:

**37.** $f(x)=x^2+x+1$; $g(x)=x^2$. **38.** $f(x)=\sqrt{x}+1$; $g(x)=x^2-1$.

**39.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$. **40.** $f(x)=\sqrt{x+1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

გამოითვალეთ $h(2)$, თუ $h=g\circ f$

**41.** $f(x)=x^2+x+1$; $g(x)=x^2$. **42.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$; $g(x)=3x^3+1$.

**43.** $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$; $g(x)=\sqrt{x}$. **44.** $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; $g(x)=x^2+1$.

$f$ და $g$ ფუნქციები განსაზღვრეთ ისეთნაირად, რომ $h=g\circ f$ (პასუხი არ არის ერთადერთი)

**45.** $h(x)=(2x^3+x^2+1)^5$. **46.** $h(x)=(3x^2-4)^{-3}$. **47.** $h(x)=\sqrt{x^2-1}$.

**48.** $h(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. **49.** $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$. **50.** $h(x)=\dfrac{1}{(3x^2+2)^{3/2}}$.

იპოვეთ $f(a+h)-f(a)$ თითოეული ფუნქციისათვის და პასუხი გაამარტივეთ

**51.** $f(x)=3x+4$. **52.** $f(x)=4-x^2$. **53.** $f(x)=x^2-2x+1$.

შეადგინეთ

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\qquad (h\ne 0)$$

გამოსახულება თითოეული ფუნქციისათვის და გაამარტივეთ

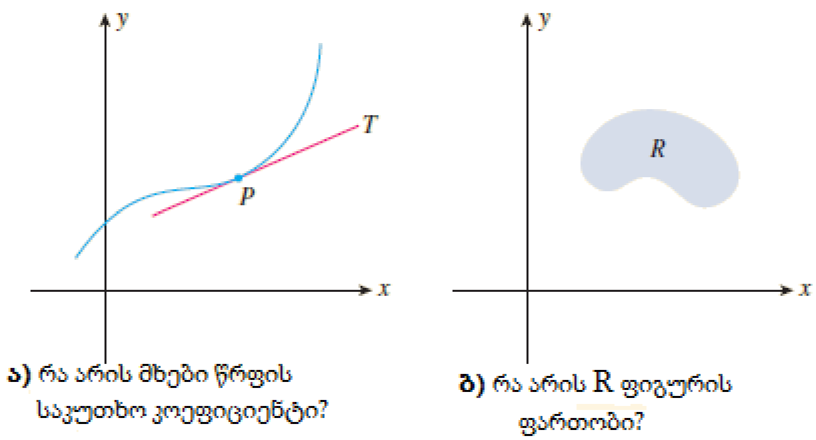
**54.** $f(x)=2x^2-x+1$. **55.** $f(x)=x^3-x$. **56.** $f(x)=2x^3-x^2+1$. **57.** $f(x)=\frac{1}{x}$.

# მეოთხე ლექცია

## შესავალი დიფერენციალურ აღრიცხვაში

ისტორიულად დიფერენციალური აღრიცხვა განვითარდა ისააკ ნიუტონისა (1642-1727) და გოტფრიდ ვილჰელმ ლაიბნიცის (1646-1716) მიერ შემდეგი ამოცანების გამოკვლევის შედეგად:

1. წირის მოცემულ წერტილში მხები წრფის მოძებნა (ნახ. 23 ა);
2. ნებისმიერი შეკრული წირით შემოსაზღვრული ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა (ნახ. 23 ბ);




ნახაზი 23.

მხები წრფის მოძებნის ამოცანა შესაძლოა ჩანდეს, რომ იგი არ უკავშირდება მათემატიკის რაიმე პრაქტიკულ გამოყენებებს, მაგრამ როგორც შემდგომში დავინახავთ, ერთი სიდიდის ცვლილების სიჩქარე მეორე სიდიდის მიმართ მათემატიკურად ეკვივალენტურია გეომეტრიული ამოცანისა: მოიძებნოს წირის მოცემულ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი. ზუსტად ეს აღმოჩენა გახდა მნიშვნელოვანი ფაქტორი ზემოთ დასმული ამოცანების გადაწყვეტისას და დასაბამი მისცა დიფერენციალური აღრიცხვის განვითარებას მე-17 საუკუნეში. სწორედ დიფერენციალური აღრიცხვის განვითარებით გახდა შესაძლებელი მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტა.

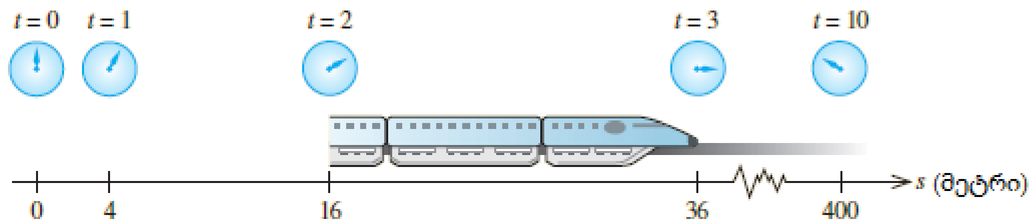
მხები წრფის ამოცანის შესწავლამ გამოიწვია დიფერენციალური აღრიცხვის შექმნა, რომელიც თავის მხრივ დაფუძნებულია ფუნქციის წარმოებულის კონცეფციაზე. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლის ამოცანამ გამოიწვია ინტეგრალური აღრიცხვის შექმნა, რომელიც დაფუძნებულია ფუნქციის პირველადის ანუ განუსაზღვრელი ინტეგრალის კონცეფციაზე. როგორც ფუნქციის წარმოებული, ასევე ინტეგრალი დაფუძნებულია ფუნდამენტურ კონცეფციაზე, რომელსაც ზღვარი ეწოდება.

განვიხილოთ მაგალითი. სწორხაზოვანი მონორელსით მატარებლის მოძრაობისას, დაკვირვებით მეღებული მონაცემების მიხედვით, ინჟინრებმა დაადგინეს, რომ

მატარებლის მდებარეობა სათავიდან (გაზომილი მეტრებში) დროის $t$ მომენტისათვის (გაზომილი წამებში) მოიცემა ფორმულით

$$s = f(t) = 4t^2 \qquad (0 \le t \le 30),$$

სადაც $f$ -ს ეწოდება მატარებლის ***მდებარეობის ფუნქცია.*** მატარებლის მდებარეობა დროის $t = 0,1,2,3,...,10$ მომენტებისათვის საწყისი მდებარეობიდან შესაბამისად იქნება $f(0)=0, \quad f(1)=4, \quad f(2)=16, \quad f(3)=36,..., f(10)=400$ (ნახ. 24)




ნახაზი 24.

დაუშვათ, გვინდა ვიპოვოთ მატარებლის სიჩქარე $t = 2$ მომენტისათვის. მხოლოდ მდებარეობის ფუნქციის გამოყენებით ამ დავალების გადაწყვეტა შეუსრულებელ ამოცანად ჩანს, მაგრამ ვნახოთ, რა სიდიდე შეიძლება გამოვითვალოთ ამ ფუნქციის გამოყენებით. ცხადია, ამ ფუნქციით ჩვენ შეგვიძლია გამოვითვალოთ მატარებლის მდებარეობა დროის ნებისმიერი $t$ მომენტისათვის, როგორც ეს ზემოთ გავაკეთეთ $t$ დროის არჩეული მნიშვნელობებისთვის. ამ მნიშვნელობების მიხედვით ჩვენ შეგვიძლია გამოვითვალოთ ***საშუალო სიჩქარე*** ინტერვალზე. მაგალითად მატარებლის საშუალო სიჩქარე [2,4] ინტერვალზე ასე გამოითვლება

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{4(4^2)-4(2^2)}{2} = \frac{64-16}{2} = 24$$

ანუ 24 მ/წმ. თუმცა ეს არ არის მატარებლის სიჩქარე $t = 2$ მომენტისათვის, იგი იძლევა სიჩქარის მიახლოებითი მნიშვნელობა ამ დროისათვის. ისმის კითხვა, შეგვიძლია უკეთესად მივუახლოვდეთ სიჩქარის ზუსტ მნიშვნელობას? ინტუიციურად, ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ დროის მცირე ინტერვალი ($t = 2$ მარცხენა ბოლო წერტილით), რომელშიც მატარებლის საშუალო სიჩქარე უფრო მიუახლოვდება რეალურ სიჩქარეს $t = 2$ მომენტისათვის.

ახლა აღვწეროთ ეს პროცესი ზოგადად. ვთქვათ, $t > 2$. მაშინ მატარებლის საშუალო სიჩქარე $[2,t]$ ინტერვალში ასე გამოითვლება

$$\frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \frac{4t^2-4(2^2)}{t-2} = \frac{4(t^2-4)}{t-2}$$

$t$-ს მნიშვნელობების არჩევით 2-თან უფრო ახლოს და ახლოს ჩვენ მივიღებთ რიცხვების მიმდევრობას, რომლებიც გვაძლევენ მატარებლის საშუალო სიჩქარეს დროის უფრო და უფრო მცირე ინტერვალებში. როგორც აღვნიშნეთ, რიცხვების ეს მიმდევრობა უნდა მიუახლოვდეს მატარებლის მყისიერ სიჩქარეს $t = 2$ მომენტისათვის.

## ზღვრის ინტუიციური განმარტება

განვიხილოთ $g$ ფუნქცია

$$g(t)=\frac{4(t^2-4)}{t-2},$$

რომელიც გვაძლევს მატარებლის საშუალო სიჩქარეს $[2,t]$ ინტერვალში. ვთქვათ, გვინდა განვსაზღვროთ რიცხვი, რომელსაც უახლოვდება $g(t)$ როცა $t$ უახლოვდება ფიქსირებულ რიცხვს 2-ს. თუ ავიღებთ $t$-ს მნიშვნელობათა მიმდევრობას, რომელიც უახლოვდება 2-ს მარჯვენა მხრიდან, დავინახავთ, რომ $g(t)$ უახლოვდება 16-ს. ანალოგიურად, თუ ავიღებთ $t$-ს მნიშვნელობათა მიმდევრობას, რომელიც უახლოვდება 2-ს მარცხენა მხრიდან დავინახავთ, რომ $g(t)$ კვლავ უახლოვდება 16-ს. ამრიგად, როცა $t$ უახლოვდება 2-ს ნებისმიერი მხრიდან, $g(t)$ უახლოვდება 16-ს. ამ სიტუაციაში ვიტყვით, რომ $g(t)$-ს ზღვარი, როცა $t$ უახლოვდება 2-ს, არის 16 და დავწერთ

$$\lim_{t\to 2} g(t)=\lim_{t\to 2}\frac{4(t^2-4)}{t-2}=16\,.$$

შევნიშნოთ, რომ წერტილი $t=2$ არ შედის $g$ ფუნქციის განსაზღვრის არეში. თუმცა ამას არ აქვს მნიშვნელობა ზღვრის გამოთვლის დროს. ამ მაგალითის განხილვით მივედით ზღვრის არაფორმალურ განმარტებაზე.

*$f$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x$ მიისწრაფვის $a$ რიცხვისაკენ, არის $L$ რიცხვი და დავწერთ*

$$\lim_{x\to a} f(x)=L\,,$$

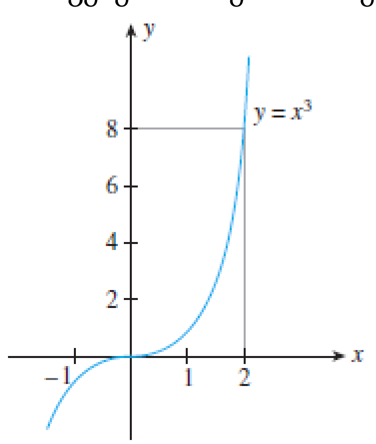
*თუ $f(x)$ ძალიან ახლოსაა $L$ რიცხვთან, როდესაც $x$ საკმარისად ახლოსაა $a$ რიცხვთან (მაგრამ $a$-ს არატოლია).*

### *ფუნქციის ზღვარის გამოთვლა*

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი ზღვრის გამოთვლაზე.

**მაგალითი 1.** ვთქვათ $f(x)=x^3$ და გამოვითვალოთ $\lim_{x\to 2} f(x)$.

**ამოხსნა:** $f$ ფუნქციის გრაფიკი ნაჩვენებია 25-ე ნახაზზე



ნახაზი 25. $f(x)$ უახლოვდეა 8, როცა $x$ უახლოვდება 2.

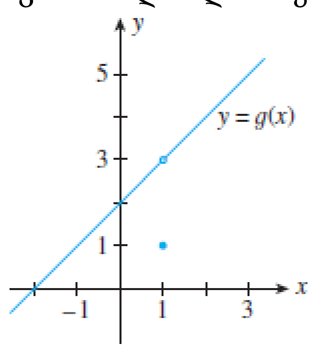
ჩვენ შეგვიძლია ვნახოთ, რომ $f(x)$ რაგინდ ახლოს იქნება 8-თან, როცა $x$ საკმარისად ახლოს იქნება 2-თან. მაშასადამე $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 8$.

**მაგალითი 2.** ვთქვათ

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

გამოვითვალოთ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

**ამოხსნა:** ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. $g$ ფუნქციის გრაფიკიდან, რომელიც 26-ე ნახაზზეა მოცემული, ვხედავთ, რომ $g(x)$ რაგინდ ახლოს იქნება 3-თან , როცა $x$ საკმარისად ახლოს იქნება 1-თან.



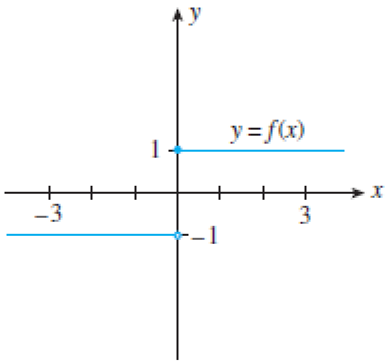

ნახაზი 26.

მაშასადამე, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$. დავაკვირდეთ, რომ $g(1) = 1$, რომელიც არ ემთხვევა $g$ ფუნქციის ზღვარს როცა $x$ უახლოვდება 1-ს. ერთხელ კიდევ შევნიშნოთ, რომ $g(x)$ -ის მნიშვნელობა $x = 1$ წერტილში არ გულისხმობს $g$ ფუნქციის ზღვრის არსებობას, როცა $x$ უახლოვდება 1-ს.

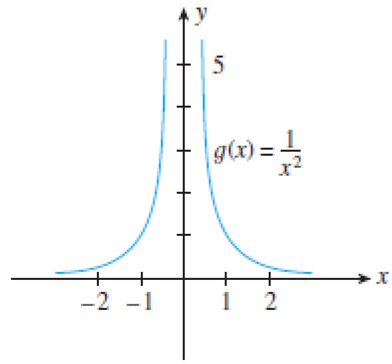
**მაგალითი 3.** გამოვითვალოთ შემდეგი ფუნქციების ზღვრები, როცა $x$ უახლოვდება მითითებულ წერტილს.

ა) $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$; $x = 0$.  ბ) $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $x = 0$.

**ამოხსნა:** $f$ და $g$ ფუნქციების გრაფიკები მოცემულია 27-ე ნახაზზე.




ა) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ არ არსებობს.




ბ) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ არ არსებობს.

ნახაზი 27.

ა). 27ა ნახაზიდან ჩანს, რომ რაც უნდა ახლოს იყოს $x$ ნულთან, მნიშვნელობა არა აქვს, $f(x)$ იღებს მნიშვნელობას 1 ან -1, იმისდა მიხედვით რომელი მხრიდან უახლოვდება $x$ ნულს. ამრიგად, არ არსებობს ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი $L$, რომელსაც უახლოვდება $f(x)$, როცა $x$ უახლოვდება ნულს. ამიტომ დავასკვნით, რომ არ არსებობს $f(x)$-ის ზღვარი, როცა $x$ უახლოვდება ნულს.
ბ). 27ბ ნახაზიდან ჩანს, რომ როცა $x$ უახლოვდება ნულს (ორივე მხრიდან), $g(x)$ შემოუსაზღვრელად იზრდება და არ უახლოვდება რაიმე კონკრეტულ რიცხვს. შესაბამისად დავასკვნით, რომ არ არსებობს $g(x)$-ის ზღვარი, როცა $x$ უახლოვდება ნულს.

ზემოთ განხილულ მაგალითებში ზღვრის გამოთვლისას, ჩვენთვის ცნობილი იყო ფუნქციის მნიშვნელობა ან მისი გრაფიკი $x=a$ წერტილის მახლობლობაში, რაც ბუნებრივად გვეხმარებოდა გამოგვეთვალა $f(x)$-ის ზღვარი, როცა $x$ უახლოვდება $a$ წერტილს. ფუნქციის ზღვრის შემდეგი თვისებები, რომელსაც დაუმტკიცებლად გთავაზობთ, შესაძლებლობას გვაძლევს, გამოვითვალოთ ფუნქციის ზღვარი ალგებრულად.

***თეორემა 1. ვთქვათ,*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ***და*** $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ ***. მაშინ***

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^r=[\lim\limits_{x\to a} f(x)]^r=L^r$ ***, r ნამდვილი რიცხვია;***
2. $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=cL$ ***, c ნამდვილი რიცხვია;***
3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\pm M$ ***;***
4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=[\lim\limits_{x\to a} f(x)][\lim\limits_{x\to a} g(x)]=LM$ ***;***
5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$ ***იმ პირობით, რომ*** $M\neq 0$ ***.***

**მაგალითი 4.** თეორემა 1-ის გამოყენებით გამოვითვალოთ შემდეგი ზღვრები.

ა) $\lim\limits_{x\to 2} x^3$; ბ) $\lim\limits_{x\to 4} 5x^{3/2}$; გ) $\lim\limits_{x\to 1}(5x^4-2)$; დ) $\lim\limits_{x\to 3} 2x^3\sqrt{x^2+7}$; ე) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+1}{x+1}$.

**ამოხსნა:** ა) $\lim_{x\to 2} x^3 = [\lim_{x\to 2} x]^3 = 2^3 = 8$; ბ) $\lim_{x\to 4} 5x^{3/2} = 5[\lim_{x\to 4} x^{3/2}] = 5(4)^{3/2} = 40$;

გ) $\lim_{x\to 1}(5x^4 - 2) = \lim_{x\to 1} 5x^4 - \lim_{x\to 1} 2$

$\lim_{x\to 1} 2$ გამოსათვლელად შევნიშნოთ, რომ მუდმივი ფუნქცია $g(x) = 2$ ღებულობს 2-ის ტოლ მნიშვნელობას ყოველი $x$-თვის. მაშასადამე, $g(x)$ უნდა მიუახლოვდეს 2-ს, როცა $x$ უახლოვდება 1-ს. ზოგადად, დავიმახსოვროთ, რომ ***მუდმივი ფუნქციის ზღვარი თვითონ ეს მუდმივია.***

ამრიგად, $\lim_{x\to 1}(5x^4 - 2) = 5(1)^4 - 2 = 3$;

დ) $\lim_{x\to 3} 2x^3\sqrt{x^2+7} = 2\lim_{x\to 3} x^3\sqrt{x^2+7} = 2\lim_{x\to 3} x^3 \lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+7} = 2(3)^3\sqrt{3^2+7} = 2(27)\sqrt{16} = 216$;

ე) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^2+1}{x+1} = \dfrac{\lim_{x\to 2}(2x^2+1)}{\lim_{x\to 2}(x+1)} = \dfrac{2(2^2+1)}{2+1} = \dfrac{9}{3} = 3$.

### განუსაზღვრელობის ფორმები

მოდით ერთხელ კიდევ გავამახვილოთ ყურადრება თეორემა 1-ში მოცემულ მე-5 თვისებაზე. იგი მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც მნიშვნელის ზღვარი განსხვავდება ნულისაგან.

თუ მრიცხველს გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი და მნიშვნელის ზღვარი ნულის ტოლია, მაშინ შეფარდების ზღვარი არ არსებობს. ამის მაგალითია $g(x) = 1/x^2$ ფუნქცია (იხ. მაგ. 3ბ). აქ, როცა $x$ უახლოვდება ნულს, მრიცხველი უახლოვდება 1, ხოლო მნიშვნელი უახლოვდება ნულს, რის გამოც წილადი ხდება უსასრულოდ დიდი. ამრიგად, როგორც ადრე ვნახეთ, ზღვარი არ არსებობს.

ახლა განვიხილოთ

$$\lim_{x\to 2}\frac{4(x^2-4)}{x-2},$$

რომელიც ადრე განვიხილეთ, როცა ვითვლიდით ფუნქციის მნიშვნელობებს $x = 2$ წერტილის მახლობლობაში. თუ ჩვენ შევეცდებით გამოვითვალოთ ეს ზღვარი მე-5 თვისების გამოყენებით, დავინახავთ, რომ

$$\frac{4(x^2-4)}{x-2}$$

ფუნქციის როგორც მრიცხველი ასევე მნიშვნელი უახლოვდება ნულს, როცა $x$ უახლოვდება 2-ს; ე. ი. მივიღებთ შემდეგი სახის გამოსახულებას 0/0. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვამბობთ, რომ $f(x)/g(x)$ შეფარდების ზღვრის გამოთვლისას, როცა $x$ უახლოვდება 2-ს, გვავს ***0/0 სახის განუსაზღვრელობა.***

ჩვენ შემდეგში დაგვჭირდება ასეთი სახის განუსაზღვრელობიდან ზღვარის გამოთვლა, როცა განვიხილავთ ფუნქციის წარმოებულს, დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითად ცნებას. თითქოს ერთი შეხედვით უაზრო 0/0 გამოსახულება არ გვაძლევს ჩვენი ამოცანის ამოხსნის საშუალებას, მაგრამ ქვემოთ განვიხილავთ ერთ მეთოდს, რომლის გამოყენებითაც შესაძლებელი იქნება ამ სახის ზღვრების გამოთვლა.

*განუსაზღვრელობის გახსნის მეთოდის არსი:*

1. *შევცვალოთ მოცემული ფუნქციები ეკვივალენტური სახით ისე, რომ გამარტივების შედეგად მიღებულმა ფუნქციამ და საწყისმა ფუნქციამ მიიღონ ერთი და იგივე მნიშვნელობები ყველგან, გარდა $x = a$ წერტილისა;*
2. *გამოვითვალოთ გამარტივების შედეგად მიღებული ფუნქციის ზღვარი, როცა $x$ უახლოვდება $a$ წერტილს.*

გამოვიყენოთ ეს მეთოდი მაგალითებში.

**მაგალითი 5.** გამოვითვალოთ:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4(x^2-4)}{x-2}$$

**ამოხსნა:** რადგან ამ წილადის მრიცხველიც და მნიშვნელიც უახლოვდება ნულს, როცა $x$ უახლოვდება 2-ს, ამიტომ გვაქვს 0/0 სახის განუსაზღვრელობა. წილადი გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{4(x^2-4)}{x-2}=\frac{4(x-2)(x+2)}{x-2}.$$

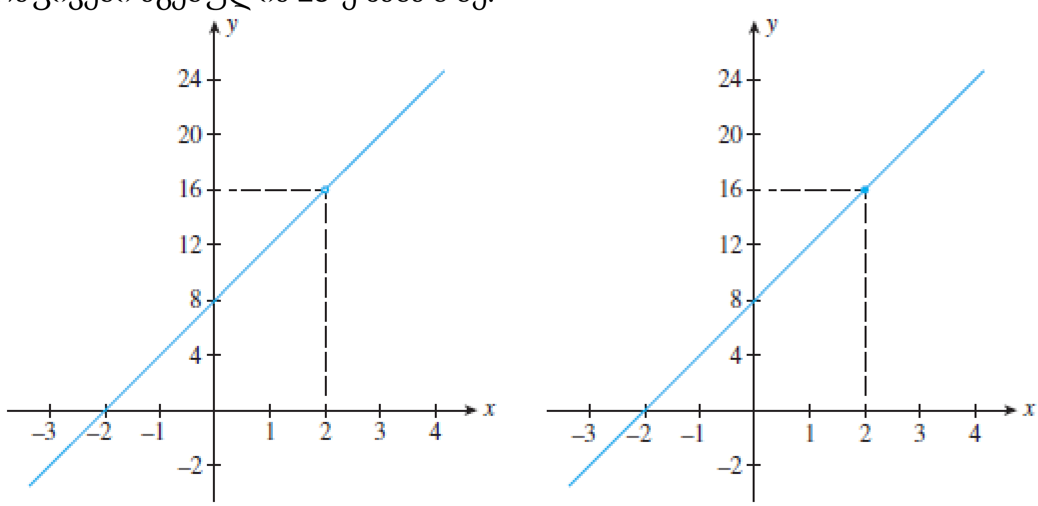
საერთო მამრავლზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ ეკვივალენტურ $4(x+2)$ გამოსახულებას, იმის გათვალისწინებით, რომ $x \neq 2$. ამიტომ ზღვარის გამოთვლის დროს $4(x^2-4)/(x-2)$ გამოსახულებას შევცვლით ეკვივალენტური $4(x+2)$ გამოსახულებით და გამოვითვლით ზღვარს

$$\lim_{x\to 2}\frac{4(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}4(x+2)=16.$$

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(x)=\frac{4(x^2-4)}{x-2} \quad \text{და} \quad g(x)=4(x+2).$$

მათი გრაფიკები აგებულია 28-ე ნახაზზე.




ა) $f(x)=\dfrac{4(x^2-4)}{x-2}$ ბ) $g(x)=4(x+2)$

ნახაზი 28.

როგორც ვხედავთ, მათი გრაფიკები თითქმის ერთი და იგივეა გარდა $x=2$ წერტილისა. $g$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი ნამდვილი $x$-თვის. $x=2$ წერტილში $g(2)=4(2+2)=16$. ამრიგად $(2,16)$ წერტილი ძევს $g$ ფუნქციის გრაფიკზე, თუმცა $f$ ფუნქცია არ არის განსაზღვრული $x=2$ წერტილიში. რადგან $f(x)=g(x)$ $x$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის გარდა $x=2$, ამიტომ $f$ ფუნქციის გრაფიკს უნდა ჰქონდეს ზუსტად იგივე სახე, რაც $g$ ფუნქციის გრაფიკს მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ წერტილი $(2,16)$ ამოგდებულია $g$ ფუნქციის გრაფიკიდან. გრაფიკული ილუსტრაცია გვიჩვენებს, თუ რატომ შეგვიძლია $f$ ფუნქციის ზღვარის გამოთვლა მისი ეკვივალენტური $g$ ფუნქციის ზღვარის გამოთვლით.

შევნიშნოთ, რომ ზღვარი მე-5 მაგალითში იგივეა, რაც ადრე მატარებლის მყისიერი სიჩქარის გამოთვლის დროს განხილული ზღვარი.

**მაგალითი 6.** გამოვითვალოთ

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}.$$

**ამოხსნა:** რადგან $h$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, ამიტომ შეფარდებაში გვაქვს 0/0 სახის განუსაზღვრელობა. მოვახდინოთ წილადის მრიცხველის რაციონალიზაცია მრიცხველისა და მნიშვნელის ერთდროულად $(\sqrt{1+h}+1)$ გამოსახულებაზე გადამრავლებით, მივიღებთ

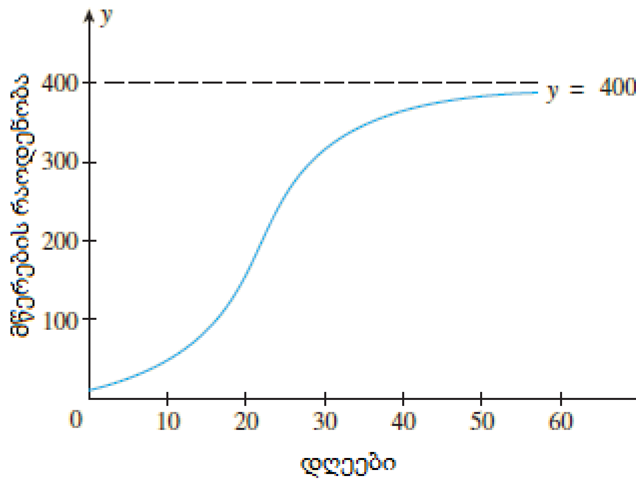
$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}.$$

## ზღვარი უსასრულობაში

აქამდე ჩვენ შევისწავლეთ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x$ უახლოვდება სასრულ $a$ რიცხვს. ამავე დროს საინტერესოა ვიცოდეთ, უახლოვდება თუ არა $f$ ფუნქცია ერთადერთ რაიმე რიცხვს, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად იზრდება. განვიხილოთ, მაგალითად, $P$ ფუნქცია, რომელიც აღწერს ხილის მწერების (დროსოფილა) რაოდენობას კონტეინერში, როგორც $t$ დროის ფუნქციას, ლაბორატორიული კონტროლის პირობებში. 29-ე ნახაზზე მოცემულია $P$ ფუნქციის გრაფიკი, რომლიდანაც ჩვენ შეგვიძლია დავინახოთ, რომ როცა $t$ შემოუსაზღვრელად იზრდება (ღებულობს უფრო და უფრო მეტ მნიშვნელობებს), $P(t)$ უახლოვდება 400.




ნახაზი 29.

ეს რიცხვი, რომელსაც გარემოს ამტანუნარიანობა ეწოდება, განისაზღვრება საარსებო სივრცით და საკვებით, ისევე როგორც სხვა გარემო ფაქტორებით.

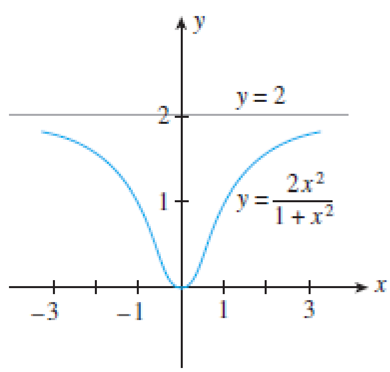
განვიხილოთ სხვა მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$$

და გვინდა განვსაზღვროთ, რა ემართება მას, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად იზრდება. თუ $x$-ის მნიშვნელობებად ავირჩევთ რიცხვთა შემდეგ მიმდევრობას 1, 2, 5, 10, 100, 1000 და შესაბამისად გამოვითვლით $f(x)$-ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს

| $x$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1.6 | 1.92 | 1.98 | 1.9998 | 1.999998 |

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ როცა $x$ ღებულობს უფრო და უფრო მეტ მნიშვნელობებს, მაშინ $f(x)$-ის მნიშვნელობები უფრო და უფრო ახლოსაა 2-თან. ამ გარემოებას ადასტურებს $f$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც 30-ე ნახაზზე მოცემული.



ნახაზი 30. $y=2$ არის $f(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $f$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად იზრდება, არის 2 და დავწერთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=2.$$

$y=2$ განტოლებით მოცემულს წრფეს ეწოდება ***ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.***

ზოგად შემთხვევაში, გვაქვს ***უსასრულობაში ფუნქციის ზღვარის*** შემდეგი განმარტება.

***$f$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად იზრდება (მიისწრაფვის უსასრულობისკენ), არის $L$ რიცხვი, თუ $x$-ის საკმარისად დიდი მნიშვნელობისათვის $f(x)$-ის მნიშვნელობა ნებისმიერად ახლოსაა $L$-თან და დავწერთ***

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L.$$

***ანალოგიურად, $f$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად მცირდება (მიისწრაფვის მინუს უსასრულობისკენ), არის $L$ რიცხვი, თუ $x$-ის საკმარისად მცირე მნიშვნელობისათვის $f(x)$-ის მნიშვნელობა ნებისმიერად ახლოსაა $L$-თან და დავწერთ***

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L.$$

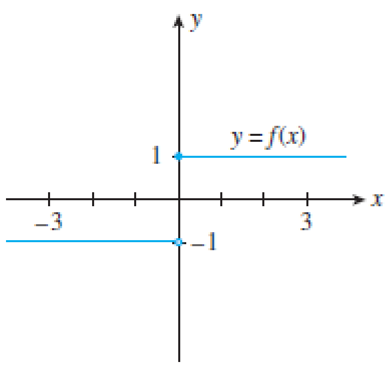
**მაგალითი 7.** ვთქვათ, მოცემულია $f$ და $g$ ფუნქციები

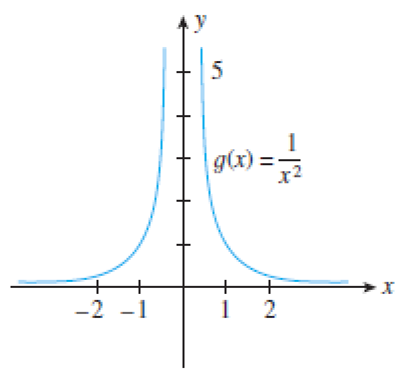
$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases} \qquad \text{და} \qquad g(x)=\frac{1}{x^2}.$$

გამოვითვალოთ:

ა) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ და $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; ბ) $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ და $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

**ამოხსნა:** $f$ და $g$ ფუნქციების გრაფიკები მოცემულია 31-ე ნახაზზე.




**ა)** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ და $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$; **ბ)** $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$.

ნახაზი 31.

ფუნქციათა გრაფიკების მიხედვით ვხედავთ, რომ

ა) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ და $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$; ბ) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ და $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

შევნიშნოთ, რომ ყველა თვისება, რაც მოცემულია თეორემა 1-ში, მართებულია უსასრულობაში ზღვრის გამოთვლის დროსაც; უბრალოდ ამ თვისებებში $a$ შეიცვლება $\infty$ ან $-\infty$-ით. უსასრულობაში ზღვრის გამოთვლისას დამატებით გვაქვს შემდეგი თვისებები.

***თეორემა 2. ყოველი $n>0$ ნამდვილი რიცხვისათვის***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad \textit{და} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

***იმ პირობით, რომ $\frac{1}{x^n}$ განსაზღვრულია.***

რაციონალური ფუნქციიდან უსასრულობაში ზღვრის გამოთვლის დროს ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ შემდეგ ხერხს: გავყოთ მრიცხველი და მნიშვნელი $x^n$ გამოსახულებაზე, სადაც $n$ წარმოადგენს მნიშვნელში უმაღლესი ხარისხის მაჩვენებელს.

**მაგალითი 8.** გამოვითვალოთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{2x^3+1}.$$

რადგან მრიცხველის და მნიშვნელის ზღვარი არ არსებობს, როცა $x$ მიისწრაფვის უსასრულობისკენ, ამიტომ შეფარდებაში ზღვარზე გადასვლა არ შეგვიძლია (მე-5 თვისება). მოვახდინოთ წილადის იგივური გარდაქმნა, გავყოთ მრიცხველი და მნიშვნელი $x^3$-ზე; მივიღებთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{2x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0+0}{2+0}=\frac{0}{2}=0.$$

**მაგალითი 9.** ვთქვათ, $f(x)=\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2+2x+4}$ და გამოვთვალოთ: ა) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ და

ბ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

**ამოხსნა:** ა) მრიცხველისა და მნიშვნელის $x^2$-ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2+2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}.$$

რადგან მრიცხველი ხდება უსასრულოდ დიდი, ხოლო მნიშვნელი უახლოვდება 1-ს, როცა $x$ მიისწრაფვის უსასრულობისკენ, ვხედავთ, რომ შეფარდება $f(x)$ ხდება აგრეთვე უსასრულოდ დიდი. სხვა სიტყვებით ზღვარი არ არსებობს. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2+2x+4}=\infty .$$

ბ) კვლავ მრიცხველისა და მნიშვნელის $x^2$ -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2+2x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}.$$

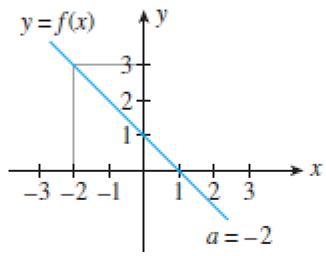
ამ შემთხვევაში, მრიცხველი ხდება ნებისმიერად დიდი მოდულით, მაგრამ უარყოფითი ნიშნით მაშინ, როდესაც მნიშვნელი კვლავ უახლოვდება 1-ს, როცა $x$ მიისწრაფვის მინუს უსასრულობისკენ. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელად მცირდება და ზღვარი არ არსებობს. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2+2x+4}=-\infty.$$

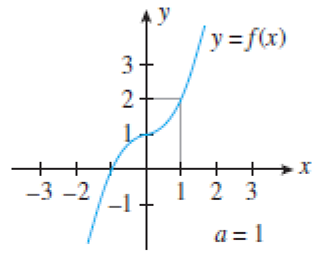
## სავარჯიშო

ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით იპოვეთ $\lim_{x \to a} f(x)$, თუ იგი არსებობს, $a$-ს მითითებული მნიშვნელობისათვის:

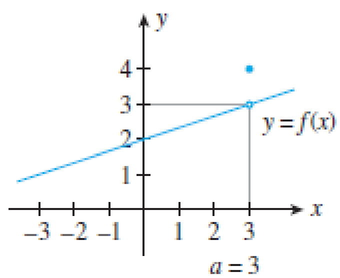
**1.**



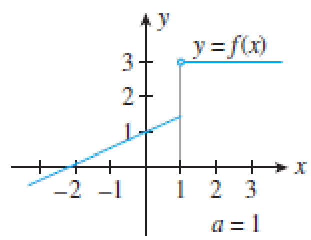

**2.**



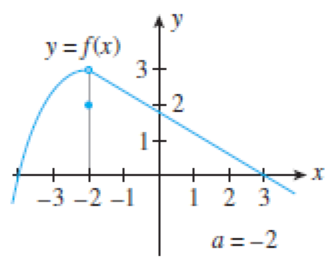

**3.**



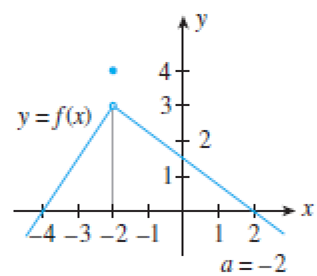

**4.**




**5.**




**6.**




შეავსეთ ცხრილი $f(x)$ მნიშვნელობების გამოთვლით $x$-ის მითითებულ მნიშვნელობებზე და ამ მონაცემებზე დაყრდნობით იპოვეთ მითითებული ზღვარი (თუ იგი არსებობს):

**7.** $f(x) = x^2 + 1; \quad \lim_{x \to 2} f(x)$

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**8.** $f(x) = 2x^2 - 1; \quad \lim_{x \to 1} f(x)$

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**9.** $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

| $x$ | -0.1 | -0.01 | -0.001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**10.** $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**ააგეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკი და გამოთვალეთ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, თუ იგი არსებობს, $a$-ს მითითებული მნიშვნელობისათვის:**

**11.** $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$ $(a=0)$; **12.** $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 3 \\ -2x+8, & x>3 \end{cases}$ $(a=3)$

**13.** $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ 0, & x=1 \\ -x+2, & x>1 \end{cases}$ $(a=1)$; **14.** $f(x)=\begin{cases} -2x+4, & x<1 \\ 4, & x=1 \\ x^2+1, & x>1 \end{cases}$ $(a=1)$

**15.** $f(x)=\begin{cases} |x|, & x\ne 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ $(a=0)$; **16.** $f(x)=\begin{cases} |x-1|, & x\ne 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$ $(a=1)$;

**გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:**

**17.** $\lim\limits_{x\to 2} 3$; **18.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-2x^2)$; **19.** $\lim\limits_{t\to 3}(4t^2-2t+1)$; **20.** $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3-3x^2+x+2)$;

**21.** $\lim\limits_{s\to 0}(2s^2-1)(2s+4)$; **22.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x+2}$; **23.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{2x^3+2}$; **24.** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+2}$;

**25.** $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{2x^4+x^2}$; **26.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}}{2x+4}$; **27.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+3}}$;

**იპოვეთ შემდეგი ზღვრები, თუ ცნობილია, რომ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=4$:**

**28.** $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$; **29.** $\lim\limits_{x\to a} 2f(x)$; **30.** $\lim\limits_{x\to a}[2f(x)-3g(x)]$; **31.** $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$;

**32.** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{g(x)}$; **33.** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{5f(x)+3g(x)}$; **34.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{2f(x)-g(x)}{f(x)g(x)}$; **35.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-f(x)}{f(x)+\sqrt{g(x)}}$;

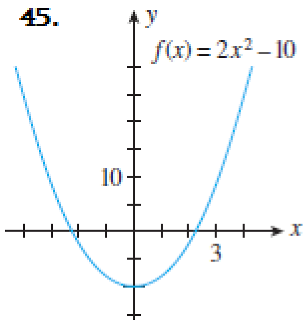
იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

**36.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$; **37.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$; **38.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x}{x}$; **39.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$; **40.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}$;

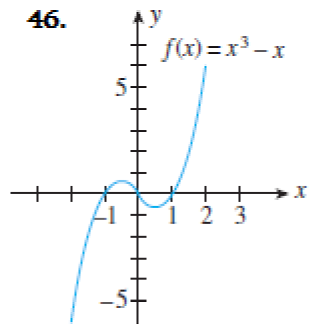
**41.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$; **42.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; **43.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; **44.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3+x^2-2x}$;

ფუნქციათა შემდეგი გრაფიკების მიხედვით იპოვეთ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

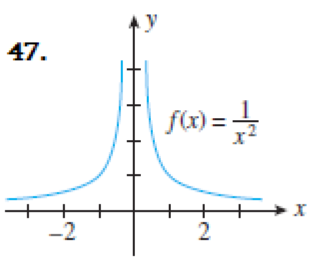
**45.**



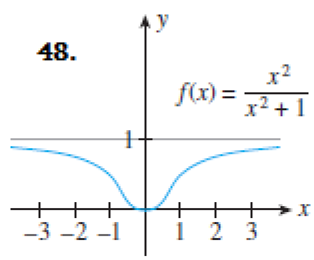

**46.**




**47.**




**48.**




შეავსეთ ცხრილი $f(x)$ მნიშვნელობების გამოთვლით $x$-ის მითითებულ მნიშვნელობებზე და ამ მონაცემებზე დაყრდნობით იპოვეთ მითითებული ზღვარი (თუ იგი არსებობს):

**49.** $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,

| $x$ | 1 | 10 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

| $x$ | -1 | -10 | -100 | -1000 |
|---|---|---|---|---|

| $f(x)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|

**50.** $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,

| $x$ | 1 | 10 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

| $x$ | -5 | -10 | -100 | -1000 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

**51.** $f(x)=3x^3-x^2+10$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,

| $x$ | 1 | 5 | 10 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

| $x$ | -1 | -5 | -10 | -100 | -1000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

**52.** $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,

| $x$ | 1 | 10 | 100 | --1 | -10 | -100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:**

**53.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{x-5}$; **54.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2-1}{x+2}$; **55.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3+x^2+1}{x^3+1}$; **56.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^4-x^2}$;

**57.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^2+1}{2x^4+x^3+x^2+x+1}$; **58.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3-1}$; **59.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x^3+x-1}{x^6+2x^2+1}$;

**60.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^3+x^2+1}$;

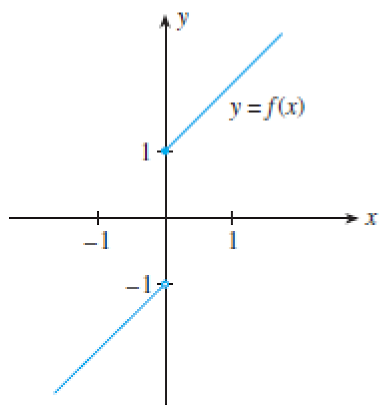
# მეხუთე ლექცია

## ცალმხრივი ზღვარი

განვიხილოთ $f$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$$

ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (ნახ.32)




ნახაზი 32. $f$ ფუნქციას არ აქვს ზღვარი, როცა $x$ მიისწრაფვის ნულისაკენ.

საიდანაც ჩანს, რომ $f$ ფუნქციას არ აქვს ზღვარი, როცა $x$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, რადგან როგორ ახლოსაც არ უნდა იყოს $x$ ნულთან, მნიშვნელობა არ აქვს, $f(x)$ იღებს მნიშვნელობებს, რომლებიც ახლოსაა 1-თან, თუ $x$ დადებითია, და $f(x)$ იღებს მნიშვნელობებს, რომლებიც ახლოსაა $-1$-თან, თუ $x$ უარყოფითია. მაშასადამე, $f(x)$ არ უახლოვდება რაიმე ერთ $L$ რიცხვს, როცა $x$ მიისწრაფვის ნულისაკენ. მაგრამ, თუ ჩვენ შევზღუდავთ $x$-ს ისე, რომ იგი იყოს ნულზე მეტი (მდებარეობდეს ნულიდან მარჯვნივ), მაშინ ჩვენ ვხედავთ, რომ $f(x)$-ის მნიშვნელობა იქნება ნებისმიერად ახლოს 1-თან, როდესაც $x$ საკმარისად ახლოსაა ნულთან. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ $f$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი, როცა $x$ მიისწრაფვის ნულისაკენ (მარჯვნიდან) არის 1 და დავწერთ

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=1.$$

ანალოგიურად, ვხედავთ, რომ $f(x)$-ის მნიშვნელობა იქნება ნებისმიერად ახლოს $-1$-თან, როდესაც $x$ ნულთან საკმარისად ახლოსაა, მაგრამ ამჯერად ნულის მარცხენა მხრიდან. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ $f$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი, როცა $x$ მიისწრაფვის ნულისაკენ (მარცხნიდან), არის $-1$ და ვწერთ

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=-1.$$

მარცხენა და მარჯვენა ზღვრებს ***ცალმხრივი ზღვრები*** ეწოდება.

ცალმხრივი ზღვრებისთვის გვაქვს შემდეგი განმარტება.

***ვიტყვით, რომ*** $f$ ***ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი არის*** $L$ ***რიცხვი, თუ*** $f(x)$ ***მიისრაფვის*** $L$ ***რიცხვისკენ, როდესაც*** $x$ ***მიისწრაფვის*** $a$ ***-კენ მარჯვნიდან, და დავწერთ***

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L.$$

*ანალოგიურად, ვიტყვით, რომ $f$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი არის $L$ რიცხვი, თუ $f(x)$ მიისრაფვის $L$ რიცხვისკენ, როდესაც $x$ მიისწრაფვის $a$-კენ მარცხნიდან, და დავწერთ*

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L.$$

ფუნქციის ზღვარსა და ცალმხრივ ზღვრებს შორის კავშირს ამყარებს შემდეგი თეორემა.

***თეორემა 3.*** *ვთქვათ, $f$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x = a$ წერტილის მახლობლობაში, გარდა შესაძლებელია თვით $a$ წერილისა, მაშინ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$.*

ფუნქციას გააჩნია ზღვარი მოცემულ წერტილში, თუ ამ წერტილში მას გააჩნია ერთმანეთის ტოლი ცალმხრივი ზღვრები.

**მაგალითი 1.** ვთქვათ,

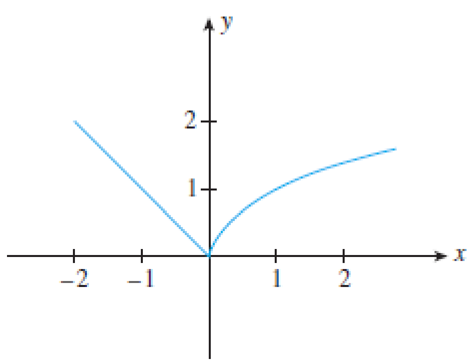
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{და} \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}.$$

**ა)** $f$ ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრების გამოთვლით ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $\lim_{x \to 0} f(x)$;

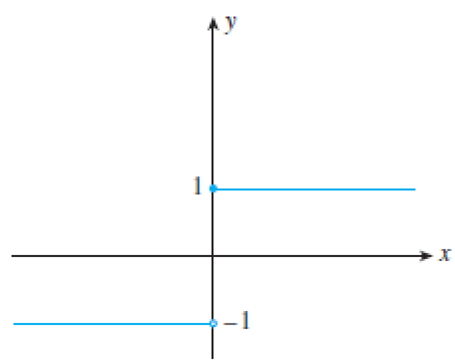
**ბ)** ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობს $\lim_{x \to 0} g(x)$.

**ამოხსნა:** **ა)** როცა $x \le 0$, მაშინ $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (-x) = 0$; როცა $x > 0$, მაშინ $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$. ამიტომ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. (ნახ. 33ა);

**ბ)** გვაქვს $\lim_{x \to 0-} g(x) = -1$ და $\lim_{x \to 0+} g(x) = 1$. რადგან ცალმხრივი ზღვრები განსხვავდება ერთმანეთისგან, დავასკვნით, რომ $\lim_{x \to 0} g(x)$ არ არსებობს (ნახ. 33ბ)




**ა)** $\lim_{x \to 0} f(x)$ არსებობს

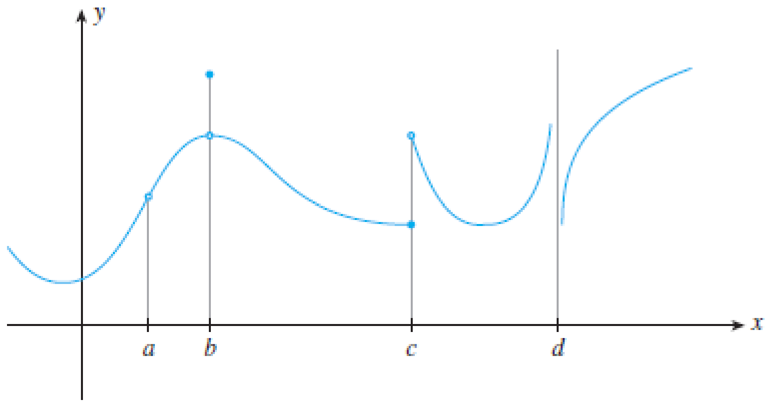



**ბ)** $\lim_{x \to 0} g(x)$ არ არსებობს

ნახაზი 33.

## უწყვეტი ფუნქციები

უწყვეტი ფუნქციები შემდგომში მნიშვნელოვან როლს შეასრულებს დიფერენციალური აღრიცხვის შესწავლისას. ზოგადად, ამბობენ, რომ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, თუ ფუნქციის გრაფიკს ამ წერტილში არ აქვს "ხვრელი", ნახტომი ან წყვეტა. განვიხილოთ, მაგალითად, $f$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც გამოსახულია 34-ე ნახაზზე.




ნახაზი 34. ფუნქცია არ არის უწყვეტი $x=a$, $x=b$, $x=c$ და $x=d$ წერტილებში.

დავაკვირდეთ ფუნქციის ყოფაქცევას $x=a$, $x=b$, $x=c$ და $x=d$ წერტილების მახლობლობაში. პირველად შევნიშნოთ, რომ $f$ არ არის განსაზღვრული $x=a$ წერტილში ე. ი. $x=a$ არ შედის ფუნქციის განსაზღვრის არეში გრაფიკზე არსებული "ხვრელის" გამო. $x=b$ წერტილში არსებობს ფუნქციის მნიშვნელობა $f(b)$, მაგრამ არ არსებობს ფუნქციის ზღვარი, როცა $x$ უახლოვდება $b$-ს. ეს ხდება $b$ წერტილში გრაფიკის "ნახტომის" გამო. $x=c$ წერტილში $f$ ფუნქციას არ აქვს ზღვარი, რადგან ცალმხრივი ზღვრები ერთმანეთის ტოლი არ არის. ეს ხდება აგრეთვე $f$ ფუნქციის გრაფიკზე არსებული "ნახტომის" გამო. დაბოლოს, $f$ ფუნქციას არ გააჩნია ზღვარი $x=d$ წერტილში გრაფიკის წყვეტის გამო. $f$ ფუნქცია წყვეტილია თითოეულ ამ წერტილში და უწყვეტია ყველა დანარჩენ წერტილში.

***$f$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $x=a$ წერტილში, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:***

***1. $f$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x=a$ წერტილში;***

***2. არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;***

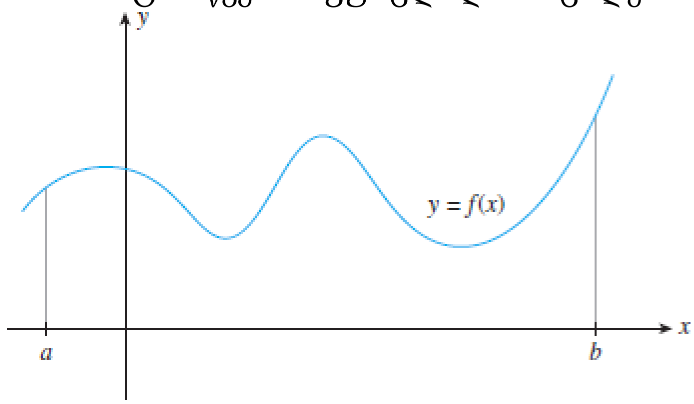
***3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.***

ამრიგად, $f$ ფუნქცია უწყვეტია $x=a$ წერტილში, თუ მისი ზღვარი ამ წერტილში არსებობს და $f(a)$-ს ტოლია. გეომეტრიულად, $f$ ფუნქცია უწყვეტია $x=a$ წერტილში, თუ $x$-ის სიახლოვე $a$-თან იწვევს $f(x)$-ის სიახლოვეს $f(a)$-თან.

*თუ $f$ ფუნქცია არ არის უწყვეტი $x=a$ წერტილში, მაშინ მას წყვეტილი ეწოდება ამ წერტილში.*

*$f$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი ინტერვალზე, თუ ის უწყვეტია ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში.*

35-ე ნახაზზე გამოსახულია $(a,b)$ ინტერვალზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის გრაფიკი. შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის გრაფიკი მთელს $(a,b)$ ინტერვალზე შეიძლება ავაგოთ უწყვეტი წირით პასტის წვეროს ფურცლიდან მოცილების გარეშე.



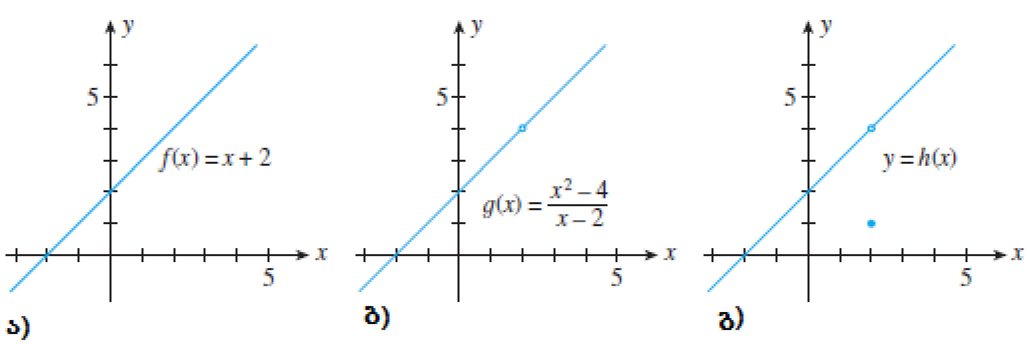

ნახაზი 35. ფუნქცია უწყვეტია $(a,b)$ ინტერვალზე.

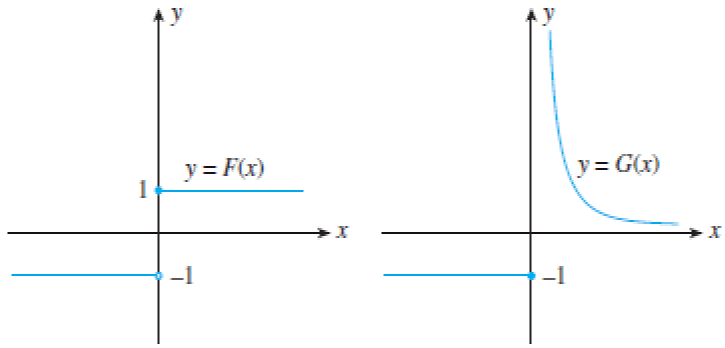
**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ $x$-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელშიც უწყვეტია თითოეული ფუნქცია:

ა) $f(x)=x+2$; ბ) $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$; გ) $h(x)=\begin{cases} x+2, & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$; დ) $F(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$;

ე) $G(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0 \\ -1 & x\leq 0 \end{cases}$.

თითოეული ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 36-ე ნახაზზე






დ) ე)

ნახაზი 36.

**ამოხსნა: ა)** $f$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან, რადგან უწყვეტობის სამივე პირობა სრულდება $x$-ის ყველა მნიშვნელობისათვის;

**ბ)** $g$ ფუნქცია წყვეტილია $x=2$ წერტილში, რადგან $g$ არ არის განსაზღვრული ამ წერტილში. იგი უწყვეტია ყველა დანარჩენ წერტილში;

**გ)** $h$ ფუნქცია წყვეტილია $x=2$ წერტილში, რადგან დარღვეულია უწყვეტობის მესამე პირობა; $h(x)$-ის ზღვარი, როცა $x$ უახლოვდება 2-ს არსებობს და 4-ის ტოლია, მაგრამ ეს ზღვარი ტოლი არ არის $h(2)=1$რიცხვის. $h$ უწყვეტია $x$-ის ყველა სხვა მნიშვნელობებისათვის;

**დ)** $F$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან, გარდა $x=0$, სადაც $F(x)$-ის ზღვარი არ არსებობს, როცა $x$ უახლოვდება ნულს;

**ე)** რადგან $G(x)$-ის ზღვარი არ არსებობს, როცა $x$ უახლოვდება ნულს, დავასკვნით, რომ $G$ ვერ იქნება უწყვეტი $x=0$ წერტილში. $G$ უწყვეტია ყველა დანარჩენ წერტილში.

## უწყვეტ ფუნქციათა თვისებები

ფუნქციის ზღვრის თვისებებიდან და უწყვეტობის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს უწყვეტი ფუნქციათა შემდეგი თვისებები:

1. მუდმივი $f(x)=c$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან;
2. იგივური $f(x)=x$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან;

   თუ $f$ და $g$ უწყვეტი ფუნქციებია $x=a$ წერტილში, მაშინ
3. $[f(x)]^n$, სადაც $n$ ნამდვილი რიცხვია, უწყვეტია $x=a$ წერტილში, თუ იგი განსაზღვრულია ამ წერტილში;
4. $f \pm g$ უწყვეტია $x=a$ წერტილში;
5. $f\,g$ უწყვეტია $x=a$ წერტილში;
6. $f\,/\,g$ უწყვეტია $x=a$ წერტილში, თუ $g(a)\neq 0$.

## მრავალწევრისა და რაციონალური ფუნქციის უწყვეტობა

უწყვეტ ფუნქციათა ზემოთ მითითებული თვისებების გამოყენებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი წინადადებები:

1. პოლინომური $y = P(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის;
2. რაციონალური $R(x) = p(x)/q(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, სადაც $q(x) \neq 0$.

**მაგალითი 3.** ვიპოვოთ $x$-ის მნიშვნელობები, რომლებშიც უწყვეტია მოცემული ფუნქციები:

**ა)** $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 10$ **ბ)** $g(x) = \dfrac{8x^{10} - 4x + 1}{x^2 + 1}$ **გ)** $h(x) = \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$

**ამოხსნა: ა)** $f$ ფუნქცია წარმოადგენს მესამე ხარისხის პოლინომურ ფუნქციას, ამიტომ იგი უწყვეტია $x$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის;

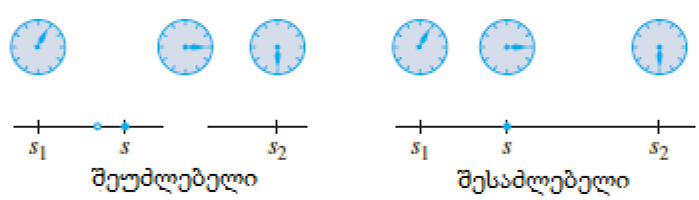
**ბ)** $g$ რაციონალური ფუნქციაა. შევნიშნოთ, რომ მნიშვნელი $x^2 + 1$ არასდროს ხდება ნულის ტოლი. ამიტომ $g$ ფუნქცია უწყვეტია $x$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის;

**გ)** $h$ რაციონალური ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში მნიშვნელი ნულის ტოლი ხდება $x = 1$ და $x = 2$ წერტილებში. ეს შეგვიძლია დავინახოთ მნიშვნელის მამრავლებად დაშლის გზით $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. აქედან გამომდინარე დავასკვნით, რომ $h$ უწყვეტი ფუნქციაა ყველგან გარდა $x = 1$ და $x = 2$ მნიშვნელობებისა.

## თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ

გავიხსენოთ წრფის გასწვრივ მოძრავი მატარებლის მაგალითი. ცხადია, რომ მატარებელი არ შეიძლება გაქრეს დროის რაიმე მყისიერ მომენტში, არ შეიძლება გამოტოვოს გზის ნაწილი და გამოჩნდეს სხვა ადგილას. სხვანაირად რომ ვთქვათ, არ შეიძლება მატარებელი გადაადგილდეს $s_1$ პოზიციიდან $s_2$ პოზიციამდე, თუ დროის რომელიღაც მომენტში მას არ ეკავა შუალედური პოზიცია $s_1$ და $s_2$ შორის. ეს ფაქტი მათემატიკურად რომ ავხსნათ, გავიხსენოთ, რომ მატარებლის მდებარეობა აღიწერება $f(t) = 4t^2 \quad (0 \leq t \leq 10)$ ფუნქციით.

ვთქვათ, დროის $t_1$ მომენტისათვის მატარებელი იმყოფება $s_1$ პოზიციაზე, ხოლო დროის $t_2$ მომენტისათვის კი $s_2$ პოზიციაზე (ნახ. 37).

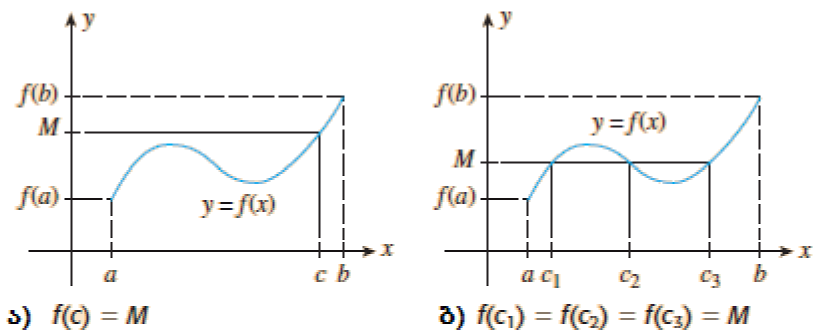



ნახაზი 37. მატარებლის პოზიცია.

დაუშვათ, $s_3$ არის ნებისმიერი რიცხვი $s_1$ და $s_2$ რიცხვებს შორის, რომელიც წარმოადგენს მატარებლის შუალედურ პოზიციას, მაშინ, ცხადია, უნდა არსებობდეს დროის ერთი მაინც $t_3$ მომენტი, $t_1$ და $t_2$ შორის, რომელშიც მატარებელი იმყოფება $s_3$ პოზიციაზე ე.ი. $f(t_3)=s_3$. საკითხის ასეთი განხილვით ბუნებრივად მივდივართ საშუალო მნიშვნელობის თეორემამდე.

*თეორემა 4. (საშუალო მნიშვნელობის თეორემა)*

***თუ $f$ არის უწყვეტი ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე და $M$ ნებისმიერი რიცხვია $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს შორის, მაშინ არსებობს ერთი მაინც $c$ რიცხვი $[a,b]$ სეგმენტში, რომელზედაც $f(c)=M$ (ნახ. 38)***




ნახაზი 38.

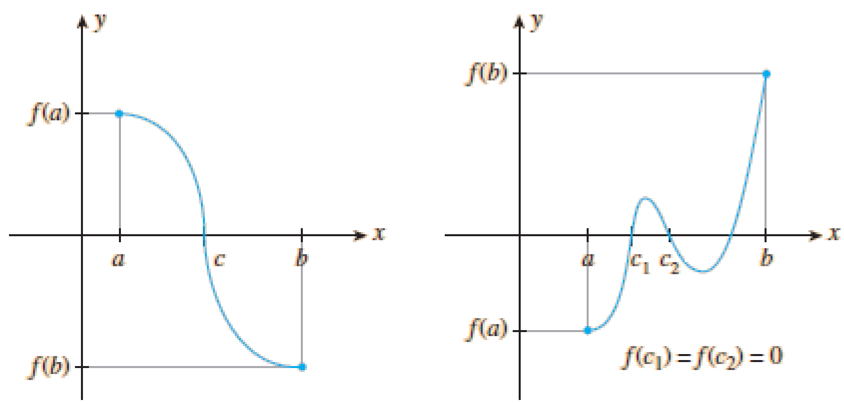
საშუალედო მნიშვნელობის თეორემის საილუსტრაციოდ დაუბრუნდეთ კვლავ მატარებლის მოძრაობის მაგალითს. შევნიშნოთ, რომ მატარებლის საწყისი პოზიცია არის $f(0)=0$ და საბოლოო კი $f(10)=400$. გარდა ამისა, $f$ ფუნქცია უწყვეტია $[0,10]$ სეგმენტზე. ამიტომ საშუალედო მნიშვნელობის თეორემის გამოყენებით დავადგენთ, რომ თუ ნებისმიერად ავირჩევთ რიცხვს ნულსა და 400 შორის, მაგალითად, 100-ს, რომელიც განსაზღვრავს მატარებლის პოზიციას, მაშინ აუცილებლად არსებობს $\overline{t}$ ნულსა და 10 შორის, რომლის დროსაც მატარებელი იმყოფება $s=100$ პოზიციაზე. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $\overline{t}$ უნდა ამოვხსნათ განტოლება $f(\overline{t})=s$ ანუ $4\overline{t}^2=100$, რაც გვაძლევს $\overline{t}=5$ ($\overline{t}$ უნდა იყოს ნულსა და 10 შორის).

## თეორემა სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის ნულის არსებობის შესახებ

საშუალედო მნიშვნელობის თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ე.წ. $f$ ფუნქციის ნულის ანუ $f(x)=0$ განტოლების ფესვის არსებობის თეორემა.

*თეორემა 5 (უწყვეტი ფუნქციის ნულის არსებობის შესახებ)*

***თუ $f$ არის უწყვეტი ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე და $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს აქვთ საწინააღმდეგო ნიშნები, მაშინ არსებობს $f(x)=0$ განტოლების ერთი მაინც ამონახსნი $(a,b)$ ინტერვალში (ნახ. 39).***



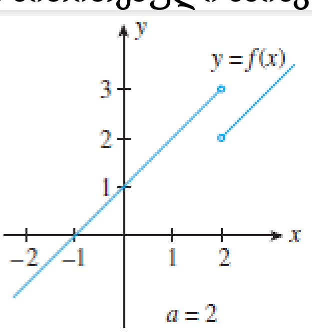

ნახაზი 39. თუ $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს აქვთ საწინააღმდეგო ნიშნები, მაშინ არსებობს ერთი მაინც ისეთი $c$ რიცხვი $(a,b)$ ინტერვალში, რომ $f(c)=0$.

ამ თვისების გეომეტრიული არსი ისაა, რომ თუ უწყვეტი ფუნქციის გრაფიკი $x$ ღერძის ზედა მხრიდან გადადის $x$ ღერძის ქვედა მხარეს ან პირიქით, მაშინ გრაფიკმა უნდა გადაკვეთოს $x$ ღერძი. ეს შედეგი არ არის მართებული წყვეტილი ფუნქციისათვის.

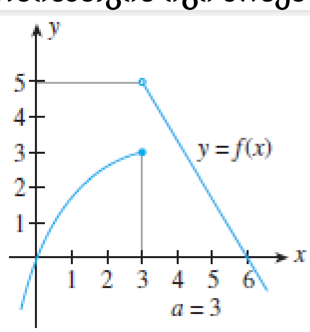
## სავარჯიშო

**ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით იპოვეთ $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, თუ $a$-ს მითითებული მნიშვნელობისათვის იგი არსებობს:**

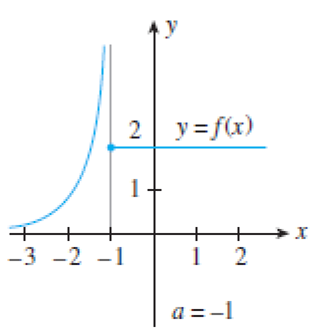
**1.**



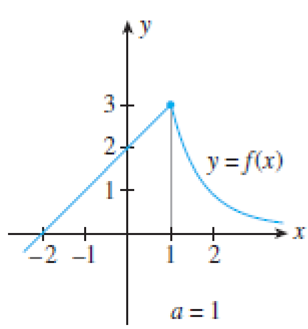

**2.**



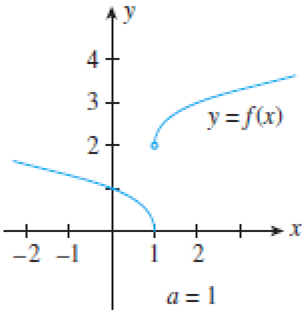

**3.**



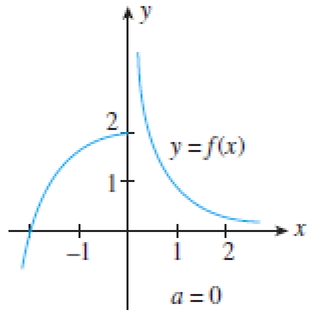

**4.**



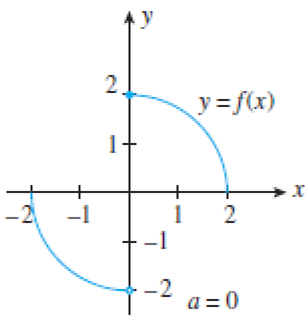
5.



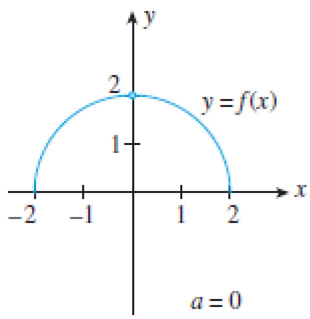

6.



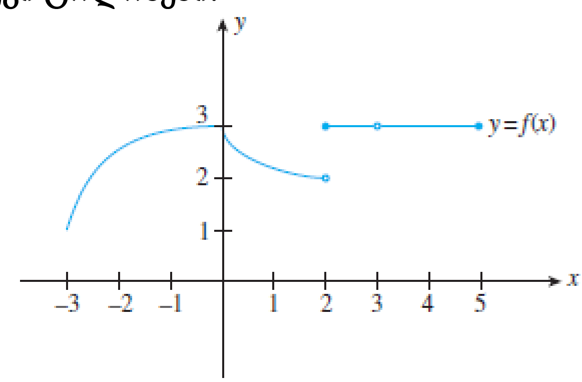

7.




8.




ფუნქციის მოცემული გრაფიკის მიხედვით დავადგინოთ ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი ტოლობები:




**9.** $\lim\limits_{x\to -3+} f(x)=1$; **10.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$; **11.** $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=2$; **12.** $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=3$;

**13.** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ არ არსებობს; **14.** $\lim\limits_{x\to 5-} f(x)=3$.

**იპოვეთ ცალმხრივი ზღვარი, თუ იგი არსებობს:**

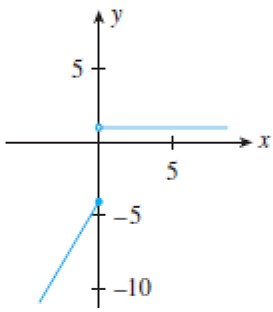
15. $\lim\limits_{x\to 1+}(2x+4)$; **16.** $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x-3}{x+2}$; **17.** $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}$; **18.** $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x}$; **19.** $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x+1}{x^2-2x+3}$

**20.** $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}$; **21.** $\lim\limits_{x\to 2+} 2\sqrt{x-2}$; **22.** $\lim\limits_{x\to -2+}(2x+\sqrt{2+x})$; **23.** $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1+x}{1-x}$; **24.** $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

**25.** $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, სადაც $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ x^2, & x\ge 0\end{cases}$

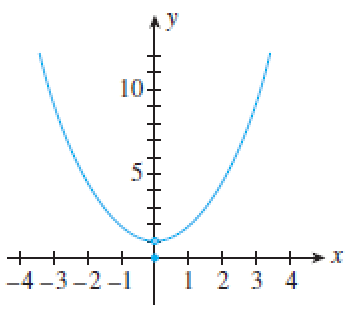
დაადგინეთ $x$-ის მნიშვნელობა, რომელშიც ფუნქცია განიცდის წყვეტას. თითოეულ წყვეტის წერტილში განსაზღვრეთ, უწყვეტობის რომელი პირობაა დარღვეული.

**26.**



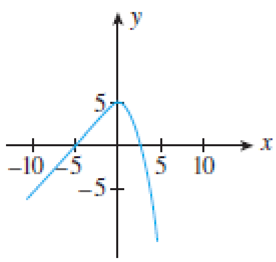
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{if } x \le 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

**27.**



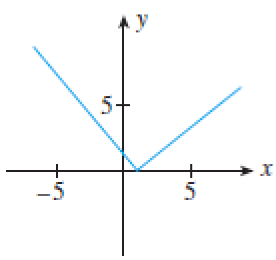
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{if } x \ne 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

**28.**



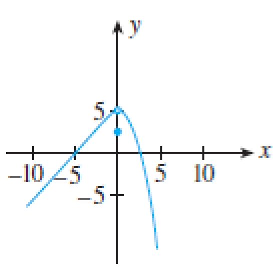
$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{if } x \le 0 \\ -x^2 + 5 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

**29.**



$$f(x) = |x - 1|$$

**30.**



$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{if } x < 0 \\ 2 & \text{if } x = 0 \\ -x^2 + 5 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების უწყვეტობის ინტერვალები:

**31.** $f(x)=2x^2+x-1$; **32.** $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$; **33.** $f(x)=\dfrac{2}{2x-1}$; **34.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$;

**35.** $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$; **36.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$; **37.** $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ 2x-1, & x>1 \end{cases}$;

**38.** $f(x)=\begin{cases} -2x+1, & x<0 \\ x^2+1, & x\ge 0 \end{cases}$; **39.** $f(x)=|x+1|$; **40.** $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$;

იპოვეთ $x$-ის ყველა მნიშვნელობა, რომელშიც ფუნქცია განიცდის წყვეტას:

**41.** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$; **42.** $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$; **43.** $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$;

**44.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$;

# მეექვსე ლექცია

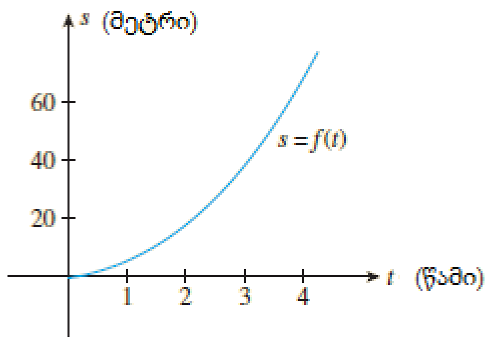
## წირის მხები წრფე და მისი საკუთხო კოეფიციენტი

ჩვენ ადრე აღვნიშნეთ, რომ ერთი სიდიდის ცვლილების სიჩქარის მოძებნა სხვა სიდიდის მიმართ მათემატიკურად ეკვივალენტურია მოცემულ წერტილში წირის მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტის მოძებნის ამოცანისა.

განვიხილოთ კვლავ მოძრავი მატარებელის მაგალითი. გავიხსენოთ, რომ მატარებლის მდებარეობა დროის ნებისმიერი $t$ მომენტისათვის აღიწერება ფუნქციით

$$s = f(t) = 4t^2 \qquad (0 \le t \le 30),$$

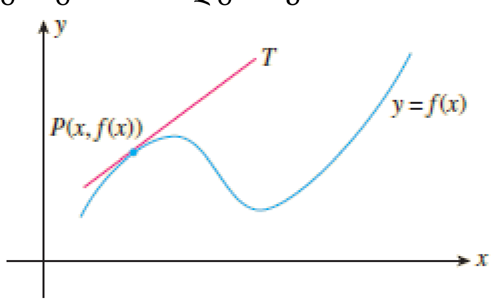
სადაც $s$ იზომება მეტრებში, ხოლო $t$ წამებში. ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 40-ე ნახაზზე



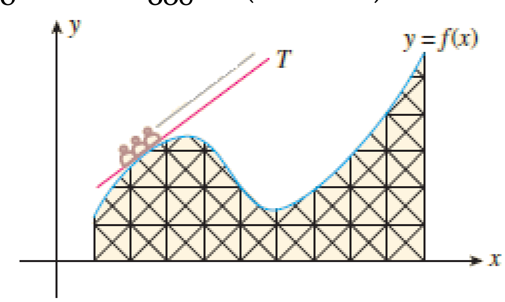

ნახაზი 40.

თუ გრაფიკს დავაკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ $t$-ს ზრდასთან ერთად $f$ ფუნქცია პირველად ნელა იზრდება, ხოლო შემდგომ კი - სწრაფად. ეს ასახავს იმ ფაქტს, რომ მატარებლის სიჩქარე იზრდება დროსთან ერთად. გეომეტრიულად ეს დამოკიდებულება გამოიხატება იმაში, რომ გრაფიკი უფრო ციცაბო ხდება დროის გაზრდასთან ერთად. აქედან ჩანს, რომ ჩვენ შეგვეძლება სიჩქარის განსაზღვრა დროის ნებისმიერ მომენტში, თუ ჩვენ შევძლებთ რაიმე წესით გავზომოთ წირის დახრილობა დროის ნებისმიერ მომენტში.

წირის დახრილობის განსაზღვრისათვის განვიხილოთ $f$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც 41ა ნახაზზეა მოცემული. ვთქვათ, ეს გრაფიკი წარმოადგენს ატრაქციონზე ზორბლებზე მოსრიალე მანქანის სამოძრაო გზის მონაკვეთს (ნახ. 41ბ ).




ა) $T$ არის წირის მხები წრფე $P$ წერტილში.

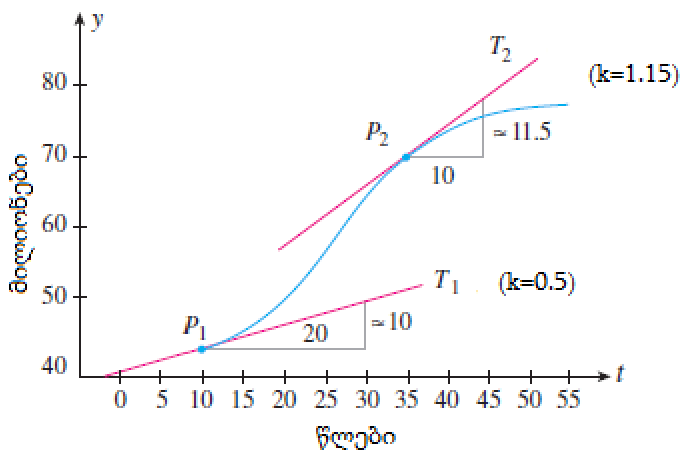



ბ) $T$ პარალელურია ხედვის წრფის.

ნახაზი 41.

როდესაც მოსრიალე მანქანა იმყოფება წრის $P$ წერტილში, მგზავრები რომლებიც მანქანაში სხედან, იხედებიან წინ წრფის გასწვრივ, რომელიც $T$ წრფის ანუ $P$ წერტილზე გავლებული მხები წრფის პარალელურია. 39ა ნახაზის მიხედვით უნდა ვივარაუდოთ, რომ $y$-ის ზრდადობის ან კლებადობის სიჩქარის ზომა $x$-ის ცვლილების მიმართ ანუ წრის დახრილობის ზომა განისაზღვრება $f$ ფუნქციის გრაფიკის $P(x, f(x))$ წერტილზე გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტის სიდიდით. ჩვენ ახლა ვაჩვენებთ, თუ როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ ეს დამოკიდებულება ფუნქციის ცვლილების სისწრაფის შესაფასებლად მისი გრაფიკის მიხედვით.

**მაგალითი** 1. ვთქვათ, $y = N(t)$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკი წარმოდგენილია 42-ე ნახაზზე, გვაძლევს სოციალურად დაცული ბენეფიციარების რაოდენობას 1990 წლიდან $(t = 0)$ 2045 წლამდე $(t = 55)$.




ნახაზი 42.

$y = N(t)$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით დავადგინოთ, როგორ გაიზრდება სოციალურად დაცული ბენეფიციარების რაოდენობა 2000 წლის $(t = 10)$ დასაწყისიდან. რა სისწრაფით გაიზრდება ეს რაოდენობა 2025 წლის $(t = 35)$ დასაწყისიდან? ვუშვებთ, რომ $N$ ფუნქციის ცვლილების სიდიდე დროის ნებისმიერ $t$ მომენტში განისაზღვრება $P(t, N(t))$ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტით.

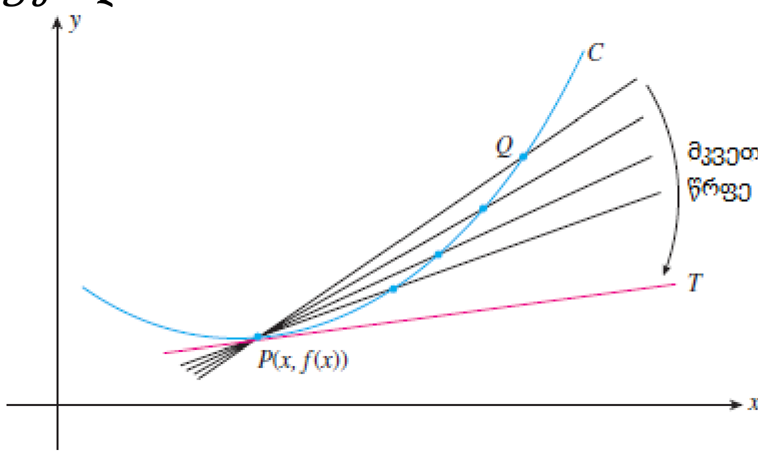
**ამოხსნა:** ნახაზიდან ჩანს, რომ $P_1(10, 44.7)$ წერტილში გავლებული მხები $T_1$ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი $k$ დაახლოებით 0.5-ის ტოლია. ეს გვიჩვენებს, რომ $y$ გაიზრდება 0.5 ერთეულით, როცა $t$ გაიზრდება ერთი ერთეულით $t = 10$ მნიშვნელობიდან. სხვა სიტყვებით, 2000 წლის დასაწყისიდან სოციალურად დაცული ბენეფიციარების რაოდენობა დაახლოებით გაიზრდება 0.5 მილიონით წელიწადში.

$P_2(35, 71.9)$ წერტილში გავლებული $T_2$ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი $k$ დაახლოებით 1.15 ტოლია. ეს გვიჩვენებს, რომ 2025 წლის დასაწყისიდან სოციალურად დაცული ბენეფიციარების რაოდენობა გაიზრდება დაახლოებით 1.15 მილიონით ანუ 1,150,000 მილიონით წელიწადში.

## ფუნქციის ცვლილების საშუალო და მყისიერი სიჩქარე

მხები წრფის ანალიზურად მოძებნისათვის ჩვენ დაგვჭირდება წირის მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტის ზუსტი განმარტება.

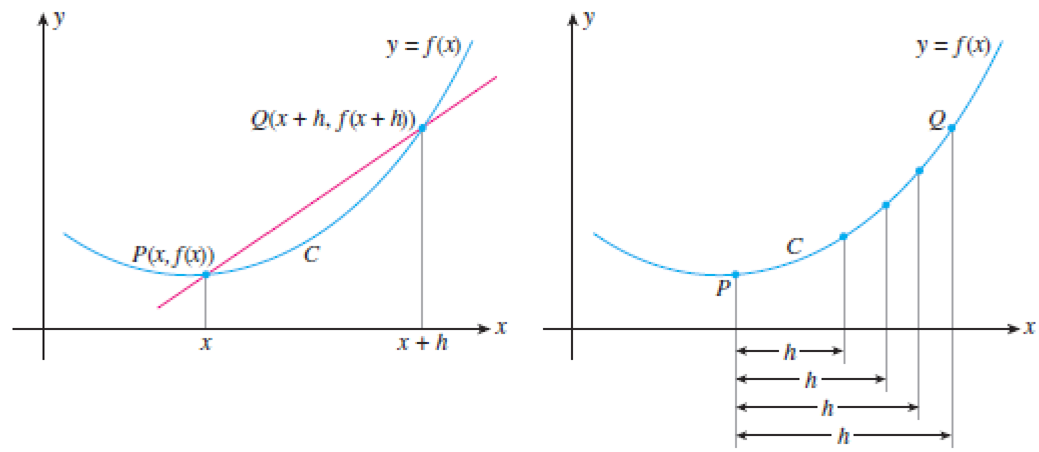
იმისათვის, რომ განვმარტოთ $C$ წირის $P$ წერტილზე გავლებული მხები, დავაფიქსიროთ $P$ და განვიხილოთ $C$ წირის $P$-გან განსხვავებული ნებისმიერი $Q$ წერტილი (ნახ. 43). წრფეს, რომელიც გადის $P$ და $Q$ წერტილებზე, ვუწოდოთ ***მკვეთი წრფე ანუ ქორდა.***




ნახაზი 43.

როცა $Q$ წერტილი მოძრაობს $P$ წერტილისაკენ წირის გასწვრივ, მაშინ მკვეთი წრფე ბრუნავს ფიქსირებული $P$ წერტილის ირგვლივ და უახლოვდება ფიქსირებულ წრფეს. ეს ფიქსირებული წრფე, როგორც ზღვრული მდებარეობა $P$ და $Q$ წერტილებზე გამავალი მკვეთი წრფისა, როცა $Q$ წერტილი მიისწრაფვის $P$ წერტილისაკენ, არის $f$ ***ფუნქციის გრაფიკის მხები*** $P$ ***წერტილში.***

ჩვენ შეგვიძლია ეს პროცესი აღვწეროთ უფრო ზუსტად შემდეგნაირად. დაუშვათ $C$ წირი არის $y = f(x)$ განტოლებით განსაზღვრული $f$ ფუნქციის გრაფიკი. მაშინ $P$ წერტილის კოორდინატები იქნება $P(x, f(x))$, ხოლო $Q$ წერტილის $Q(x+h, f(x+h))$, სადაც $h$ რაიმე ნულის არატოლი რიცხვია (ნახ. 44ა)




ა) $P(x, f(x))$ და $Q(x+h, f(x+h))$ წერტილები.   ბ) როცა $h \to 0$, მაშინ $Q$ მიისწრაფვის $P$-კენ.

ნახაზი 44.

შევნიშნოთ, რომ $Q$ წერტილი მიუახლოვდება $P$ წერტილს წირის გასწვრივ, თუ $h$ მიუახლოვდება ნულს (ნახ. 44ბ). ახლა, თუ გამოვიყენებთ წრფის საკუთხო კოეფიციენტის მოძებნის ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ $P(x, f(x))$ და $Q(x+h, f(x+h))$ წერტილებზე გამავალი მკვეთი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{1}$$

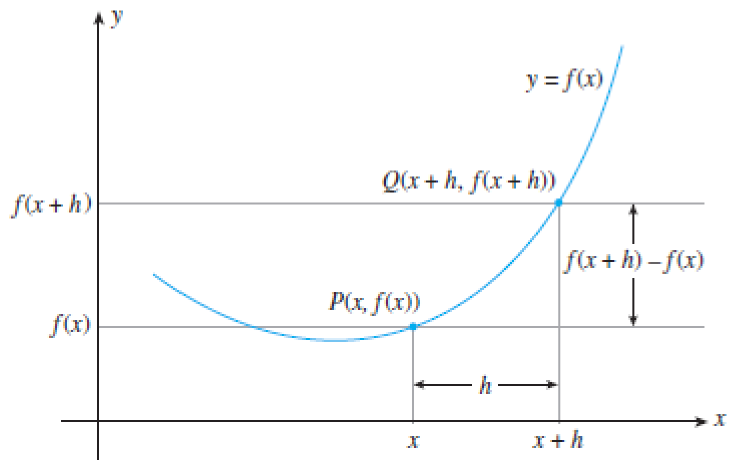
როგორც ადრე აღვნიშნეთ, როცა $h$ უახლოვდება ნულს, მაშინ $Q$ მიისწრაფვის $P$ წერტილისაკენ, და $P$ და $Q$ წერტილებზე გამავალი მკვეთი წრფე უახლოვდება მხებ $T$ წრფეს. შესაბამისად, უნდა ვივარაუდოთ, რომ როცა $h$ უახლოვდება ნულს, მაშინ მკვეთი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი უახლოვდება მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტს.

*$f$ ფუნქციის გრაფიკის $P(x, f(x))$ წერტილში გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი მოიცემა ფორმულით*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{2}$$

*თუ იგი არსებობს.*

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკის $P(x, f(x))$ წერტილში გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტის მოძებნა მათემატიკურად ეკვივალენტურია $f$ ფუნქციის ცვლილების სიდიდის განსაზღვრა $x$-ის მიმართ. ამის საჩვენებლად, კვლავ განვიხილოთ $f$ ფუნქცია, რომელიც აღწერს $x$ და $y$ სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებას ანუ $y = f(x)$. სხვაობა $f(x+h)-f(x)$ გვაძლევს $y$-ის ცვლილებას, როცა $x$ შეიცვლება $h$ სიდიდით (ნახ. 45)




ნახაზი 45.

შეფარდება

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3}$$

გვაძლევს $y$-ის $x$ მიმართ ცვლილების საშუალო სიდიდეს $[x, x+h]$ ინტერვალზე. მაგალითად, თუ $y$ განსაზღვრავს მანქანის მდებარეობას დროის $x$ მომენტისათვის, მაშინ (3) სიდიდე განსაზღვრავს მანქანის საშუალო სიჩქარეს $[x, x+h]$ ინტერვალში.

შევნიშნოთ, რომ (3) შეფარდება იგივეა რაც (1). ამიტომ დავასკვნით, რომ (3) შეფარდება აგრეთვე განსაზღვრავს $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $P(x, f(x))$ და $Q(x+h, f(x+h))$ წერტილებზე გამავალი მკვეთი წრფის საკუთხო კოეფიციენტს. ახლა თუ გამოვითვლით (3) შეფარდების ზღვარს, როცა $h$ მიისწრაფვის ნულისაკენ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{4}$$

მივიღებთ $f$ ***ფუნქციის ცვლილების სიდიდეს*** $x$ ***წერტილში.*** მაგალითად, თუ $y$ განსაზღვრავს მანქანის მდებარეობას დროის $x$ მომენტისათვის, მაშინ (4) ზღვარი განსაზღვრავს მანქანის სიჩქარეს დროის $x$ მომენტისათვის. $f$ ფუნქციის ცვლილების სიდიდეს $x$ წერტილში ანუ (4) გამოსახულებით გნასაზღვრულ სისდიდეს, ხშირად უწოდებენ $f$ ***ფუნქციის ცვლილების მყისიერ სიდიდეს*** $x$ ***წერტილში.***

შევნიშნოთ, რომ (4) ზღვარი იგივეა რაც (2). მაშასადამე ამ შეფარდების ზღვარი აგრეთვე გვაძლევს $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $(x, f(x))$ წერტილში გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტს. ამრიგად,

$f$ ***ფუნქციის ცვლილების საშუალო სიდიდე*** $[x, x+h]$ ***ინტერვალში ანუ*** $f$ ***ფუნქციის გრაფიკის*** $(x, f(x))$ ***და*** $(x+h, f(x+h))$ ***წერტილებზე გამავალი მკვეთი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი არის***

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ ; \tag{5}$$

$f$ ***ფუნქციის ცვლილების მყისიერი სიდიდე*** $x$ ***წერტილში ანუ*** $f$ ***ფუნქციის გრაფიკის*** $(x, f(x))$ ***წერტილზე გამავალი მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი არის***

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ . \qquad (6)$$

## ფუნქციის წარმოებული

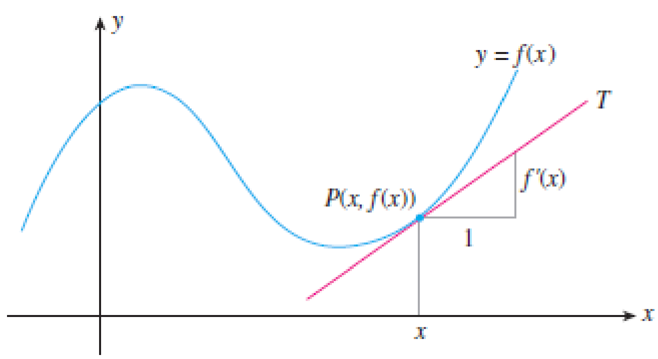
(2) და (6) ზღვრებს, რომლებიც გამლევს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $P(x, f(x))$ წერტილში გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტს ანუ ფუნქციის ცვლილების მყისიერ სიდიდეს $x$ წერტილში, ეწოდება $f$ ***ფუნქციის წარმოებული*** $x$ ***წერტილში.***

***განმარტება.*** *$f$ ფუნქციის წარმოებული $x$-ის მიმართ არის $f'$ ფუნქცია (იკითხება, როგორც „$f$ შტრიხ“)*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (7)$$

***$f'$ ფუნქციის განსაზღვრის არე არის სიმრავლე ყველა იმ $x$ მნიშვნელობისა, რომლისთვისაც არსებობს (7) ზღვარი.***

ამრიგად, $f$ ფუნქციის წარმოებული არის $f'$ ფუნქცია, რომელიც ტოლია $f$ ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერ $(x, f(x))$ წერტილზე გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტისა (ნახ. 46 )




ნახაზი 46. $(x, f(x))$ წერტილზე გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი $f'$ ტოლია.

წარმოებულს კიდევ ასე აღნიშნავენ: $\dfrac{dy}{dx}$ (იკითხება „$dy$ $dx$“) ან $y'$ (იკითხება“ $y$ შტრიხ“). ეს აღნიშვნები იხმარება მაშინ, როცა ფუნქცია მოცემულია $y=f(x)$ სახით.

$f$ ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლა მიზანშეწონილია შემდეგი ოთხი მოქმედებით:

1. ***გამოვთვალოთ*** $f(x+h)$ ***;***
2. ***შევადგინოთ სხვაობა*** $f(x+h)-f(x)$ ***;***
3. ***შევადგინოთ შეფარდება*** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ***;***
4. ***გამოვთვალოთ*** $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ $f(x)=3x+5$ ფუნქციის გრაფიკის $(x, f(x))$ წერტილზე გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი.

**ამოხსნა:** $f$ ფუნქციის გრაფიკის რაიმე წერტილზე გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი გამოითვლება $f$-ის წარმოებულით. წარმოებულის მოსაძებნად გამოვიყენოთ ზემოთ მითითებული ოთხი მოქმედება:

1. $f(x+h) = 3(x+h)+5 = 3x+3h+5$;
2. $f(x+h) - f(x) = (3x+3h+5) - (3x+5) = 3h$;
3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{3h}{h} = 3$;
4. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3 = 3$.

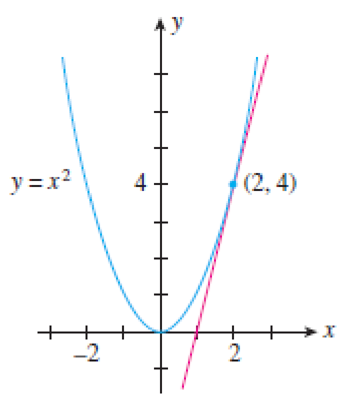
ჩვენ ველოდით ამ შედეგს, რადგან წრფის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები წრფე ემთხვევა თვით ამ წრფეს და მაშასადამე, მათ უნდა ჰქონდეთ ერთი და იგივე საკუთხო კოეფიციენტი. ამ კონკრეტულ შემთხვევაში $f$-ის გრაფიკი არის წრფე 3-ის ტოლი საკუთხო კოეფიციენტით.

**მაგალითი 3.** ვთქვათ, $f(x) = x^2$. **ა)** ვიპოვოთ $f'(x)$; **ბ)** გამოვითვალოთ $f'(2)$ და ავხსნათ შედეგი.

**ა)** $f'(x)$ ვიპოვოთ ოთხი მოქმედებით:

1. $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$
2. $f(x+h) - f(x) = (x^2+2xh+h^2) - (x^2) = 2xh + h^2 = h(2x+h)$;
3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$;
4. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$.

**ბ)** $f'(2) = 2(2) = 4$. ეს შედეგი გვიჩვენებს, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკის (2,4) წერტილზე გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტი 4-ის ტოლია. ეს შედეგი ასევე გვიჩვენებს, რომ $x$=2 წერტილში $f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის სიდიდე 4 ერთეულის ტოლია, როცა $x$ იცვლება ერთი ერთეულით. $f$ ფუნქციის გრაფიკი და მხები წრფე გამოსახულია 47-ე ნახაზზე.




ნახაზი 47. $f(x) = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის (2,4) წერტილზე გავლებული მხები.

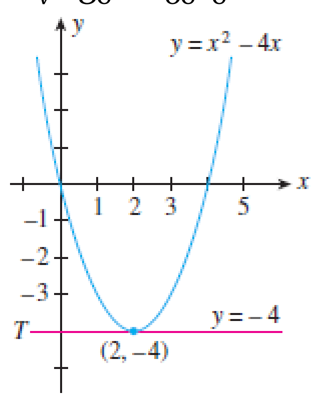
**მაგალითი 4.** ვთქვათ, $f(x)=x^2-4x$. **ა)** ვიპოვოთ $f'(x)$; **ბ)** $f$ ფუნქციის გრაფიკზე მოვძებნოთ წერტილი, სადაც მხები წრფე იქნება ჰორიზონტალური; **გ)** ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი და მხები წრფე ბ) პირობით მოძებნილ წერტილში; **დ)** რა არის $f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის სიდიდე ამ წერტილში?

**ამოხსნა: ა)** წარმოებულის მოსაძებნად გამოვიყენოთ ოთხი მოქმედება:

1. $f(x+h)=(x+h)^2-4(x+h)=x^2+2xh+h^2-4x-4h$;
2. $f(x+h)-f(x)=(x^2+2xh+h^2-4x-4h)-(x^2-4)=2xh+h^2=h(2x+h-4)$;
3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h(2x+h-4)}{h}=2x+h-4$;
4. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h-4)=2x-4$;

**ბ)** $f$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარე წერტილში, სადაც მხები წრფე ჰორიზონტალურია ე.ი. საკუთხო კოეფიციენტი ნულია, ფუნქციის $f'$ წარმოებულიც აგრეთვე უნდა იყოს ნული. შესაბამისად, ასეთი წერტილი (წერტილები) რომ ვიპოვოთ, უნდა ამოვხსნათ განტოლება $f'(x)=0$, რაც გვაძლევს $2x-4=0$ ანუ $x=2$. $y$-ის შესაბამისი მნიშვნელობა მოიძებნება პირობით $y=f(2)=-4$ და საბოლოოდ საძიებელი წერტილი იქნება $(2,-4)$.

**გ)** $f$ ფუნქციის გრაფიკი და მხები წრფე ნაჩვენებია 48-ე ნახაზზე.




ნახაზი 48. $y=-4$ არის მხები წრფე.

**დ)** $f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის სიდიდე $x=2$. წერტილში არის ნული.

**მაგალითი 5.** ვთქვათ, $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

**ა)** ვიპოვოთ $f'(x)$; **ბ)** ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის გრაფიკის $T$ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი წერტილში, რომლის აბსცისაა $x=1$. **გ)** ვიპოვოთ $T$ მხები წრფის განტოლება.

**ამოხსნა: ა)** წარმოებულის მოსაძებნად გამოვიყენოთ ოთხი მოქმედება:

1. $f(x+h)=\dfrac{1}{x+h}$;
2. $f(x+h)-f(x)=\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}=-\dfrac{h}{x(x+h)}$;

**3.** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\dfrac{h}{x(x+h)}\cdot\dfrac{1}{h}=-\dfrac{1}{x(x+h)}$**;**

**4.** $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\dfrac{1}{x(x+h)}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$;

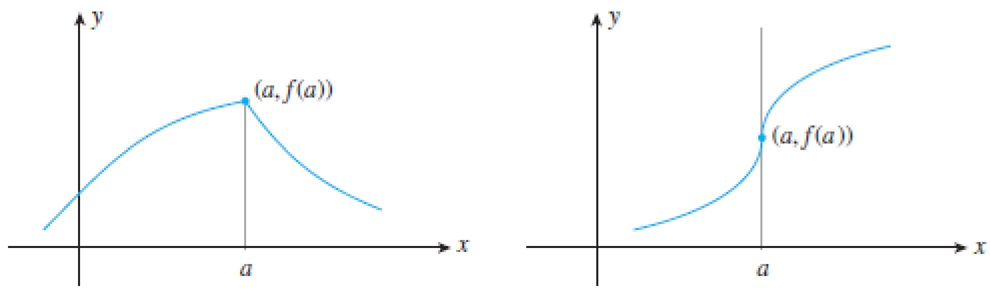
**ბ)** $f$ ფუნქციის გრაფიკის $T$ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი წერტილში, რომლის აბსცისაა $x=1$, გამოითვლება ფორმულით $f'(1)=-1$.

**გ)** როცა $x=1$, მაშინ $y=f(1)=1$ და $f$ ფუნქციის გრაფიკის $T$ მხები წრფე გადის $(1,1)$ წერტილზე. ვიცით, რომ საკუთხო კოეფიციენტი არის -1. ამიტომ $T$ მხები წრფის განტოლება იქნება $y-1=-1(x-1)$, რაც საბოლოოდ გვაძლევს $y=-x+2$.

## ფუნქციის დიფერენცირებადობა და უწყვეტობა

*შემოვიღოთ განმარტება: ა) თუ ფუნქციას აქვს წარმოებული* $x=a$ *წერტილში, მაშინ მას ეწოდება* ***დიფერენცირებადი*** *ამ წერტილში; ბ) თუ ფუნქციას არ აქვს წარმოებული* $x=a$ *წერტილში, მაშინ მას ეწოდება* ***არადიფერენცირებადი*** *ამ წერტილში.*

პრაქტიულ გამოყენებებში ხშირად გვხვდება მაგალითები უწყვეტი ფუნქციებისა, რომლებსაც არ გააჩნიათ წარმოებული ფუნქციის განსაზღვრის არის ზოგიერთ წერტილში. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ უწყვეტ $f$ ფუნქციას არ აქვს წარმოებული $x=a$ წერტილში, თუ ფუნქციის გრაფიკი აკეთებს მიმართულების მკვეთრ, ნახტომისებურ ცვლილებას $(a,f(a))$ წერტილში. ასეთ წერტილს კუთხურ წერტილს ვუწოდებთ. ფუნქციას აგრეთვე არ აქვს წარმოებული იმ წერტილში, სადაც მხები წრფე ვერტიკალურია, რადგან ვერტიკალური წრფის საკუთხო კოეფიციენტი განუსაზღვრელია. ამ შემთხვევების ილუსტრირება მოცემულია 49-ე ნახაზზე.



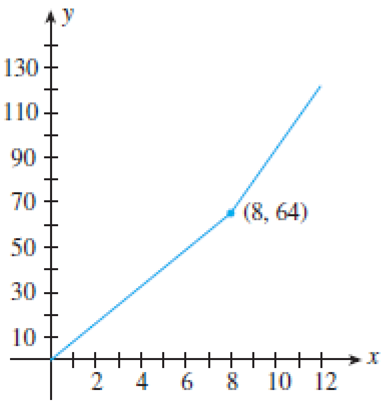
ა) ბ)

ნახაზი 49.

**მაგალითი 6.** ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}8x, & 0\le x\le 8\\ 12x-32, & x>8\end{cases}.$$

**ამოხსნა:** თუ დავაკვირდებით ფუნქციის გრაფიკს (ნახ. 48), ვნახავთ, რომ $x=8$



ნახაზი 50.

წერტილი არის გრაფიკის კუთხური წერტილი და ამიტომ ფუნქცია არ არის დიფერენცირებადი $x=8$ წერტილში.

დასასრულს, განვიხილოთ კავშირი ფუნქციის უწყვეტობასა და დიფერენცირებადობას შორის ფუნქციის განსაზღვრის არის მოცემულ წერტილში. მე-6 მაგალითიდან ჩანს, რომ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან $x=8$ ჩათვლით. ზოგადად, ეს გვიჩვენებს, რომ ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში არ ნიშნავს აუცილებლად დიფერენცირებადობას ამ წერტილში. თუმცა ეს გამონათქვამი პირიქით ჭეშმარიტია: ფუნქციის დიფერენცირებადობიდან რაიმე წერტილში გამომდინარეობს მისი უწყვეტობა ამავე წერტილში. მართებულია სემდეგი დებულება:

*თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია $x=a$ წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია $x=a$ წერტილში.*

## სავარჯიშო

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკების მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი ნებისმიერ წერტილში ოთხი მოქმედების გამოყენებით:**

**1.** $f(x)=13$; **2.** $f(x)=2x+7$; **3.** $f(x)=8-4x$; **4.** $f(x)=3x^2$; **5.** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

**6.** $f(x)=-x^2+3x$; **7.** $f(x)=2x^2+5x$.

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკების მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი მოცემულ წერტილში და დაწერეთ მითითებულ წერტილზე გამავალი მხები წრფის განტოლება:**

**8.** $f(x)=2x+7$, (2,11); **9.** $f(x)=-3x+4$, (-1,7);

**10.** $f(x)=3x^2$, (1,3); **11.** $f(x)=3x-x^2$, (-2,-10);

**12.** $f(x) = -\frac{1}{x}$, $\left(3, -\frac{1}{3}\right)$;  **13.** $f(x) = \frac{3}{2x}$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$;

**14.** ვთქვათ, $f(x) = 2x^2 + 1$.

**ა)** იპოვეთ წარმოებული $f'$;

**ბ)** იპოვეთ წირის მხები წრფის განტოლება (1,3) წერტილში;

**გ)** ააგეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკი.

**15.** ვთქვათ, $f(x) = x^2 + 6x$.

**ა)** იპოვეთ წარმოებული $f'$;

**ბ)** იპოვეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილი, სადაც წირის მხები წრფე იქნება ჰორიზონტალური. მითითება: იპოვეთ $x$ მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f'(x) = 0$;

**გ)** ააგეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკი და ბ) პირობით მოძებნილ წერტილში გავლებული მხები წრფე.

**16.** ვთქვათ, $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

**ა)** იპოვეთ წარმოებული $f'$;

**ბ)** იპოვეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილი, სადაც წირის მხები წრფე იქნება ჰორიზონტალური. მითითება: იპოვეთ $x$ მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f'(x) = 0$;

**გ)** ააგეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკი და ბ) პირობით მოძებნილ წერტილში გავლებული მხები წრფე.

**დ)** რა არის $f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის სიდიდე ამ წერტილში?

**17.** ვთქვათ, $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

**ა)** იპოვეთ წარმოებული $f'$;

**ბ)** იპოვეთ წირის მხები წრფის განტოლება $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ წერტილში;

**გ)** ააგეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკი და წირის მხები წრფე $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ წერტილში;

**18.** ვთქვათ, $f(x) = x^2 + x$.

**ა)** იპოვეთ $y$-ის ცვლილების სიჩქარის საშუალო სიდიდე $x$-ის მიმართ შემდეგ ინტერვალებში: [2,3]; [2,2.5]; [2,2.1]

**ბ)** იპოვეთ $y$-ის ცვლილების სიჩქარის მყისიერი სიდიდე $x = 2$ წერტილზე;

**გ)** შეადარეთ ა) ნაწილში მიღებული შედეგები ბ) ნაწილში მიღებულ შედეგებს.

**19.** ვთქვათ, $f(x) = x^2 - 4x$.

**ა)** იპოვეთ $y$-ის ცვლილების სიჩქარის საშუალო სიდიდე $x$-ის მიმართ შემდეგ ინტერვალებში: [3,4]; [3,3.5]; [3,3.1];

**ბ)** იპოვეთ $y$-ის ცვლილების სიჩქარის მყისიერი სიდიდე $x = 3$ წერტილზე;

**გ)** შეადარეთ ა) ნაწილში მიღებული შედეგები ბ) ნაწილში მიღებულ შედეგებს.

**20.** ვთქვათ, წრფივი გზის გასწვრივ მოძრავი მანქანის მიერ გავლილი მანძილი $s$ დროის $t$ მომენტისათვის მოიცემა ფორმულით $s = f(t) = 2t^2 + 48t$.

**ა)** გამოითვალეთ მანქანის საშუალო სიჩქარე დროის შემდეგ ინტერვალებში: $[20,21]$; $[20,20.1]$; $[20,20.01]$;

**ბ)** გამოითვალეთ მანქანის (მყისიერი) სიჩქარე, როცა $t = 20$;

**გ)** შეადარეთ ა) ნაწილში მიღებული შედეგები ბ) ნაწილში მიღებულ შედეგებს.

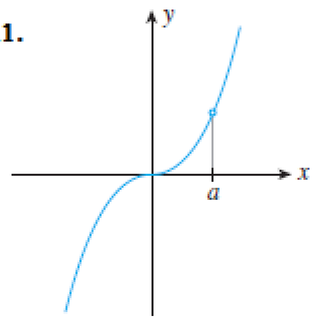
**ქვემოთ მოცემულია ფუნქციათა გრაფიკები. თითოეული ფუნქციისათვის დავადგინოთ არის თუ არა მართებული:**

**ა)** $f(x)$ **-ს აქვს ზღვარი** $x = a$ **წერტილში;**

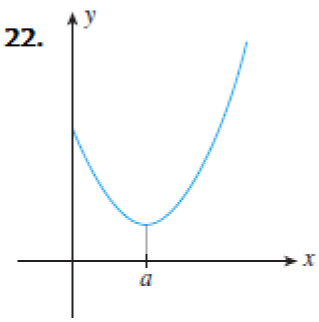
**ბ)** $f(x)$ **უწყვეტია** $x = a$ **წერტილში;**

**გ)** $f(x)$ **დიფერენცირებადია** $x = a$ **წერტილში. პასუხი დაასაბუთეთ.**

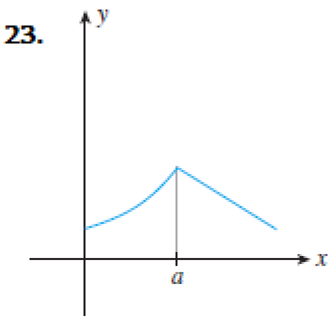
**21.**



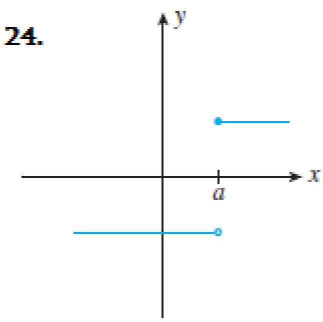

**22.**



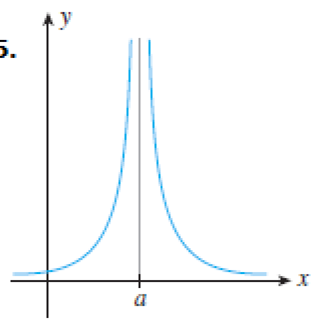

**23.**



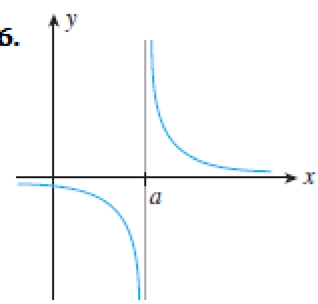

**24.**




**25.**




**26.**




**27.** ააგეთ $f(x) = |x+1|$ ფუნქციის გრაფიკი და აჩვენეთ, რომ ამ ფუნქციას არ გააჩნია წარმოებული $x = -1$ წერტილში.

**28.** ააგეთ $f(x) = 1/(x-1)$ ფუნქციის გრაფიკი და აჩვენეთ, რომ ამ ფუნქციას არ გააჩნია წარმოებული $x = 1$ წერტილში.

**29.** ვთქვათ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}.$$

შეარჩიეთ $a$ და $b$ პარამეტრების მნიშვნელობები ისე, რომ $f$ იყოს უწყვეტი და გააჩნდეს წარმოებული $x=1$ წერტილში. ააგეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკი.

**30.** ააგეთ $f(x)=x^{2/3}$ ფუნქციის გრაფიკი. ფუნქცია უწყვეტია $x=0$ წერტილში? არსებობს $f'(0)$?

**31.** აჩვენეთ, რომ $f(x)=|x|$ ფუნქციის წარმოებული $x\neq 0$ წერტილებში მოიცემა ფორმულით

$$f'(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

**32.** აჩვენეთ, რომ თუ $f$ დიფერენცირებადია $x=a$ წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამ წერტილში. მითითება: ისარგებლეთ გამოსახულებით

$$f(x)-f(a)=\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right](x-a).$$

გამოიყენეთ ნამრავლის ზღვარის გამოთვლის წესი და წარმოებულის განმარტება, რათა აჩვენოთ, რომ

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0.$$

## მეშვიდე ლექცია

### ფუნქციათა ჯამის, ნამრავლის და შეფარდების წარმოებული

მეთოდი, რომელიც გამოვიყენეთ ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელად, მთლიანად დაფუძნებული იყო წარმოებულის, როგორც შეფარდების ზღვარის, განმარტებაზე. $f$ ფუნქციის $f'$ წარმოებულის მოსაძებნად, პირველ რიგში უნდა შევადგინოთ შეფარდება

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

და გამოვთვალოთ მისი ზღვარი, როცა $h$ მიისწრაფვის ნულისაკენ. ალბათ, როგორც შენიშნეთ, ეს მეთოდი საკმარისად შრომატევადია მარტივი ფუნქციებისათვისაც კი. ამჯერად ჩვენი მიზანია დავადგინოთ გარკვეული წესები, რომლებიც გაგვიადვილებს ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლას. შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ ფუნქციის წარმოებულის შემდეგ აღნიშვნას

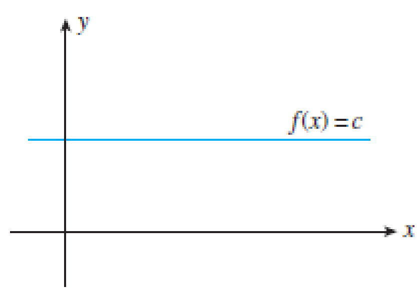
$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \quad (\text{ასე იკითხება: } d\,, dx\,,\ f(x))$$

რაც ნიშნავს "$f$ ფუნქციის წარმოებულს $x$-ით, $x$ წერტილში". დაუშვათ, რომ $f$ და $g$ ფუნქციები წარმოებადია და ჩამოვაყალიბოთ გაწარმოების წესები.

**წესი 1. მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია**

$$\frac{d}{dx}(c)=0 \qquad (c\text{-მუდმივია}).$$

ეს შეგვიძლია მარტივად დავინახოთ გეომეტრიული ინტერპრეტაციით, თუ გავიხსენებთ, რომ მუდმივი ფუნქციის გრაფიკი არის $x$ ღერძის პარალელური წრფე (ნახ. 51 )




ნახაზი 51. $f(x)=c$ ფუნქციის გრაფიკის მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი, სადაც $c$ მუდმივია, ნულის ტოლია.

რადგან წრფის ყოველ წერტილში გავლებული მხები წრფე ემთხვევა თვით ამ წრფეს, ამიტომ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი (როგორც მუდმივი $f(x)=c$ ფუნქციის წარმოებული) უნდა იყოს ნული. ჩვენ აგრეთვე შეგვიძლია გამოვიყენოთ წარმოებულის განმარტება ამ შედეგის დასამტკიცებლად. მართლაც

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

**ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული**

**წესი 2. ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული**

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1},$$

**სადაც** $n$ **ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.**

შევამოწმოთ ეს წესი კონკრეტული $n=2$ მნიშვნელობისათვის. რადგან $f(x)=x^2$, მაშინ

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა.

**მაგალითი 1. ა)** თუ $f(x)=x$, მაშინ

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x)=1\cdot x^{1-1}=x^0=1;$$

**ბ)** თუ $f(x)=x^8$, მაშინ

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^8)=8x^7;$$

**გ)** თუ $f(x)=x^{5/2}$, მაშინ

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^{5/2})=\frac{5}{2}x^{3/2};$$

თუ ფუნქცია წარმოდგენილია ფესვით, მაშინ პირველ რიგში იგი უნდა გადავწეროთ წილადმაჩვენებლიანი სახით და შემდეგ გავაწარმოოთ.

**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები

**ა)** $f(x)=\sqrt{x}$ ; **ბ)** $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

**ამოხსნა: ა)** თუ $\sqrt{x}$ გადავწერთ $x^{1/2}$ სახით, მაშინ მივიღებთ

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^{1/2})=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

**ბ)** თუ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ფუნქციას გადავწერთ $x^{-1/3}$ სახით, მაშინ მივიღებთ

$$g'(x)=\frac{d}{dx}(x^{-1/3})=-\frac{1}{3}x^{-4/3}=-\frac{1}{3x^{4/3}}.$$

**წესი 3. მუდმივი მამრავლისა და წარმოებადი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული ამ მუდმივისა და ფუნქციის წარმოებულის ნამრავლის ტოლია**

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)], \qquad (c \text{ მუდმივია}).$$

ეს დასტურდება შემდეგი გამოთვლებით. ვთქვათ $g(x) = cf(x)$, მაშინ

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x)$$

**მაგალითი 3. ა)** თუ $f(x) = 5x^3$, მაშინ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) = 5(3x^2) = 15x^2;$$

**ბ)** თუ $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$, მაშინ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^{-1/2}) = 3\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = -\frac{3}{2x^{3/2}}.$$

**წესი 4. ორი წარმოებადი ფუნქციის ჯამის (სხვაობის) წარმოებული მათი წარმოებულების ჯამის (სხვაობის) ტოლია**

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)].$$

ეს წესი შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი სასრული რაოდენობა წარმოებადი ფუნქციებისათვის. შევამოწმოთ ეს წესი ორი ფუნქციის ჯამისათვის. ვთქვათ $s(x) = f(x) + g(x)$, მაშინ

$$s'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

**მაგალითი 4.** ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

**ა)** $f(x) = 4x^5 + 3x^4 - 8x^2 + x + 3$; **ბ)** $g(t) = \dfrac{t^5}{5} + \dfrac{5}{t^3}$.

**ამოხსნა: ა)**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4x^5 + 3x^4 - 8x^2 + x + 3) =$$

$$\frac{d}{dx}(4x^5) + \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(8x^2) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3) = 20x^4 + 12x^3 - 16x + 1;$$

**ბ)**

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{5} + \frac{5}{t^3}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}t^2 + 5t^{-3}\right) = \frac{2}{5}t - 15t^{-4} = \frac{2}{5}t - \frac{15}{t^4}.$$

**მაგალითი 5.** ვიპოვოთ $f(x) = 2x + 1/\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკის $(1,3)$ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი და განტოლება.

**ამოხსნა:** $f$ ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი გამოითვლება შემდეგნაირად

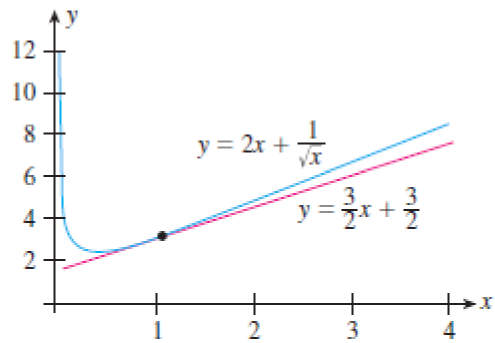
$$f'(x)=\frac{d}{dx}(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})=\frac{d}{dx}(2x+x^{-1/2})=2-\frac{1}{2}x^{-3/2}=2-\frac{1}{2x^{3/2}}.$$

კერძოდ, $f$ ფუნქციის გრაფიკის მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი, რომელიც გავლებულია $(1,3)$ წერტილში (სადაც $x=1$), იქნება

$$f'(1)=2-\frac{1}{2(1)^{3/2}}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

წრფეთა კონის განტოლების გამოყენებით ($y-y_1=m(x-x_1)$), მხები წრფის განტოლებას, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია 3/2 და გადის $(1,3)$ წერტილში, ექნება სახე (ნახ. 52)

$$y-3=\frac{3}{2}(x-1) \text{ ანუ } y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2},$$




ნახაზი 52. $f(x)=2x+1/\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკის (1,3) წერტილში გავლებული მხები.

ორი დიფერენცირებადი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული შემდეგი წესით განისაზღვრება.

**წესი 5. ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული ტოლია პირველი ფუნქციის წარმოებული გამრავლებული მეორე ფუნქციაზე დამატებული პირველი ფუნქცია გამრავლებული მეორე ფუნქციის წარმოებულზე**

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

ნამრავლის გაწარმოების ეს წესი შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი სასრული რაოდენობა წარმოებადი ფუნქციების ნამრავლის გასაწარმოებლად.

**მაგალითი 6.** ვიპოვოთ $f(x)=(2x^2-1)(x^3+3)$ ფუნქციის წარმოებული.

**ამოხსნა:** ნამრავლის წარმოებულის წესის თანახმად

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(2x^2-1)(x^3+3)+(2x^2-1)\frac{d}{dx}(x^3+3)=$$
$$4x(x^3+3)+(2x^2-1)3x^2=10x^4-3x^2+12x=x(10x^3-3x+12).$$

ორი წარმოებადი ფუნქციის შეფარდების წარმოებული შემდეგი წესით განისაზღვრება.

**წესი 6.**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad (g(x)\neq 0).$$

**მაგალითი 7.** ვიპოვოთ $f'(x)$, თუ $f(x)=\dfrac{x}{2x-4}$.

**ამოხსნა:** შეფარდების წარმოებულის გამოთვლის წესის თანახმად

$$f'(x)=\frac{(2x-4)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(2x-4)}{(2x-4)^2}=\frac{(2x-4)-x(2)}{(2x-4)^2}=-\frac{4}{(2x-4)^2}.$$

**მაგალითი 8.** ვიპოვოთ $h'(x)$, თუ $h(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

**ამოხსნა:** გადავწეროთ $h(x)$ შემდეგი ფორმით $h(x)=\dfrac{x^{1/2}}{x^2+1}$. შეფარდების წარმოებულის განმარტების მიხედვით გვექნება

$$h'(x)=\frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^{1/2})-x^{1/2}\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{(x^2+1)(0.5x^{-1/2})-x^{1/2}(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{0.5x^{-1/2}(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}.$$

## რთული ფუნქციის (ფუნქციათა კომპოზიციის) წარმოებული

ახლა განვიხილოთ გაწარმოების განსხვავებული წესი, რომელსაც ***რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს*** უწოდებენ. გაწარმოების ეს წესი გვაძლევს შესაძლებლობას საკმარისად გავაფართოოთ ფუნქციათა კლასი, რომელთა წარმოებულის გამოთვლა შეგვეძლება. განვიხილოთ ფუნქცია $h(x)=(x^2+x+1)^2$. თუ გამოვითვლით $h'(x)$ წარმოებულს მხოლოდ ზემოთ განხილული წესებით, მაშინ $h(x)$ წინასწარ უნდა გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$h(x)=(x^2+x+1)^2=(x^2+x+1)(x^2+x+1)=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$$

და გავაწარმოოთ

$$h'(x)=4x^3+6x^2+6x+2.$$

ცხადია, ეს მიდგომა არ გამოდგება $H(x)=(x^2+x+1)^{100}$ ფუნქციისათვის, რადგან იგივე ტექნიკის გამოყენება $H$ ფუნქციის წარმოებულის მოსაძებნად წარმოუდგენლად დიდ შრომას მოითხოვს. განვიხილოთ, აგრეთვე, $G(x)=\sqrt{x^2+1}$ ფუნქცია. გაწარმოების წესები, რომლებიც ზემოთ განვიხილეთ, პირდაპირ არ შეიძლება გამოყენებული იქნეს $H$ და $G$ ფუნქციისათვის წარმოებულის გამოსათვლელად.

შევნიშნოთ, რომ $H$ და $G$ კომპოზიტური ფუნქციები არიან ანუ თითოეული აგებულია მარტივი ფუნქციების კომპოზიციით. მაგალითად, $H$ ფუნქცია წარმოადგენს $f(x)=x^2+x+1$ და $g(x)=x^{100}$ ფუნქციების კომპოზიციას

$$H(x)=g[f(x)]=[f(x)]^{100}=(x^2+x+1)^{100}.$$

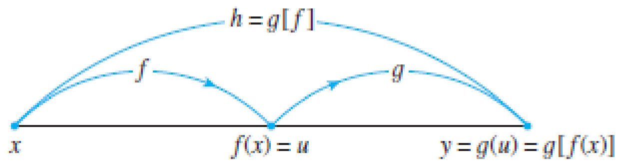
ანალოგიურად, $G$ ფუნქცია წარმოადგენს $f(x)=x^2+1$ და $g(x)=\sqrt{x}$ ფუნქციების კომპოზიციას

$$G(x)=g[f(x)]=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2+1}.$$

$h(x)=g[f(x)]$ ტოლობით განსაზღვრული $h=g\circ f$ კომპოზიტური ფუნქციის $h'$ წარმოებულის გამოსათვლელად, პირველ რიგში იგი გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$u=f(x) \text{ და } y=h(x)=g[f(x)]=g(u).$$

$h$-ის დამოკიდებულება $g$ და $f$ ფუნქციებზე გამოსახულია 53-ე ნახაზზე




ნახაზი 53. რთული ფუნქცია $h(x)=g[f(x)]$.

რადგან $u$ არის $x$ ფუნქცია, ჩვენ შეგვიძლია გამოვითვალოთ $u$-ს წარმოებული $x$-ის მიმართ, თუ $f$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა და მივიღებთ $\frac{du}{dx}=f'(x)$. ასევე, თუ $g$ წარმოებადი ფუნქციაა $u$-ს მიმართ, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია გამოვითვალოთ $g$-ს წარმოებული $u$-ს მიმართ და მივიღებთ $\frac{dy}{du}=g'(u)$. ახლა, რადგან $h$ წარმოადგენს $g$ და $f$ ფუნქციების კომპოზიციას, ჩვენ უნდა ვიფიქროთ, რომ $h$-ის გაწარმოების წესი, რომლითაც მიიღება $h'(x)$, მოიცავს $g$ და $f$ ფუნქციების გაწარმოების წესებს. მაგრამ, როგორ შევათავსოთ ეს წარმოებულები, რომ მივიღოთ $y'$? ამ კითხვას შეიძლება ვუპასუხოთ თითოეული ფუნქციის წარმოებულის, როგორც ფუნქციის ცვლილების სიდიდის, ინტერპრეტაციით. მაგალითად, დაუშვათ, რომ $u=f(x)$ იცვლება სამჯერ უფრო სწრაფად ვიდრე $x$ ე.ი.

$$f'(x)=\frac{du}{dx}=3.$$

ასევე, დაუშვათ, რომ $y=g(u)$ იცვლება ორჯერ უფრო სწრაფად ვიდრე $u$ ე.ი.

$$g'(u)=\frac{dy}{du}=2.$$

მაშინ ჩვენ უნდა ვივარაუდოთ, რომ $y=h(x)$ იცვლება ექვსჯერ უფრო სწრაფად ვიდრე $x$ ანუ

$$h'(x)=g'(u)f'(x)=2\cdot 3=6$$

ამ მოსაზრებას მივყავართ შემდეგ წესზე, რომელსაც დამტკიცების გარეშე გთავაზობთ.

**წესი 7. რთული ფუნქციის (ფუნქციათა კომპოზიციის) გაწარმოება. თუ** $h(x)=g[f(x)]$**, მაშინ**

$$h'(x)=\frac{d}{dx}g(f(x))=g'(f(x))f'(x) \qquad (1)$$

**ან ეკვივალენტური ფორმით, თუ ჩავწერთ** $y=h(x)=g(u)$**, სადაც** $u=f(x)$**, მაშინ**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad (2)$$

**შენიშვნა.**

1. თუ კომპოზიტურ $h$ ფუნქციას ასეთი სახით ჩავწერთ

შიდა ფუნქცია

$$h(x)=\underset{\substack{\uparrow}}{g}[\overset{\substack{\downarrow}}{f(x)}]$$

გარე ფუნქცია

მაშინ $h'(x)$ არის „გარე ფუნქციის" წარმოებული გამოთვლილი „შიდა ფუნქციაზე" გამრავლებული „შიდა ფუნქციის წარმოებულზე";

2. (2) განტოლება შეიძლება ადვილად დაიმახსოვროთ, თუ დააკვირდებით რომ $du$-ზე შეკვეცით ვღებულობთ იგივეობას.

უამრავ კომპოზიტურ $h(x)=g[f(x)]$ ფუნქციას განვიხილავთ, რომელშიც $g$ მოცემულია წესით $g(x)=x^n$ ($n$ ნამდვილი რიცხვია) ე. ი.

$$h(x)=[f(x)]^n.$$

სხვა სიტყვებით, $h$ ფუნქცია მოცემულია ხარისხოვანი ფუნქციის სახით $f$-ის მიმართ. მაგალითად, ჩვენს მიერ ადრე განხილული ფუნქციები

$$h(x)=(x^2+x+1)^2\ , \qquad H(x)=(x^2+x+1)^{100}\ , \qquad G(x)=\sqrt{x^2+1}$$

ამ სახის კომპოზიტური ფუნქციებია. ასეთი ფუნქციებისათვის გამოიყენება ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქციების გაწარმოების შემდეგი წესი, რომლის დახმარებითაც უფრო ადვილად შეგვიძლია მოვძებნოთ ამ სახის ფუნქციების წარმოებული, ვიდრე პირდაპირ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით.

**ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესი. თუ** $f$ **წარმოებადი ფუნქციაა და** $h(x)=[f(x)]^n$ **(**$n$ **ნამდვილი რიცხვია), მაშინ**

$$h'(x)=\frac{d}{dx}[f(x)]^n=n[f(x)]^{n-1}f'(x) \qquad (3)$$

ამ ფორმულის ჭეშმარიტება შეგვიძლია დავადგინოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების ფორმულის უშუალო გამოყენებით, თუ შევნიშნავთ, რომ $h(x)=g(f(x))$ ფუნქციაში $g(x)=x^n$ და $g'(x)=nx^{n-1}$

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

**მაგალითი 9.** ვთქვათ, $F(x) = (3x+1)^2$.

**ა)** ვიპოვოთ $F'(x)$ ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით;

**ბ)** შევამოწმოთ შედეგი ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენების გარეშე.

**ამოხსნა:** **ა)** ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით მივიღებთ

$$F'(x) = 2(3x+1)^1 \frac{d}{dx}(3x+1) = 2(3x+1)(3) = 6(3x+1);$$

**ბ)** წარმოვადგინოთ $F(x)$ შემდეგი სახით

$$F(x) = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1.$$

გავაწარმოოთ მივიღებთ

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(9x^2 + 6x + 1) = 18x + 6 = 6(3x+1)$$

რაც ემთხვევა წინა შედეგს.

**მაგალითი 10.** გავაწარმოოთ $G(x) = \sqrt{x^2+1}$.

**ამოხსნა:** გადავწეროთ მოცემული ფუნქციაშემდეგი სახით $G(x) = (x^2+1)^{1/2}$. მაშინ ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესის შესაბამისად

$$G'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

**მაგალითი 11. ვიპოვოთ** $f(x) = x^2(2x+3)^5$ ფუნქციის წარმოებული.

**ამოხსნა:** ნამრავლის და ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით მივიღებთ

$$f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}(2x+3)^5 + (2x+3)^5 \frac{d}{dx}x^2 = x^2 5(2x+3)^4 \frac{d}{dx}(2x+3) + (2x+3)^5(2x) =$$

$$5x^2(2x+3)^4(2) + 2x(2x+3)^5 = 2x(2x+3)^4(5x+2x+3) = 2x(7x+3)(2x+3)^4$$

**მაგალითი 12.** ვიპოვოთ $f'(x)$, თუ $f(x) = \dfrac{1}{(4x^2-7)^2}$.

**ამოხსნა:** $f$ წარმოვადგინოთ უარყოფითი მაჩვენებლით და გამოვიყენოთ ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესი

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(4x^2-7)^2}\right] = \frac{d}{dx}(4x^2-7)^{-2} =$$

$$-2(4x^2-7)^{-3}\frac{d}{dx}(4x^2-7) = -2(4x^2-7)^{-3}(8x) = -\frac{16x}{(4x^2-7)^3}$$

**მაგალითი 13.** ვიპოვოთ $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{3x+2}\right)^3$ ფუნქციის გრაფიკის $\left(0, \dfrac{1}{8}\right)$ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი.

**ამოხსნა:** როგორც ვიცით, $f$ ფუნქციის გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტია $f'(x)$. ამიტომ გამოვთვალოთ $f'(x)$ ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით, გვექნება

$$f'(x)=3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)=$$

$$3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2\left[\frac{(3x+2)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+2)^2}\right]=$$

$$3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2\left[\frac{6x+4-6x-3}{(3x+2)^2}\right]=\frac{3(2x+1)^2}{(3x+2)^4}$$

კერძოდ, მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი $\left(0,\frac{1}{8}\right)$ წერტილში იქნება

$$f'(0)=\frac{3(0+1)^2}{(0+2)^4}=\frac{3}{16}$$

## მაღალი რიგის წარმოებულები

$f$ ფუნქციის წარმოებული $f'$ კვლავ ფუნქციაა, ამიტომ შესაძლებელია განვიხილოთ მისი გაწარმოების საკითხი. ამრიგად $f'$ ფუნქციას გააჩნია $f''$ წარმოებული, $f'$ ფუნქციის განსაზღვრის არის $x$ წერტილში, თუ არსებობს

$$\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

შეფარდების ზღვარი, როცა $h$ მიისწრაფის ნულისაკენ. სხვა სიტყვებით, $f''$ არის პირველი წარმოებულის წარმოებული. $f''$ უწოდებენ $f$ ფუნქციის ***მეორე რიგის წარმოებულს,*** ხოლო $f'$-ს ხშირად უწოდებენ $f$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულს. თუ ასე გავაგრძელებთ, ჩვენ მივალთ $f$ ფუნქციის მესამე, მეოთხე და უფრო მაღალი რიგის წარმოებულებამდე, თუ რა თქმა უნდა ეს წარმოებულები არსებობენ. $f$ ფუნქციის პირველი, მეორე, მესამე და $n$-ური რიგის წარმოებულები $x$ წერტილში ასე აღინიშნება

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\dots,\ f^{(n)}(x)$$

ან

$$D^1f(x), D^2f(x), D^3f(x),\dots, D^nf(x)$$

თუ $f$ ფუნქცია ჩაწერილია $y=f(x)$ სახით,მაშინ მისი წარმოებულები ასე აღინიშნებიან

$$y', y'', y''',\dots, y^{(n)}$$

$$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3},\dots,\frac{d^ny}{dx^n}$$

ან

$$D^1y, D^2y, D^3y, ..., D^ny$$
შესაბამისად.

**მაგალითი 14.** ვიპოვოთ პოლინომური $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 8$ ფუნქციის ყველა რიგის წარმოებული.

**ამოხსნა:** გვაქვს

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = 20x^3 - 36x^2 + 24x - 4$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x) = 60x^2 - 72x + 24$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx} f'''(x) = 120x - 72$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(4)}(x) = 120$$

და $f^{(n)}(x) = 0$, როცა $n > 5$.

**მაგალითი 15. .** ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული, თუ იგი მოცემულია $y = x^{2/3}$ სახით. რა არის მისი განსაზღვრის არე.

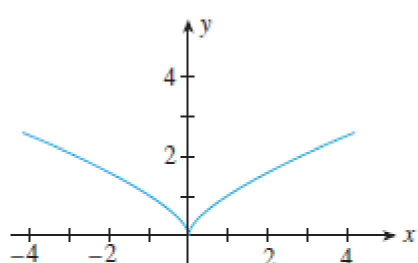
**ამოხსნა:** გვაქვს

$$y' = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$y'' = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) x^{-4/3} = -\frac{2}{9} x^{-4/3}$$

$$y''' = \left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) x^{-7/3} = \frac{8}{27} x^{-7/3} = \frac{8}{27x^{7/3}}$$

ზოგადად, $f', f''$ და $f'''$ ფუნქციების განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე გარდა ნულისა. თვითონ მოცემული $y = x^{2/3}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე კი მთელი ღერძია. ამ ფუნქციის გრაფიკი ნაჩვენებია 54-ე ნახაზზე.




ნახაზი 54. $y = x^{2/3}$ ფუნქციის გრაფიკი.

როგორც ვიცით, $f$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული $x$ წერტილში გვაძლევს $f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის სიდიდეს ამ წერტილში. ამიტომ მეორე რიგის წარმოებული $x$ წერტილში მოგვცემს პირველი რიგის წარმოებულის ანუ $f'$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის სიდიდეს ამ წერტილში. $f$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული $x$ წერტილში მოგვცემს მეორე რიგის წარმოებულის ცვლილების სიჩქარის სიდიდეს ამ წერტილში და ა. შ.

შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენების გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას. იქამდე განვიხილოთ მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენების ერთი მაგალითი

**მაგალითი 16.** კვლავ განვიხილოთ სწორხაზობრივად მოძრავი მატარებელი. როგორც ადრე აღვნიშნეთ, მის მიერ გავლილი მანძილი საწყისი $t=0$ მომენტიდან დროის $t$ მომენტისათვის მოიცემა $s=4t^2$ $(0\le t\le 10)$ ფუნქციით. რა იქნება მატარებლის აჩქარება ნებისმიერი $t$ მომენტისათვის?

**ამოხსნა:** მატარებლის სიჩქარე გაჩერებიდან $t$ მომენტში მოიცემა ტოლობით

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(4t^2)=8t\,.$$

მატარებლის აჩქარება გაჩერებიდან $t$ მომენტისათვის არის სიჩქარის ცვლილების სიდიდე $t$ მომენტისათვის ე. ი.

$$a=\frac{d}{dt}v=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{dt}(8t)=8\,.$$

### არაცხადი ფუნქციის წარმოებული

აქამდე განხილული ფუნქციები მოცემული იყო $y=f(x)$ სახით, რომელშიც დამოკიდებული $y$ ცვლადი ცხადი სახითაა წარმოდგენილი დამოუკიდებელი $x$ ცვლადით. თუმცა ყველა ფუნქცია არ წარმოიდგინება ამ სახით. განვიხილოთ, მაგალითად, განტოლება

$$x^2y+y-x^2+1=0$$

ეს განტოლება არ განსაზღვრავს $y$ ცხადი სახით როგორც $x$ ცვლადის ფუნქციას. ამ განტოლების ამოხსნით $y$-ის მიმართ მივიღებთ

$$(x^2+1)y=x^2-1$$

$$y=f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

ანუ $y$ ცხადი სახით გამოისახა როგორც $x$ ცვლადის ფუნქცია.

ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$y^4-y^3-y+2x^3-x=8\,.$$

თუ ადგილი აქვს გარკვეულ შეზღუდვებს $x$ და $y$-ზე, მაშინ ეს განტოლება განსაზღვრავს $y$-ს როგორც $x$-ის ფუნქციას. მაგრამ ამ განტოლებას, ჩვენ ცხადი სახით ვერ ამოვხსნით და ამიტომ $y$-ს ვერ გამოვსახავთ ცხადად $x$-ის საშუალებით. ბუნებრივად ისმის კითხვა : როგორ გამოვთვალოთ $\frac{dy}{dx}$ ასეთ შემთხვევაში?

როგორც აღმოჩნდა არსებობს მეთოდი, რომლის დახმარებითაც პირდაპირ გამოვითვლით არაცხადი სახით (განტოლებით) მოცემული ფუნქციის წარმოებულს. მეთოდი გულისხმობს რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებას. ამ მეთოდს ეწოდება ***არაცხადი ფუნქციის გაწარმოება.*** განვიხილოთ მაგალითები.

**მაგალითი 17.** მოცემულია განტოლება $y^2 = x$, ვიპოვოთ $\frac{dy}{dx}$.

**ამოხსნა:** გავაწარმოოთ განტოლების ორივე მხარე $x$ ცვლადით

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x).$$

შევნიშნოთ, რომ $y$ (შესაბამისი შეზღუდვებით) არის $x$-ის ფუნქცია. ჩვენთვის უცნობია ეს ფუნქცია, მაგრამ მათ შორის დამოკიდებულებას თუ უბრალოდ წარმოვიდგენთ $y = f(x)$ სახით, მაშინ წინამდებარე ტოლობის მარცხენა მხარე $\frac{d}{dx}(y^2)$ ასე შგვიძლია გავაწარმოოთ

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y\frac{dy}{dx}$$

მაშასადამე, მივიღებთ

$$2y\frac{dy}{dx} = 1.$$

თუ ამოვხსნით ამ ტოლობას წარმოებულის მიმართ მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

***ახლა ამოვწეროთ არაცხადი ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ძირითადი საფეხურები იმ დაშვებით, რომ არსებობს*** $dy/dx$ **.**

1. ***გავაწარმოოთ განტოლების ორივე მხარე*** $x$ ***ცვლადით (მივაქციოთ ყურადღება იმას , რომ*** $y$ ***-ის შემცველი ყოველი წევრის გაწარმოებისას შემოდის მამრავლი*** $dy/dx$ ***);***
2. ***გაწარმოების შედეგად მიღებული განტოლება ამოვხსნათ*** $dy/dx$ ***-ის მიმართ.***

**მაგალითი 18.** მოცემულია განტოლება $y^3 - y + 2x^3 - x = 8$. ვიპოვოთ $\frac{dy}{dx}$.

**ამოხსნა:** მოცემული განტოლების ორივე მხარის $x$-ის მიმართ გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dx}(y^3 - y + 2x^3 - x) = \frac{d}{dx}(8)$$
$$\frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(x) = 0$$

გავიხსენოთ, რომ $y$ არის $x$-ის ფუნქცია და გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარის პირველ ორ შესაკრებში. მივიღებთ

$$3y^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} + 6x^2 - 1 = 0$$
$$(3y^2 - 1)\frac{dy}{dx} = 1 - 6x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 6x^2}{3y^2 - 1}$$

**მაგალითი 19.** მოცემულია განტოლება $x^2 + y^2 = 4$.

**ა)** ვიპოვოთ $dy/dx$;

**ბ)** ვიპოვოთ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $(1, \sqrt{3})$ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი;

**გ)** ვიპოვოთ მხები წრფის განტოლება ბ) კითხვის მონაცემებით.

**ამოხსნა: ა)** განტოლების ორივე მხარის $x$ მიმართ გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$
$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad (y \neq 0)$$

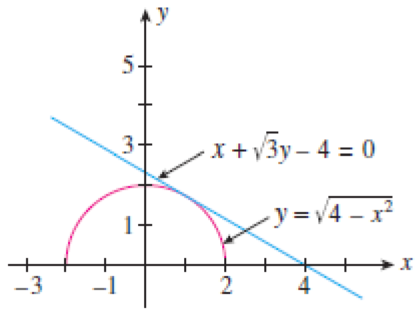
**ბ)** ფუნქციის გრაფიკის $(1, \sqrt{3})$ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი იქნება

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\left.\frac{x}{y}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ჩანაწერი გამოსახავს $dy/dx$ ფუნქციის მნიშვნელობას $(1, \sqrt{3})$ წერტილზე.

**გ)** თუ გამოვიყენებთ $(1, \sqrt{3})$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლებას $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ საკუთხო კოეფიციენტით, მივიღებთ

$$y-\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$
$$\sqrt{3}y-3=-x+1$$
$$x+\sqrt{3}y-4=0$$
მხები წრფე ნაჩვენებია 55-ე ნახაზზე.




ნახაზი 55. მხები წრფის განტოლებაა $x+\sqrt{3}y-4=0$.

ჩვენ შეგვეძლო აგრეთვე მოცემული განტოლებიდან ცხადად გაგვესაზღვრა $y$ როგორც $x$ ცვლადის ფუნქცია. კერძოდ $y=\pm\sqrt{4-x^2}$. ვხედავთ, რომ $x^2+y^2=4$ განტოლებიდან განისაზღვრა ორი ფუნქცია

$$y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$$
$$y=g(x)=-\sqrt{4-x^2}$$

რადგან $(1,\sqrt{3})$ წერტილი არ ძევს $y=g(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე დავასკვნით, რომ საძიებელი ფუნქციაა $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$. ამ ფუნქციის გრაფიკია ზედა ნახევარწრეწირი, რომელიც 55-ე ნახაზზეა გამოსახული.

**მაგალითი 20.** ვიპოვოთ $\frac{dy}{dx}$, თუ ცნობილია, რომ $y$ და $x$ დაკავშირებულია ერთმანეთთან განტოლებით $x^2y^3+6x^2=y+12$ და პირობით: $y=2$, როცა $x=1$.

**ამოხსნა:** განტოლების ორივე მხარის $x$ ცვლადის მიმართ გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dx}(x^2y^3+6x^2)=\frac{d}{dx}(y+12)$$
$$x^2\frac{d}{dx}(y^3)+y^3\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(6x^2)=\frac{d}{dx}(y)+\frac{d}{dx}(12)$$
$$3x^2y^2\frac{dy}{dx}+2xy^3+12x=\frac{dy}{dx}$$

უკანასკნელ ტოლობაში თუ ჩავსვავთ $x=1$ და $y=2$ მივიღებთ

$$3(1)^2(2)^2\frac{dy}{dx}+2(1)(2)^3+12(1)=\frac{dy}{dx}$$

$$12\frac{dy}{dx}+16+12=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{28}{11}$$

## ფუნქციის დიფერენციალი და მისი გამოყენება

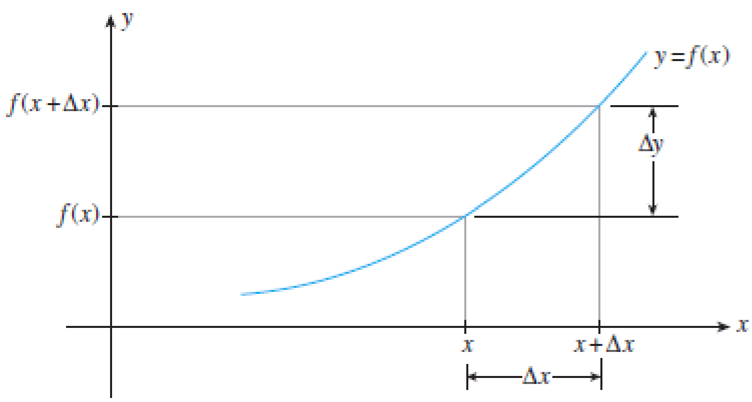
ვთქვათ, $x$ აღნიშნავს ცვლად სიდიდეს და დაუშვათ იგი იცვლება $x_1$-დან $x_2$-მდე. სხვაობას $x_2-x_1$ ვუწოდოთ $x$ ***-ის ნაზრდი*** და აღვნიშნოთ $\Delta x$ სიმბოლოთი (იკითხება: „დელტა $x$“). ამრიგად

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{4}$$

**მაგალითი 21.** ვიპოვოთ $x$-ის ნაზრდი, თუ იგი იცვლება 3-დან 3.2-მდე.
**ამოხსნა:** აქ $x_1=3$ და $x_2=3.2$. ამიტომ $\Delta x = x_2-x_1=3.2-3=0.2$.

ახლა, დაუშვათ $x$ და $y$ სიდიდეები დაკავშირებული არიან განტოლებით $y=f(x)$, სადაც $f$ ფუნქციაა. თუ $x$ შეიცვლება $x$-დან $x+\Delta x$-მდე, მაშინ $y$-ის შესაბამის ცვლილებას უწოდებენ $y$ ***-ის ნაზრდს.*** იგი აღინიშნება $\Delta y$-ით და ასე განისაზღვრება

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) \tag{5}$$




ნახაზი 56. $\Delta x$ ნაზრდი იწვევს $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$.

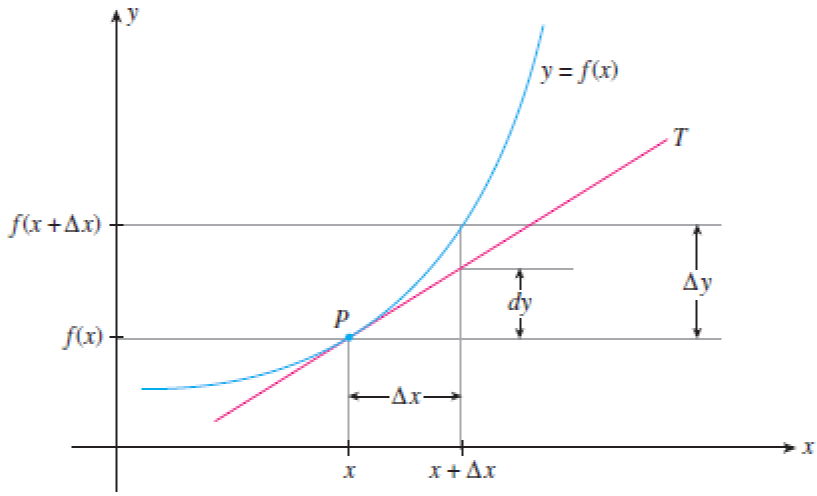
**მაგალითი 22.** ვთქვათ, $f(x)=x^3$. ვიპოვოთ $\Delta x$ და $\Delta y$, თუ $x$ იცვლება:
**ა)** 2-დან 2.01-მდე; **ბ)** 2-დან 1.98-მდე.
**ამოხსნა: ა)** გვექნება: $\Delta x = 2-2.01=0.01$;

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=f(2.01)-f(2)=(2.01)^3-(2)^3=8.120601-8=0.120601;$$

**ბ)** გვექნება: $\Delta x = 1.98-2=-0.02$;

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=f(1.98)-f(2)=(1.98)^3-(2)^3=7.762392-8=-0.237608.$$

ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ დამოკიდებულება, რომელიც მოგვცემს საშუალებას სწრაფად და მარტივი გზით დავითვალოთ $\Delta y$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა $x$-ის მცირე ცვლილებისას ანუ როცა $\Delta x$ მცირეა (ნახ. 57)




ნახაზი 57. როცა $\Delta x$ მცირეა, მაშინ $dy$ არის $\Delta y$-ის კარგი მიახლოება.

ნახაზიდან ჩანს, რომ განსახილველი $P$ წერტილის მახლობლობაში, $T$ მხები წრფე ახლოსაა $f$ ფუნქციის გრაფიკთან. მაშასადამე, თუ $\Delta x$ მცირეა, მაშინ $dy$ არის $\Delta y$-ის კარგი მიახლოებითი მნიშვნელობა. თვითონ $dy$ გამოსახულება შეგვიძლია ვიპოვოთ შემდეგნაირად: შევნიშნოთ, რომ $T$ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი განისაზღვრება სამკუთხედის კათეტების შეფარდებით

$$\frac{dy}{\Delta x}.$$

მეორეს მხრივ ვიცით, რომ $T$ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი განისაზღვრება $f'(x)$-ით. მაშასადამე

$$\frac{dy}{\Delta x} = f'(x)$$

ანუ $dy = f'(x)\Delta x$. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი მიახლოება

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x, \qquad (6)$$

გამოსახული $f$ ფუნქციის წარმოებულით და $\Delta x$ ნაზრდით. $dy$ სიდიდეს ეწოდება ***$y$-ის დიფერენციალი.***

***ამრიგად, თუ $y = f(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა მაშინ:***

1. ***დამოუკიდებელი $x$ ცვლადის დიფერენციალია $dx = \Delta x$;***
2. ***დამოკიდებელი $y$ ცვლადის დიფერენციალია $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$ (7)***

**შენიშვნა:**

1. დამოუკიდებელი $x$ ცვლადისათვის: არავითარი განსხვავება არ არის $\Delta x$ და $dx$ შორის, ორივე წარმოადგენს $x$-ის ცვლილებას $x$-დან $x+\Delta x$-მდე;

2. დამოკიდებელი $y$ ცვლადისათვის: $\Delta y$ არის $y$-ის რეალური ცვლილება, როცა $x$ იცვლება $x$-დან $x+\Delta x$-მდე, მაშინ, როდესაც $dy$ არის $y$-ის ცვლილების მიახლოებითი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $x$-ის იმავე ცვლილებას;
3. $dy$ დიფერენციალი დამოკიდებულია $x$ და $dx$ სიდიდეებზე, მაგრამ ფიქსირებული $x$-თვის $dy$ არის $dx$-ის წრფივი ფუნქცია.

**მაგალითი 23.** ვთქვათ $y=x^3$.

**ა)** ვიპოვოთ $dy$ დიფერენციალი;

**ბ)** $dy$ დიფერენციალის გამოყენებით გამოთვალეთ მიახლოებით $\Delta y$, როცა $x$ იცვლება 2-დან $x$-დან 2.01-მდე;

**გ)** $dy$ დიფერენციალის გამოყენებით გამოთვალეთ მიახლოებით $\Delta y$, როცა $x$ იცვლება 2-დან $x$-დან 1.98-მდე;

**დ)** შედეგი შევადაროთ 22-ე მაგალითის შედეგს.

**ამოხსნა: ა)** გვაქვს $dy = f'(x)dx = 3x^2dx$;

**ბ)** აქ $x=2$ და $dx = 2.01-2 = 0.01$. მასასადამე $dy = 3x^2dx = 3(2)^2(0.01) = 0.12$;

**გ)** აქ $x=2$ და $dx = 1.98-2 = -0.02$. მასასადამე $dy = 3x^2dx = 3(2)^2(-0.02) = -0.24$;

**დ)** როგორც ვხედავთ, ორივე მიახლოება საკმარისად ახლოსაა რეალურ $\Delta y$ ცვლილებასთან, რომელიც 22-ე მაგალითში გამოვთვალეთ $\Delta y = 0.120601$ და $\Delta y = -0.237608$.

დავაკვირდეთ, თუ როგორ მარტივია ფუნქციის რეალური ცვლილების მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა დიფერენციალის გამოყენებით, ვიდრე უშუალოდ თვითონ ფუნქციის საშუალებით. ამ უპირატესობას შემდეგ მაგალითში დავინახავთ.

**მაგალითი 24.** დიფერენციალის გამოყენებით მიახლოებით გამოვთვალოთ $\sqrt{26.5}$. შედეგი შევამოწმოთ კალკულატორით.

**ამოხსნა:** რადგან გვინდა ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის დათვლა ამიტომ განვიხილოთ ფუნქცია $y = f(x) = \sqrt{x}$. რადგან რიცხვი 25 არის 26.5 რიცხვთან ახლოს მდებარე რიცხვი, რომლიდანაც შგვიძლია ფესვი ზუსტად ამოვიღოთ, ამიტომ ავიღოთ $x=25$. ჩვენ უნდა ვიცოდეთ $y$-ის ცვლილება $\Delta y$, როცა $x$ იცვლება 25-დან 26.5-მდე ანუ როცა $x$-ის ნაზრდი $\Delta x = 1.5$. (6) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x = \left(\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=25}\right)\cdot(1.5) = \frac{1}{10}\cdot(1.5) = 0.15$$

მაშასადამე,

$$\sqrt{26.5} - \sqrt{25} = \Delta y \approx 0.15$$

$$\sqrt{26.5} \approx \sqrt{25} + 0.15 = 5.15$$

$\sqrt{26.5}$ ზუსტი მნიშვნელობა დამრგვალებული ხუთ ათწილად ნიშნამდე არის 5.14782. ამრიგად ცდომილება შეადგენ დაახლოებით 0.00218.

## სავარჯიშო

**გაწარმოების წესების გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:**

**1.** $f(x)=-3$; **2.** $f(x)=x^5$; **3.** $f(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$; **4.** $f(x)=\dfrac{5}{4}x^{4/5}$; **5.** $f(u)=\dfrac{2}{\sqrt{u}}$;

**6.** $f(x)=x^3-3x^2+1$; **7.** $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3}{x}$; **8.** $f(x)=3x^{-1}+4x^{-2}$; **9.** $f(t)=\dfrac{4}{t^4}-\dfrac{3}{t^3}+\dfrac{2}{t}$;

**10.** $f(x)=2x-5\sqrt{x}$; **11.** $f(x)=\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}+1$; **12.** $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^{1/3}}$;

**იპოვეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკის მითითებულ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი და მხების განტოლება:**

**13.** $f(x)=2x^2-3x+4;\quad (2,6)$; **14.** $f(x)=-\dfrac{5}{3}x^2+2x+2;\quad \left(-1,-\dfrac{5}{3}\right)$;

**15.** $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-x+1;\quad (1,0)$; **16.** $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}};\quad \left(4,\dfrac{5}{2}\right)$;

**17.** ვთქვათ, $f(x)=x^3-4x^2$. $f$ ფუნქციის გრაფიკზე იპოვეთ წერტილი (წერტილები), რომელზე გავლებული მხები წრფე ჰორიზონტალურია.

**18.** ვთქვათ, $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3-x^2$. $f$ ფუნქციის გრაფიკზე იპოვეთ წერტილი (წერტილები), რომელზე გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი ტოლია: ა) $-2x$; ბ) $0$; გ) $10x$;

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:**

**19.** $f(x)=2x(x^2+1)$; **20.** $f(x)=(x+1)(2x^2-3x+1)$; **21.** $f(x)=(5x^2+1)(2\sqrt{x}-1)$;

**22.** $f(t)=(1+\sqrt{t})(2t^2-1)$; **23.** $f(x)=(x^2-5x+2)\left(x-\dfrac{2}{x}\right)$; **24.** $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$;

**25.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$; **26.** $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$; **27.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{x^2+4}$;

**გამოთვალეთ $h'(1)$ შემდეგ მაგალითებში, თუ ცნობილია, რომ $f$ და $g$ წარმოებადი ფუნქციებია $x=1$ წერტილში და $f(1)=2$, $f'(1)=-1$, $g(1)=-2$ და $g'(1)=3$:**

**28.** $h(x)=f(x)g(x)$; **29.** $h(x)=(x^2+1)g(x)$; **30.** $h(x)=\dfrac{xf(x)}{x+g(x)}$; **31.** $h(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)-g(x)}$

**იპოვეთ თითოეული ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა მითითებულ წერტილზე:**

**32.** $f(x)=(2x-1)(x^2+3),\quad x=1$; **33.** $f(x)=\dfrac{2x+1}{2x-1},\quad x=2$;

**34.** $f(x)=\dfrac{x}{x^4-2x^2-1},\quad x=-1$; **35.** $f(x)=(\sqrt{x}+2x)(x^{3/2}-x),\quad x=4$.

**იპოვეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკის მითითებულ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი და მხების განტოლება:**

**36.** $f(x)=(x^3+1)(x^2-2),\quad (2,18)$; **37.** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1},\quad \left(2,\dfrac{4}{3}\right)$;

**38.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1},\quad (1,1)$; **39.** $f(x)=\dfrac{1+2x^{1/2}}{1+x^{3/2}},\quad \left(4,\dfrac{5}{9}\right)$.

**40.** იპოვეთ $f(x)=(x^3+1)(3x^2-4x+2)$ ფუნქციის გრაფიკის $(1,2)$ წერტილში გავლებული მხები წრფის განტოლება.

**41.** $f(x)=(x^2+6)(x-5)$ ფუნქციის გრაფიკზე იპოვეთ წერტილი (წერტილები), რომელზე გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი -2-ის ტოლია.

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:**

**42.** $f(x)=(x^2+2)^5$; **43.** $f(x)=(2x-x^2)^3$; **44.** $f(x)=(2x+1)^{-2}$; **45.** $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$;

**46.** $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t-3}}$; **47.** $y=\dfrac{1}{(4x^4+x)^{3/2}}$; **48.** $f(t)=\dfrac{4}{\sqrt[3]{2t^2+t}}$; **49.** $f(x)=(x-1)^2(2x+1)^4$;

**50.** $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^3$; **51.** $s(t)=\left(\dfrac{t}{2t+1}\right)^{3/2}$; **52.** $g(s)=\left(s^2+\dfrac{1}{s}\right)^{3/2}$; **53.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x^2-1}$;

**იპოვეთ $\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{du}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx}$ თუ:**

**54.** $y=u^{4/3}$ **და** $u=3x^2-1$; **55.** $y=\sqrt{u}$ **და** $u=7x-2x^2$; **56.** $y=u^{-2/3}$ **და** $u=2x^3-x+1$;

**57.** $y=2u^2+1$ **და** $u=x^2+1$; **58.** $y=\sqrt{u}+\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ **და** $u=x^3-x$; **59.** $y=\dfrac{1}{u}$ **და** $u=\sqrt{x}+1$;

**60.** ვთქვათ, $F(x)=g(f(x))$ და $f(2)=3$, $f'(2)=-3$, $g(3)=5$ და $g'(3)=4$. იპოვეთ $F'(2)$.

**61.** ვთქვათ $h=g\circ f$. იპოვეთ $h'(0)$, თუ მოცემულია, რომ $f(0)=6$, $f'(5)=-2$, $g(0)=5$ და $g'(0)=3$.

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები:**

**62.** $f(x)=2x^3-3x^2+1$; **63.** $f(x)=(x^2+2)^5$; **64.** $g(t)=t^2(3t+1)^4$; **65.** $g(t)=(2t^2-1)^2(3t^2)$;

**66.** $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$; **67.** $g(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$; **68.** $f(s)=\dfrac{s-1}{s+1}$; **69.** $f(u)=\sqrt{4-3u}$;

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მესამე რიგის წარმოებულები:**

**70.** $f(x)=3x^4-4x^3$; **71.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$; **72.** $g(s)=\sqrt{3s-2}$; **73.** $f(x)=(2x-3)^4$.

**იპოვეთ $dy/dx$ წარმოებული შემდეგი განტოლებებიდან ორი გზით: ა) ამოხსენით განტოლება $y$-ის მიმართ და მოძებნეთ მისი წარმოებული; ბ) არაცხადი ფუნქციის წარმოებულის მოძებნის გზით. აჩვენეთ, რომ თითოეულ შემთხვევაში შედეგები ეკვივალენტურია.**

**74.** $3x+4y=6$; **75.** $xy=1$; **76.** $xy-y-1=0$; **77.** $x^3-x^2-xy=4$;

**78.** $x^2y-x^2+y-1=0$; **79.** $\dfrac{x}{y}-x^2=1$; **80.** $\dfrac{y}{x}-2x^3=4$.

**იპოვეთ არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციების წარმოებული:**

**81.** $x^2 - 2y^2 = 16$; **82.** $x^3 + y^3 + y - 4 = 0$; **83.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$; **84.** $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$;

**85.** $\sqrt{xy} = x + y$; **86.** $\sqrt{xy} = 2x + y^2$; **87.** $xy^{3/2} = x^2 + y^2$; **88.** $x^2 y^{1/2} = x + 2y^3$.

**იპოვეთ შემდეგი განტოლებებით მოცემული არაცხადი $f$ ფუნქციის გრაფიკის მხები წრფის განტოლება მითითებულ წერტილში:**

**89.** $4x^2 + 9y^2 = 36, \quad (0,2)$; **90.** $y^2 - x^2 = 16, \quad (2, 2\sqrt{5})$; **91.** $x^2 y^3 - y^2 + xy - 1 = 0$, $(1,1)$;

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დიფერენციალები:**

**92.** $f(x) = x^3 - x$; **93.** $f(x) = 2x^3 + x$; **94.** $f(x) = \sqrt{x+1}$; **95.** $f(x) = 2x^{3/2} + x^{1/2}$;

**96.** $f(x) = \frac{3}{x-1}$; **97.** $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$; **98.** $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}$; **99.** $f(x) = \sqrt{3x^2 - x}$;

**100.** $f(x) = (2x^2 + 3)^{1/3}$;

**101.** ვთქვათ, $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 6$.

**ა)** იპოვეთ $f$-ის დიფერენციალი;

**ბ)** იპოვეთ $y$-ის ცვლილების მიახლოებითი მნიშვნელობა, როდესაც $x$ იცვლება 2-დან 1.97-მდე;

**გ)** იპოვეთ $y$-ის რეალური ცვლილება, როდესაც $x$ იცვლება 2-დან 1.97-მდე და შეადარეთ ბ) კითხვაში მიღებულ შედეგს.

**102.** ვთქვათ $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$.

**ა)** იპოვეთ $f$-ის დიფერენციალი;

**ბ)** იპოვეთ $y$-ის ცვლილების მიახლოებითი მნიშვნელობა, როდესაც $x$ იცვლება 4-დან 4.1-მდე;

**გ)** იპოვეთ $y$-ის რეალური ცვლილება, როდესაც $x$ იცვლება 4-დან 4.1-მდე და შეადარეთ ბ) კითხვაში მიღებულ შედეგს.

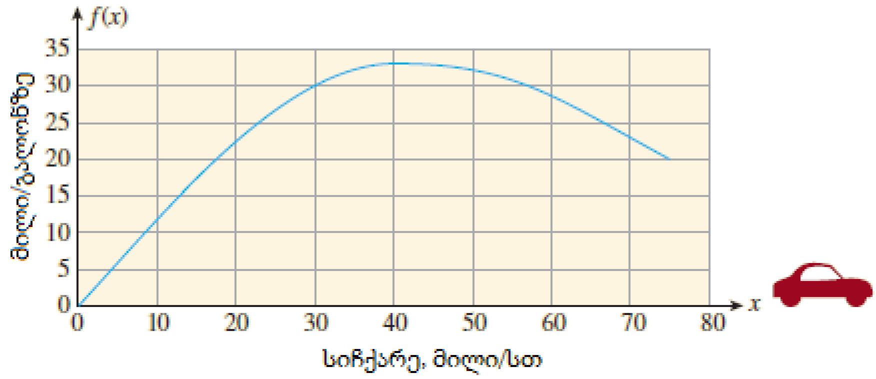
**დიფერენციალის გამოყენებით მიახლოებით გამოთვალეთ შემდეგი რიცხვები:**

**103.** $\sqrt{10}$; **104.** $\sqrt{49.5}$; **105.** $\sqrt{99.7}$; **106.** $\sqrt[3]{7.8}$; **107.** $\sqrt[4]{81.6}$; **108.** $\sqrt[3]{0.00096}$

## მერვე ლექცია

### ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის შუალედების დადგენა წარმოებულის გამოყენებით

დადგენილია, რომ მანქანის საწვავის ეკონომიურობა, როგორც მისი სიჩქარის ფუნქცია, აღიწერება 58-ე ნახაზზე მოცემული გრაფიკით.




ნახაზი 58.

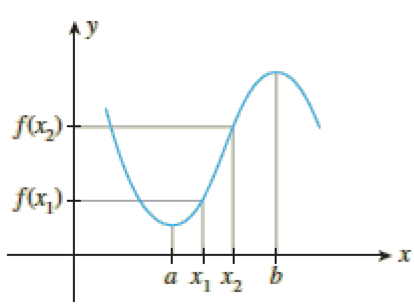
ამ გრაფიკის მიხედვით ჩანს, რომ საწვავის ხარჯი $f(x)$ მილი/გალონზე იზრდება, როცა მანქანის სიჩქარე $x$ მილი/საათში იზრდება ნულიდან 42-მდე, ხოლო შემდეგ კლებულობს როცა სიჩქარე გადააჭარბებს 42 მილი/სთ. აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ტერმინები *„ზრდადობა“* და *„კლებადობა“* ფუნქციის ყოფაქცევის აღსაწერად, როცა ჩვენ ვმოძრაობთ მარცხნიდან მარჯვნივ გრაფიკის გასწვრივ.

უფრო ზუსტად, ჩვენ გვაქვს შემდეგი განმარტება.

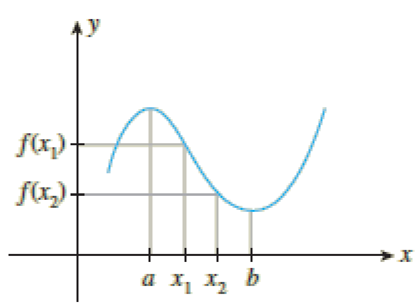
***ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა:***

***$f$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი $(a,b)$ ინტერვალზე, თუ ნებისმიერი ორი $x_1$ და $x_2$ რიცხვისათვის $(a,b)$ ინტერვალიდან, სრულდება უტოლობა $f(x_1) < f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$ (ნახ. 59ა).***

***$f$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი $(a,b)$ ინტერვალზე, თუ ნებისმიერი ორი $x_1$ და $x_2$ რიცხვისათვის $(a,b)$ ინტერვალიდან, სრულდება უტოლობა $f(x_1) > f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$ (ნახ. 59ბ).***




**ა)** ფუნქცია ზრდადია (a,b)-ზე.

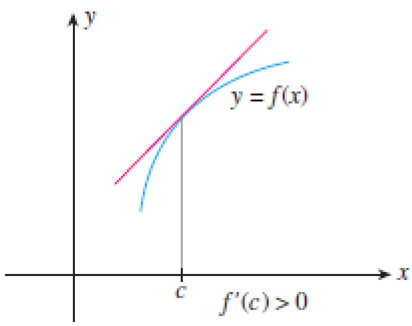


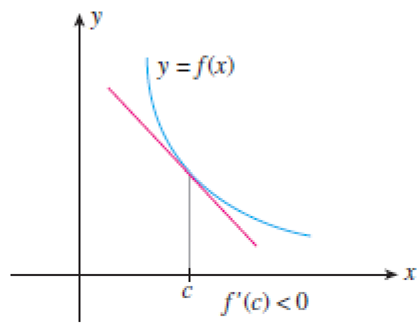

**ბ)** ფუნქცია კლებადია (a,b)-ზე.

ნახაზი 59.

ჩვენ ვიტყვით, რომ $f$ ***ზრდადია*** $c$ ***წერტილში,*** თუ არსებობს $c$ წერტილის შემცველი ისეთი $(a,b)$ ინტევალი, რომელზედაც $f$ ზრდადია. ანალოგიურად, ჩვენ ვიტყვით, რომ $f$ ***კლებადია*** $c$ ***წერტილში,*** თუ არსებობს $c$ წერტილის შემცველი ისეთი $(a,b)$ ინტევალი, რომელზედაც $f$ კლებადია.

რადგან ფუნქციის ცვლილების სიდიდე $x=c$ წერტილში ხასიათდება ფუნქციის წარმოებულით ამ წერტილში, ამიტომ, ბუნებრივად თვითონ წარმოებული არის ინსტრუმენტი იმისა, რომ განვსაზღვროთ ინტერვალები, რომელზედაც წარმოებადი ფუნქცია იქნება ზრდადი ან კლებადი. მართლაც, როგორც ძემოთ დავინახეთ, ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა მოცემულ წერტილში ერთი მხრივ გვაძლევს მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტს, რომელიც გავლებულია $f$ ფუნქციის გრაფიკის შესაბამის წერტილში და მეორე მხრივ გვაძლევს ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის სიდიდეს ამავე წერტილში. ფაქტობრივად, თუ მოცემულ წერტილზე წარმოებული დადებითია, მაშინ შესაბამისი მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი დადებითია და ფუნქცია ზრდადია; ხოლო თუ წარმოებული უარყოფითია, მაშინ შესაბამისი მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი უარყოფითია და ფუნქცია კლებადია (ნახ. 60)




ა) $f$ ზრდადია $c$ წერტილში; ბ) $f$ კლებადია $c$ წერტილში.

ნახაზი 60.

ამ შედეგს მივყავართ შემდეგ მნიშვნელოვან თეორემასთან, რომელსაც დაუმტკიცებლად გთავაზობთ.

***თეორემა 1.***

***ა) თუ*** $x$ ***-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის*** $(a,b)$ ***ინტერვალიდან*** $f'(x)>0$***, მაშინ*** $f$ ***ფუნქცია ზრდადია*** $(a,b)$ ***ინტერვალზე;***

***ბ) თუ*** $x$ ***-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის*** $(a,b)$ ***ინტერვალიდან*** $f'(x)<0$***, მაშინ*** $f$ ***ფუნქცია კლებადია*** $(a,b)$ ***ინტერვალზე;***

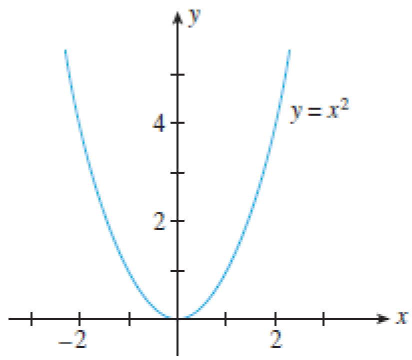
***გ) თუ*** $x$ ***-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის*** $(a,b)$ ***ინტერვალიდან*** $f'(x)=0$***, მაშინ*** $f$ ***ფუნქცია მუდმივია*** $(a,b)$ ***ინტერვალზე;***

**მაგალითი 1.** ვიპოვოთ $f(x)=x^2$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები.

**ამოხსნა:** მოცემული ფუნქციის წარმოებულია $f'(x)=2x$. რადგან

$$f'(x)=2x>0 \text{ თუ } x>0 \quad \text{და} \quad f'(x)=2x<0 \text{ თუ } x<0,$$

ამიტომ $f$ ზრდადია $(0,\infty)$ ინტერვალზე და კლებადია $(-\infty,0)$ ინტერვალზე (ნახ. 61).




ნახაზი 61.

გავიხსენოთ, რომ უწყვეტი ფუნქციის გრაფიკს არ შეიძლება ჰქონდეს რაიმე სახის წყვეტა. როგორც შედეგი, უწყვეტი ფუნქცია ვერ შეიცვლის ნიშანს, თუ იგი $x$-ის რაიმე მნიშვნელობისათვის არ გახდა ნულის ტოლი. ეს შენიშვნა გვთავაზობს $f$ ფუნქციის წარმოებულის ნიშნის დადგენის ხერხებს და შესაბამისად $f$ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალების დადგენის წესებს.

***ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალების დადგენის საფეხურები:***

1. ***ვიპოვოთ $x$-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f'(x)=0$ ან $f'$ განიცდის წყვეტას და ამოვწეროთ $x$-ის ამ მნიშვნელობებით განსაზღვრული ღია ინტერვალები;***
2. ***შევარჩიოთ საცდელი რიცხვი $c$ პირველი პუნქტით განსაზღვრულ თითოეულ ინტერვალში და ვიპოვოთ $f'(c)$ რიცხვის ნიშანი ამ ინტერვალებში.***

   ***ა) თუ $f'(c)>0$, მაშინ $f$ ზრდადია ამ ინტერვალში;***

   ***ბ) თუ $f'(c)<0$, მაშინ $f$ კლებადია ამ ინტერვალში.***

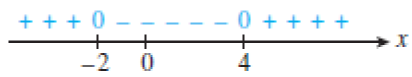
**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ $f(x)=x^3-3x^2-24x+32$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები.

**ამოხსნა:**

1. გამოვთვალოთ $f$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს
   $f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$.
   იგი უწყვეტი ფუნქციაა ყველგან. $f'(x)$ ნული ხდება, როცა $x=-2$ და $x=4$. ეს რიცხვები ნამდვილ ღერძს ყოფს ინტერვალებად $(-\infty,-2)$, $(-2,4)$ და $(4,\infty)$;
2. განვსაზღვროთ $f'(x)$ ნიშნები $(-\infty,-2)$, $(-2,4)$ და $(4,\infty)$ ინტერვალებში. ამისათვის გამოვთვალოთ $f'(x)$ თითოეული ინტერვალის შიგა რაიმე საცდელ წერტილში. შედეგი ნაჩვენებია შემდეგ ცხრილში.
3. 

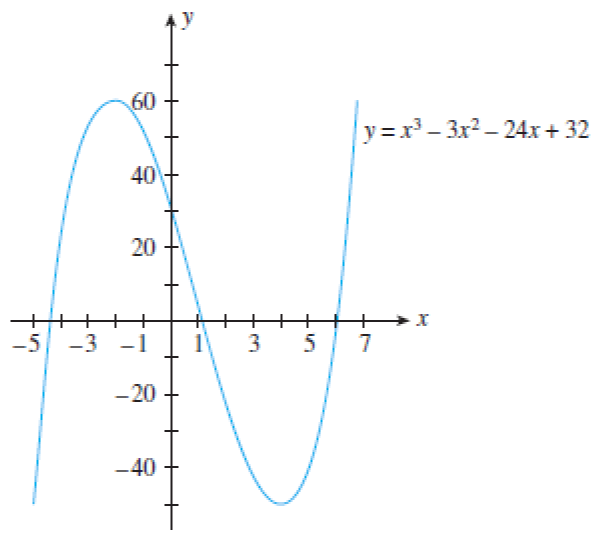
| ინტერვალი | საცდელი წერტილი | $f'(c)$ | $f'(x)$ ნიშანი |
|---|---|---|---|
| $(-\infty,-2)$ | $-3$ | 21 | + |
| $(-2,4)$ | 0 | $-24$ | - |
| $(4,\infty)$ | 5 | 21 | + |

ამ შედეგების გამოყენებით მივიღეთ ნიშნების დიაგრამა, რომელიც 62-ე ნახაზზეა მოცემული.




ნახაზი 62.

ამის მიხედვით დავასკვნით, რომ $f$ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty,-2)$ და $(4,\infty)$ ინტერვალებზე და კლებადია $(-2,4)$ ინტერვალზე. ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 63-ე ნახაზზე




ნახაზი 63.

**შენიშვნა.** ჩვენ მოგვიანებით შევისწავლით, თუ როგორ ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

**მაგალითი 3.** ვიპოვოთ $f(x)=x^{2/3}$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები.

**ამოხსნა:**

1. $f$ ფუნქციის გაწარმოებით მივიღებთ

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3x^{1/3}}.$$

$f'$ ფუნქცია არ არის განსაზღვრული $x=0$ წერტილში, ამიტომ იგი წყვეტილა ამ წერტილზე. იგი უწყვეტია ყველა დანარჩენ წერტილზე. გარდა ამისა, $f'$ არ ხდება ნული არსად. ამიტომ ნული გაყოფს ღერძს ორ ინტერვალად $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$.

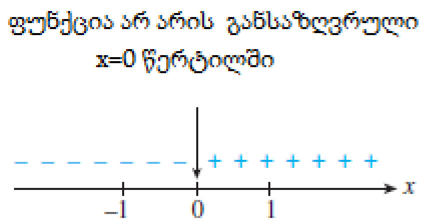
2. ავირჩიოთ საცდელი წერტილი (ვთქვათ $x=-1$) $(-\infty,0)$ ინტერვალში და გამოვითვალოთ

$$f'(-1)=-\frac{2}{3}$$

რადგან $f'(-1)<0$ ამიტომ ვხედავთ, რომ $f'(x)<0$ მთელს $(-\infty,0)$ ინტერვალში. ახლა, თუ ავიღებთ სასაცდელ წერტილს (ვთქვათ $x=1$) $(0,\infty)$ ინტერვალში, მივიღებთ

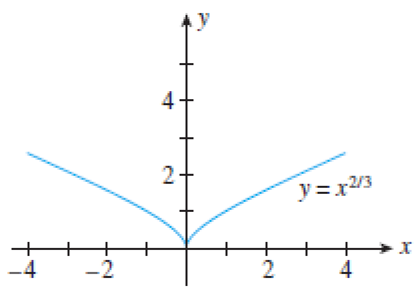
$$f'(1)=\frac{2}{3}$$

რადგან $f'(1)>0$, ამიტომ $f'(x)>0$ მთელს $(0,\infty)$ ინტერვალში. მე-60 ნახაზი გვაძლევს ნიშნების დიაგრამას.




ნახაზი 64.

ამრიგად, დავასკვნით, რომ $f$ ფუნქცია კლებადია $(-\infty,0)$ ინტერვალში და ზრდადია $(0,\infty)$ ინტერვალში. ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია 65-ე ნახაზზე.




ნახაზი 65. $f$ ფუნქცია კლებადია $(-\infty,0)$ ინტერვალში და ზრდადია $(0,\infty)$ ინტერვალში.

**მაგალითი 4.** ვიპოვოთ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები.

**ამოხსნა:**

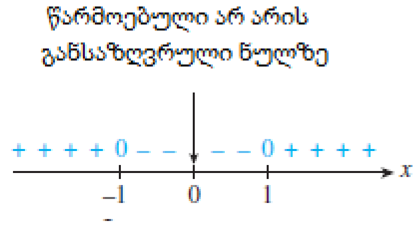
1. $f$ ფუნქციის გაწარმოებით მივიღებთ

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

რადგან $f'$ არ არის განსაზღვრული $x=0$ წერტილში, ამიტომ იგი წყვეტილა ამ წერტილზე. გარდა ამისა, $f'(x)$ ნულის ტოლია, როცა $x^2-1=0$ ანუ $x=\pm1$. $x$-ის ეს მნიშვნელობები $f'$ განსაზღვრის არეს დაანაწილებს შემდეგ ღია ინტერვალებად $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ და $(1,\infty)$, რომლებშიც $f'$ განსხვავდება ნულისაგან.

2. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ $f'$ ფუნქციის ნიშნები თითოეულ შუალედში, გამოვთვალოთ $f'(x)$ საცდელ წერტილებზე $x=-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ და 2 შესაბამისად.

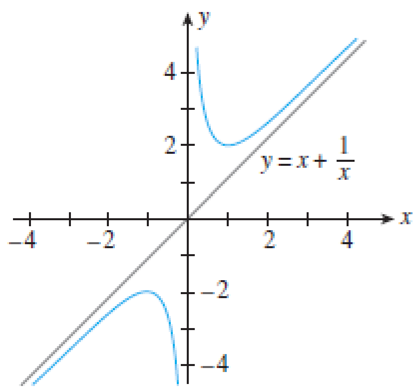
მივიღებთ $f'(-2)=\dfrac{3}{4}$, $f'(-\tfrac{1}{2})=-3$, $f'(\tfrac{1}{2})=-3$ და $f'(2)=\dfrac{3}{4}$. ნიშნების დიაგრამიდან (ნახ. 66)




ნახაზი 66.

დავადგენთ, რომ $f$ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty,-1)$ და $(1,\infty)$ ინტერვალებში და კლებადია $(-1,0)$ და $(0,1)$ ინტერვალებში.

$f$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 67-ე ნახაზზე.

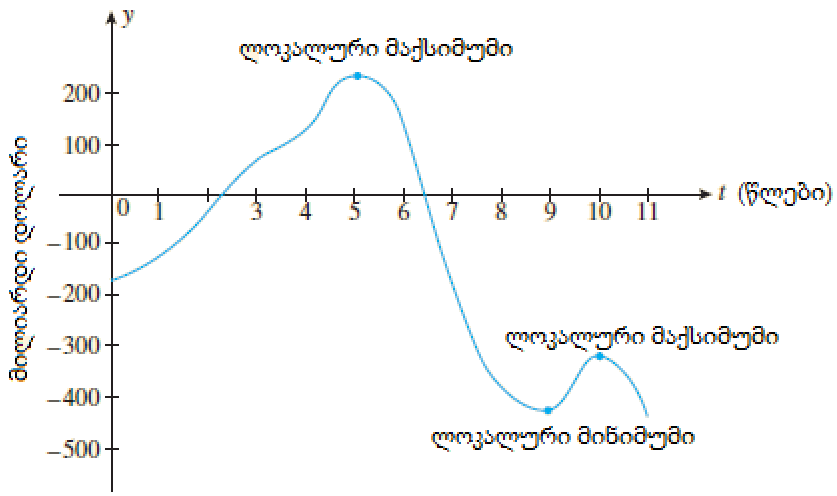



ნახაზი 67.

**ლოკალური ექსტრემუმი**

გარდა იმისა, რომ პირველი რიგის წარმოებული გვეხმარება დავადგინოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები, პირველი რიგის წარმოებული გვეხმარება აგრეთვე დავადგინოთ, თუ სად არის განთავსებული $f$ ფუნქციის გრაფიკზე გარკვეული „ზედა“ და „ქვედა“ წერტილები. ამ წერტილების ცოდნა ძალიან მნიშვნელოვანია ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოხსნისას და ფუნქციის გრაფიკის აგებისას. ეს „ზედა“ და „ქვედა“ წერტილები შეესაბამება ფუნქციის ***ლოკალურ მაქსიმუმს*** და ***ლოკალურ მინიმუმს.*** მათი ეს სახელწოდება გამომდინარეობს იქიდან, რომ ისინი მართლაც არიან „ყველაზე ზედა“და „ყველაზე ქვედა“ წერტილები მათთან ახლოს მდებარე წერტილებთან შედარებით.

68-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ამერიკის შეერთებული შტატების ბიუჯეტის დეფიციტის გრაფიკი 1996 წლიდან ($t=0$) 2007 წლამდე



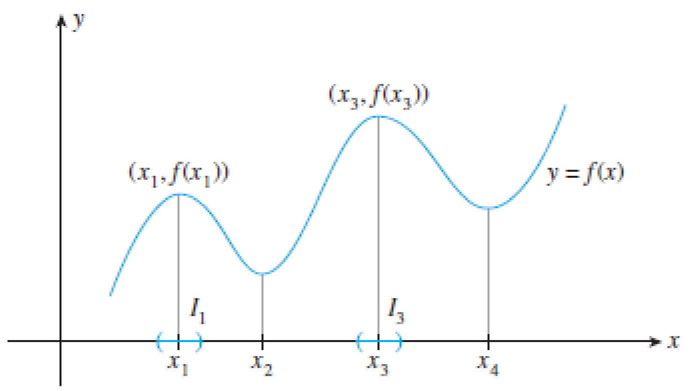

ნახაზი 68.

უფრო ზოგაგად, გვაქვს შემდეგი განმარტება.

***ლოკალური მაქსიმუმი.***

$f$ ***ფუნქციას*** $x=c$ ***წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, თუ არსებობს*** $c$ ***წერტილის შემცველი ისეთი ღია ინტერვალი*** $(a,b)$, ***რომ*** $x$***-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის*** $(a,b)$ ***ინტერვალიდან*** $f(x)\le f(c)$.

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ არსებობს $c$ წერტილის შემცველი ისეთი ღია ინტერვალი, რომელშიც $f$ ფუნქციის გრაფიკის არცერთი წერტილი, რომელთა $x$ - კოორდინატი ეკუთვნის ამ ინტერვალს, არ შეიძლება იყოს $(c, f(c))$ წერტილზე მაღლა ე. ი. $x=c$ წერტილის მახლობლობაში $f(c)$ იქნება $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. 69-ე ნახაზზე მოცემულია $f$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც გააჩნია ლოკალური მაქსიმუმი $x=x_1$ და $x=x_3$ წერტილებში




ნახაზი 69. $f$ ფუნქციას გააჩნია ლოკალური მაქსიმუმი $x=x_1$ და $x=x_3$ წერტილებში.

დავაკვირდეთ, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკის ყველა წერტილი, რომელთა $x$- კოორდინატი ეკუთვნის $I_1$ ინტერვალს, არ მდებარეობს $(x_1, f(x_1))$ წერტილის ზემოთ. ეს აგრეთვე მართებულია $I_3$ ინტერვალისა და $(x_3, f(x_3))$ წერტილის მიმართ. ამასთან

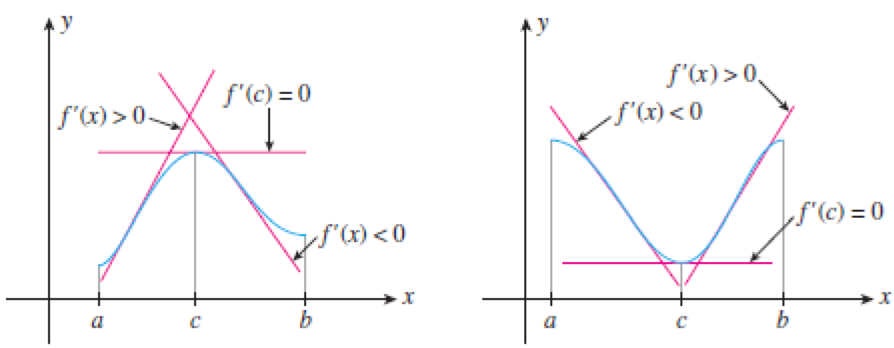
ერთად, $f$ ფუნქციის გრაფიკზე არსებობენ წერტილები, რომლებიც „უფრო მაღლაა“ ვიდრე $(x_1, f(x_1))$ და $(x_3, f(x_3))$ წერტილები. მიუხედავად ამისა, ეს უკანასკნელი ორი წერტილი ლოკალური უმაღლესი წერტილია შესაბამისად $x_1$ და $x_3$ წერტილის მიდამოში (ინტერვალში). $f$ ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილებს, რომლებსაც აბსოლუტურად „უმაღლესი“ და „უმდაბლესი“ პოზიცია უკავიათ გრაფიკზე, შემდეგში შევისწავლით. ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის განმარტება.

***ლოკალური მინიმუმი.***

$f$ ***ფუნქციას*** $x=c$ ***წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი, თუ არსებობს*** $c$ ***წერტილის შემცველი ისეთი ღია ინტერვალი*** $(a,b)$, ***რომ*** $x$***-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის*** $(a,b)$ ***ინტერვალიდან*** $f(x) \geq f(c)$.

$f$ ფუნქციას, რომელის გრაფიკი მოცემულია 69-ე ნახაზზე, ლოკალური მინიმუმი გააჩნია $x=x_2$ და $x=x_4$ წერტილებში.

ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმს და ლოკალურ მინიმუმს ფუნქციის ***ლოკალურ ექსტრემუმს*** უწოდებენ. ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის მოსაძებნად პირველ რიგში განვიხილოთ ფუნქციები, რომელთაც გააჩნიათ წარმოებულები ასეთ წერტილებში. დაუშვათ, რომ $f$ წარმოებადი ფუნქციაა რაიმე $(a,b)$ ინტერვალზე, რომელიც შეიცავს $x=c$ წერტილს და აღწევს ლოკალურ მაქსიმუმს ამ წერტილზე (ნახ. 70ა)



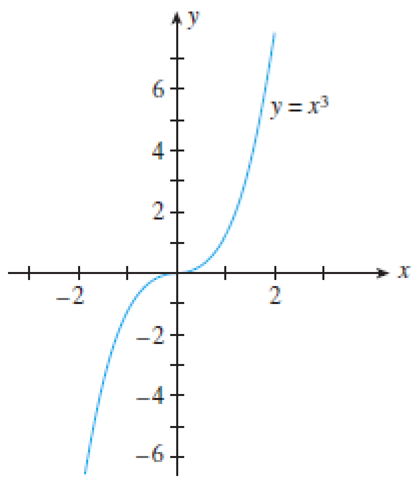

ნახაზი 70.

დავაკვირდეთ, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკის მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტმა ნიშნი უნდა შეიცვალოს დადებითიდან უარყოფითზე, როცა შესაბამისი $x$ წერტილი მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ $c$ წერტილის გავლით. მაშასადამე, $f$ ფუნქციის გრაფიკის მხები წრფე $(c, f(c))$ წერტილზე უნდა იყოს ჰორიზონტალური ანუ $f'(c)=0$ (ნახ. 70ა).

იგივე არგუმენტების გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ წარმოებადი $f$ ფუნქციის $f'$ წარმოებული ნულის ტოლია $x=c$ წერტილზე, სადაც ფუნქცია აღწევს ლოკალურ ექსტერმუმს (ნახ. 70ბ).

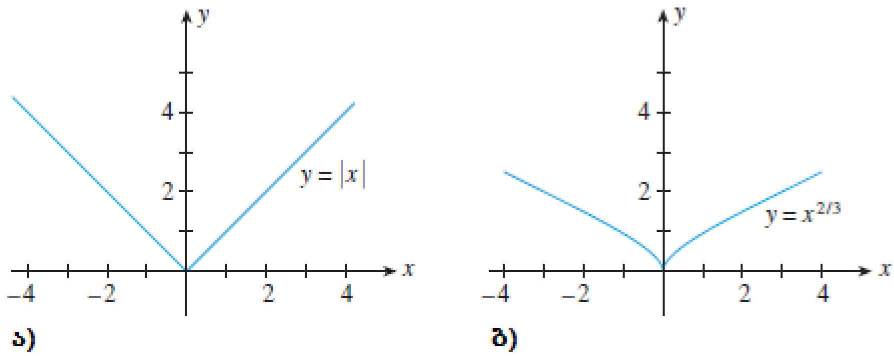
ეს ანალიზი ცხადყოფს წარმოებადი ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის ერთ მნიშვნელოვან თვისებას: ***ყოველ*** $c$ ***წერტილზე, სადაც*** $f$ ***ფუნქციას გააჩნია ლოკალური ექსტერმუმი,*** $f'(c)=0$.

მივაქციოთ ყურადღება შემდეგ გარემოებას. როგორც ზემოთ ვნახეთ, თუ წარმოებადი ფუნქციას გააჩნია $x=c$ წერტილზე ლოკალური მაქსიმუმი, მაშინ $f'(c)=0$. ამ გამონათქვამის შებრუნებული - თუ $f'(c)=0$, მაშინ $f$ ფუნქციას უნდა ჰქონდეს ლოკალური ექსტერმუმი $x=c$ წერტილზე - არ არის ჭეშმარიტი. მაგალითად, განვიხილოთ $f(x)=x^3$. ცხადია $f'(x)=3x^2$ და $f'(0)=0$, მაგრამ $f$ ფუნქციას არც ლოკალური მაქსიმუმი და არც ლოკალური მინიმუმი არ გააჩნია $x=0$ წერტილში (ნახ. 71 ).




ნახაზი 71. $f'(0)=0$, მაგრამ $f$ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი არ გააჩნია $x=0$ წერტილში.

ზემოთ ვითხოვდით, რომ იმ წერტილებში, სადაც არსებობს ლოკალური ექსტრემუმი, ფუნქცია იყოს წარმოებადი. $f(x)=|x|$ და $g(x)=x^{2/3}$ ფუნქციები, რომელთა გრაფიკები გამოსახულია 72-ე ნახაზზე, გვიჩვენებს, რომ მათ შეიძლება ჰქონდეთ ლოკალური ექსტრემუმი იმ წერტილებში, სადაც არ გააჩნიათ წარმოებული. კერძოდ, ორივე ეს ფუნქცია არ არის წარმოებადი $x=0$ წერტილში, მაგრამ ორივეს გააჩნია ლოკალური ექსტრემუმი ამ წერტილში.



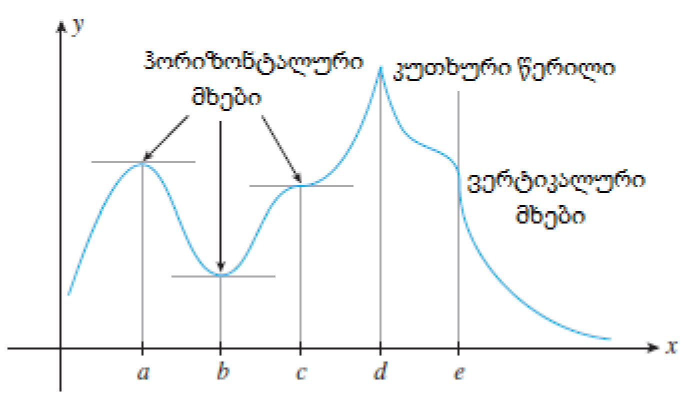

ნახაზი 72. ორივე ფუნქციას გააჩნია ლოკალური ექსტრემუმი (0,0) წერტილში.

შევნიშნოთ, რომ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტები იცვლებიან უარყოფითიდან დადებითზე, როცა $x$ წერტილი მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ 0 წერტილის გავლით. ეს კი მსგავსია იმ შემთხვევისა, როცა ფუნქცია წარმოებადია $x$-ის იმ მნიშვნელობაზე, სადაც არსებობს ლოკალური ექსტრემუმი. ამრიგად, ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ლოკალური ექსტრემუმი იმ წერტილებში, სადაც ფუნქცია წარმოებადია და წარმოებული ნულის ტოლია ან წარმოებული არ არსებობს.

### კრიტიკული წერტილები

***$f$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილია განსაზღვრის არის ის $x$ წერტილი, რომელზედაც $f'(x)=0$ ან $f'(x)$ არ არსებობს.***

73-ე ნახაზზე გამოსახულია ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც აქვს $x=a,b,c,d$ და $e$ კრიტიკული წერტილები. დავაკვირდეთ, რომ $f'(x)=0$, როცა $x=a,b$ და $c$. შემდეგ, რადგან $x=d$-თვის გრაფიკზე გვაქვს კუთხური წერილი, ამიტომ წარმოებული არ არსებობს. დაბოლოოს, $x=e$ წერტილში არ არსებობს $f'(x)$, რადგან მხები წრფე ვერტიკალურია. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ კრიტიკულ $x=a,b$ და $d$ წერტილებში ფუნქციას გააჩნია ლოკალური ექსტრემუმი მაშინ, როცა $x=c$ და $x=e$ არა.




ნახაზი 73. ფუნქციის კრიტიკული წერტილები.

## ლოკალური ექსტრემუმის მოძებნა

კრიტიკული წერტილების განმარტების შემდეგ, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ლოკალური ექსტრემუმის მოძებნის ფორმალური პროცედურები უწყვეტი ფუნქციისათვის, რომელიც წარმოებადია ყველგან გარდა იზოლირებული $x$ წერტილისა. ერთ-ერთი ფორმალური პროცედურაა ე.წ. ***პირველი წარმოებულის წესი,*** რომელიც გვეხმარება დავადგინოთ, აქვს თუ არა ლოკალური ექსტერმუმი მოცემულ ფუნქციას.

***უწყვეტი ფუნქციის ლოკალური ექსტერმუმის მოძებნის პირველი წარმოებულის წესი:***

1. ***ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები;***
2. ***ვიპოვოთ $f'(x)$-ის ნიშანი თითოეული კრიტიკული წერტილის მარჯვნივ და მარცხნივ;***

   ***ა) თუ კრიტიკულ $x=c$ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს $f'(x)$ იცვლის ნიშანს დადებითიდან უარყოფითზე, მაშინ $f(c)$ არის ლოკალური მაქსიმუმი;***

   ***ბ) თუ კრიტიკულ $x=c$ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს $f'(x)$ იცვლის ნიშანს უარყოფითიდან დადებითზე, მაშინ $f(c)$ არის ლოკალური მინიმუმი;***

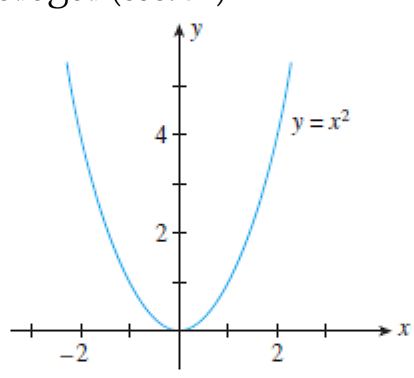
   ***გ) თუ კრიტიკულ $x=c$ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს $f'(x)$ არ იცვლის ნიშანს, მაშინ $f(c)$ არ არის ლოკალური ექსტერმუმი.***

**მაგალითი 5**. ვიპოვოთ $f(x)=x^2$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი.

**ამოხსნა:** $f(x)=x^2$ ფუნქციის წარმოებული არის $f'(x)=2x$. თუ წარმოებულის გაუტოლებთ ნულს $f'(x)=0$, მივიღებთ $x=0$. ამრიგად, გვაქვს ერთადერთი კრიტიკული წერტილი. რადგან

$$f'(x)<0 \quad \text{როცა} \quad x<0 \qquad \text{და} \qquad f'(x)>0 \quad \text{როცა} \quad x>0,$$

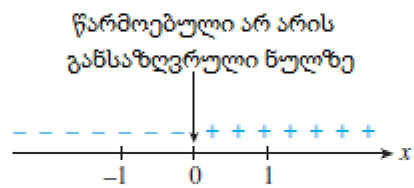
ვხედავთ, რომ კრიტიკულ $x=0$ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს $f'(x)$ იცვლის ნიშანს უარყოფითიდან დადებითზე. ამიტომ დავასკვნით, რომ $f(0)=0$ არის ლოკალური მინიმუმი (ნახ. 74)




ნახაზი 74. $x=0$ წერტილზე ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი.

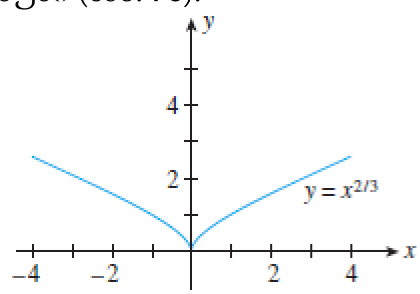
**მაგალითი 6**. ვიპოვოთ $f(x) = x^{2/3}$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი.

**ამოხსნა:** $f(x) = x^{2/3}$ ფუნქციის წარმოებული არის $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. როგორც ვხედავთ $f'$ არ არის განსაზღვრული $x = 0$ წერტილზე, ხოლო დანარჩენ ყველა წერტილში უწყვეტია და არსად არ ხდება ნულის ტოლი. ამრიგად, $x = 0$ არის მხოლოდ ერთი კრიტიკული წერტილი. წარმოებულის ნიშნები მოცემულია 75-ე ნახაზზე.




ნახაზი 75.

ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ კრიტიკულ $x = 0$ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს $f'(x)$ იცვლის ნიშანს უარყოფითიდან დადებითზე. ამრიგად, პირველი წარმოებულის წესის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $f(0) = 0$ არის $f$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი (ნახ. 76).




ნახაზი 76. $x = 0$ წერტილზე ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი.

**მაგალითი 7**. ვიპოვოთ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი.

**ამოხსნა:** ფუნქციის წარმოებულია $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$ და იგი უწყვეტია ყველგან. $f'(x)$ ფუნქციის ნულებია $x = -2$ და $x = 4$. ამიტომ $f$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები მხოლოდ ეს წერტილები იქნება. $f'$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა მოცემულია 77-ე ნახაზზე.

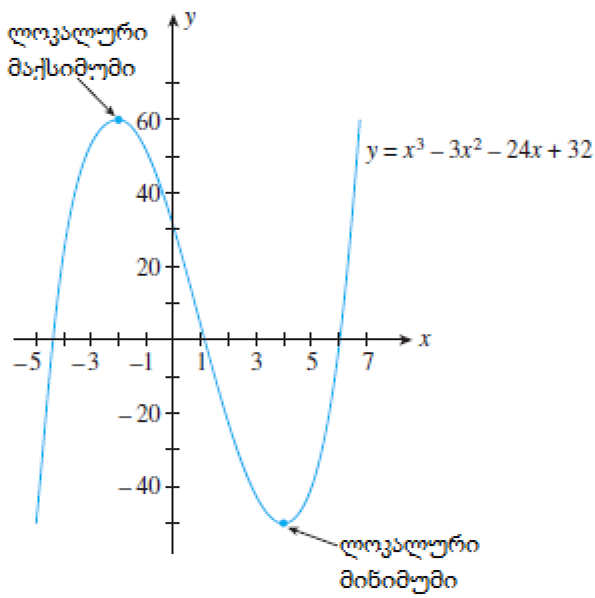

ნახაზი 77. წარმოებულის ნიშნების დიაგრამა.

გამოვიყენოთ პირველი წარმოებულის წესი $x = -2$ და $x = 4$ კრიტიკულ წერტილებზე ლოკალური ექსტრემუმის დასადგენად:

1. რადგან $x = -2$ კრიტიკულ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს $f'(x)$ იცვლის ნიშანს დადებითიდან უარყოფითზე, ამიტომ დავასკვნით, რომ $x = -2$ წერტილზე $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი

$$f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2-24(-2)+32=60;$$

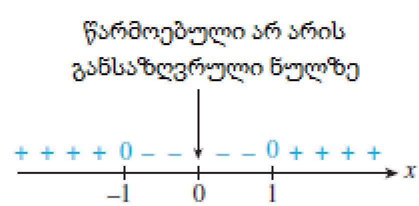
2. რადგან $x=4$ კრიტიკულ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს $f'(x)$ იცვლის ნიშანს უარყოფითდან დადებითიზე, ამიტომ დავასკვნით, რომ $x=4$ წერტილზე $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი $f(4)=-48$. (ნახ. 78 )




ნახაზი 78. $x=-2$ წერტილზე $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, ხოლო $x=4$-ზე ლოკალური მინიმუმი.

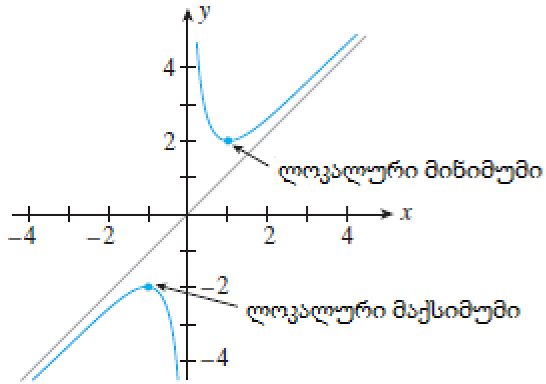
**მაგალითი 8**. ვიპოვოთ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი.

**ამოხსნა:** ფუნქციის წარმოებულია $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. რადგან $f'$ ნულის ტოლია $x=-1$ და $x=1$ წერტილებზე, ამიტომ $-1$ და $1$ კრიტიკული წერტილებია. გარდა ამისა $f'$ წყვეტილი ფუნქციაა $x=0$ წერტილზე. რადგან თვითონ $f$ არ არის განსაზღვრული $x=0$ წერტილზე, ამიტომ $x=0$ არ შეიძლება იყოს $f$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი. $f'$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა მოცემულია 79-ე ნახაზზე.




ნახაზი 79. $x=0$ არ არის კრიტიკული წერტილი, რადგან $f$ არ არის განსაზღვრული $x=0$ წერტილზე.

1. რადგან $x=-1$ კრიტიკულ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს $f'(x)$ იცვლის ნიშანს დადებითიდან უარყოფითზე, ამიტომ პირველი წარმოებულის წესის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $x=-1$ წერტილზე $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი $f(-1)=-2$;
2. რადგან $x=1$ კრიტიკულ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს $f'(x)$ იცვლის ნიშანს უარყოფითიდან დადებითზე, ამიტომ პირველი წარმოებულის წესის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $x=1$ წერტილზე $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი $f(1)=2$ (ნახ. 80)



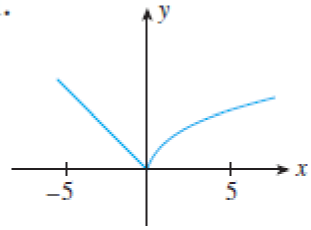

ნახაზი 80.

შევნიშნოთ, რომ ამ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი უფრო ნაკლებია ვიდრე ლოკალური მინიმუმი.

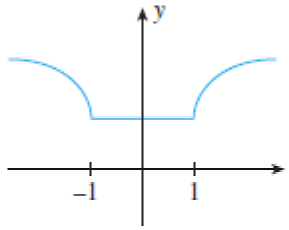
## სავარჯიშო

**მოცემულია ფუნქციათა გრაფიკები. დაადგინეთ ინტერვალები, სადაც ფუნქცია ზრდადია, მუდმივია ან კლებადია:**

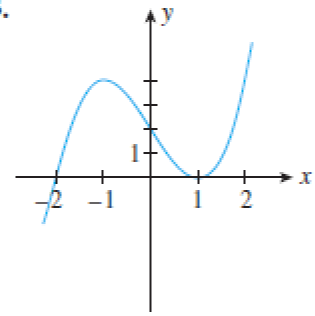
**1.**



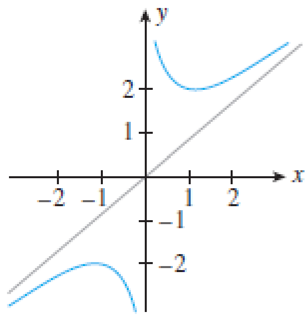

**2.**



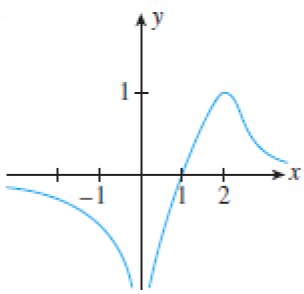

**3.**



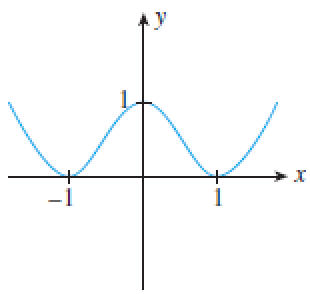

**4.**



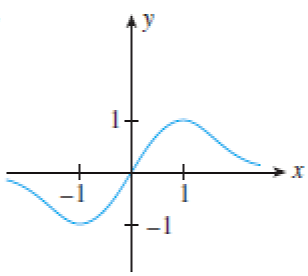

**5.**



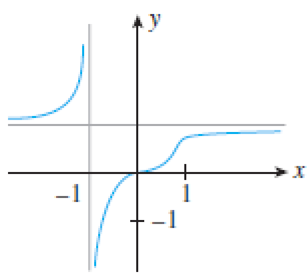

**6.**




**7.**




**8.**




**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები:**

**9.** $f(x)=3x+5$; **10.** $f(x)=4-5x$; **11.** $f(x)=x^2-3x$; **12.** $f(x)=2x^2+x+1$;

**13.** $g(x)=x-x^3$; **14.** $f(x)=x^3-3x^2$; **15.** $g(x)=x^3+3x^2+1$; **16.** $f(x)=x^3-3x+4$

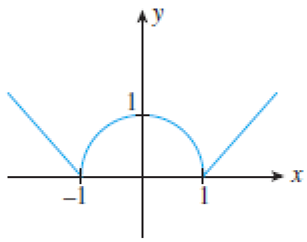
**17.** $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x+20$; **18.** $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x-2$; **19.** $f(x)=\frac{1}{x-2}$;

**20.** $g(t)=\frac{2t}{t^2+1}$; **21.** $f(x)=x^{2/3}+5$; **22.** $f(x)=\sqrt{x+1}$; **23.** $g(x)=x\sqrt{x+1}$;

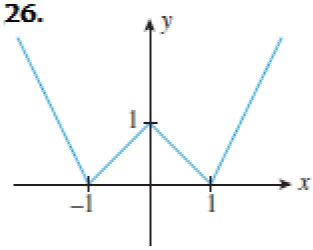
**24.** $h(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

მოცემულია ფუნქციათა გრაფიკები. გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრეთ ამ ფუნქციების ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი ასეთის არსებობის შემთხვევაში:

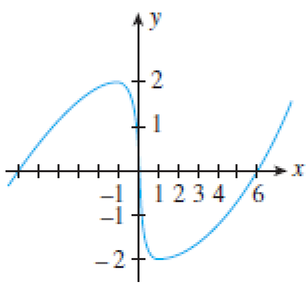
**25.**



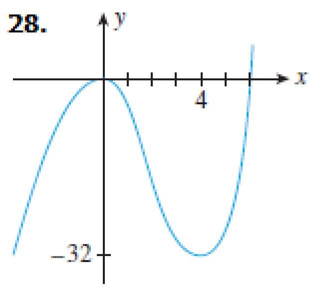

**26.**



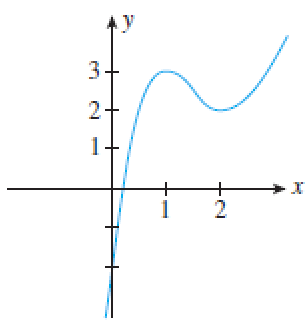

**27.**



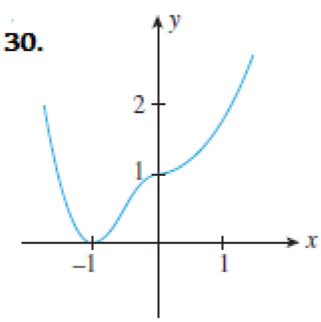

**28.**



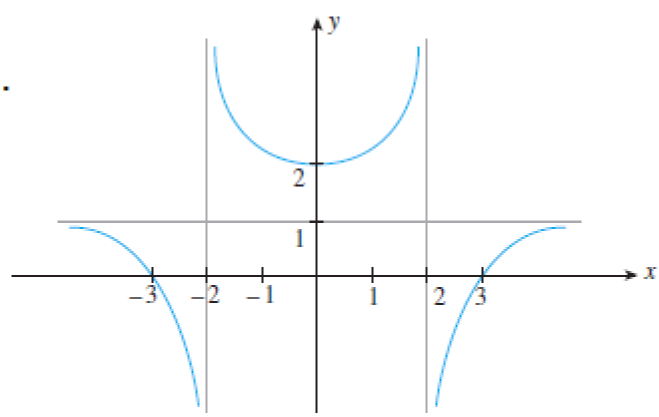

**29.**



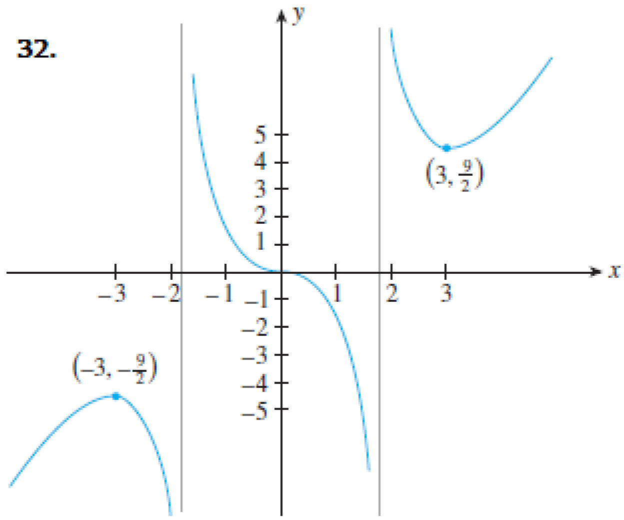

**30.**




**31.**



**32.**




**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი ასეთის არსებობის შემთხვევაში:**

**33.** $f(x)=x^2-4x$; **34.** $g(x)=x^2+3x+8$; **35.** $h(t)=t^2+6t+6$; **36.** $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+4$;

**37.** $f(x)=x^{5/3}$; **38.** $f(x)=x^{2/3}+2$; **39.** $g(x)=x^3-3x^2+4$; **40.** $f(x)=x^3-3x+6$;

**41.** $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$; **42.** $h(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+4x-8$; **43.** $F(x)=3t^5-20t^3+20$;

**44.** $f(x)=3x^4-2x^3+4$; **45.** $g(x)=\frac{x+1}{x}$; **46.** $g(x)=2x^2+\frac{4000}{x}+10$; **47.** $g(x)=x\sqrt{x-4}$.

**48.** აჩვენეთ, რომ $f(x)=x^3+x+1$ ფუნქციას არ გააჩნია ლოკალური ექსტრემუმი $(-\infty,\infty)$ ინტერვალში.

**49**. ვთქვათ, $f(x)=-x^2+ax+b$. განსაზღვრეთ $a$ და $b$ მუდმივები ისე, რომ $f$ ფუნქციას ჰქონდეს ლოკალური მაქსიმუმი $x=2$ წერტილში და ლოკალური მაქსიმუმის მნიშვნელობა იყოს 7.

**50.** ვთქვათ, $f(x)=ax^3+6x^2+bx+4$. განსაზღვრეთ $a$ და $b$ მუდმივები ისე, რომ $f$ ფუნქციას ჰქონდეს ლოკალური მინიმუმი $x=-1$ წერტილში და ლოკალური მაქსიმუმი $x=2$ წერტილში.

**51.** ვთქვათ, $f(x)=\begin{cases}-3x, & x<0\\ 2x+4, & x\ge 0\end{cases}$.

ა) გამოთვალეთ $f'(x)$ და აჩვენეთ, რომ იგი იცვლის ნიშანს უარყოფითიდან დადებითზე $x=0$ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს;

ბ) აჩვენეთ, რომ $f$ ფუნქციას არ აქვს ლოკალური მინიმუმი $x=0$ წერტილში. ეწინააღმდეგება თუ არა ეს შემთხვევა პირველი წარმოებულის ტესტს?

**52.** ვთქვათ, $f(x)=\begin{cases}-x^2+3, & x\ne 0\\ 2, & x=0\end{cases}$.

ა) გამოთვალეთ $f'(x)$ და აჩვენეთ, რომ იგი იცვლის ნიშანს დადებითიდან

უარყოფითზე $x = 0$ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს;

**ბ)** აჩვენეთ, რომ $f$ ფუნქციას არ აქვს ლოკალური მაქსიმუმი $x = 0$ წერტილში. ეწინააღმდეგება თუ არა ეს შემთხვევა პირველი წარმოებულის წესს?

**53.** ვთქვათ, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x > 0 \\ x^2, & x \le 0 \end{cases}$.

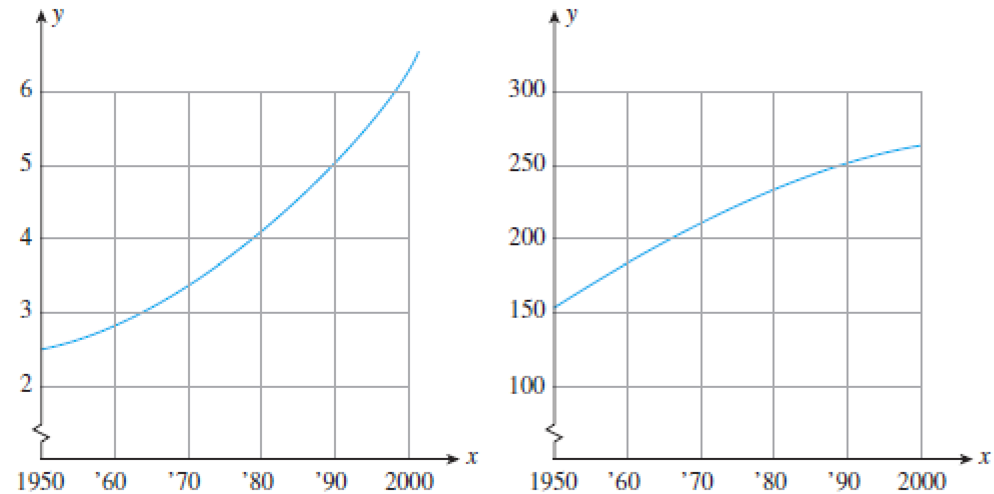
**ა)** გამოთვალეთ $f'(x)$ და აჩვენეთ, რომ იგი არ იცვლის ნიშანს $x = 0$ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს;

**ბ)** აჩვენეთ, რომ $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი $x = 0$ წერტილში. ეწინააღმდეგება თუ არა ეს შემთხვევა პირველი წარმოებულის წესს?

## მეცხრე ლექცია

### ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობა და ამოზნექილობა

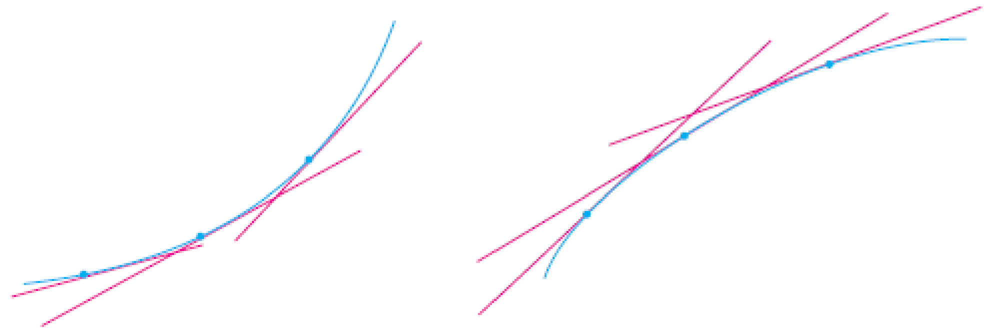
განვიხილოთ ქვემოთ 81-ე ნახაზზე მოცემული გრაფიკი, რომელიც ასახავს მსოფლიოს და ამერიკის შეერთებული შტატების მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილებას 2000 წლამდე.




**ა)** მსოფლიოს მოსახლეობა მილიარდებში **ბ)** აშშ მოსახლეობა მილიონებში

ნახაზი 81.

ორივე გრაფიკი ზრდადია და მიუთითებს, რომ 2000 წლამდე მოსახლეობა განაგრძობს ზრდას როგორც მსოფლიოში ასევე აშშ-ში. მაგრამ დავაკვირდეთ, რომ გრაფიკი 81ა ნახაზზე "ჩაღუნულია" (ამოზნექილია ქვემოთ), მაშინ როცა გრაფიკი 81ბ ნახაზზე "ამოღუნულია" (ამოზნექილია ზემოთ). რა მნიშვნელობა აქვს ამ ფაქტებს? ამ კითხვას რომ ვუპასუხოთ, ვნახოთ მხები წრფეების საკუთხო კოეფიციენტების მნიშვნელობები ამ გრაფიკების სხვადასხვა წერტილებში (ნახ. 82)



**ა)** მხების საკუთხო კოეფიციენტი ზრდადია

**ბ)** მხების საკუთხო კოეფიციენტი კლებადია

ნახაზი 82.

82ა ნახაზზე ვხედავთ, რომ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტის მნიშვნელობა იზრდება, როცა წერტილი მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ. რადგან მხები წრფის

საკუთხო კოეფიციენტი გრაფიკის წერტილში გვაძლევს ამ წერტილში ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს, დავასკვნით, რომ მსოფლიოს მოსახლეობა 2000 წლამდე არა მხოლოდ ზრდადი იყო, არამედ იზრდებოდა მზარდი ტემპით. ანალოგიური მსჯელობით 82ბ ნახაზიდან დავასკვნით, რომ აშშ მოსახლეობა იზრდებოდა, მაგრამ კლებადი ტემპით.

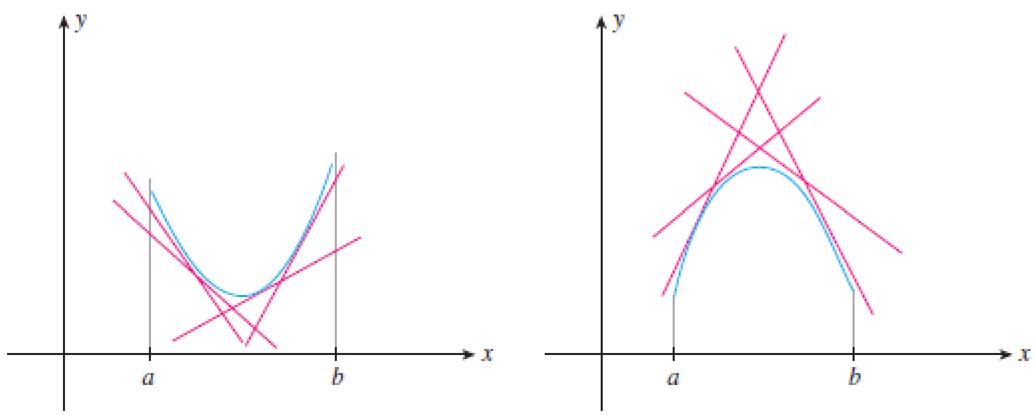
წირის ფორმა შეიძლება აღიწეროს ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ცნებებით.

***$f$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობა და ამოზნექილობა.***

*ვთქვათ, $f$ ფუნქცი წარმოებადია $(a,b)$ ინტერვალზე. მაშინ:*

1. *$f$ ფუნქციის გრაფიკი $(a,b)$ ინტერვალზე ამოზნექილია ქვემოთ ანუ ჩაზნექილია, თუ $f'$ ფუნქცია ზრდადია $(a,b)$ ინტერვალზე;*
2. *$f$ ფუნქციის გრაფიკის $(a,b)$ ინტერვალზე ამოზნექილია ზემოთ ანუ ამოზნექილია, თუ $f'$ ფუნქცია კლებადია $(a,b)$ ინტერვალზე.*

გეომეტრიულად წირი ჩაზნექილია, თუ ის მდებარეობს მისი მხები წრფის ზემოთ (ნახ. 83ა). ანალოგიურად, წირი ამოზნექილია, თუ ის მდებარეობს მისი მხები წრფის ქვემოთ (ნახ. 83ბ).




ა) $f$ ფუნქციის გრაფიკი $(a,b)$ ინტერვალზე ჩაზნექილია, ბ) $f$ ფუნქციის გრაფიკი $(a,b)$ ინტერვალზე ამოზნექილია.

ნახაზი 83.

ჩვენ აგრეთვე ვიტყვით, რომ $f$ არის ჩაზნექილი $c$ წერტილზე, თუ არსებობს $c$ წერტილის შემცველი ისეთი $(a,b)$ ინტერვალი, რომელზედაც $f$ არის ჩაზნექილი. ანალოგიურად, ვიტყვით, რომ $f$ არის ამოზნექილი $c$ წერტილზე, თუ არსებობს $c$ წერტილის შემცველი ისეთი $(a,b)$ ინტერვალი, რომელზედაც $f$ არის ამოზნექილი.

თუ $f$ ფუნქციას აქვს მეორე რიგის წარმოებული $f''$, მაშინ მისი გამოყენებით შეგვიძლია დავადგინოთ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები. გავიხსენოთ, რომ $f''(x)$ განსაზღვრავს ფუნქციის გრაფიკის $(x, f(x))$ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო $f'(x)$ კოეფიციენტის ცვლილებას. ამიტომ, თუ $(a,b)$ ინტერვალში $f''(x)>0$, მაშინ $f$ ფუნქციის გრაფიკის მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი იზრდება $(a,b)$ ინტერვალში, ამიტომ $f$ ჩაზნექილია $(a,b)$

ინტერვალში. ანალოგიურად, თუ $(a,b)$ ინტერვალში $f''(x)<0$, მაშინ $f$ ფუნქცია ამოზნექილია $(a,b)$ ინტერვალში. მართებულია შემდეგი თეორემა.

***თეორემა 2.***

1. ***თუ $x$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $(a,b)$ ინტერვალიდან $f''(x)>0$, მაშინ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია $(a,b)$ ინტერვალში;***
2. ***თუ $x$-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $(a,b)$ ინტერვალიდან $f''(x)<0$, მაშინ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია $(a,b)$ ინტერვალში.***

$f$ ფუნქციის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის შუალედების დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი წესი.

***$f$ ფუნქციის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის შუალედების განსაზღვრის წესი:***

1. ***ვიპოვოთ $x$-ის მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც $f''$ ნულის ტოლია ან არ არის განსაზღვრული და ამოვწეროთ ამ რიცხვებით განსაზღვრული ღია ინტერვალები;***
2. ***ვიპოვოთ $f''$ ნიშნები თითოეულ ინტერვალში, რომლებიც პირველ პუნქტში განვსაზღვრეთ. ამისათვის გამოვითვალოთ $f''(c)$, სადაც $c$ არის ინტერვალის შიგნით არჩეული რაიმე რიცხვი:***
   ***ა) თუ $f''(c)>0$, მაშინ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია ამ ინტერვალში;***
   ***ბ) თუ $f''(c)<0$, მაშინ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია ამ ინტერვალში.***

**მაგალითი 1.** ვიპოვოთ $f(x)=x^3-3x^2-24x+32$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის შუალედები.

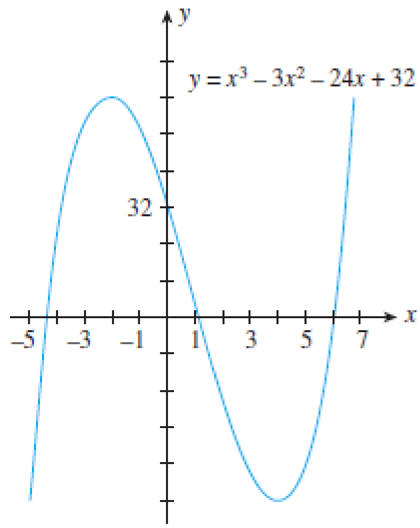
**ამოხსნა:** გვაქვს

$$f'(x)=3x^2-6x-24, \qquad f''(x)=6x-6=6(x-1).$$

ცხადია, $f''$ განსაზღვრულია ყველგან. $f''(x)=0$ პირობიდან მივიღებთ $x=1$. $f''$ ფუნციის ნიშნები მოცემულია მე-84 დიაგრამაზე.


ნახაზი 84. $f''$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა.

აქედან დავასკვნით, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია $(-\infty,1)$ ინტერვალში და ჩაზნექილია $(1,\infty)$ ინტერვალში, რაც 85-ე ნახაზიდან ჩანს



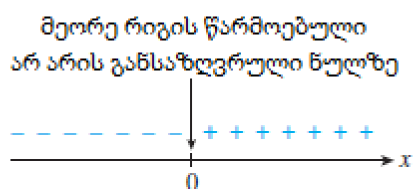

ნახაზი 85.

**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები.

**ამოხსნა:** გვაქვს

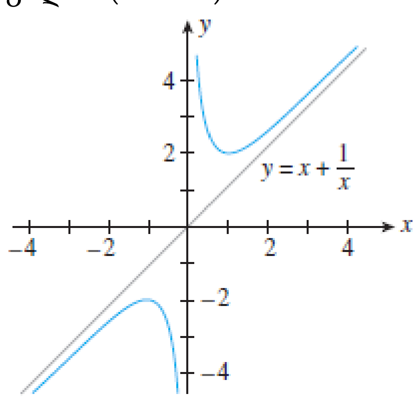
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

$f''$ ფუნქციის ნიშნებისთვის გვქვს შემდეგი დიაგრამა (ნახ. 86)




ნახაზი 86.

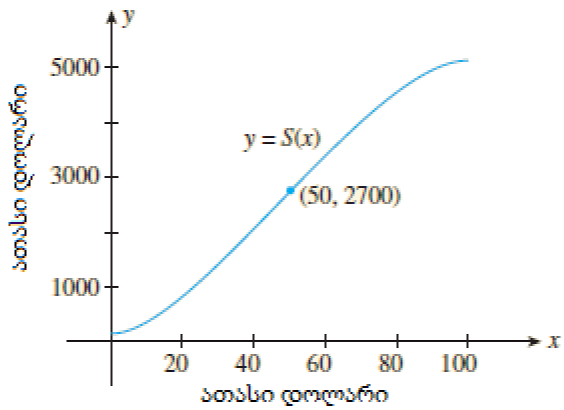
საიდანაც დავასკვნით, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია $(-\infty, 0)$ ინტერვალში და ჩაზნექილია $(0, \infty)$ ინტერვალში (ნახ. 87).




ნახაზი 87. გრაფიკი ამოზნექილია $(-\infty, 0)$ ინტერვალში და ჩაზნექილია $(0, \infty)$ ინტერვალში.

## გადაღუნვის წერტილი

88-ე ნახაზზე გრაფიკი გვიჩვენებს ავტომობილების ჰაერის კონდიციონერების საწარმოს მთლიანი $S$ ამონაგების დამოკიდებულებას პროდუქციის რეკლამირებაზე დახარჯულ $x$ თანხასთან.



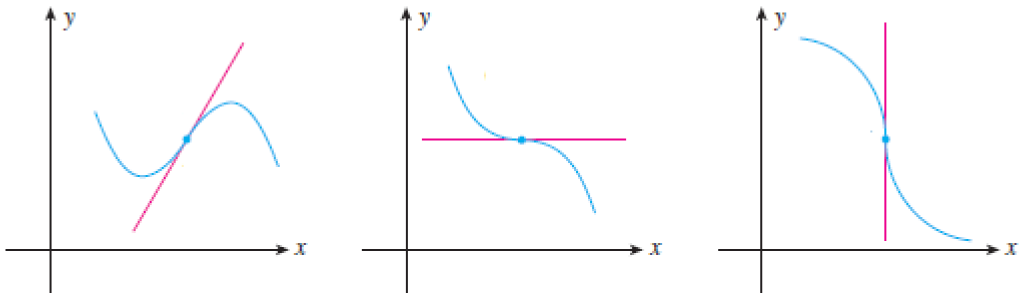

ნახაზი 88. $S(x)$ ფუნქციას (50,2700) წერტილში აქვს გადაღუნვის წერტილი.

შევნიშნოთ, რომ (50,2700) წერტილში უწყვეტი $y = S(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობა იცვლება ამოზნექილობით. ამ წერტილს ეწოდება $S$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი. რომ გავიგოთ ამ წერტილის მნიშვნელობა შევნიშნოთ, რომ მთლიანი ამონაგები პირველად იზრდება საკმაოდ ნელა, მაგრამ რაც უფრო მეტი ფულია დახარჯული რეკლამაზე, მით უფრო სწრაფად იზრდება მთლიანი ამონაგები. ეს სწრაფი ზრდა ასახავს საწარმოს რეკლამის ეფექტურობას. თუმცა მალე მიიღწევა იმ წერტილამდე, რომლის შემდეგ გაყიდვების გაზრდა ნელა ხდება რეკლამაზე ნებისმიერი დამატებითი ხარჯის მიუხედავად. ეს წერტილი, რომელიც ზოგადად ცნობილია როგორც *ამონაგების შემცირების წერტილი,* არის $S$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი. ჩვენ მოგვიანებით დავუბრუნდებით ამ მაგალითს.

ახლა ფორმალურად განვმარტოთ გადაღუნვის წერილი.

უწყვეტი $f$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილს, რომელშიც არსებობს მხები წრფე და რომელშიც ჩაზნექილობა იცვლება ამოზნექილობით ან პირიქით, ***გადაღუნვის წერტილი ეწოდება.***

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის გრაფიკი გადაღუნვის წერტილში გავლებული მხები წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს (ნახ. 89)



ნახაზი 89.

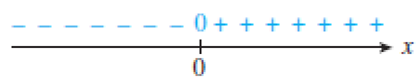
***გადაღუნვის წერტილის მოძებნის წესი:***

1. ***გამოვთვალოთ*** $f''(x)$***;***
2. $f$ ***ფუნქციის განსაზღვრის არეში მოვძებნოთ წერტილები, სადაც*** $f''(x)=0$ ***ან მეორე რიგის წარმოებული არ არსებობს;***
3. ***ვიპოვოთ*** $f''$ ***ფუნქციის ნიშნები მეორე პუნქტში მოძებნილი თითოეული*** $c$ ***რიცხვის მარცხნივ და მარჯვნივ. თუ*** $f''(x)$ ***იცვლის ნიშანს*** $c$ ***წერტილზე გადასვლის დროს, მაშინ*** $(c, f(c))$ ***წერტილი არის*** $f$ ***ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი.***

შევნიშნოთ, რომ ამ წესის მეორე პუნქტით განსაზღვრულ წერტილებში შესაძლებელია ფუნქციის გრაფიკს არ ჰქონდეს გადაღუნვის წერტილი. მაგალითად, ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ $f''(0)=0$, თუ $f(x)=x^4$. მაგრამ ამ ფუნქციის გრაფიკი გვიჩვენებს, რომ (0,0) წერტილი არ არის $f$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი.

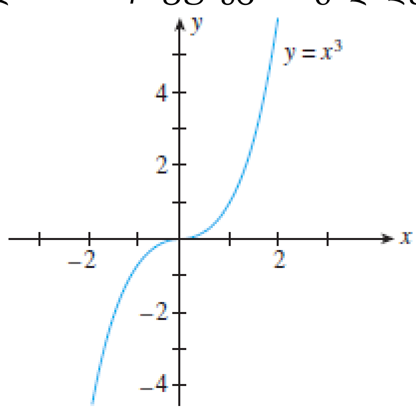
**მაგალითი 3.** ვიპოვოთ $f(x)=x^3$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი.

**ამოხსნა:** გვაქვს $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$. შევნიშნოთ, რომ $f''$ ყველგან უწყვეტი ფუნქციაა და ნული ხდება $x=0$ წერტილში. $f''$-ის ნიშნები მოცემულია 90-ე ნახაზზე.




ნახაზი 90.

დიაგრამიდან ვხედავთ, რომ $f''(x)$ იცვლის ნიშანს $x=0$ წერტილში გადასვლის დროს. ამრიგად (0,0) წერტილი არის $f$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი (ნახ. 91)




ნახაზი 91. $f$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია (0,0).

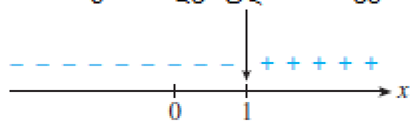
**მაგალითი 4.** ვიპოვოთ $f(x)=(x-1)^{5/3}$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები და გადაღუნვის წერტილი.

**ამოხსნა:** ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებია

$$f'(x)=\frac{5}{3}(x-1)^{2/3},$$

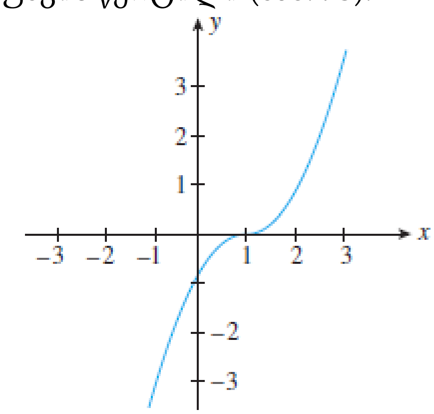
$$f''(x)=\frac{10}{9}(x-1)^{-1/3}=\frac{10}{9(x-1)^{1/3}}.$$

ვხედავთ, რომ $f''$ არ არის განსაზღვრული $x=1$ წერტილში. გარდა ამისა, $f''$ არსად არის ნულის ტოლი. $f''$-ის ნიშნების დიაგრამა მოცემულია 92-ე ნახაზზე.




ნახაზი 92. $f''$-ის ნიშნების დიაგრამა.

ამ დიაგრამიდან ჩანს, რომ $f$ ფუნქცია ამოზნექილია $(-\infty,1)$ ინტერვალში და ჩაზნექილია $(1,\infty)$ ინტერვალში. რადგან $x=1$ ეკუთვნის $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ამიტომ ამ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლით დავადგენთ, რომ წერტილი (1,0) არის გადაღუნვის წერტილი (ნახ. 93).



ნახაზი 93. $f$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია (1,0).

**მაგალითი 5.** ვიპოვოთ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები და გადაღუნვის წერტილი.

**ამოხსნა:** ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულია

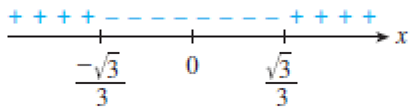
$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^2+1)^{-1}=-2x(x^2+1)^{-2}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

შეფარდების გაწარმოების წესის მიხედვით

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(-2)+(2x)2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}=$$

$$\frac{(x^2+1)[-2(x^2+1)+8x]}{(x^2+1)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}.$$

შევნიშნოთ, რომ $f''$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან და ნულის ტოლია, როცა $3x^2 - 1 = 0$, $x = \pm\sqrt{3}/3$. $f''$-ის ნიშნების დიაგრამა მოცემულია 94-ე ნახაზზე.

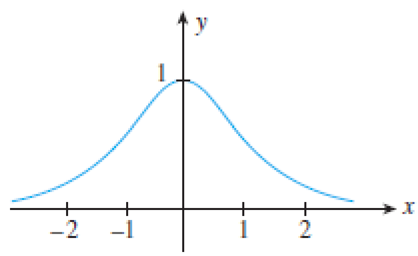



ნახაზი 94. $f''$-ის ნიშნების დიაგრამა.

ამ დიაგრამიდან ჩანს, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, \infty)$ ინტერვალში და ამოზნექილია $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ ინტერვალში. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $f''(x)$ იცვლის ნიშანს $x = -\sqrt{3}/3$ და $x = \sqrt{3}/3$ წერტილებზე გადასვლის დროს. რადგან

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4} \qquad \text{და} \qquad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

ვხედავთ, რომ $(-\sqrt{3}/3, 3/4)$ და $(\sqrt{3}/3, 3/4)$ არის $f$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილები (ნახ. 95)




ნახაზი 95. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ ფუნქციის გრაფიკი.

**მაგალითი 6.** ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი შემდეგი მონაცემების მიხედვით:

$$f(-1) = 4, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0, \quad f'(-1) = 0, \quad f'(1) = 0,$$

$$f'(x) > 0, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

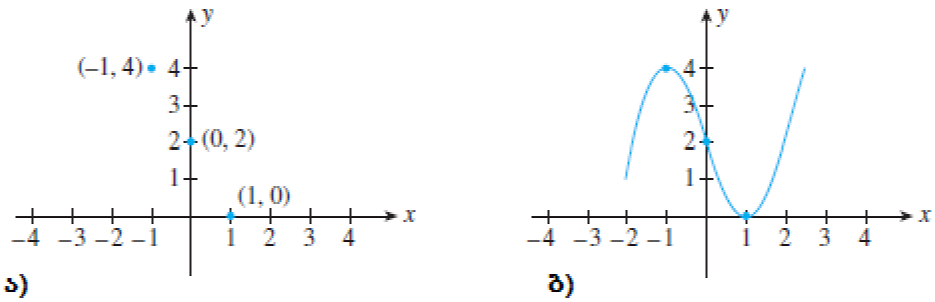
$$f'(x) < 0, \quad x \in (-1, 1)$$

$$f''(x) < 0, \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$f''(x) > 0, \quad x \in (0, \infty)$$

**ამოხსნა:** პირველ რიგში ვიპოვოთ წერტილები (-1,4), (0,2) და (1,0 ), რომლებიც $f$ ფუნქციის გრაფიკზე ძევს. რადგან $f'(-1) = 0$ და $f'(1) = 0$, ამიტომ (-1,4) და (1,0) წერტილებში მხები წრფე იქნება ჰორიზონტალური. რადგან $(-\infty, -1)$ ინტერვალზე $f'(x) > 0$ და $(-1,1)$ ინტერვალზე $f'(x) < 0$, ამიტომ $f$ ფუნქციას ექნება ლოკალური მაქსიმუმი (-1,4) წერტილზე. ასევე, რადგან $(-1,1)$ ინტერვალზე $f'(x) < 0$ და $(1, \infty)$ ინტერვალზე $f'(x) > 0$, ამიტომ $f$ ფუნქციას ექნება ლოკალური მინიმუმი (1,0) წერტილზე (ნახ. 96ა).

რადგან $(-\infty,0)$ ინტერვალზე $f''(x)<0$ და $(0,\infty)$ ინტერვალზე $f''(x)>0$, ამიტომ წერტილი $(0,2)$ არის გადაღუნვის წერტილი. ამავე დროს $f$ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ ინტერვალზე, რადგან $f'(x)>0$ ამ ინტერვალზე და კლებადია $(-1,1)$ ინტერვალზე, რადგან $f'(x)<0$. ასევე შევნიშნოთ, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია $(-\infty,0)$ ინტერვალზე და ჩაზნექილია $(0,\infty)$ ინტერვალზე. ყველა ამ ფაქტების გათვალისწინებით შეგვიძლია მიახლოებით ავაგოთ გრაფიკი, რომელიც გამოსახულია 96ბ ნახაზზე.




ნახაზი 96.

### ფუნქციის ექსტრემუმის დადგენა მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენებით

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენებით შეგვიძლია დავადგინოთ აქვს თუ არა ფუნქციას კრიტიკულ წერტილში ლოკალური ექსტრემუმი. 91ა ნახაზზე მოცემულია ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც აქვს ლოკალური მაქსიმუმი $x=c$ წერტილში. შევნიშნოთ, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია ამ წერტილზე. ანალოგიურად, 91ბ ნახაზზე ჩანს, რომ $f$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილში გრაფიკი არის ჩაზნექილი. მაგრამ ჩვენ უკვე ვიცით, რომ $f$ ჩაზნექილია $x=c$ წერტილში, თუ $f''(c)>0$ და ამოზნექილია $x=c$ წერტილში, თუ $f''(c)<0$. ეს შენიშვნა გვაძლევს $f$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის დადგენის შემდეგ ალტერნატიულ წესს, რომელსაც ***მეორე წარმოებულის წესი*** ეწოდება.

***ლოკალური ექსტრემუმის დადგენის მეორე წარმოებულის წესი:***

1. ***გამოვთვალოთ*** $f'(x)$ ***და*** $f''(x)$***;***
2. ***ვიპოვოთ ყველა კრიტიკული წერტილი, რომელშიც*** $f'(x)=0$.
3. ***გამოვთვალოთ*** $f''(c)$ ***თითოეულ ასეთ კრიტიკულ წერილში:***
   ***ა) თუ*** $f''(c)<0$***, მაშინ*** $f$ ***ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი*** $x=c$ ***წერტილში;***
   ***ბ) თუ*** $f''(c)>0$, ***მაშინ*** $f$ ***ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი*** $x=c$ ***წერტილში;***
   ***გ) თუ*** $f''(c)=0$***, მაშინ წესი ვერ ადგენს*** $f$ ***ფუნქციას აქვს თუ არა ლოკალური ექსტრემუმი*** $x=c$ ***წერტილში.***

შევნიშნოთ, რომ მეორე წარმოებულის წესი ვერ იძლევა დასკვნას, როცა $f''(c)=0$ ან $f''(c)$ არ არსებობს. ამ დროს $x=c$ წერტილში შეიძლება გვქონდეს ლოკალური ექსტრემუმი ან გადაღუნვის წერტილი. ასეთ შემთხვევაში უნდა ვისარგებლოთ პირველი წარმოებულის წესით.

**მაგალითი 7.** მეორე წარმოებულის წესის გამოყენებით ვიპოვოთ $f(x)=x^3-3x^2-24x+32$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი.

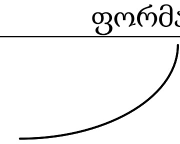
**ამოხსნა:** გვაქვს

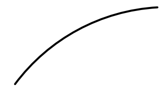
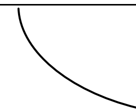
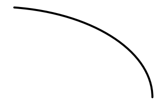
$$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4).$$

ამიტომ $f'(x)=0$ განტოლებიდან მივიღებთ $f$ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს $x=-2$ და $x=4$. ახლა გამოვითვალოთ $f''(x)=6x-6=6(x-1)$. რადგან $f''(-2)=6(-2-1)=-18<0$, ამიტომ მეორე წარმოებულის წესის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $f(-2)=60$ არის $f$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი. რადგან $f''(4)=6(4-1)=18>0$, ამიტომ კვლავ მეორე წარმოებულის წესით დავასკვნით, რომ $f(4)=-48$ არის $f$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი.

შევნიშნოთ, რომ როგორც პირველი წარმოებულის, ასევე მეორე წარმოებულის წესები გამოიყენება კრიტიკული წერტილების კლასიფიცირებისათვის. რა არის ამ ორი წესის დადებითი და უარყოფითი მხარეები? რადგან მეორე წარმოებულის წესი გამოიყენება მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $f''$, ამიტომ იგი ნაკლებად უნივერსალურია პირველ წარმოებლის წესთან შედარებით. მაგალითად, იგი არ შეიძლება იყოს გამოყენებული $f(x)=x^{2/3}$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის მოსაძებნად. გარდა ამისა, მეორე წარმოებულის წესი ვერ გვაძლევს დაზუსტებულ პასუხს, როცა $f''$ ნულის ტოლია კრიტიკულ წერტილში, მაშინ როდესაც პირველი წარმოებულის წესი ყოველთვის გვაძლევს შესაბამის დასკვნას. მეორე წარმოებულის წესი აგრეთვე მოუხერხებელია, როცა რთულია $f''$ ფუნქციის გამოთვლა. ერთი დადებითი მხარე არის ის, რომ, როცა ადვილად ითვლება $f''$, მაშინ მეორე წარმოებულის წესის გამოყენება სჯობია. ასევე კარგია მეორე წარმოებულის წესის გამოყენება თეორიულ მსჯელობაში.

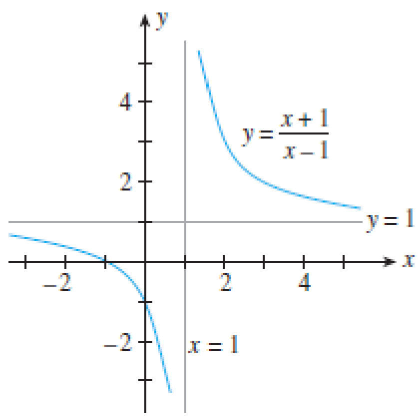
შევაჯამოთ პირველი და მეორე წარმოებულების როლი $f$ ფუნქციის გრაფიკის თვისებების დადგენისას. პირველი წარმოებული გვიჩვენებს სად არის ფუნქცია ზრდადი ან კლებადი, მაშინ როცა მეორე მეორე წარმოებული გვიჩვენებს სად არის ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილი ან ამოზნექილი. $f$ ფუნქციის ეს განსხვავებული თვისებები დამოკიდებულია $f'$ და $f''$ ნიშნებზე ჩვენთვის საინტერესო ინტერვალში. ქვემოთ მოტანილ ცხრილში მოცემულია $f$ ფუნქციის ზოგადი დახსიათება $(a,b)$ ინტერვალში $f'$ და $f''$ ნიშნების სხვადასხვა კომბინაციისათვის.

| $f'$ და $f''$ ნიშნები | $f$ ფუნქციის გრაფიკის თვისებები | $f$ ფუნქციის გრაფიკის ზოგადი ფორმა |
|---|---|---|
| $f'(x)>0$<br>$f''(x)>0$ | $f$ ზრდადია<br>$f$ ჩაზნექილია |  |

| | | |
|---|---|---|
| $f'(x)>0$<br>$f''(x)<0$ | $f$ ზრდადია<br>$f$ ამოზნექილია |  |
| $f'(x)<0$<br>$f''(x)>0$ | $f$ კლებადია<br>$f$ ჩაზნექილია |  |
| $f'(x)<0$<br>$f''(x)<0$ | $f$ კლებადია<br>$f$ ამოზნექილია |  |

## ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტები

განვიხილოთ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 97)




ნახაზი 97. ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტია $x=1$ წრფე.

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ შემოუსაზღვრელად იზრდება (მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ), როცა $x$ უახლოვდება 1-ს მარჯვნიდან ე.ი.

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x+1}{x-1}=\infty .$$

ეს შეგვიძლია შევამოწმოთ, თუ ავიღებთ $x$-ის მნიშვნელობების მიმდევრობას, რომელიც უახლოვდება $x=1$ რიცხვს მარჯვნიდან და დავაკვირდებით $f(x)$ შესაბამის მნიშვნელობებს. იგივე შეგვიძლია დავადგინოთ სხვა გზითაც: შევნიშნოთ, რომ თუ $x$ მცირედით აღემატება ერთს, მაშინ $(x+1)$ და $(x-1)$ მამრავლები ორივე დადებითია, ამიტომ მათი შეფარდება $(x+1)/(x-1)$ დადებითია. როცა $x$ უახლოვდება $x=1$ რიცხვს მარჯვნიდან, მაშინ $(x+1)$ უახლოვდება 2, ხოლო $(x-1)$ უახლოვდება ნულს, ამიტომ შეფარდება $(x+1)/(x-1)$ შემოუსაზრვრელია. $x=1$ წრფეს ეწოდება $f$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი. ამ ფუნქციისათვის შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x+1}{x-1}=-\infty$$

და დავასკვნათ, რომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი უახლოვდება $x=1$ წერტილში გავლებულ ვერტიკალურ ასიმპტოტს მარცხნიდან. უფრო ზოგადად, გვაქვს შემდეგი განმარტება.

***ვერტიკალური ასიმპტოტი.***

$x=a$ ***წრფეს ეწოდება*** $f$ ***ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი, თუ***

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\infty \qquad \textbf{\textit{ან}} \qquad \lim_{x\to a+} f(x)=-\infty$$

***ან***

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\infty \qquad \textbf{\textit{ან}} \qquad \lim_{x\to a-} f(x)=-\infty\,.$$

**შენიშვნა.** ვერტიკალური ასიმპტოტი არ წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკის ნაწილს, მაგრამ იგი გვეხმარებს ფუნქციის გრაფიკის აგებაში.

### რაციონალური ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტების მოძებნა

***დაუშვათ,*** $f$ ***არის რაციონალური ფუნქცია***

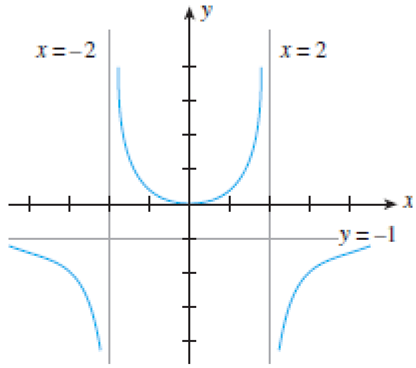
$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

***სადაც*** $P$ ***და*** $Q$ ***პოლინომური ფუნქციებია. მაშინ*** $x=a$ ***წრფე იქნება*** $f$ ***ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი, თუ*** $Q(a)=0$ ***და*** $P(a)\neq 0$ ***.***

ზემოთ განხილულ $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ფუნქციაში $P(x)=x+1$ და $Q(x)=x-1$. შევნიშნოთ, რომ $Q(1)=0$ და $P(1)=2\neq 0$, ამიტომ $x=1$ არის $f$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

**მაგალითი 8.** ვიპოვოთ $f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტები.

**ამოხსნა:** $f$ რაციონალური ფუნქციაა, რომლის მრიცხველია $P(x)=x^2$, ხოლო მნიშვნელია $Q(x)=4-x^2$. $Q$ ფუნქციის ნულები უნდა მოვძებნოთ განტოლებიდან $4-x^2=0$ ანუ $(2-x)(2+x)=0$, რომელიც გვაძლევს ფესვებს $x=-2$ და $x=2$. რადგან $P(-2)=4\neq 0$ და $P(2)=4\neq 0$, ამიტომ $x=-2$ და $x=2$ წრფეები ვერტიკალური ასიმპტოტებია (ნახ.98 )

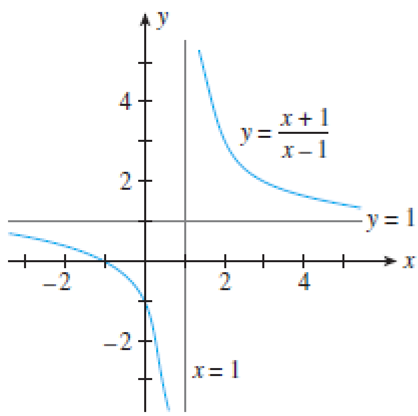



ნახაზი 98. $x=-2$ და $x=2$ წრფეები ვერტიკალური ასიმპტოტებია.

შევნიშნოთ, რომ როცა $f$ რაციონალური ფუნქციაში $Q(a)=0$ და $P(a)=0$, მაშინ $x=a$ არ იქნება ვერტიკალური ასიმპტოტი.

## ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტები

კვლავ განვიხილოთ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ ფუნქცია (ნახ. 99)




ნახაზი 99. $f$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y=1$ წრფე.

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ უახლოვდება ჰორიზონტალურ $y=1$ წრფეს, როცა $x$ მიისწრაფვის პლიუს უსასრულობისკენ. ასევე $f(x)$ უახლოვდება $y=1$ წრფეს, როცა $x$ მიისწრაფვის მინუს უსასრულობისკენ. $y=1$ წრფეს ეწოდება $f$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი. უფრო ზოგადად, გვაქვს შემდეგი განმარტება.

***ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.***

$y=b$ ***წრფეს ეწოდება*** $f$ ***ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი, თუ***

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \qquad \textbf{\textit{ან}} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

ვხედავთ, რომ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ ფუნქციისათვის

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1.$$

ასევე

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$$

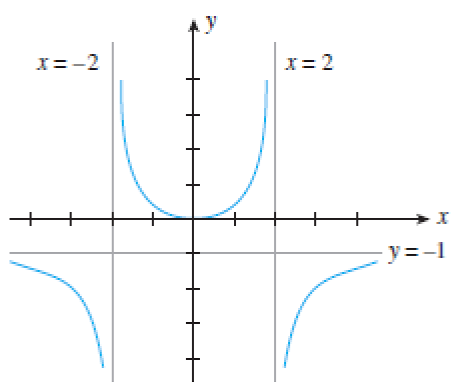
აქედან დავასკვნით, რომ $y=1$ წრფე არის $f$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი, როგორც ზემოთ დავადგინეთ.

**მაგალითი 9.** ვიპოვოთ $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტები.

**ამოხსნა:** რადგან

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{x^2}-1}=-1$$

ამიტომ $y=-1$ წრფე არის ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. ამ ფუნქციის გრაფიკი აგებულია 100-ე ნახაზზე.




ნახაზი 100. $y=-1$ წრფე არის ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.

შევნიშნოთ, რომ $P(x)$ პოლინომს არ გააჩნია ვერტიკალური ასიმპტოტი. ამ ფაქტს ადვილად შევამოწმებთ, თუ მას წარმოვადგენთ როგორც რაციონალურ ფუნქციას ერთის ტოლი მნიშვნელით

$$P(x)=\frac{P(x)}{1}.$$

რადგან მნიშვნელი არსად არ ხდება ნულის ტოლი, შესაბამისად $P(x)$ პოლინომს არ გააჩნია ვერტიკალური ასიმპტოტი. ასევე, თუ $P$ არის პოლინომი , რომლის ხარისხი ერთზე მეტია ან ტოლია, მაშინ $\lim_{x\to\infty} P(x)$ და $\lim_{x\to-\infty} P(x)$ იქნება დადებითი უსასრულობა ან უარყოფითი უსასრულობა და შესაბამისად პოლინომს არ ექნება ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.

ამრიგად, ჩვენ ვნახეთ, თუ როგორ გამოიყენება პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები ფუნქციის გრაფიკის თვისებების დასადგენად. ახლა ვნახოთ, თუ როგორ შეიძლება ამ თვისებების გამოყენებით ფუნქციის გრაფიკის აგება. ჩამოვაყალიბოთ ***გრაფიკის აგების ზოგადი სქემა.***

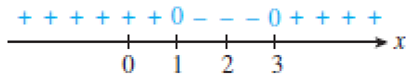
1. ***ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არე;***
2. ***ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები;***
3. ***დავადგინოთ $f$ ფუნქციის ყოფაქცევა $|x|$-ის საკმარისად დიდი მნიშვნელობებისათვის;***
4. ***ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ასიმპტოტები;***
5. ***ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები;***
6. ***ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი;***
7. ***ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები;***
8. ***ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები;***
9. ***მოპოვებული ინფორმაცია გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და ავაგოთ გრაფიკი.***

**მაგალითი 10.** ავაგოთ $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ ფუნქციის გრაფიკი.

**ამოხსნა:** გამოვიკვლიოთ $f$ ფუნქცია ზემოთ მითითებული სქემის მიხედვით:

1. $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty,\infty)$ ინტერვალი;
2. თუ $x=0$, მივიღებთ $y=2$, რაც გვაძლევს $y$ ღერძთან გდაკვეთის წერტილს. $x$ ღერძთან გადაკვეთის წერტილის მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ განტოლება $y=0$, რაც მიგვიყვანს კუბურ განტოლებამდე. რადგან მისი ამონახსნის მოძებნა ადვილი არ არის, ამიტომ არ გამოვიყენებთ ამ ინფორმაციას;
3. რადგან
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 2) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 2) = \infty,$$
ამიტომ დავასკვნით, რომ $f$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელად კლებულობს, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად კლებულობს და $f$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელად იზრდება, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად იზრდება;
4. რადგან $f$ ფუნქცია პოლინომია, ამიტომ ვერტიკალური ასიმპტოტები არ გააჩნია;

5. გამოვთვალოთ წარმოებული: $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-3)(x-1)$. და ამოვხსნათ განტოლება $f'(x)=0$. მივიღებთ $x=1$ ან $x=3$. $f'$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა (ნახ. 101) გვიჩვენებს,

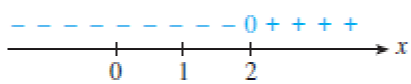



ნახაზი 101. $f'$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა.

რომ $f$ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty,1)$ და $(3,\infty)$ ინტერვალებზე;

6. მე-5 პუნქტის შედეგების მიხედვით დავადგენთ, რომ $f$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილებია $x=1$ და $x=3$. მეორეს მხრივ, $f'$ იცვლის ნიშანს დადებითიდან უარყოფითზე $x=1$ წერტილზე გადასვლის დროს, ამიტომ ამ წერტილში $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი: $f(1)=1-6+9+2=6$. ანალოგიურად დავადგენთ, რომ $x=3$ წერტილზე $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი: $f(3)=3^3-6(3^2)+9(3)+2=2$. მაშასადამე, $f(1)=6$ არის ლოკალური მაქსიმუმი და $f(3)=2$ არის ლოკალური მინიმუმი;

7. გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული: $f''(x)=6x-12=6(x-2)$. იგი ნულის ტოლია როცა $x=2$. $f''$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა (ნახ. 102) გვიჩვენებს,

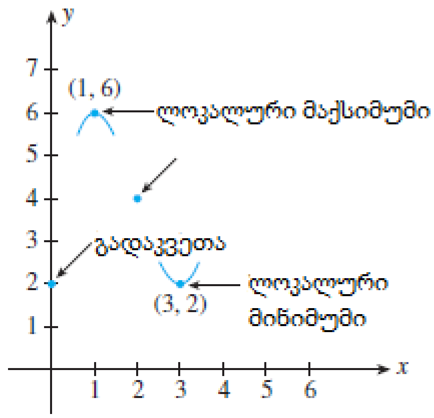



ნახაზი 102. $f''$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა.

რომ $f$ ფუნქციიის გრაფიკი ამოზნექილია $(-\infty,2)$ ინტერვალზე და ჩაზნექილია $(2,\infty)$ ინტერვალზე;

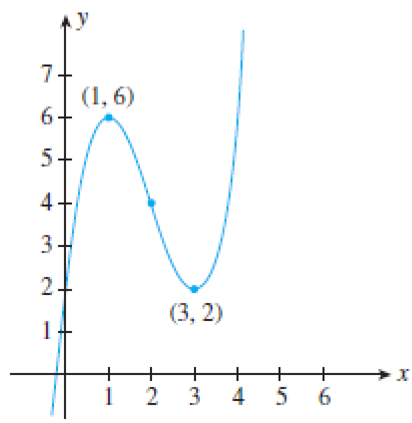
8. მე-7 პუნქტის შედეგებით ვხედავთ, რომ $f''$ ფუნქცია იცვლის ნიშანს $x=2$ წერტილზე გადასვლის დროს. რადგან $f(2)=2^3-6(2^2)+9(2)+2=4$, ამიტომ $f$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი იქნება $(2,4)$.

გადავიტანოთ მოპოვებული ინფორმაცია საკოორდინატო სიბრტყეზე. ზოგადად, კარგი იქნება, თუ პირველ რიგში საკოორდინატო სიბრტყეზე მოვნიშნავთ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებს, ლოკალურ ექსტრემუმებს და გადაღუნვის წერტილებს (ნახ. 103 ).




ნახაზი 103.

შემდეგ დანარჩენი ინფორმაციის გამოყენებით დავასრულოთ ფუნქციის გრაფიკის აგება (ნახ. 104).




ნახაზი 104. $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ ფუნქციის გრაფიკი.

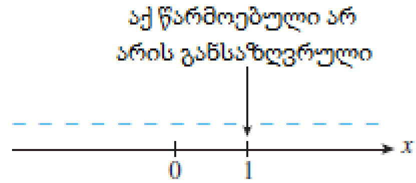
**მაგალითი 11.** ავაგოთ $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკი.

**ამოხსნა:** გამოვიკვლიოთ $f$ ფუნქცია ზემოთ მითითებული სქემის მიხედვით:

1. $f$ ფუნქცია არ არის განსაზღვრული $x=1$ წერტილზე. ამიტომ $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე $x=1$ წერტილის გარდა;
2. თუ დაუშვებთ $y=0$, მივიღებთ $x=-1$. თუ დაუშვებთ $x=0$, მივიღებთ $y=-1$;
3. გვაქვს $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$ და $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$. შესაბამისად დავასკვნით, რომ $f(x)$ უახლოვდება $y=1$ წრფეს, როდესაც $|x|$ ხდება ნებისმიერად დიდი. რადგან $f(x)>1$, როცა $x>1$, ამიტომ $f(x)$ უახლოვდება $y=1$ წრფეს ზემოდან, როცა $x$ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. ხოლო რადგან $f(x)<1$, როცა $x<-1$, ვასკვნით, რომ $f(x)$ უახლოვდება $y=1$ წრფეს ქვემოდან, როცა $x$ მიისწრაფვის მინუს უსასრულობისაკენ. ;

4. $x=1$ წრფე არის $f$ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი. აგრეთვე, მე-3 პუნქტის შედეგების მიხედვით დავადგენთ, რომ $y=1$ წრფე არის $f$ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი;

5. $f'(x)=\dfrac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$ და იგი წყვეტილია $x=1$ წერტილში. $f'$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა (ნახ. 105) გვიჩვენებს, რომ $f'(x)<0$ ყველგან

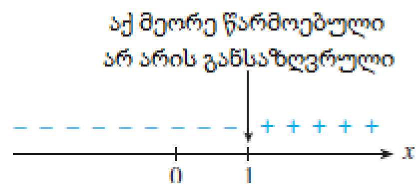



ნახაზი 105. $f'$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა.

სადაც განსაზღვრულია. ამიტომ $f$ ფუნქცია კლებადია $(-\infty,1)$ და $(1,\infty)$ ინტერვალებში.

6. მე-5 პუნქტში მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ $f$ ფუნქციას არ აქვს კრიტიკული წერტილები, რადგან $f'$ განსაზღვრის არეში არსად არ ხდება ნულის ტოლი;

7. $f''(x)=\dfrac{d}{dx}[-2(x-1)^{-2}]=4(x-1)^{-3}=\dfrac{4}{(x-1)^3}$. $f''$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა (ნახ. 106) გვიჩვენებს, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია $(-\infty,1)$ ინტერვალზე და

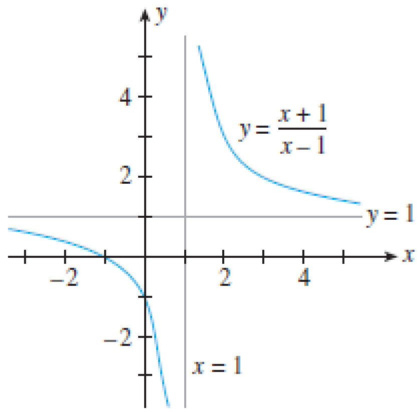



ნახაზი 106. $f''$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა.

ჩაზნექილია $(1,\infty)$ ინტერვალზე;

8. მე-7 პუნქტში მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკს არ გააჩნია გადაღუნვის წერტილი, რადგან $f''$ განსაზღვრის არეში არსად არ ხდება ნულის ტოლი;

ამ შედეგების გათვალისწინებით გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 107 )

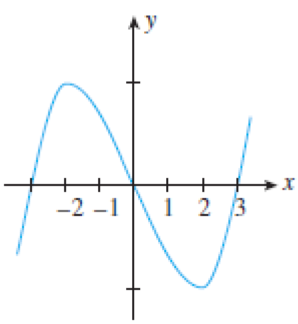



ნახაზი 107. ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y = 1$ წრფე.
ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 1$ წრფე.

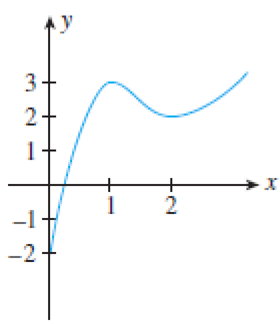
## სავარჯიშო

**მოცემულია ფუნქციათა გრაფიკები. იპოვეთ ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები:**

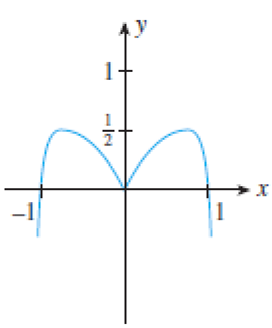
**1.**



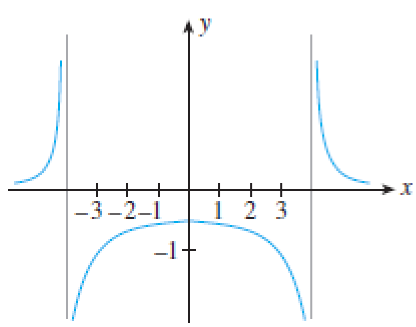
**2.**



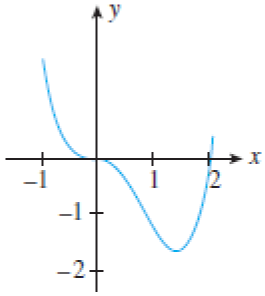
**3.**



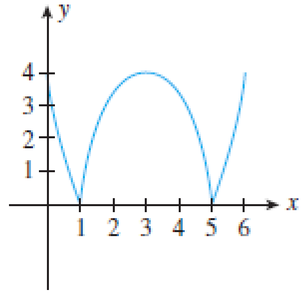
**4.**



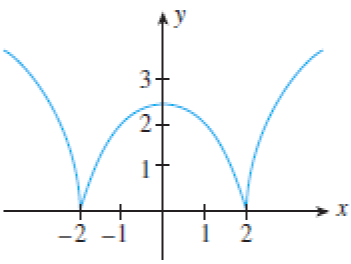
**5.**



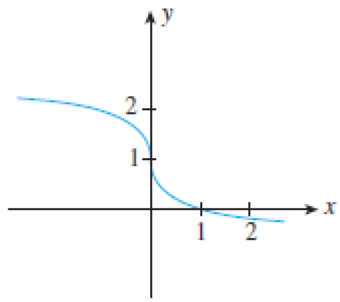
**6.**



**7.**



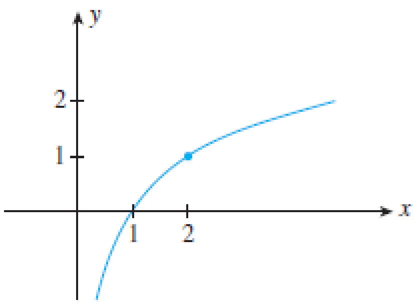
**8.**



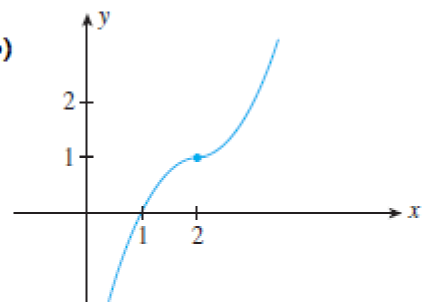
ა), ბ) და გ) გრაფიკებიდან რომელია $f$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

**9.** $f(2)=1$, $f'(2)>0$ და $f''(2)<0$

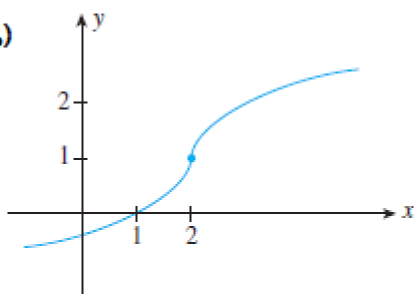
**ა)**



**ბ)**

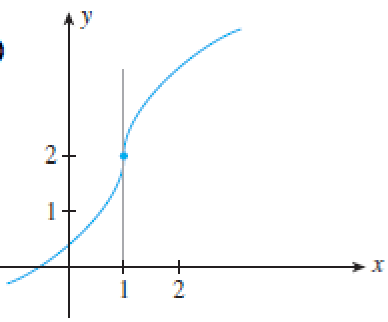


**გ)**

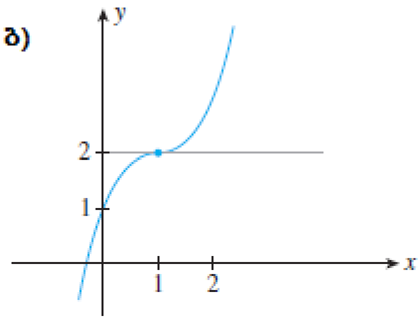


**10.** $f(1)=2,\quad f'(x)>0,\quad (-\infty,1)\cup(1,\infty)$ და $f''(1)=0$

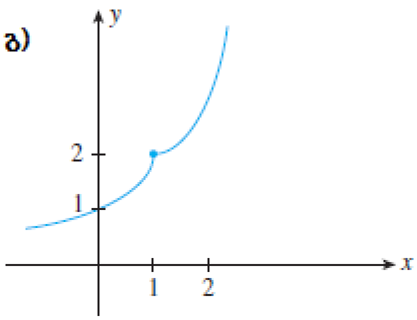
ა)



ბ)

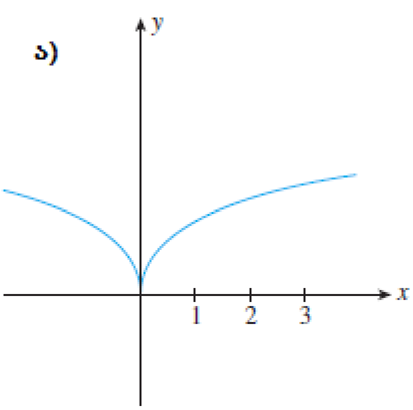


გ)

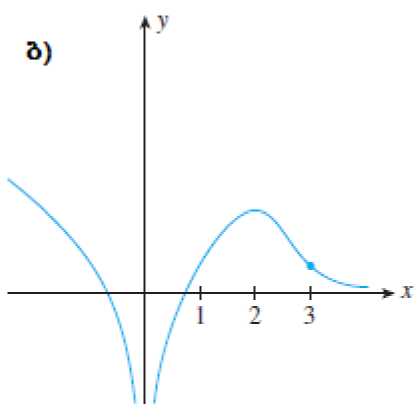


**11.** $f$ ფუნქცია კლებადია $(-\infty,0)$ ინტერვალზე, $f'(0)$ არ არის განსაზღვრული, $f$ ამოზნექილია $(0,3)$ ინტერვალზე და $x=3$ წერტილში აქვს გადაღუნვის წერტილი.

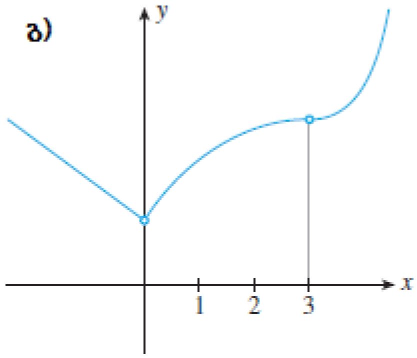
ა)



ბ)



გ)




აჩვენეთ, რომ ფუნქცია ჩაზნექილია განსაზღვრის არეში:

**12.** $f(x)=4x^2-12x+7$; **13.** $f(x)=x^4+\frac{1}{2}x^2+6x+10$; **14.** $g(x)=-\sqrt{4-x^2}$;

**15.** $g(x)=\frac{1}{x^4}$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები:

**16.** $f(x)=3x^4-6x^3+x-8$; **17.** $f(x)=x^{4/7}$; **18.** $f(x)=\sqrt{4-x}$; **19.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$;

**20.** $f(x)=\frac{1}{x-2}$; **21.** $g(x)=\frac{x}{x+1}$; **22.** $f(x)=\frac{1}{2+x^2}$; **23.** $g(x)=\frac{x}{1+x^2}$; **24.** $g(x)=x+\frac{1}{x^2}$

;

**25.** $h(t)=\frac{t^2}{t-1}$; **26.** $h(r)=-\frac{1}{(r-2)^2}$; **27.** $g(t)=(2t-4)^{1/3}$; **28.** $f(x)=(x-2)^{2/3}$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები, თუ არსებობს:

**29.** $f(x)=x^3-2$; **30.** $f(x)=3x^4-4x^3+1$; **31.** $g(t)=\sqrt[3]{t}$; **32.** $f(x)=(x-1)^3+2$;

**33.** $f(x)=(x-2)^{4/3}$; **34.** $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$; **35.** $f(x)=2+\frac{3}{x}$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლოკალური ექსტრემუმი თუ არსებობს. გამოიყენეთ მეორე წარმოებულის წესი, თუ შესაძლებელია:

**36.** $f(x)=-x^2+2x+4$; **37.** $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x-10$; **38.** $f(x)=2x^3+3x^2-12x-4$;

**39.** $f(t)=2t+\dfrac{3}{t}$; **40.** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; **41.** $f(t)=t^2-\dfrac{16}{t}$; **42.** $g(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$;

**43.** $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; **44.** $f(x)=\dfrac{x^4}{x-1}$; **45.** $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$.

**ააგეთ ფუნქციათა გრაფიკები შემდეგი მონაცემების მიხედვით:**

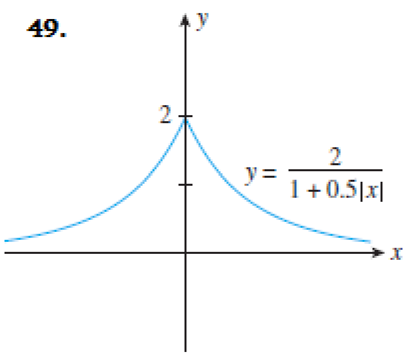
**46.** $f(2)=4,\quad f'(2)=0,\quad f''(x)<0\ \ (-\infty,\infty)$ ინტერვალზე;

**47.** $f(2)=2,\quad f'(2)=0,\quad f'(x)>0\ \ (-\infty,2)$ ინტერვალზე, $f'(x)>0\ \ (2,\infty)$ ინტერვალზე, $f''(x)<0\ \ (-\infty,2)$ ინტერვალზე, $f''(x)>0\ \ (2,\infty)$ ინტერვალზე.

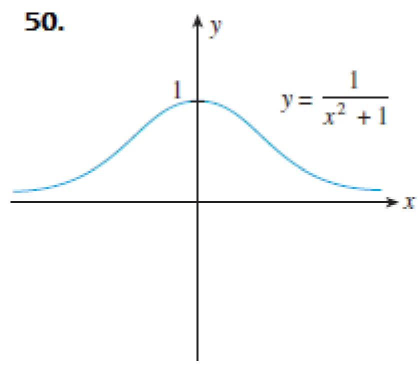
**48.** $f(-2)=4,\quad f(3)=-2,\quad f'(-2)=0,\quad f'(3)=0,\quad f'(x)>0\ \ (-\infty,-2)\cup(3,\infty)$ ინტერვალზე, $f'(x)<0\ \ (-2,3)$ ინტერვალზე, გადაღუნვის წერტილია $(1,1)$.

**იპოვეთ ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ასიმპტოტები ფუნქციათა შემდეგი გრაფიკების მიხედვით:**

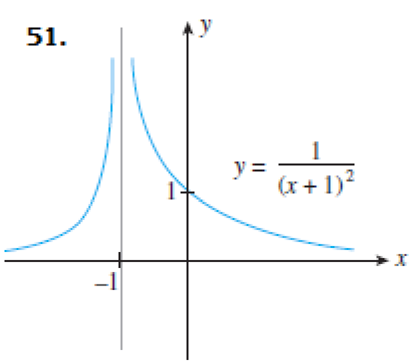
**49.**



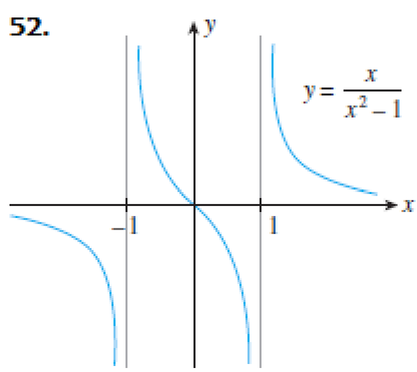

**50.**



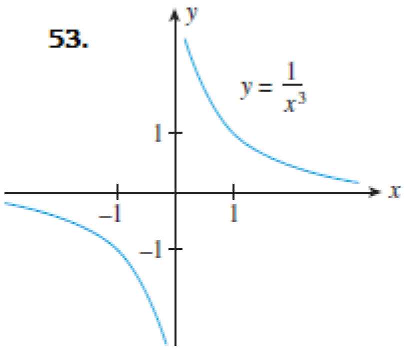

**51.**



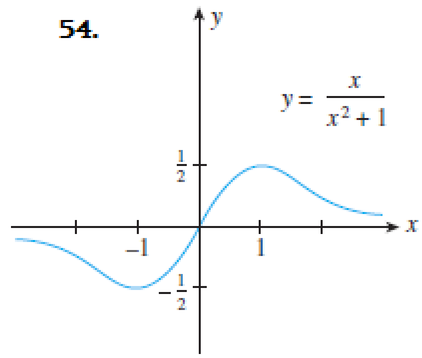

**52.**



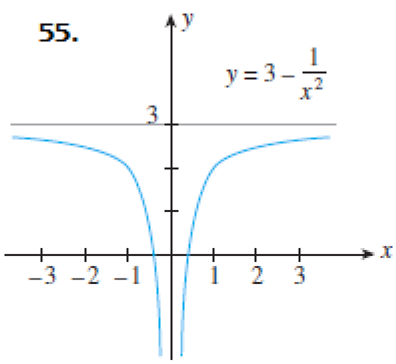
**53.**



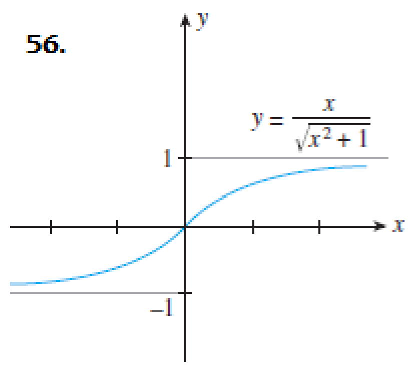

**54.**



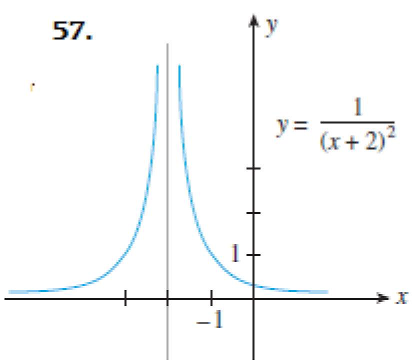

**55.**



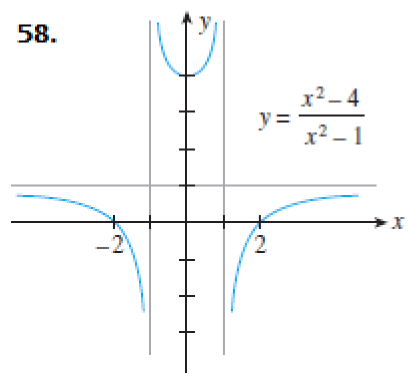

**56.**




**57.**




**58.**



იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ასიმპტოტები (გრაფიკის აგების გარეშე):

**59.** $f(x)=-\dfrac{2}{x^2}$; **60.** $g(x)=\dfrac{1}{1+2x^2}$; **61.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; **62.** $f(t)=\dfrac{t^2}{t^2-9}$;

**63.** $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-x-6}$; **64.** $g(t)=2+\dfrac{5}{(t-2)^2}$; **65.** $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2-4}$; **66.** $h(x)=\dfrac{2-x^2}{x^2+x}$.

ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

**67.** $f(x)=x^2-2x+3$; **68.** $g(x)=4-3x-2x^3$; **69.** $h(x)=x^3-3x+1$;

**70.** $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+2$; **71.** $h(x)=\dfrac{3}{2}x^4-2x^3-6x^2+8$; **72.** $f(x)=\sqrt{x^2+5}$;

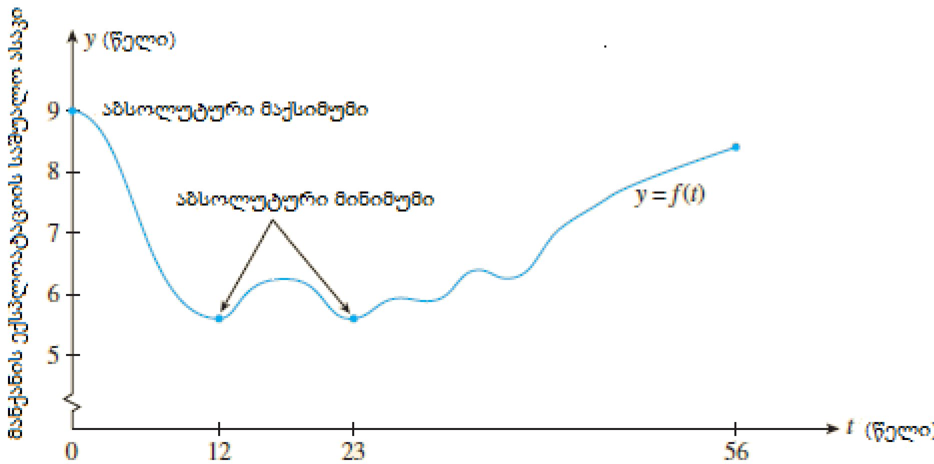
**73.** $g(x)=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x}$; **74.** $h(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$; **75.** $f(t)=\dfrac{t^2}{1+t^2}$; **76.** $g(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$;

**77.** $g(t)=\dfrac{t^2-2}{t-1}$; **78.** $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$; **79.** $g(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1}$; **80.** $h(x)=(x-1)^{2/3}+1$

## მეათე ლექცია

### უწყვეტი ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი და მინიმუმი ჩაკეტილ ინტერვალზე

მანქანის ექსპლუატაციის საშუალო ხანგრძლივობა ამერიკის შეერთებულ შტატებში დაწყებული 1946 წლიდან $(t=0)$ 2002 წლის დასაწყისამდე $(t=56)$ აღიწერება $f$ ფუნქციით, რომლის გრაფიკიც მოცემულია 108-ე ნახაზზე




ნახაზი 108. $f(t)$ გვაძლევს მანქანის ექსპლუატაციის საშუალო ხანგრძლივობას $t$ წელს

შევნიშნოთ, რომ ამ ხნის განმავლობაში მანქანის ექსპლუატაციის საშუალო ხანგრძლივობა მაქსიმუმ 9 წელია, მაშინ როცა იმავე ხნის განმავლობაში მანქანის ექსპლუატაციის საშუალო ხანგრძლივობის მინიმუმი 5.5 წელია. რიცხვი 9 არის $[0,56]$ ინტერვალში $f(t)$ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი და მას ეწოდება $f$ ფუნქციის *აბსოლუტური მაქსიმუმი* ამ ინტერვალზე. რიცხვი 5.5 არის $[0,56]$ ინტერვალში $f(t)$ მნიშვნელობებს შორის უმცირესი და მას ეწოდება $f$ ფუნქციის *აბსოლუტური მინიმუმი* ამ ინტერვალზე. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი მიიღწევა $[0,56]$ ინტერვალის ბოლო $t=0$ წერტილში მაშინ, როცა აბსოლუტური მინიმუმი მიიღწევა ამ ინტერვალის $t=12$ და $t=23$ წერტილებზე, რომლებიც შესაბამისად 1958 და 1969 წლებს შეესაბამებიან.

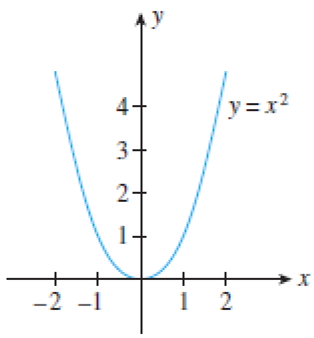
საინტერესოა აღინიშნოს, რომ 1946 წელი არის მეორე მსოფლიო ომის შემდგომი პირველი მშვიდობიანი წელი, ხოლო 1958 და 1969 წლები არიან ამერიკის შეერთებული შტატების უახლეს ისტორიაში აყვავების ორი პერიოდის დასასრული.

მოვიყვანოთ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის (აბსოლუტური მაქსიმუმი ან აბსოლუტური მინიმუმი) განმარტება.

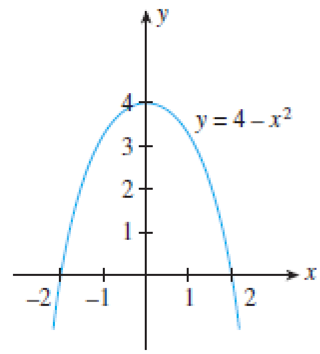
***$f$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმი. თუ $f(x)\le f(c)$ ყოველი $x$-თვის $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არედან, მაშინ $f(c)$ ეწოდება $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი;***

***თუ*** $f(x) \geq f(c)$ ***ყოველი*** $x$ ***-თვის*** $f$ ***ფუნქციის განსაზღვრის არედან, მაშინ*** $f(c)$ ***ეწოდება*** $f$ ***ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი;***

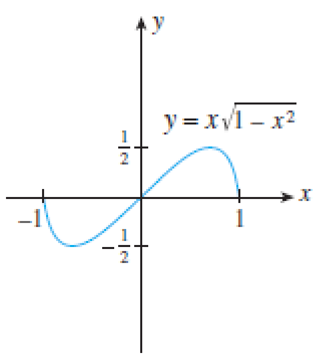
შემდეგ ნახაზზე მოცემულია ზოგიერთი ფუნქციის გრაფიკი რომელიც გვაძლევს თითოეული ფუნქციის აბსოლუტურ ექსტრემუმს, თუ იგი არსებობს:



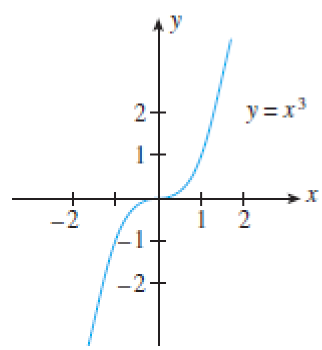

ა) $f(0)=0$ არის $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი; აბსოლუტური მაქსიმუმი არ გააჩნია.




ბ) $f(0)=4$ არის $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი; აბსოლუტური მინიმუმი არ გააჩნია.




გ) $f(\sqrt{2/2})=1/2$ არის $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი; $f(-\sqrt{2/2})=-1/2$ არის $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი.




დ) $f$ ფუნქციის

დ) ფუნქციას არ გააჩნია აბსოლუტური ექსტრემუმი.

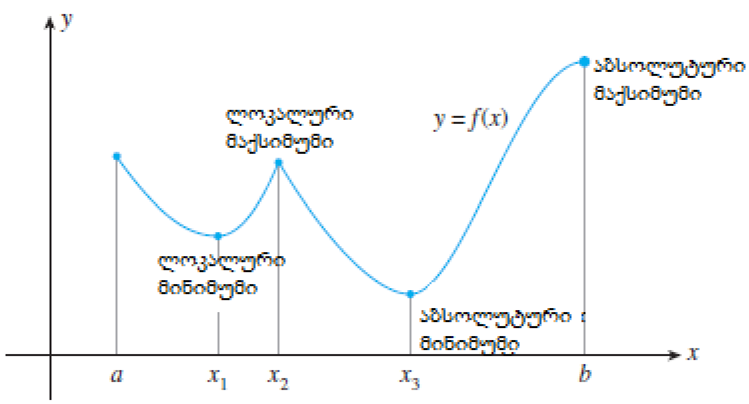
ნახაზი 108.

როგორც წინა მაგალითებიდან ჩანს რაიმე ინტერვალზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციას ყოველთვის არ გააჩნია ამსოლუტური ექსტრემუმი. მაგრამ პრაქტიკულ გამოყენებებში ხშირად გვაქვს საქმე ერთ მნიშვნელოვან შემთხვევასთან, როდესაც ფუნქციას ყოველთვის გააჩნია როგორც აბსოლუტური მაქსიმუმი ასევე აბსოლუტური მინიმუმი. ეს იმ შემთხვევაში ხდება, როდესაც უწყვეტი ფუნქცია

განსაზღვრულია ჩაკეტილ ინტერვალზე. ჩამოვაყალიბოთ ეს ფაქტი თეორემის სახით, რომელის დამტკიცებასაც გამოვტოვებთ.

**თეორემა 3. თუ $f$ ფუნქცია უწყვეტია ჩაკეტილ $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ მას ამ ინტერვალზე გააჩნია აბსოლუტური მაქსიმუმი და აბსოლუტური მინიმუმი.**

შევნიშნოთ, რომ თუ უწყვეტ $f$ ფუნქციას გააჩნია აბსოლუტური ექსტრემუმი ღია $(a,b)$ ინტერვალის შიგნით რაიმე წერტილზე, მაშინ ის იქნება $f$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი და ამ წერტილის აბსცისა იქნება კრიტიკული წერტილი. სხვაგვარად, $f$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმი უნდა შედგეს $[a,b]$ ინტერვალის ერთ ან ორივე ბოლო წერტილზე. ამის ილუსტრაცია მოცემულია 109-ე ნახაზზე.



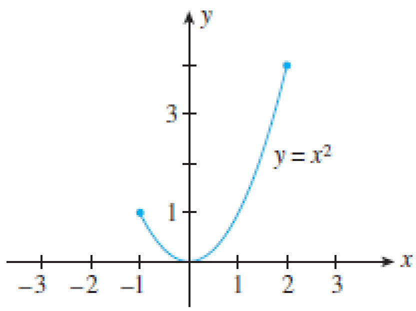

ნახაზი 109. $f$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმი $x_3$ წერტილში არის ამ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი. $[a,b]$ ინტერვალის მარჯვენა $b$ ბოლო წერტილზე ფუნქცია აღწევს $f(b)$ აბსოლუტურ მაქსიმუმს.

აქ $x_1$, $x_2$ და $x_3$ წარმოადგენენ $f$ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს. ფუნქცია აბსოლუტურ მინიმუმს აღწევს $x_3$ წერტილზე, რომელიც ძევს ღია $(a,b)$ ინტერვალში და წარმოადგენს კრიტიკულ წერტილს. ფუნქცია აბსოლუტურ მაქსიმუმს აღწევს $b$ წერტილზე, რომელიც ინტერვალის ბოლო წერტილია. ეს შედეგები განსაზღვრავს დახურულ ინტერვალში ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის მოძებნის შემდეგ პროცედურებს:

1. ***ვიპოვოთ** $(a,b)$ **ინტერვალში** $f$ **ფუნქციის კრიტიკულ წერტილები;***
2. ***გამოვითვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები პირველ პუნქტში მოძებნილ კრიტიკულ წერტილებზე და გამოვითვალოთ აგრეთვე** $f(a)$ **და** $f(b)$;*
3. ***ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი და აბსოლუტური მინიმუმი იქნება მე-2 პუნქტში გამოთვლილ ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის შესაბამისად უდიდესი და უმცირესი რიცხვები.***

**მაგალითი 1.** ვიპოვოთ $F(x)=x^2$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმი [-1,2] ინტერვალზე.

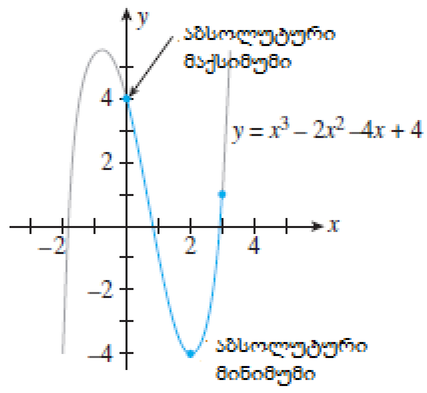
**ამოხსნა:** $F$ არის უწყვეტი [-1,2] დახურულ ინტერვალზე და წარმოებადია ღია (-1,2) ინტერვალში. მისი წარმოებულია $F'(x)=2x$. ამიტომ მას აქვს ერთადერთი კრიტიკული წერტილი ნული. გამოვითვალოთ $F$ ფუნქციის მნიშვნელობები $x=-1$, $x=0$ და $x=2$ წერტილებში. გვაქვს $F(-1)=1$, $F(0)=0$ და $F(2)=4$. აქედან გამომდინარე $F$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი ნულის ტოლია, ხოლო აბსოლუტური მაქსიმუმი კი 4. $F$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 110-ე ნახაზზე.



ნახაზი 110. $F$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი ნულის ტოლია, ხოლო აბსოლუტური მაქსიმუმი კი 4.

**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ $f(x)=x^3-2x^2-4x+4$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმი [0,3] ინტერვალზე.

**ამოხსნა:** $f$ არის უწყვეტი [0,3] დახურულ ინტერვალზე და წარმოებადია ღია (-0,3) ინტერვალში. მისი წარმოებული $f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$ ნულის ტოლია, როცა $x=-\frac{2}{3}$ და $x=2$. რადგან $x=-\frac{2}{3}$ არ ძევს [0,3] ინტერვალში ამიტომ მას არ განვიხილავთ და (-0,3) ინტერვალში ფუნქციას ექნება ერთი კრიტიკული წერტილი $x=2$. გამოვითვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები ამ კრიტიკულ წერტილზე და ინტერვალის ბოლოებზე მივიღებთ $f(0)=4$, $f(2)=-4$ და $f(3)=1$. აქედან დავასკვნით, რომ -4 არის $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი და 4 არის აბსოლუტური მაქსიმუმი [0,3] ინტერვალზე. $f$ ფუნქციის გრაფიკი აგებულია 111-ე ნახაზზე.

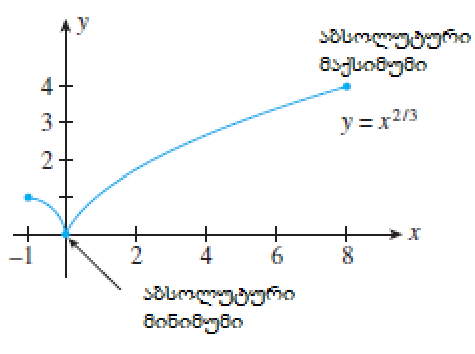



ნახაზი 111. $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმია -4,
ხოლო აბსოლუტური მაქსიმუმი 4.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია აბსოლუტურ მაქსიმუმს ღებულობს $[0,3]$ ინტერვალის ბოლო $x=0$ წერტილზე, ხოლო აბსოლუტური მინიმუმს (-0,3) ინტერვალის შიგნით $x=2$ წერტილზე.

**მაგალითი 3.** ვიპოვოთ $f(x)=x^{2/3}$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი და აბსოლუტური მინიმუმი $[-1,8]$ ინტერვალზე.

**ამოხსნა:** ვიპოვოთ წარმოებული $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-1/3}=\dfrac{2}{3x^{1/3}}$. შევნიშნოთ, რომ $f'$ არ არის განსაზღვრული $x=0$ წერტილზე, უწყვეტია [-1,8] ინტერვალის ყველა დანარჩენ წერტილში და არ ხდება ნულის ტოლი. მაშასადამე ნული არის $f$ ფუნქციის ერთადერთი კრიტიკული წერტილი. გამოვითვალოთ $f(x)$ $x=-1,\ 0$ და 8 წერტილებში, მივიღებთ $f(-1)=1$, $f(0)=0$ და $f(8)=4$. აქედან დავასკვნით, რომ $x=0$ წერტილზე ფუნქცია აღწევს აბსოლუტურ მინიმუმს, რომელიც ნულის ტოლია და $x=8$ წერტილზე ფუნქცია აღწევს აბსოლუტურ მაქსიმუმს, რომელიც ოთხის ტოლია (ნახ. 112)




ნახაზი 112. $f(0)=0$ არის ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი,
ხოლო $f(8)=4$ არის აბსოლუტური მაქსიმუმი.

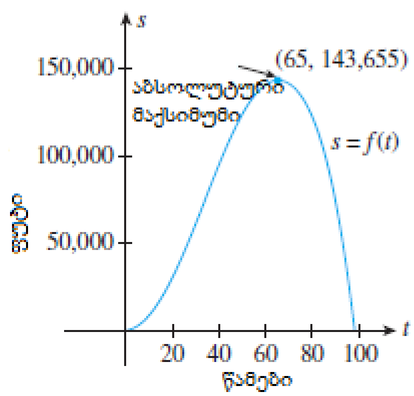
**მაგალითი 4 (რაკეტის ფრენა).** რაკეტის ფრენის სიმაღლე(ფუტებში) დროის $t$ წამისათვის მოიცემა ფუნქციით $s = f(t) = -t^3 + 96t^2 + 195t + 5, \quad (t \geq 0)$. ვიპოვოთ: ა) რაკეტის ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე; ბ) რაკეტის ფრენის მაქსიმალური სიჩქარე.

**ამოხსნა:** ა) რაკეტის ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე მოიცემა $f$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობით $[0,T]$ ინტერვალზე, სადაც $T$ აღნიშნავს რაკეტის დედამიწაზე დაცემის დროს. ვიცით, რომ ასეთი რიცხვი არსებობს, რადგან უწყვეტი $f$ ფუნქციის გამოსახულებაში $-t^3$ არის დომინანტური წევრი და საკმარისად დიდი $t$-თვის $f(t)$-ს მნიშვნელობა შიცვლება დადებითიდან უარყოფითზე. ამასთან იგი უნდა გახდეს ნულის ტოლი რაიმე $T$-თვის.

$f$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმის მოსაძებნად გამოვითვალოთ წარმოებული

$$f'(t) = -3t^2 + 192t + 195 = -3(t-65)(t+1)$$

და ამოვხსნათ განტოლება $f'(t) = 0$, მივიღებთ $t = -1$ და $t = 65$. $t = -1$ არ ეკუთვნის $[0,T]$ ინტერვალს, ამიტომ $f$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი იქნება 65. გამოვითვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები $f(0) = 5$, $f(65) = 143.655$, $f(T) = 0$. აქედან დავასკვნით, რომ $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმია $143.655$. ამრიგად რაკეტის ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე არის 143.655 ფუტი, რომელსაც აღწევს ფრენის 65 წამზე. გრაფიკი მოცემულია 113-ე ნახაზზე.



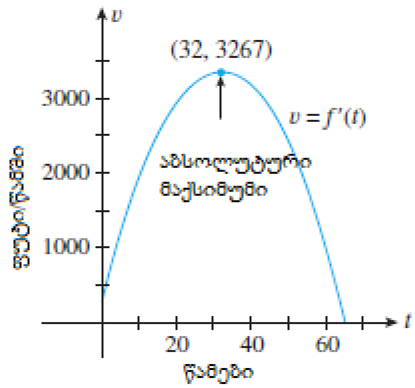

ნახაზი 113. რაკეტის ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე არის $143.655$ ფუტი.

ბ) რომ მოვძებნოთ მაქსიმალური სიჩქარე, რომელსაც რაკეტა მიაღწევს ფრენის დროს, ამისათვის უნდა ვიპოვოთ იმ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომელიც აღწერს რაკეტის ფრენის სიჩქარეს დროის ნებისმიერი $t$ მომენტისათვის. როგორც ვიცით სიჩქარე აღიწერება ფუნქციით

$$v = f'(t) = -3t^2 + 192t + 195, \quad (t \geq 0).$$

ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილი $v' = 0$ განტოლების ამოხსნით. რადგან $v' = -6t + 192$, ამიტომ $v$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი იქნება 32. რადგან $v'' = -6 < 0$, ამიტომ მეორე წარმოებულის წესის თანახმად $v$ ფუნქცია აღწევს ლოკალურ მაქსიმუმს $t = 32$ წერტილში. რადგან $v'' < 0$ ყოველთვის, ამიტომ სიჩქარის გრაფიკი ყველგან ამოზნექილია და მაშასადამე ლოკალური მაქსიმუმი უნდა იყოს $v$ ფუნქციის

აბსოლუტური მაქსიმუმი. ამრიგად, დავასკვნით, რომ რაკეტის ფრენის მაქსიმალური სიჩქარე მიიღწევა $t = 32$ წამში და იგი იქნება $v = f'(32) = 3267$ ფუტი/წამში (ნახ. 114)




ნახაზი 114. რაკეტის ფრენის მაქსიმალური სიჩქარეა $v = f'(32) = 3267$ ფუტი/წამში

**ოპტიმიზაციის ამოცანები**

ახლა ჩვენ გავეცნობით ოპტიმიზაციის ზოგიერთი ამოცანის ამონახსნის მოძებნის გზებს. განვიხილავთ ამოცანებს, რომლებშიც ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ჯერ ცხადად დავწერთ შესაბამის ფუნქციას და შემდგომ მოვახდენთ მის ოპტიმიზაციას (აბსოლუტური ექსტრემუმის დადგენას). ამისათვის სასარგებლო იქნება ვიხელმძღვანელოთ შემდეგი მითითებებით.

1. ***ამოცანაში არსებული ცვლადი სიდიდეები აღვნიშნოთ ასოებით, თუ შესაძლებელია, ავაგოთ შესაბამისი ნახაზი;***
2. ***შევადგინოთ იმ სიდიდის გამოსახულება, რომლის ოპტიმიზაციასაც ვახდენთ;***
3. ***გამოვიყენოთ ამოცანაში მოცემული პირობები, რათა საოპტიმიზაციო სიდიდე წარმოვადგინოთ, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქცია $f$;***
4. ***ზემოთ განხილული მეთოდების გამოყენებით მოვახდინოთ $f$ ფუნქციის ოპტიმიზაცია თავის განსაზღვრის არეში.***

**შენიშვნა.** თუ საოპტიმიზაციო $f$ ფუნქცია უწყვეტია დახურულ ინტერვალზე, მაშინ $f$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი და აბსოლუტური მინიმუმი შესაბამისად არიან $f(x)$-ის კრიტიკულ წერტილებზე და ინტერვალის ბოლოებზე მიღებულ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი და უმცირესი. თუ $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არე არ არის დახურული ინტერვალი, მაშინ ჩვენ მივმართავთ გრაფიკულ მეთოდს.

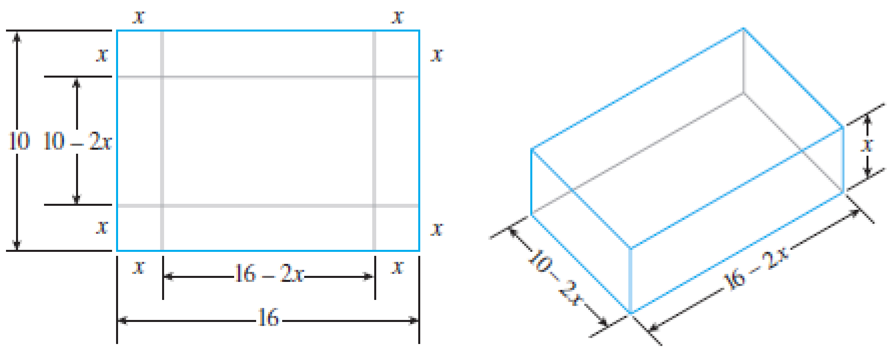
**მაგალითი 5 (ნაკვეთის შეღობვა).** გლეხს აქვს 50 მეტრის სიგრძის ბადე და სურს თავის შემოგარენში ამ ბადით შემოღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი, რომელსაც ექნება უდიდესი ფართობი. განვსაზღვროთ ამ მართკუთხედის ზომები.
**ამოხსნა:** გავყვეთ ზემოთ მითითებულ პუნქტებს:

1. მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები აღვნიშნოთ $x$ და $y$, ხოლო ფართობი $A$;
2. სიდიდე, რომლის ოპტიმიზაციაც უნდა მოვახდინოთ ანუ დავადგინოთ მაქსიმალური მნიშვნელობა, არის მართკუთხედის ფართობი $A = xy$;
3. რადგან მართკუთხედის პერიმეტრია $2x + 2y$, ამიტომ ამოცანის პირობის თანახმად იგი ტოლი უნდა იყოს 50 მეტრის. ამრიგად, $2x + 2y = 50$, საიდანაც
$$y = 25 - x. \qquad (1)$$
თუ $y$-ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვავთ ფართობის გამოსათვლელ ფორმულაში მივიღებთ
$$A = x(25 - x) = -x^2 + 25x.$$
ამრიგად, სიდიდე, რომლის ოპტიმიზაციაც უნდა მოხდეს წარმოდგენილია ერთი ცვლადის ფუნქციის სახით.
რადგან მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები არაუარყოფითი რიცხვები უნდა იყოს, ამიტომ $x \ge 0$ და $y = 25 - x \ge 0$. მაშასადამე $0 \le x \le 25$. ამრიგად, ამოცანა დავიყვანეთ $A = f(x) = -x^2 + 25x$ ფუნქციის დახურულ $[0,25]$ ინტერვალზე აბსოლუტური მაქსიმუმის მოძებნაზე;
4. შევნიშნოთ, რომ $f$ უწყვეტია $[0,25]$ ინტერვალზე, ამიტომ იგი თავის აბსოლუტურ მაქსიმუმს მიაღწევს ინტერვალის ბოლოებზე ან კრიტიკულ წერტილზე. $A$ ფუნქციის წარმოებულს აქვს სახე $A' = f'(x) = -2x + 25$. თუ დავუშვებთ $A' = 0$, მივიღებთ $x = 12.5$, რაც წარმოადგენს $A$ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილს. ახლა გამოვითვალოთ $A = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები $x = 0$ და $x = 25$ ბოლო წერტილებზე და $x = 12.5$ კრიტიკულ წერტილზე, მივიღებთ
$$f(0) = 0, \qquad f(12.5) = 156.25, \qquad f(25) = 0.$$
ვხედავთ, რომ $A$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი არის 156.25. როცა $x = 12.5$, მაშინ (1) ტოლობიდან $y = 12.5$ და გამოდის, რომ მიწის ნაკვეთი მაქსიმალური ფართობით (156.25 მ$^2$) არის კვადრატი 12.5 მ სიგრძის გვერდით.
ზოგადად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოცემული პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებს შორის უდიდესი ფართობი აქვს კვადრატს.

**მაგალითი 6.** 16 სმ სიგრძის და 10 სმ სიგანის მართკუთხედის ფორმის მუყაოს ფურცლის ოთხივე კუთხიდან ერთნაირი ზომის კვადრატების ამოჭრით და შემდგომ დარჩენილი ნაწილის გადაკეცვით მიიღება თავღია ყუთი. ვიპოვოთ ყუთის განზომილებები, რომლის დროსაც მისი მოცულობა აღწევს მაქსიმუმს.

**ამოხსნა:**

1. ამოჭრილი კვადრატის გვერდის სიგრძე აღვნიშნოთ $x$-ით, ხოლო ყუთის მოცულობა $V$ (ნახ. 115);
2. ყუთის განზომილებები იქნება $(16 - 2x)$ სმ, $(10 - 2x)$ სმ და $x$ სმ. მაშასადამე მოცულობა $V = (16 - 2x)(10 - 2x)x = 4(x^3 - 13x^2 + 40x)$ იქნება სიდიდე, რომლის ოპტიმიზება უნდა მოვახდინოთ;

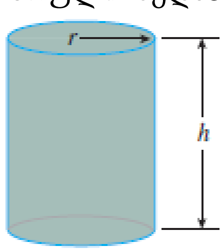



ნახაზი 115. თავღია ყუთის განზომილებებია $(16-2x)$ სმ, $(10-2x)$ სმ და $x$ სმ.

3. რადგან ყუთის განზომილებები უნდა იყოს არაუარყოფითი ამიტომ ადგილი უნდა ჰქონდეს უტოლობებს $x \geq 0$, $16-2x \geq 0$ და $10-2x \geq 0$, საიდანაც $0 \leq x \leq 5$. ამრიგად, დასმული ამოცანა ექვივალენტურია $V = f(x) = 4(x^3 - 13x^2 + 40x)$ ფუნქციისათვის $[0,5]$ დახურულ ინტერვალზე აბსოლუტური მაქსიმუმის მოძებნის ამოცანის;
4. შევნიშნოთ, რომ $f$ უწყვეტია $[0,5]$ ინტერვალზე, ამიტომ იგი თავის აბსოლუტურ მაქსიმუმს მიაღწევს ინტერვალის ბოლოებზე ან კრიტიკულ წერტილზე. $f$ ფუნქციის წარმოებულს აქვს სახე
$$f'(x) = 4(3x^2 - 26x + 40) = 4(3x - 20)(x - 2).$$
თუ დაუშვებთ $f'(x) = 0$ და ამოვხსნით ამ განტოლებას მივიღებთ $x = \frac{20}{3}$ ან $x = 2$. რადგან $\frac{20}{3}$ არ ეკუთვნის $[0,5]$ ინტერვალს, ამიტომ მას არ განვიხილავთ და დაგვრჩა ერთი კრიტიკული წერტილი $x = 2$. ახლა გამოვითვალოთ $f(x)$, როცა $x = 0$, $x = 2$ და $x = 5$ მივიღებთ
$$f(0) = 0, \qquad f(2) = 144, \qquad f(5) = 0.$$
ამრიგად, ყუთის მაქსიმალური მოცულობა იქნება 144 სმ³, როცა $x = 2$ და შესაბამისად განზომილებები 12 სმ $\times$6 სმ $\times$2 სმ.

**მაგალითი 7.** ალუმინის ფურცლისაგან უნდა დამზადდეს 54 მ³ მოცულობის წრიული ცილინდრის ფორმის მქონე ძროხის საკვები მარცვლეულის შესანახი კონტეინერი. განვსაზღვროთ კონტეინერის ფუძის რადიუსი და სიმაღლე ისე, რომ კონტეინერის დამზადებაზე დაიარჯოს მეტალის მინიმალური რაოდენობა.

**ამოხსნა: 1.** ვთქვათ კონტეინერის ფუძის რადიუსი და სიმაღლე შესაბამისად არის $r$ და $h$, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობი $S$ (ნახ. 116);




ნახაზი 116.

2. კონტეინერის დამზადებაზე დახარჯული მეტალი შეადგენს ცილინდრის სრულ ზედაპირს. ფუძეების ფართობებია $\pi r^2$ კვადრატული მეტრი, ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობი

$2\pi rh$ კვადრატული მეტრი. ამიტომ

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (2)$$

არის სიდიდე, რომლის ოპტიმიზაცია უნდა მოვახდინოთ;

3. მოთხოვნა, რომ კონტეინერის მოცულობა უნდა იყოს 54 მ³, გვაძლევს

$$\pi r^2 h = 54, \qquad (3)$$

საიდანაც შეგვიძლია განვსაზღვროთ კონტეინერის სიმაღლე

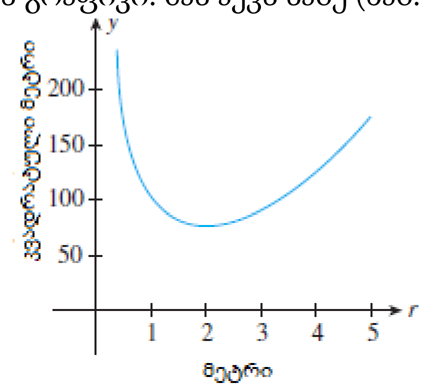
$$h = \frac{54}{\pi r^2}, \qquad (4)$$

რომლის ჩასმითაც (2) ტოლობაში მივიღებთ

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{54}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{108}{r}.$$

ცხადია, კონტეინერის რადიუსი უნდა იყოს დადებითი. ამიტომ, ამოცანა დაიყვანება $S = f(r)$ ფუნქციის $(0,\infty)$ ინტერვალზე აბსოლუტური მინიმუმის მოძებნაზე;

4. ავაგოთ $S = f(r)$ ფუნქციის გრაფიკი. მას აქვს სახე (ნახ.117)




ნახაზი 117. ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობის როგორც $r$ ცვლადის ფუნქციის გრაფიკი

კრიტიკული წერტილის მოსაძებნად ვიპოვოთ წარმოებული $S' = 4\pi r - \dfrac{108}{r^2}$ და ამოვხსნათ $S' = 0$ განტოლება $r$-ის მიმართ. გვექნება

$$4\pi r - \frac{108}{r^2} = 0$$

$$4\pi r^3 - 108 = 0$$

$$r^3 = \frac{27}{\pi}, \quad r = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $r$-ის მოძებნილი მნიშვნელობა $f$ ფუნქციას $(0,\infty)$ ინტერვალზე ანიჭებს აბსოლუტურ მინიმუმს. ამისათვის ვიპოვოთ მეორე რიგის წარმოებული

$$S'' = 4\pi + \frac{216}{r^3}.$$

რადგან $S'' > 0$, როცა $r = 3/\sqrt[3]{\pi}$ ამიტომ მეორე წარმოებულის წესის თანახმად $f$ ფუნქცია აღწევს ლოკალურ მინიმუმს. ეს ლოკალური მინიმუმი ამავე დროს იქნება $f$

ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი, რადგან გრაფიკი ყველგან ჩაზნექილია ($S'' > 0$ ნებისმიერი $r$-ისათვის). კონტეინერის სიმაღლის მოსაძებნად ჩავსვათ $r$-ის მნიშვნელობა (4), მივიღებთ

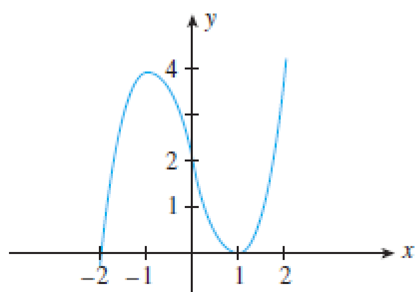
$$h = \frac{54}{\pi r^2} = \frac{54}{\pi\left(\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{54\pi^{2/3}}{(\pi)9} = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}} = 2r\,.$$

დაბოლოს დავასკვნით, რომ კონტეინერის ფუძის რადიუსი დაახლოებით 2 მ ტოლია, ხოლო სიმაღლე ორჯერ მეტი დაახლოებით 4 მ.

## სავარჯიშო

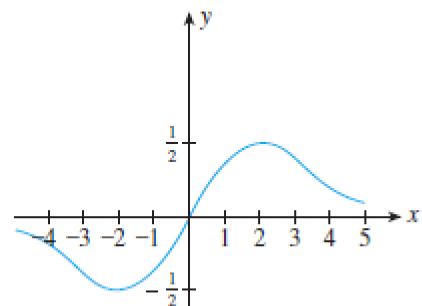
**გრაფიკების მიხედვით იპოვეთ ფუნქციათა აბსოლუტური მინიმუმი და აბსოლუტური მაქსიმუმი მითითებულ ინტერვალში, თუ ისინი არსებობენ:**

**1.**



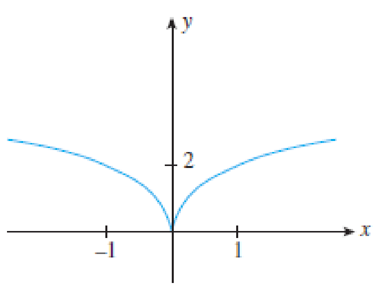

$f$ განსაზღვრულია $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე

**2.**



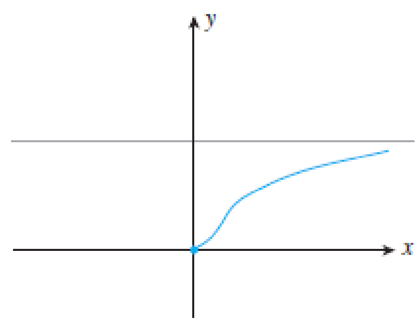

$f$ განსაზღვრულია $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე

**3.**



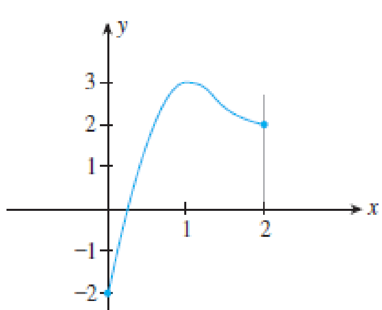

$f$ განსაზღვრულია $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე

**4.**



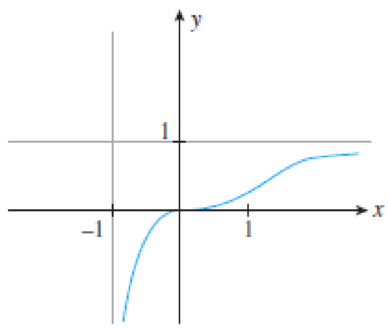

$f$ განსაზღვრულია $[0, \infty)$ ინტერვალზე

**5.**



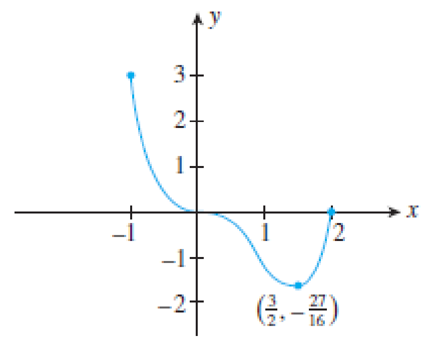

$f$ განსაზღვრულია $[0, 2]$ ინტერვალზე

**6.**




$f$ განსაზღვრულია $(-1,\infty)$ ინტერვალზე

**7.**




$f$ განსაზღვრულია $[-1, 2]$ ინტერვალზე

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების აბსოლუტური მაქსიმუმი და აბსოლუტური მინიმუმი, თუ არსებობს:**

**8.** $f(x)=2x^2+3x-4$; **9.** $g(x)=-x^2+4x+3$; **10.** $h(x)=x^{2/3}$; **11.** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

**12.** $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$; **13.** $f(x)=x^2-2x-3$, $[-2,3]$ ინტერვალზე;

**14.** $g(x)=x^2-2x-3$, $[0,4]$ ინტერვალზე;

**15.** $f(x)=-x^2+4x+6$, $[0,5]$ ინტერვალზე;

**16.** $f(x)=-x^2+4x+6$, $[3,6]$ ინტერვალზე;

**17.** $f(x)=x^3+3x^2-1$, $[-3,2]$ ინტერვალზე;

**18.** $g(x)=x^3+3x^2-1$, $[-3,1]$ ინტერვალზე;

**19.** $g(x)=3x^4+4x^3$, $[-2,1]$ ინტერვალზე;

**20.** $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-2x^2+3$, $[-2,3]$ ინტერვალზე;

**21.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $[2,4]$ ინტერვალზე; **22.** $g(x)=\dfrac{t}{t-1}$, $[2,4]$ ინტერვალზე;

**23.** $f(x)=4x+\dfrac{1}{x}$, $[1,3]$ ინტერვალზე; **24.** $f(x)=9x-\dfrac{1}{x}$, $[1,3]$ ინტერვალზე;

**25.** $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2\sqrt{x}$, $[0,3]$ ინტერვალზე; **26.** $g(x)=\dfrac{1}{8}x^2-4\sqrt{x}$, $[0,9]$ ინტერვალზე;

**27.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $(0,\infty)$ ინტერვალზე; **28.** $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $(0,\infty)$ ინტერვალზე;

**29.** $f(x)=3x^{2/3}-2x$, $[0,3]$ ინტერვალზე; **30.** $g(x)=x^2+2x^{2/3}$, $[-2,2]$ ინტერვალზე;

**31.** $f(x)=x^{2/3}(x^2-4)$, $[-1,2]$ ინტერვალზე;

**32.** $g(x)=x^{2/3}(x^2-4)$, $[-1,3]$ ინტერვალზე;

**33.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$, $[-1,2]$ ინტერვალზე; **34.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$, $[-2,1]$ ინტერვალზე;

**35.** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $[-1,1]$ ინტერვალზე; **36.** $g(x)=x\sqrt{4-x^2}$, $[0,2]$ ინტერვალზე;

**37.** იპოვეთ 100 მ პერიმეტრის მქონე იმ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები, რომელსაც აქვს უდიდესი ფართობი.

**38.** იპოვეთ 144 $მ^2$ ფართობის მქონე იმ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები, რომელსაც აქვს უმცირესი პერიმეტრი.

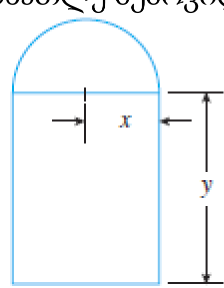
**39.** ფერმერს სურს 3000 მ სიგრძის ბადით შემოღობოს მართკუთხედის ფორმის საძოვარი მიწის ნაკვეთი მდინარის სწორხაზოვანი ნაპირის მახლობლად. თუ მდინარის ნაპირს არ უნდა შემოღობვა, მაშინ რა იქნება ამ ბადით შემოღობილი უდიდესი ფართობის მქონე საძოვრის ზომები? რა იქნება ამ საძოვრის ფართობი?

**40.** 15 სმ სიგრძის და 8 სმ სიგანის მართკუთხედის ფორმის მუყაოს ფურცლის ოთხივე კუთხიდან ერთნაირი ზომის კვადრატების ამოჭრით და შემდგომ დარჩენილი ნაწილის გადაკეცვით მიიღება თავღია ყუთი. ვიპოვოთ ყუთის განზომილებები, რომლის დროსაც მისი მოცულობა აღწევს მაქსიმუმს.

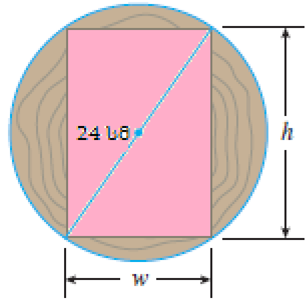
**41.** 108 $მ^3$ მოცულობის მქონე თავღია ყუთს, რომელიც დამზადებულია მეტალის თხელი ფურცლისაგან, ფუძედ აქვს კვადრატი. ვიპოვოთ ყუთის ზომები, თუ ცნობილია, რომ ყუთის დამზადებაზე დაიხარჯა მინიმალური რაოდენობის მასალა.

**42.** 128 $მ^3$ მოცულობის მქონე დახურულ ყუთს, რომელიც დამზადებულია მეტალის თხელი ფურცლისაგან, ფუძედ აქვს კვადრატი. ვიპოვოთ ყუთის ზომები, თუ ცნობილია, რომ ყუთის დამზადებაზე დაიხარჯა მინიმალური რაოდენობის მასალა.

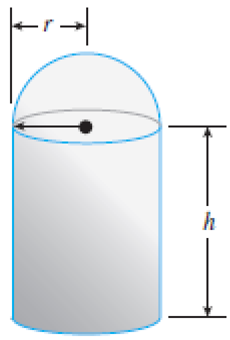
**43.** ფანჯარის ფორმა შედგება მართკუთხედისა და ნახევარწრისაგან (იხილეთ ქვემოთ ნახაზი), რომლის პერიმეტრი 28 დმ ტოლია. რა უნდა იყოს ფანჯრის ზომები, რათა მაქსიმალური სინათლე შემოვიდეს ფანჯარაში?



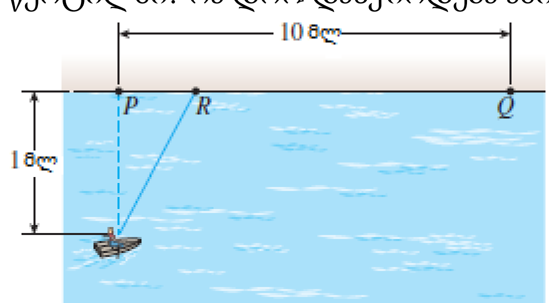

**44.** ხის კოჭს აქვს მართკუთხედის ფორმის განივი კვეთა, რომლის სიმაღლეა $h$ სმ და სიგანე $w$ სმ (იხილეთ ქვემოთ ნახაზი). ძელის $S$ სიგრძე პირდაპირ პროპორციულია ძელის სიგანისა და სიმაღლიდს კვადრატის. როგორი უნდა იყოს ძელის განივი კვეთის ზომები, რომ იგი ჩამოვხერხოთ ხის მრგვალი მორიდან რომლის დიამეტრია 24 სმ. მითითება: $S = kh^2w$, სადაც $k$ პროპორციულობის კოეფიციენტია.




**45.** მარცვლეულის შესანახ კონტეინერს აქვს ცილინდრის ფორმა, რომელსაც თავზე აგდას ნახევარსფერო (იხილეთ ქვემოთ ნახაზი). იპოვეთ ცილინდრის რადიუსი და სიმაღლე, თუ ცნობილია, რომ კონტეინერის მოცულობა $540\pi$ მ³ და მის დამზადებაზე დაიხარჯა მეტალის მინიმალური რაოდენობა. მითითება: კონტეინერის მოცულობა არის $\pi r^2 h+\frac{2}{3}\pi r^3$ და ზრდაპირის ფართობი ფუძის ჩათვლით $\pi(3r^2+2rh)$.



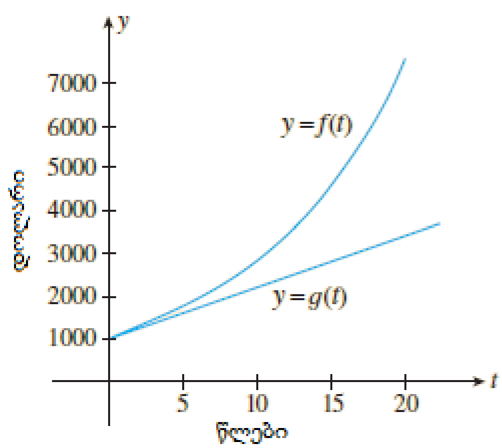

**46.** ქალი ზის ნავში, რომელიც 1 მილით დაშორებულია ტბის სწორხაზოვანი სანაპირო ზოლის უახლოესი P წერტილიდან (იხილეთ ქვემოთ ნახაზი). მას სურს მივიდეს Q წერტილში, რომელიც სანაპიროს გასწვრივ P წერტილიდან დაშორებულია 10 მილით, ჯერ ნავით სანაპიროს P და Q წერტილებს შორის მდებარე R წერტილში და შემდეგ ფეხით დანარჩენი მანძილის გავლით. თუ მას შეუძლია ნავით იმოძრაოს 2 მლ/სთ სიჩქარით და ფეხით 3 მლ/სთ სიჩქარით, მაშინ როგორ შეარჩიოს R წერტილი იმისათვის, რომ რაც შეიძლება მალე მივიდეს Q წერტილში? რა დრო დასჭირდება ამისათვის?



# მეთერთმეტე ლექცია

## მაჩვენებლიანი ფუნქცია, მისი გრაფიკი და თვისებები

ვთქვათ, ბანკში ანაბარზე გაქვთ 1000 დოლარი, რომელსაც უწყვეტად ემატება ყოველწლიური რთული საპროცენტო განაკვეთი 10%-ის ოდენობით. მაშინ $t$ წლის ბოლოს $(0 \le t \le 20)$ დაგროვილი თანხის რაოდენობა აღიწერება $f$ ფუნქციით, რომლის გრაფიკიც მოცემულია 118-ე ნახაზზე. ამ ფუნქციას ეწოდება *მაჩვენებლიანი (ექსპონენციალური) ფუნქცია.* შევნიშნოთ, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკი თავდაპირველად შედარებით ნელა იზრდება, მაგრამ შემდგომ გაცილებით სწრაფად იზრდება $t$ დროის ზრდასთან ერთად. შედარებისათვის ნახაზზე მოცემულია აგრეთვე $y = g(t) = 1000(1 + 0.10\,t)$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც გვაძლევს დაგროვილი თანხის ოდენობას იმავე საწყისი თანხით (1000$), მაგრამ წლიური მარტივი 10%-ის ტოლი განაკვეთით.




ნახაზი 118. რთული საპროცენტო განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვისას
თანხა იზრდება ექსპონენციალურად.

მაჩვენებლიანი ფუნქცია, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, მნიშვნელოვან როლს ასრულებს გამოყენებითი ხასიათის ამოცანებში.

გავიხსენოთ, რომ როცა $b$ დადებითი რიცხვია და $n$ რაიმე ნამდვილი რიცხვია, მაშინ გამოსახულება $b^n$ აგრეთვე ნამდვილი რიცხვია. ეს უფლებას გვაძლევს, განვმარტოთ ***მაჩვენებლიანი ფუნქცია*** შემდეგნაირად:

***ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით***

$$f(x) = b^x, \qquad (b > 0, \;\; b \ne 1)$$

***ეწოდება მაჩვენებლიანი ფუნქცია, $b$ ფუძით და $x$ ხარისხის მაჩვენებლით. მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.***

მაგალითად, მაჩვენებლიანი ფუნქცია 2-ის ფუძით იქნება $f(x)=2^x$, რომლის განსაზღვრის არეა $(-\infty,\infty)$. ამ ფუნქციის მნიშვნელობები $x$-ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის იქნება:

$$f(3)=2^3=8, \qquad f\left(\tfrac{3}{2}\right)=2^{3/2}=2\cdot 2^{1/2}=2\sqrt{2}\,, \qquad f(0)=2^0=1,$$

$$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}, \qquad f\left(-\tfrac{2}{3}\right)=2^{-2/3}=\frac{1}{2^{2/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

მაჩვენებლიანი გამოსახულებების გამარტივებას ხელს უწყობს ძირითადი წესები, რომლებიც ადრე შევისწავლეთ. გამეორების მიზნით კიდევ ერთხელ ამოვწეროთ ხარისხებზე მოქმედების ხუთი ფორმულა:

**1.** $b^x\cdot b^y=b^{x+y}$;

**2.** $\dfrac{b^x}{b^y}=b^{x-y}$;

**3.** $(b^x)^y=b^{xy}$;

**4.** $(ab)^x=a^xb^x$;

**5.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

**მაგალითი 1.** ვთქვათ, $f(x)=2^{2x-1}$. ვიპოვოთ $x$, თუ $f(x)=16$.

**ამოხსნა:** ჩვენ უნდა ამოვხსნათ განტოლება $2^{2x-1}=16=2^4$. ამ ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ, როცა $2x-1=4$, რაც გვაძლევს $x=5/2$. აქ ვისარგებლეთ თვისებით: $b^m=b^n \Rightarrow m=n$.

მაჩვენებლიანი ფუნქცია მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მათემატიკურ ანალიზში. მისი განსაკუთრებული თვისებების გამო იგი ძალიან სასარგებლო აღმოჩნდა აგრეთვე ყველა სფეროში, სადაც მათემატიკა გამოიყენება. მაგალითად: იდეალურ პირობებში ბაქტერიების რაოდენობა რაიმე გარემოში დროის ნებისმიერი $t$ მომენტისათვის შეიძლება აღიწეროს $t$ ცვლადის მაჩვენებლიანი ფუნქციით; რადიოაქტიური ნივთიერებების დაშლა დროში ხდება ექსპონენციალური კანონით; თანხა ანაბარზე რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთისას იზრდება ექსპონენციალურად და ა. შ.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებების შესწავლა დავიწყოთ მისი გრაფიკის შესწავლით.

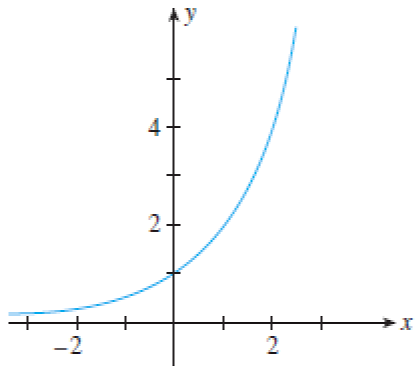
**მაგალითი 2.** ავაგოთ მაჩვენებლიანი $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკი.

**ამოხსნა:** როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, $y=f(x)=2^x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. როცა $x=0$, მაშინ $y=2^0=1$ და გამოდის, რომ $f$ ფუნქცია $y$ ღერძს მოკვეთს 1-ის ტოლ მონაკვეთს. $f$ ფუნქციის გრაფიკს $x$ ღერძთან გადაკვეთის წერტილი არ ექნება, რადგან $y=2^x$ გამოსახულება არცერთი $x$-თვის ნულის ტოლი არ ხდება. გრაფიკის ასაგებად შევადგინოთ ცხრილი:

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |

გამოთვლებით ვხედავთ, რომ $2^x$ მცირდება და უახლოვდება ნულს, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად მცირდება და მიისწრაფვის მინუს უსასრულობისაკენ, და $2^x$ შემოუსაზღვრელად იზრდება, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად იზრდება. ამრიგად, $f$

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის $(0,\infty)$ ინტერვალი ანუ დადებით რიცხვთა სიმრავლე. ცხრილის მიხედვით თუ ავაგებთ წირს, მივიღებთ $y=f(x)=2^x$ ფუნქციის გრაფიკს (ნახ. 119)



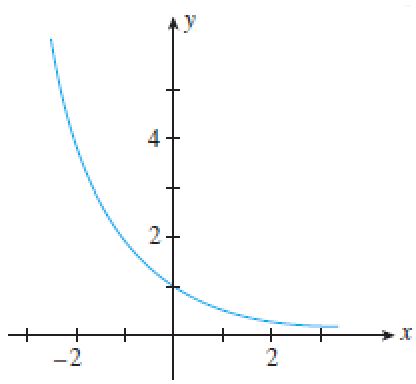

ნახაზი 119. $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკი.

**მაგალითი 3.** ავაგოთ მაჩვენებლიანი $y=(1/2)^x$ ფუნქციის გრაფიკი.

**ამოხსნა:** $y=(1/2)^x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. $y$ ღერძიდან მოჭრილი მონაკვეთია $(1/2)^0=1$. ისევე როგორც წინა მაგალითში, $y=(1/2)^x$ ფუნქციის გრაფიკი $x$ ღერძს არ კვეთს. შევადგინოთ მნიშვნელობათა ცხრილი

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $32$ | $16$ | $8$ | $4$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ |

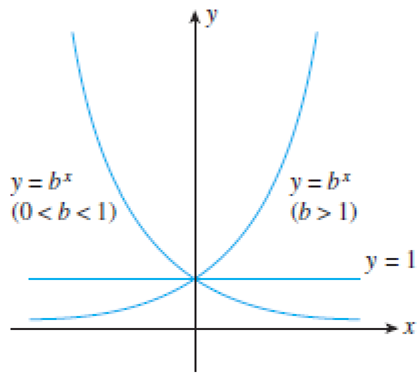
ცხრილიდან ჩანს, რომ $(1/2)^x=1/2^x$ შემოუსაზღვრელად იზრდება, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად მცირდება და მიისწრაფვის მინუს უსასრულობისაკენ, და $1/2^x$ შემოუსაზღვრელად კლებულობს და უახლოვდება ნულს, როცა $x$ შემოუსაზღვრელად იზრდება. $y=(1/2)^x$ ფუნქციის გრაფიკი აგებულია 120-ე ნახაზზე.




ნახაზი 120. $y=(1/2)^x$ ფუნქციის გრაფიკი.

ცხადია, $y=2^x$ და $y=(1/2)^x$ წარმოადგენს მაჩვენებლიანი $y=f(x)=b^x$ ფუნქციის კერძო შემთხვევებს, როცა $b=2$ და $b=1/2$ შესაბამისად.

ზოგადად, $y=b^x$ მაჩვენებლიან ფუნქციას, როცა $b>1$, აქვს $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკის ანალოგიური გრაფიკი, ხოლო როცა $0<b<1$, მაშინ $y=b^x$ ფუნქციის გრაფიკი ანალოგიურია $y=(1/2)^x$ ფუნქციის გრაფიკის. როცა $b=1$, მაშინ $y=b^x$ ფუნქცია წარმოადგენს მუდმივ $y=1$ ფუნქციას. სამივე ფუნქციის გრაფიკი აგებულია 121 ნახაზზე.




ნახაზი 121. $y=b^x$ ზრდადია, როცა $b>1$, მუდმივია, როცა $b=1$, და კლებადია, როცა $0<b<1$

***მაჩვენებლიანი $y=b^x$, $(b>0,\ b\neq 1)$ ფუნქციის თვისებები:***

1. ***განსაზღვრის არეა $(-\infty,\infty)$;***
2. ***მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(0,\infty)$;***
3. ***გრაფიკი გადის $(0,1)$ წერტილში;***
4. ***უწყვეტია $(-\infty,\infty)$ ინტერვალში;***
5. ***ზრდადია $(-\infty,\infty)$ ინტერვალში, როცა $b>1$, და კლებადია $(-\infty,\infty)$ ინტერვალში, როცა $0<b<1$.***

### მაჩვენებლიანი ფუნქცია $e$ ფუძით

მაჩვენებლიანი ფუნქცია $e$ ფუძით, სადაც $e$ ირაციონალური რიცხვია, $e$=2.7182818..., მნიშვნელოვან როლს ასრულებს როგორც თეორიულ ასევე გამოყენებით ამოცანებში. შეიძლება ვაჩვენოთ (თუმცა ჩვენ ამას არ გავაკეთებთ), რომ

$$e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m. \qquad (1)$$

$e$ რიცხვის ასეთნაირად განმარტების სისწორეში შეგვიძლია დავრწმუნდეთ კომპიუტერის საშუალებით შემდეგი ცხრილის შემოწმებით:

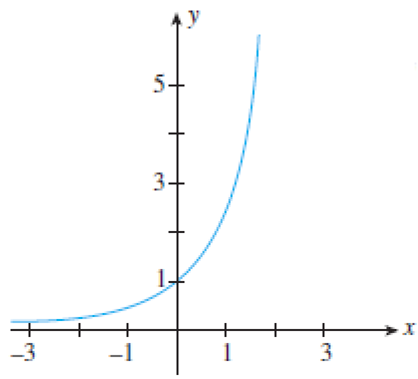
| $m$ | $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ |
|---|---|
| 10 | 2.59374 |
| 100 | 2.70481 |
| 1000 | 2.71692 |
| 10,000 | 2.71815 |
| 100,000 | 2.71827 |
| 1,000,000 | 2.71828 |

**მაგალითი 4. .** ავაგოთ მაჩვენებლიანი $y=e^x$ ფუნქციის გრაფიკი.

**ამოხსნა:** რადგან $e>1$, ამიტომ ზემოთ ჩატარებული დასკვნების საფუძველზე $y=e^x$ ფუნქციის გრაფიკი $y=2^x$ ფუნქციის გრაფიკის ანალოგიურია (ნახ.113). კალკულატორის დახმარებით შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.05 | 0.14 | 0.37 | 1 | 2.72 | 7.39 | 20.09 |

ამ ცხრილის დახმარებით შეგვიძლია ავაგოთ $y=e^x$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც აქვს სახე (ნახ. 122)




ნახაზი 122. $y=e^x$ ფუნქციის გრაფიკი.

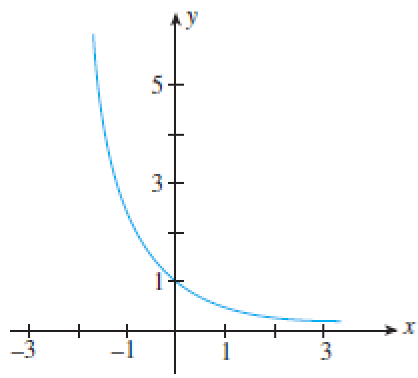
ახლა განვიხილოთ სხვა მაჩვენებლიანი ფუნქცია ისევ $e$ ფუძით, რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული ზემოთ განხილულ მაჩვენებლიან ფუნქციასთან და სასარგებლოა ისეთი მოდელების აგების დროს, როდესაც საქმე გვაქვს ექსპონენციალურ კლებასთან.

**მაგალითი 5.** ავაგოთ $y=e^{-x}$ ფუნქციის გრაფიკი.

**ამოხსნა:** რადგან $e>1$, ამიტომ $0<1/e<1$ და $f(x)=e^{-x}=1/e^x=(1/e)^x$ იქნება მაჩვენებლიანი ფუნქცია ერთზე ნაკლები ფუძით. აქედან გამომდინარე მისი გრაფიკი $y=(1/2)^x$ ფუნქციის გრაფიკის ანალოგიურია. როგორც ზემოთ, შევადგინოთ $y=e^{-x}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი:

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 20.09 | 7.39 | 2.72 | 1 | 0.37 | 0.14 | 0.05 |

ამ ცხრილის გამოყენებით ავაგოთ $y=e^{-x}$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 123)




ნახაზი 123. $y = e^{-x}$ ფუნქციის გრაფიკი.

## ლოგარითმის განმარტება და გალოგარითმების წესები

ჩვენ უკვე გავეცანით $b^y = x$ სახის მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნას, რომელშიც $x$ ცვლადი გამოსახულია $b$ ნამდვილი რიცხვითა და $y$ ცვლადით. საინტერესოა როგორ ამოვხსნათ იგივე განტოლება $y$ ცვლადის მიმართ? თქვენ შეიძლება გახსოვთ სკოლის ალგებრის კურსიდან, რომ $y$ რიცხვს ეწოდება ***ლოგარითმი $x$ რიცხვისა $b$ -ს ფუძით და მას ასე აღნიშნავენ*** $\log_b x$ **.** ეს არის ხარისხის მაჩვენებელი, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ $b$ ფუძე, რომ მივიღოთ $x$ რიცხვი:

$y = \log_b x$ ***მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა*** $x = b^y \quad (x > 0)$ **.**

შევნიშნოთ, რომ $\log_b x$ განსაზღვრულია მხოლოდ დადებითი $x$ -თვის.

**მაგალითი 6.** ამოვხსნათ $x$ -ის მიმართ შემდეგი განტოლებები:

ა) $\log_3 x = 4;$ ბ) $\log_{16} 4 = x;$ გ) $\log_x 8 = 3.$

**ამოხსნა:** ა) განმარტების თანახმად $\log_3 x = 4$ ტოლობიდან მივიღებთ $x = 3^4 = 81$;

ბ) $\log_{16} 4 = x$ ტოლობა ეკვივალენტურია შემდეგის ტოლობისა $4 = 16^x = (4^2)^x = 4^{2x}$ ანუ $4^1 = 4^{2x}$, საიდანაც მივიღებთ $2x = 1$ ანუ $x = \frac{1}{2}$;

გ) როგორც ზემოთ, აქაც განმარტების თანახმად $\log_x 8 = 3$ განტოლება ეკვივალენტურია $8 = 2^3 = x^3$ განტოლებისა, საიდანაც მივიღებთ $x = 2$. აქ ვისარგებლეთ თვისებით: $a^m = b^m \Rightarrow a = b$ .

არსებობს ორი ყველაზე უფრო ფართოდ გავრცელებული ლოგარითმი: ერთი არის ***ათობითი ლოგარითმი,*** როდესაც ლოგარითმის ფუძეა რიცხვი 10, და მეორე არის ***ნატურალური ლოგარითმი***, როდესაც ლოგარითმის ფუძეა ირაციონალური $e$ =2.7182818... რიცხვი. ასეთი ლოგარითმებისათვის სტანდარტული აღნიშვნის გარდა შემოღებულია შემოკლებული აღნიშვნა. სახელდობრ $\log_{10} x$ - ის ნაცვლად ვიყენებთ შემოკლებულ ჩაწერას $\lg x$ და $\log_e x$ ნაცვლად $\ln x$ . ამრიგად, გვაქვს

***ლოგარითმის შემდეგი აღნიშვნები:***

$\lg x = \log_{10} x$ - ***ათობითი ლოგარითმი***;

$\ln x = \log_e x$ - *ნატურალური ლოგარითმი.*

ლოგარითმული გამოსახულებების გამარტივებას ხელს უწყობს ლოგარითმის შემდეგი თვისებები:

***თუ*** $m$ ***და*** $n$ ***დადებითი რიცხვებია, მაშინ:***

1. $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$;
2. $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$;
3. $\log_b m^n = n\log_b m$;
4. $\log_b 1 = 0$;
5. $\log_b b = 1$

**მაგალითი 7.** ცნობილია, რომ $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$ და $\lg 5 \approx 0.6990$. ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით იპოვეთ: **ა)** $\lg 15$; **ბ)** $\lg 7.5$; **გ)** $\lg 81$.

**ამოხსნა: ა)** გვაქვს $\lg 15 = \lg 3 \cdot 5 = \lg 3 + \lg 5 \approx 0.4771 + 0.6990 = 1.1761$;

**ბ)** $\lg 7.5 = \lg \dfrac{15}{2} = \lg \dfrac{3 \cdot 5}{2} = \lg 3 + \lg 5 - \lg 2 \approx 0.4771 + 0.6990 - 0.3010 = 0.8751$;

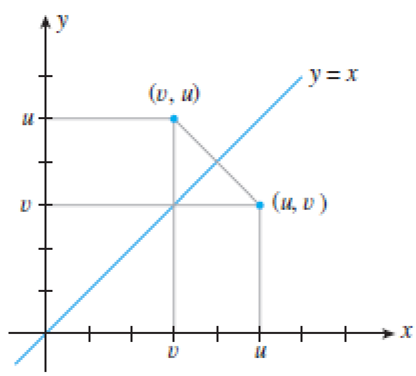
**გ)** $\lg 81 = \lg 3^4 = 4\lg 3 \approx 4(0.4771) = 1.9084$.

## ლოგარითმული ფუნქცია, მისი გრაფიკი და თვისებები

***ლოგარითმული ფუნქცია*** $b$ ***ფუძით ეწოდება ფუნქციას*** $f(x) = \log_b x$, ***სადაც*** $b > 0$ ***და*** $b \neq 1$. ***ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა დადებით რიცხვთა სიმრავლე.***

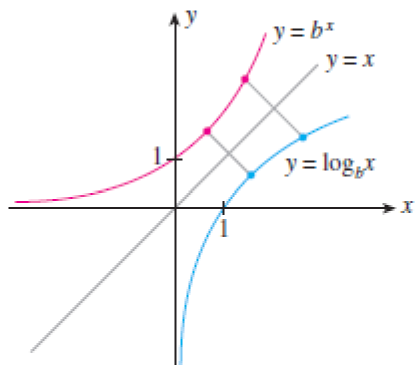
ერთი მარტივი გზა, რომლითაც შეგვიძლია ავაგოთ $y = \log_b x$ ფუნქციის გრაფიკი, არის ლოგარითმის მნიშვნელობათა ცხრილის შედგენა. თუმცა არსებობს გრაფიკის აგების მეორე უფრო მარტივი გზა, რომელიც დამყარებულია ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციების ურთიერთკავშირზე.

ვთქვათ წერტილი $(u, v)$ ძევს $y = \log_b x$ ფუნქციის გრაფიკზე, მაშინ $v = \log_b u$. ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ მაჩვენებლიანი ფორმით $u = b^v$. აქედან გამომდინარეობს, რომ წერტილი $(v, u)$ ძევს $y = b^x$ ფუნქციის გრაფიკზე. ახლა ვნახოთ, რა კავშირშია $y = x$ წრფე და $(u, v)$ და $(v, u)$ წერტილები (ნახ. 124)




ნახაზი 124. $(u, v)$ და $(v, u)$ წერტილები არიან ერთმანეთის სარკული ანასახები.

თუ $y=x$ წრფეს წარმოვიდგენთ სარკედ, მაშინ $(v,u)$ წერტილი იქნება $(u,v)$ წერტილის სარკული ანასახი. ანალოგიურად $(u,v)$ წერტილი წარმოადგენს $(v,u)$ წერტილის სარკულ ანასახს. ამ ფაქტით შეგვიძლია ვისარგებლოთ ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად. კერძოდ, თუ გვინდა ავაგოთ $y=\log_b x$ ფუნქციის გრაფიკი, სადაც $b>1$, მაშინ ჩვენ უნდა ავაგოთ $y=b^x$ ფუნქციის გრაფიკი და შემდეგ მოვახდინოთ ამ გრაფიკის სარკული ასახვა $y=x$ წრფის მიმართ (ნახ. 125)



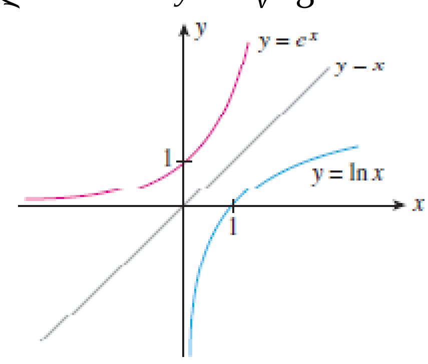

ნახაზი 125. $y=b^x$ და $y=\log_b x$ ფუნქციების გრაფიკები
არიან ერთმანეთის სარკული ანასახები

***ლოგარითმულ*** $y=\log_b x$, $(b>0,\ b\neq 1)$ ***ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები.***

1. ***განსაზღვრის არეა*** $(0,\infty)$ ***;***
2. ***მნიშვნელობათა სიმრავლეა*** $(-\infty,\infty)$ ***;***
3. ***გრაფიკი გადის (1,0) წერტილში;***
4. ***უწყვეტია*** $(0,\infty)$ ***ინტერვალზე;***
5. ***ზრდადია*** $(0,\infty)$ ***ინტერვალზე, როცა*** $b>1$***, და კლებადია*** $(0,\infty)$ ***ინტერვალზე, როცა*** $b<1$***.***

**მაგალითი 8.** ავაგოთ $y=\ln x$ ფუნქციის გრაფიკი.

**ამოხსნა:** ზემოაღნიშნულის თანახმად, ჯერ ავაგოთ $y=e^x$ ფუნქციის გრაფიკი და შემდეგ ავაგოთ მისი სარკული ანასახი $y=x$ წრფის მიმართ (ნახ.126)




ნახაზი 126. $y=\ln x$ ფუნქციის გრაფიკი არის $y=e^x$ ფუნქციის გრაფიკის სარკული ასახვა.

## ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციები როგორც ურთიერთ შექცეული ფუნქციები

მე-8 მაგალითში ჩვენ ვნახეთ რა ურთიერთკავშირი არსებობს მაჩვენებლიან $f(x)=e^x$ ფუნქციასა და ლოგარითმულ $g(x)=\ln x$ ფუნქციას შორის. ეს ურთიერთობა უშუალოდ გამომდინარეობს ლოგარითმის განმარტებიდან და აღიწერება შემდეგი თვისებებით:

$$e^{\ln x}=x, \quad (x>0)\,, \tag{2}$$

$$\ln e^x = x\,, \quad \text{ნებისმიერი ნამდვილი } x \text{ რიცხვისათვის.} \tag{3}$$

(2) და (3) თვისებიდან დავასკვნით, რომ

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=e^{\ln x}=x,$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\ln e^x=x.$$

ამრიგად,

$$f(g(x))=g(f(x))=x.$$

ნებისმიერ ორ ფუნქციას, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამ უკანასკნელ პირობას, უწოდებენ ***ურთიერთ შექცეულ ფუნქციებს.*** შევნიშნოთ, რომ ურთიერთ შექცეული ფუნქციების კომპოზიცია იგივური ფუნქციაა $F(x)=x$.

(2) და (3) ტოლობები ძალიან სასარგებლოა მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული განტოლებების ამოსახსნელად.

**მაგალითი 9.** ამოვხსნათ განტოლება $2e^{x+2}=5$.

**ამოხსნა:** ტოლობის ორივე მხარის 2-ზე გაყოფით მივიღებთ $e^{x+2}=2.5$. ავიღოთ ტოლობის ორივე მხარის ნატურალური ლოგარითმი; მივიღებთ

$$\ln e^{x+2}=\ln 2.5$$

$$x+2=\ln 2.5$$

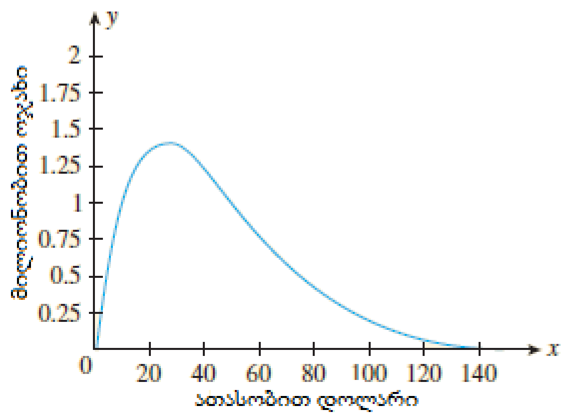
$$x=-2+\ln 2.5\approx -1.08$$

**მაგალითი 10.** ამოვხსნათ განტოლება $5\ln x+3=0$..

**ამოხსნა:** ჯერ ამოვხსნათ ლოგარითმის მიმართ, მივიღებთ $\ln x=-0.6$. აქედან $e^{\ln x}=e^{-0.6}$ და საბოლოოდ $x=e^{-0.6}\approx 0.55.$

## მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული

იმისათვის რომ შევისწავლოთ ბიუჯეტის დეფიციტის დაძლევის გეგმების ეფექტები შემოსავლების სხვადასხვა დონეზე, მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ ამერიკელი ოჯახების შემოსავლების განაწილება. სხვადასხვა კვლევითი ცენტრების მონაცემებით დასტურდება, რომ ამერიკელი ოჯახების $y$ რაოდენობა (მილიონებში), როგორც ფუნქცია მათი წლიური $x$ შემოსავლისა (ათასობით დოლარებში), 1990 წლისათვის წარმოიდგინება ქვემოთ მოცემული გრაფიკით.




ნახაზი 127. გრაფიკი გვიჩვენებს ოჯახების რიცხვს მათ წლიურ შემოსავლებთან მიმართებაში.

გრაფიკიდან ჩანს, რომ ფუნქცია თავიდან სწრაფად იზრდება და შემდეგ კლებულობს. გრაფიკიდან ასევე ჩანს, რომ ამერიკელი ოჯახების დიდი ნაწილი გამოიმუშავებს 100,000 დოლარზე ნაკლებს წელიწადში. სინამდვილეში ამერიკელი ოჯახების 95% გამოიმუშავებს 102,358 დოლარზე ნალკებს 1990 წელს. უფრო ზუსტად, ამ მონაცემებზე დაყრდნობით, დადგენილია, რომ ამერიკელი ოჯახების $y$ რიცხვი (მილიონებში), რომელთა გამომუშავება 1990 წელს შეადგენს $x$ ათას დოლარს ერთმანეთთან დაკავშირებულია განტოლებით

$$y = 0.1584xe^{-0.0000016x^3+0.00011x^2-0.04491x}, \quad (x>0),$$

რომელიც მაჩვენებლიან ფუქციას შეიცავს.

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების შემცველი მათემატიკური მოდელების სიღრმისეულად შესწავლისათვის გვჭირდება ამ ფუნქციების წარმოებულის გამოთვლის წესები. დავიწყოთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის წესით.

***წესი 1. მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული*** $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ **.**

ამრიგად $e$ ფუძის მქონე მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული თვით ამ ფუნქციის ტოლია. ამ წინადადების შესამოწმებლად გამოვთვალოთ $f(x) = e^x$ ფუნქციის წარმოებული

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}.$$

კალკულატორის მეშვეობით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ $\frac{e^h-1}{h}$ შეფარდება უახლოვდება 1-ს, როცა $h$ უახლოვდება ნულს ანუ $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$, თუმცა შესაძლებელია ამ ტოლობის მკაცრი დამტკიცება, მაგრამ იგი ჩვენს მიზანს არ წარმოადგენს. ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \cdot 1 = e^x.$$

**მაგალითი 11.** ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებული: ა) $f(x) = x^2e^x$;

ბ) $g(t)=(e^t+2)^{3/2}$.

**ამოხსნა:** ა) $f'(x)=\frac{d}{dx}(x^2e^x)=x^2\frac{d}{dx}(e^x)+e^x\frac{d}{dx}(x^2)=x^2e^x+e^x(2x)=xe^x(x+2);$

ბ) $g'(t)=\frac{d}{dt}(e^t+2)^{3/2}=\frac{3}{2}(e^t+2)^{1/2}\frac{d}{dt}(e^t+2)=\frac{3}{2}(e^t+2)^{1/2}e^t=\frac{3}{2}e^t(e^t+2)^{1/2}$.

## მაჩვენებლიან და ელემენტარულ ფუნქციათა კომპოზიციის წარმოებული

მაჩვენებლიან ფუნქციათა უფრო ფართო კლასის წარმოებულის გამოსათვლელად განვიხილოთ $h(x)=e^{f(x)}$ სახის კომპოზიცია და გამოვიყენოთ ფუნქციათა კომპოზიციის (რთული ფუნქციის) გაწარმოების წესი.

*წესი 2. თუ $f(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ $\frac{d}{dx}(e^{f(x)})=e^{f(x)}f'(x)$.*

ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ შევნიშნავთ, რომ $h(x)=g[f(x)]$, სადაც $g(x)=e^x$, და გამოვიყენებთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)=e^{f(x)}f'(x);$$

აქ გამოვიყენეთ ტოლობა $g'(x)=e^x$.

**მაგალითი 12.** ვიპოვოთ $y=xe^{-2x}$ ფუნქციის წარმოებული.

**ამოხსნა:** ნამრავლისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესების თანახმად

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{d}{dx}e^{-2x}+e^{-2x}\frac{d}{dx}(x)=xe^{-2x}\frac{d}{dx}(-2x)+e^{-2x}=-2xe^{-2x}+e^{-2x}=e^{-2x}(1-2x).$$

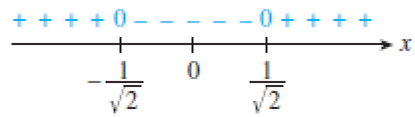
**მაგალითი 13.** ვიპოვოთ $g(t)=\frac{e^t}{e^t+e^{-t}}$ ფუნქციის წარმოებული.

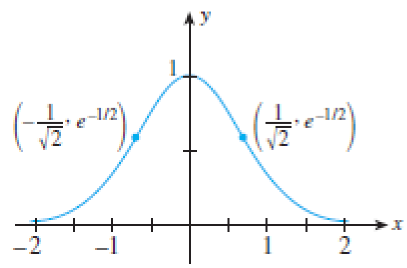
**ამოხსნა:** შეფარდებისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესების თანახმად

$$g'(t)=\frac{(e^t+e^{-t})\frac{d}{dt}(e^t)-e^t\frac{d}{dt}(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{(e^t+e^{-t})e^t-e^t(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{e^{2t}+1-e^{2t}+1}{(e^t+e^{-t})^2}=\frac{2}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

**მაგალითი 14.** ვიპოვოთ $f(x)=e^{-x^2}$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილები.

**ამოხსნა:** პირველად ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)=-2xe^{-x^2}$. მეორე რიგის წარმოებულს ექნება სახე $f''(x)=(-2x)(-2xe^{-x^2})-2e^{-x^2}=2e^{-x^2}(2x^2-1)$. თუ დავუშვებთ, რომ $f''(x)=0$, მივიღებთ $2e^{-x^2}(2x^2-1)=0$. რადგან $e^{-x^2}$ არასდროს არ ხდება ნულის ტოლი, ამიტომ გამოდის, რომ $x=\pm1/\sqrt{2}$ იქნება $f$ ფუნქციის შესაძლო გადაღუნვის წერტილი. $f''$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა, რომელიც მოცემულია ნახ. 128-ზე,




ნახაზი 128. $f''$ ფუნქციის ნიშნების დიაგრამა.

ნახაზი 129. $e^{-x^2}$ ფუნქციას აქვს ორი გადაღუნვის წერტილი

გვიჩვენებს, რომ ორივე $x=-1/\sqrt{2}$ და $x=1/\sqrt{2}$ წერტილი $f$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილებია. $f$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 129-ე ნახაზზე.

## ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული

***წესი 3. ნატურალური ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებულს აქვს სახე***

$$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}, \qquad (x\neq 0).$$

ამის შესამოწმებლად დავუშვათ $x>0$ და ჩავწეროთ $f(x)=\ln x$ ფუნქცია ეკვივალენტური ფორმით $x=e^{f(x)}$. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავაწარმოებთ, მივიღებთ $1=e^{f(x)}f'(x)$. აქედან $f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}}$, მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ, რომ $e^{f(x)}=x$, მივიღებთ $f'(x)=\frac{1}{x}$, რაც ამტკიცებს მე-3 წესის ჭეშმარიტებას.

**მაგალითი 15.** ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

ა) $f(x)=x\ln x$; ბ) $g(x)=\frac{\ln x}{x}$.

**ამოხსნა:** ა) ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x\ln x)=x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(x)=x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x=1+\ln x;$$

ბ) შეფარდებისა გაწარმოების წესის თანახმად

$$g'(x)=\frac{x\frac{d}{dx}(\ln x)-(\ln x)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}=\frac{x\left(\frac{1}{x}\right)-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

## ლოგარითმულ და ელემენტარულ ფუნქციათა კომპოზიციის წარმოებული

ლოგარითმულ ფუნქციათა უფრო ფართო კლასის წარმოებულის გამოსათვლელად განვიხილოთ $h(x) = \ln f(x)$ სახის კომპოზიცია და ერთხელ კიდევ გამოვიყენოთ ფუნქციათა კომპოზიციის (რთული ფუნქციის) გაწარმოების წესი.

***წესი 4. თუ $f(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ***

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad [f(x) > 0].$$

ამის შესამოწმებლად განვიხილოთ ფუნქციათა კომპოზიცია $h(x) = g[f(x)]$, სადაც $g(x) = \ln x$, $(x > 0)$. რადგან $g'(x) = 1/x$, ამიტომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

**მაგალითი 16.** ვიპოვოთ $y = \ln[(x^2+1)(x^3+2)^6]$ ფუნქციის წარმოებული.

**ამოხსნა:** უპირველესად გავამარტივოთ გამოსახულება ლოგარითმული ფუნქციის თვისებების გამოყენებით

$$y = \ln[(x^2+1)(x^3+2)^6] = \ln(x^2+1) + \ln(x^3+2)^6 = \ln(x^2+1) + 6\ln(x^3+2).$$

მე-4 წესის გამოყენებით მივიღებთ

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{6\frac{d}{dx}(x^3+2)}{x^3+2} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{6(3x^2)}{x^3+2} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{18x^2}{x^3+2}.$$

## ლოგარითმული წარმოებული

როგორც მე-16 მაგალითში ვნახეთ, ჯერ გავამარტივეთ მოცემული ფუნქცია და შემდგომ გამოვთვალეთ მისი წარმოებული, თუმცა პირდაპირ შეგვეძლო ამ ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლა. თუ შეამოწმებთ, ადვილად დარწმუნდებით, რომ ჩვენ ამით უბრალოდ გავიმარტივეთ წარმოებულის გამოთვლა. ჩვენ ახლა გავეცნობით გაწარმოების ერთ მეთოდს, რომელსაც ***ლოგარითმული წარმოებული*** ეწოდება და რომელიც არა მარტო გვიმარტივებს ზოგიერთი ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლას, არამედ მისი გამოყენებით შეგვიძლია ისეთი ფუნქციების წარმოებულიც გამოვთვალოთ, რომელთა გამოთვლაც სხვა გზით შეუძლებელია.

**მაგალითი 17.** ვიპოვოთ $y = x^2(x-1)(x^2+4)^3$ ფუნქციის წარმოებული.

**ამოხსნა:** უპირველესად გავალოგარითმოთ გამოსახულების ორივე მხარე და გავამარტივოთ მარჯვენა მხარე ლოგარითმული ფუნქციის თვისებების გამოყენებით

$$\ln y = \ln x^2(x-1)(x^2+4)^3 = \ln x^2 + \ln(x-1) + \ln(x^2+4)^3 = 2\ln x + \ln(x-1) + 3\ln(x^2+4).$$

გამოვთვალოთ ორივე მხარის წარმოებული

$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{d}{dx}[2\ln x+\ln(x-1)+3\ln(x^2+4)]=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+3\cdot\frac{2x}{x^2+4}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{6x}{x^2+4}$$

ტოლობის მარცხენა მხარის გამოსათვლელად გავიხსენოთ, რომ $y$ არის $x$ ცვლადის ფუნქცია. მაშასადამე, თუ დავწერთ $y=f(x)$, მაშინ

$$\frac{d}{dx}\ln y=\frac{d}{dx}\ln[f(x)]=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{y'}{y}.$$

ამრიგად, გვექნება

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{6x}{x^2+4}.$$

თუ ამ ტოლობიდან განვსაზღვრავთ $y'$-ს მივიღებთ

$$y'=y\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{6x}{x^2+4}\right)=x^2(x-1)(x^2+4)^3\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{6x}{x^2+4}\right).$$

ვიდრე შემდეგ მაგალითს განვიხილავდეთ ამოვწეროთ ლოგარითმული წარმოებულის გამოთვლის საფეხურები:

1. ***გავალოგარითმოთ განტოლების ორივე მხარე*** $e$ ***ფუძით და ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით ჩავწეროთ ჯამის სახით;***
2. ***გავაწარმოოთ განტოლების ორივე მხარე*** $x$ ***ცვლადით;***
3. ***გაწარმოებით მიღებული განტოლება ამოვხსნათ წარმოებულის მიმართ.***

**მაგალითი 18.** ვიპოვოთ $f(x)=x^x, \quad (x>0)$ ფუნქციის წარმოებული.

**ამოხსნა:** მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ მოცემული ფუნქცია არც მაჩვენებლიანია და არც ხარისხოვანი. მისი წარმოებულის გამოთვლა მხოლოდ ლოგარითმული წარმოებულით არის შესაძლებელი. გავალოგარითმოთ განტოლების ორივე მხარე, გვექნება

$$\ln f(x)=\ln x^x=x\ln x.$$

ორივე მხარის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=x\frac{d}{dx}(\ln x)+(\ln x)\frac{d}{dx}x=x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x=1+\ln x.$$

მაშასადამე,

$$f'(x)=f(x)(1+\ln x)=x^x(1+\ln x).$$

# სავარჯიშო

გამოთვალეთ :

1. a. $4^{-3} \cdot 4^{5}$ b. $3^{-3} \cdot 3^{6}$
2. a. $(2^{-1})^{3}$ b. $(3^{-2})^{3}$
3. a. $9(9)^{-1/2}$ b. $5(5)^{-1/2}$
4. a. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{-2}$ b. $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{-3}$
5. a. $\frac{(-3)^{4}(-3)^{5}}{(-3)^{8}}$ b. $\frac{(2^{-4})(2^{6})}{2^{-1}}$
6. a. $3^{1/4} \cdot 9^{-5/8}$ b. $2^{3/4} \cdot 4^{-3/2}$
7. a. $\frac{5^{3.3} \cdot 5^{-1.6}}{5^{-0.3}}$ b. $\frac{4^{2.7} \cdot 4^{-1.3}}{4^{-0.4}}$
8. a. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-1/4}\left(\frac{27}{64}\right)^{-1/3}$ b. $\left(\frac{8}{27}\right)^{-1/3}\left(\frac{81}{256}\right)^{-1/4}$

გაამარტივეთ გამოსახულებები:

9. a. $(64x^{9})^{1/3}$ b. $(25x^{3}y^{4})^{1/2}$
10. a. $(2x^{3})(-4x^{-2})$ b. $(4x^{-2})(-3x^{5})$
11. a. $\frac{6a^{-5}}{3a^{-3}}$ b. $\frac{4b^{-4}}{12b^{-6}}$
12. a. $y^{-3/2}y^{5/3}$ b. $x^{-3/5}x^{8/3}$
13. a. $(2x^{3}y^{2})^{3}$ b. $(4x^{2}y^{2}z^{3})^{2}$
14. a. $(x^{r/s})^{s/r}$ b. $(x^{-b/a})^{-a/b}$
15. a. $\frac{5^{0}}{(2^{-3}x^{-3}y^{2})^{2}}$ b. $\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^{0}}$
16. a. $\frac{(a^{m} \cdot a^{-n})^{-2}}{(a^{m+n})^{2}}$ b. $\left(\frac{x^{2n-2}y^{2n}}{x^{5n+1}y^{-n}}\right)^{1/3}$

ამოხსენით განტოლება $x$ -ის მიმართ:

**17.** $6^{2x} = 6^4$

**18.** $5^{-x} = 5^3$

**19.** $3^{3x-4} = 3^5$

**20.** $10^{2x-1} = 10^{x+3}$

**21.** $(2.1)^{x+2} = (2.1)^5$

**22.** $(-1.3)^{x-2} = (-1.3)^{2x+1}$

**23.** $8^x = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-2}$

**24.** $3^{x-x^2} = \frac{1}{9^x}$

**25.** $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

**26.** $2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$

ერთი და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეში ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

**27.** $y = 2^x, y = 3^x$ და $y = 4^x$

**28.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ და $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

**29.** $y = 2^{-x}, y = 3^{-x}$ და $y = 4^{-x}$

**30.** $y = 4^{0.5x}$ და $y = 4^{-0.5x}$

**31.** $y = 4^{0.5x}, y = 4^x$ და $y = 4^{2x}$

**32.** $y = e^x, y = 2e^x$ და $y = 3e^x$

**33.** $y = e^{0.5x}, y = e^x$ და $y = e^{1.5x}$

**34.** $y = e^{-0.5x}, y = e^{-x}$ და $y = e^{-1.5x}$

**35.** $y = 0.5e^{-x}, y = e^{-x}$ და $y = 2e^{-x}$

**36.** $y = 1 - e^{-x}$ და $y = 1 - e^{-0.5x}$

ჩაწერეთ შემდეგი განტოლებები ლოგარითმული სახით:

**37.** $2^6 = 64$

**38.** $3^5 = 243$

**39.** $3^{-2} = \frac{1}{9}$

**40.** $5^{-3} = \frac{1}{125}$

**41.** $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$

**42.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

**43.** $32^{3/5} = 8$

**44.** $81^{3/4} = 27$

**45.** $10^{-3} = 0.001$

**46.** $16^{-1/4} = 0.5$

ცნობილია, რომ $\lg 3 \approx 0.4771$ და $\lg 4 \approx 0.6021$. იპოვეთ შემდეგი ლოგარითმების მნიშვნელობები:

**47.** $\log 12$ **48.** $\log \frac{3}{4}$

**49.** $\log 16$ **50.** $\log \sqrt{3}$

**51.** $\log 48$ **52.** $\log \frac{1}{300}$

წარმოადგინეთ შემდეგი გამოსახულებები ერთი სიდიდის ლოგარითმის სახით:

**53.** $2 \ln a + 3 \ln b$ **54.** $\frac{1}{2} \ln x + 2 \ln y - 3 \ln z$

**55.** $\ln 3 + \frac{1}{2} \ln x + \ln y - \frac{1}{3} \ln z$

**56.** $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln(x+1) - 2\ln(1+\sqrt{x})$

ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით გაშალეთ და გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

**57.** $\log x(x+1)^4$ **58.** $\log x(x^2+1)^{-1/2}$

**59.** $\log \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$ **60.** $\ln \frac{e^x}{1+e^x}$

**61.** $\ln xe^{-x^2}$ **62.** $\ln x(x+1)(x+2)$

**63.** $\ln \frac{x^{1/2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ **64.** $\ln \frac{x^2}{\sqrt{x}(1+x)^2}$

ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

**65.** $y = \log_3 x$ **66.** $y = \log_{1/3} x$

**67.** $y = \ln 2x$ **68.** $y = \ln \frac{1}{2}x$

ერთი და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეში ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

**69.** $y = 2^x$ და $y = \log_2 x$ **70.** $y = e^{3x}$ და $y = \frac{1}{3}\ln x$

ლოგარითმის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

**71.** $e^{0.4t} = 8$ **72.** $\frac{1}{3}e^{-3t} = 0.9$

**73.** $5e^{-2t} = 6$ **74.** $4e^{t-1} = 4$

**75.** $2e^{-0.2t} - 4 = 6$ **76.** $12 - e^{0.4t} = 3$

**77.** $\frac{50}{1+4e^{0.2t}} = 20$ **78.** $\frac{200}{1+3e^{-0.3t}} = 100$

**79.** $A = Be^{-t/2}$ **80.** $\frac{A}{1+Be^{t/2}} = C$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

**81.** $f(x) = e^{3x}$ **82.** $f(x) = 3e^{x}$

**83.** $g(t) = e^{-t}$ **84.** $f(x) = e^{-2x}$

**85.** $f(x) = e^{x} + x$ **86.** $f(x) = 2e^{x} - x^2$

**87.** $f(x) = x^3e^{x}$ **88.** $f(u) = u^2e^{-u}$

**89.** $f(x) = \dfrac{2e^x}{x}$ **90.** $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

**91.** $f(x) = 3(e^x + e^{-x})$ **92.** $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

**93.** $f(w) = \dfrac{e^w + 1}{e^w}$ **94.** $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

**95.** $f(x) = 2e^{3x-1}$ **96.** $f(t) = 4e^{3t+2}$

**97.** $h(x) = e^{-x^2}$ **98.** $f(x) = e^{x^2-1}$

**99.** $f(x) = 3e^{-1/x}$ **100.** $f(x) = e^{1/(2x)}$

**101.** $f(x) = (e^x + 1)^{25}$ **102.** $f(x) = (4 - e^{-3x})^3$

**103.** $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ **104.** $f(t) = -e^{-\sqrt{2t}}$

**105.** $f(x) = (x - 1)e^{3x+2}$ **106.** $f(s) = (s^2 + 1)e^{-s^2}$

**107.** $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ **108.** $g(t) = \dfrac{e^{-t}}{1 + t^2}$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მეორე რიგის წარმოებულები:

**109.** $f(x) = e^{-4x} + 2e^{3x}$ **110.** $f(t) = 3e^{-2t} - 5e^{-t}$

**111.** $f(x) = 2xe^{3x}$ **112.** $f(t) = t^2e^{-2t}$

113. იპოვეთ $y = e^{2x-3}$ ფუნქციის გრაფიკის $\left(\dfrac{3}{2},1\right)$ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

114. იპოვეთ $y = e^{-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის $(1,1/e)$ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

115. იპოვეთ $f(x) = e^{-x^2/2}$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები.

116. იპოვეთ $f(x) = x^2e^{-x}$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები.

117. იპოვეთ $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები.

**118.** იპოვეთ $f(x)=xe^{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები.

**119.** იპოვეთ $f(x)=xe^{-2x}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

**120.** იპოვეთ $f(x)=2e^{-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები.

**121.** იპოვეთ $f(x)=e^{-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილებში გავლებული მხების განტოლება.

**122.** იპოვეთ $f(x)=xe^{-x}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილებში გავლებული მხების განტოლება.

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების აბსოლუტური ექსტრემუმი მითითებულ ინტერვალზე:**

**123.** $f(x)=e^{-x^2}$, $[-1,1]$; **124.** $h(x)=e^{x^2-4}$, $[-2,2]$;

**125.** $g(x)=(2x-1)e^{-x}$, $[0,\infty)$;

**126.** $f(x)=xe^{-x^2}$, $[0,2]$.

**იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:**

**127.** $f(x)=\ln x^8$ **128.** $h(t)=2\ln t^5$

**129.** $f(x)=\ln\sqrt{x}$ **130.** $f(x)=\ln(\sqrt{x}+1)$

**131.** $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2}$ **132.** $f(x)=\ln\dfrac{1}{2x^3}$

**133.** $f(x)=\ln(4x^2-6x+3)$

**134.** $f(x)=\ln(3x^2-2x+1)$

**135.** $f(x)=\ln\dfrac{2x}{x+1}$ **136.** $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

**137.** $f(x)=x^2\ln x$ **138.** $f(x)=3x^2\ln 2x$

**139.** $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$ **140.** $f(x)=\dfrac{3\ln x}{x^2}$

**141.** $f(u)=\ln(u-2)^3$ **142.** $f(x)=\ln(x^3-3)^4$

**143.** $f(x)=\sqrt{\ln x}$ **144.** $f(x)=\sqrt{\ln x+x}$

**145.** $f(x)=(\ln x)^3$ **146.** $f(x)=2(\ln x)^{3/2}$

**147.** $f(x)=\ln(x^3+1)$ **148.** $f(x)=\ln\sqrt{x^2-4}$

**149.** $f(x)=e^{x}\ln x$ **150.** $f(x)=e^{x}\ln\sqrt{x+3}$

**151.** $f(t)=e^{2t}\ln(t+1)$ **152.** $g(t)=t^2\ln(e^{2t}+1)$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მეორე რიგის წარმოებულები:

153. $f(x)=\ln 2x$; 154. $f(x)=\ln(x+5)$;
155. $f(x)=\ln(x^2+2)$; 156. $f(x)=(\ln x)^2$;
157. $f(x)=x^2\ln x$; 158. $g(x)=e^{2x}\ln x$.

ლოგარითმული წარმოებულის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

159. $y=(x+1)^2(x+2)^3$ 160. $y=(3x+2)^4(5x-1)^2$
161. $y=(x-1)^2(x+1)^3(x+3)^4$
162. $y=\sqrt{3x+5}(2x-3)^4$
163. $y=\dfrac{(2x^2-1)^5}{\sqrt{x+1}}$ 164. $y=\dfrac{\sqrt{4+3x^2}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$
165. $y=3^x$ 166. $y=x^{x+2}$
167. $y=(x^2+1)^x$ 168. $y=x^{\ln x}$

არაცხადი ფუნქციის წარმოებულის გამოყენებით იპოვეთ $dy/dx$:

169. $\ln y-x\ln x=-1$; 170. $\ln xy-y^2=5$.

171. იპოვეთ $y=x\ln x$ ფუნქციის გრაფიკის $(1,0)$ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

172. იპოვეთ $y=\ln x^2$ ფუნქციის გრაფიკის $(2,\ln 4)$ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

173. იპოვეთ $f(x)=\ln x^2$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები.

174. იპოვეთ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის ინტერვალები.

175. იპოვეთ $f(x)=x^2+\ln x^2$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები.

176. იპოვეთ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობის და ამოზნექილობის ინტერვალები.

177. იპოვეთ $f(x)=\ln(x^2+1)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

178. იპოვეთ $f(x)=x^2\ln x$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

179. იპოვეთ $f(x)=x^2+2\ln x$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილებში გავლებული მხების განტოლება.

180. იპოვეთ $f(x)=e^{x/2}\ln x$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილებში გავლებული მხების განტოლება. (მითითება: აჩვენეთ, რომ მხოლოდ (1,0) წერტილია გადაღუნვის წერტილი) .

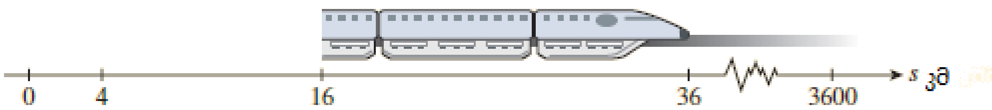
**181.** იპოვეთ $f(x)=x-\ln x$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმი $\left[\frac{1}{2},3\right]$ ინტერვალზე.

**182.** იპოვეთ $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმი $[2,5]$ ინტერვალზე.

# მეთორმეტე ლექცია

## პირველადი ფუნქცია

ერთხელ კიდევ დავუბრუნდეთ მატარებლის მოძრაობის მაგალითს (ნახ. 130)




ნახაზი 130.

ჩვენ ადრე განვიხილეთ შემდეგი ამოცანა:
*თუ ვიცით მატარებლის ადგილმდებარეობა დროის ნებისმიერი $t$ მომენტისათვის, მაშინ შეგვიძლია თუ არა განვსაზღვროთ მისი სიჩქარე იმავე $t$ დროისათვის?*
როგორც ვნახეთ, თუ მატარებლის მდებარეობა აღიწერება $t$ ცვლადის $f$ ფუნქციით, მაშინ მისი სიჩქარე დროის ნებისმიერი $t$ მომენტისათვის $f'(t)$ ფუნქციის ტოლია. აქ $f'$ ფუნქცია, რომელიც მატარებლის სიჩქარეს გამოსახავს, წარმოადგენს $f$ ფუნქციის წარმოებულს.

ახლა განვიხილოთ შებრუნებული ამოცანა:
*თუ ჩვენ ვიცით მატარებლის სიჩქარე დროის ნებისმიერი $t$ მომენტისათვის, მაშინ შეგვიძლია თუ არა განვსაზღვროთ მისი ადგილმდებარეობა $t$ მომენტისათვის?*
ამ ამოცანის გადასაწყვეტად ჩვენ გვჭირდება ფუნქციის პირველადის ცნება.

***$F$ ფუნქციას ეწოდება $f$ ფუნქციის პირველადი $I$ ინტერვალზე, თუ $F'(x)=f(x)$ ტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი $x$ -თვის $I$ ინტერვალიდან.***

ამრიგად, $f$ ფუნქციის პირველადი არის $F$ ფუნქცია, თუ $F$ -ის წარმოებული არის $f$.
მაგალითად, $F(x)=x^2$ არის $f(x)=2x$ ფუნქციის პირველადი, რადგან

$$F'(x)=\frac{d}{dx}(x^2)=2x=f(x).$$

ასევე $F(x)=x^3+2x+1$ არის $f(x)=3x^2+2$ ფუნქციის პირველადი, რადგან

$$F'(x)=\frac{d}{dx}(x^3+2x+1)=3x^2+2=f(x).$$

**მაგალითი 1.** ვთქვათ, $F(x)=x$, $G(x)=x+2$ და $H(x)=x+C$, სადაც $C$ ნებისმიერი მუდმივია. ვაჩვენოთ, რომ სამივე $F$, $G$ და $H$ წარმოადგენს $f(x)=1$ ფუნქციის პირველადს.

**ამოხსნა:**

$$F'(x)=\frac{d}{dx}(x)=1=f(x),$$

$$G'(x)=\frac{d}{dx}(x+2)=1=f(x),$$

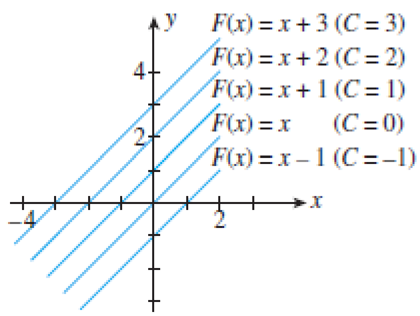
$$H'(x)=\frac{d}{dx}(x+C)=1=f(x).$$

ვხედავთ, რომ $F$, $G$ და $H$ ნამდვილად წარმოადგენს $f(x)=1$ ფუნქციის პირველადს. ამ მაგალითიდან ვხედავთ, რომ თუ ცნობილია $f$ ფუნქციის ერთი პირველადი $F$, მაშინ სხვა პირველადი მიიღება $F$-გან ნებისმიერი მუდმივის მიმატებით.

**თეორემა 1. ვთქვათ, $f$ ფუნქციის ერთერთი პირველადია $G$, მაშინ $f$ ფუნქციის ნებისმიერი პირველადი $F$ წარმოიდგინება ტოლობით $F(x)=G(x)+C$, სადაც $C$ ნებისმიერი მუდმივია.**

ამ თეორემის დამტკიცებას გამოვტოვებთ.

განხილული მაგალითიდან ასევე ჩანს, რომ $f'(x)=1$ განტოლებას უსასრულოდ ბევრი ამონახსენი აქვს. თითოეული მათგანი მიიღება $F(x)=x+C$ ფუნქციიდან $C$ მუდმივის შერჩევით. ამ პირველადების გრაფიკებს წარმოადგენს პარალელური წრფეები, რომელთა საკუთხო კოეფიციენტია 1 (ნახ. 131)




ნახაზი 131. $f(x)=1$ ფუნქციის რამდენიმე პირველადი.

## განუსაზღვრელი ინტეგრალი და ინტეგრების წესები

ფუნქციის პირველადის მოძებნის პროცედურას ***ინტეგრებას*** უწოდებენ. $f$ ფუნქციიდან ინტეგრების ოპერაციის მისათითებლად ვიყენებთ სიმბოლოს $\int$, რომელსაც ინტეგრალის ნიშანს უწოდებენ და ასე ჩავწერთ

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

[იკითხება: განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან $x$-ის მიმართ უდრის $F(x)+C$ ფუნქციას]. ამრიგად, განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან არის $F(x)+C$ სახით მოცემულ ფუნქციათა ოჯახი, სადაც $F'(x)=f(x)$. $f$ ***-ს ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია***, $f(x)dx$ - ***ინტეგრალქვეშა გამოსახულება,*** $x$ ***- საინტეგრაციო ცვლადი***, ხოლო $C$-ს ***ინტეგრების მუდმივი.*** $dx$ გამოსახულება ინტეგრალქვეშ მიგვითითებს, რომ ინტეგრების ოპერაცია სრულდება $x$ ცვლადის მიმართ. თუ დამოუკიდებელი ცვლადი არის $t$, მაშინ დავწერთ $\int f(t)dt$.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის რამდენიმე წესი. რადგან გაწარმოების და ინტეგრების ოპერაციები ურთიერთ შებრუნებული ოპერაციებია, ამიტომ ინტეგრების წესები უშუალოდ გამომდინარეობს გაწარმოების

წესებიდან. ინტეგრების შედეგის სისწორეში შეგვიძლია დავრწმუნდეთ $F' = f$ ტოლობის შემოწმებით.

*წესი 1. განუსაზღვრელი ინტეგრალი მუდმივიდან*

$$\int k\,dx = k\,x + C, \quad k \text{ -მუდმივია.}$$

**მაგალითი 2.** გამოვთვალოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი: ა) $\int 2dx$; ბ) $\int \pi^2 dx$.

**ამოხსნა:** ორივე ინტეგრალში $f(x) = k$, სადაც $k$ მუდმივია. ამიტომ პირველი წესის თანახმად: ა) $\int 2dx = 2x + C$; ბ) $\int \pi^2 dx = \pi^2 x + C$.

ხარისხოვანის ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

ვღებულობთ ხარისხოვანი ფუნქციის ინტეგრების წესს.

*წესი 2. ხარისხოვანი ფუნქციის ინტეგრება:*

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$$

ამ ტოლობის შესამოწმებლად შევნიშნოთ, რომ

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\right) = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n = f(x).$$

**მაგალითი 2.** გამოვთვალოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

ა) $\int x^3 dx$; ბ) $\int x^{3/2} dx$; გ) $\int \frac{1}{x^{3/2}} dx$

**ამოხსნა:** ა) $\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C;$

ბ) $\int x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + C;$

გ) $\int \frac{1}{x^{3/2}} = \int x^{-3/2} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-1/2} + C = -2x^{-1/2} + C = -\frac{2}{x^{1/2}} + C.$

ამ ტოლობების სისწორის შესამოწმებლად უნდა გავაწარმოოთ მიღებული პირველადები და ვაჩვენოთ, რომ წარმოებულები შესაბამისად ემთხვევიან ინტეგრალქვეშა ფუნქციებს.

შემდეგი წესი გვეუბნება, რომ მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ.

*წესი 3. ნებისმიერი მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ*

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \text{ სადაც } A \text{ მუდმივია.}$$

ეს წესი უშუალოდ გამომდინარეობს გაწარმოების მე-3 წესიდან.

**მაგალითი 3.** გამოვთვალოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი: ა) $\int 2t^3 dt$; ბ) $\int (-3)x^{-2} dx$.

**ამოხსნა:** მე-3 წესის გამოყენებით მივიღებთ:

ა) $\int 2t^3dt = 2\int t^3dt = 2\left(\frac{1}{4}t^4 + K\right) = \frac{1}{2}t^4 + 2K = \frac{1}{2}t^4 + C,$

სადაც $C = 2K$ და $K$ ნებისმიერი მუდმივია. შემდეგში ინტეგრების მუდმივს ყოველთვის აღვნიშნავთ $C$ ასოთი. შევნიშნოთ, რომ რაიმე არანულოვანი რიცხვის ნამრავლი ნებისმიერ მუდმივზე კვლავ ნებისმიერი მუდმივია;

ბ) $\int (-3)x^{-2}dx = -3\int x^{-2}dx = (-3)(-1)x^{-1} + C = \frac{3}{x} + C.$

***წესი 4. განუსაზღვრელი ინტეგრალი ორი ფუნქციის ჯამიდან (სხვაობიდან) ტოლია ამ ფუნქციიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალების ჯამისა (სხვაობისა)***

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

ეს წესი უშუალოდ გამომდინარეობს ფუნქციათა სასრული რაოდენობა ჯამის წარმოებულის მე-4 წესიდან.

**მაგალითი 3.** გამოვთვალოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

$$\int (3x^5 + 4x^{3/2} - 2x^{-1/2})dx.$$

**ამოხსნა:** მე-3 წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\int (3x^5 + 4x^{3/2} - 2x^{-1/2})dx = \int 3x^5dx + \int 4x^{3/2}dx - \int 2x^{-1/2}dx =$$

$$3\int x^5dx + 4\int x^{3/2}dx - 2\int x^{-1/2}dx = (3)\left(\frac{1}{6}\right)x^6 + (4)\left(\frac{2}{5}\right)x^{5/2} - (2)(2)x^{1/2} + C =$$

$$\frac{1}{2}x^6 + \frac{8}{5}x^{5/2} - 4x^{1/2} + C$$

შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალების ჯამად დაშლისა და თითოეული ინტეგრალის გამოთვლის შედეგად მიღებული ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივები შევკრიბეთ და დავწერეთ ერთი ნებისმიერი მუდმივი, ვინაიდან სამი ნებისმიერი მუდმივის ჯამი კვლავ ნებისმიერი მუდმივია.

***წესი 5. განუსაზღვრელი ინტეგრალი მაჩვენებლიანი ფუნქციიდან e ფუძით თვით ამ ფუნქციის ტოლია (თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ინტეგრების მუდმივს)***

$$\int e^x dx = e^x + C\ .$$

**მაგალითი 4.** გამოვთვალოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

$$\int (2e^x - x^3)\,dx.$$

**ამოხსნა:** გვაქვს $\int (2e^x - x^3)\,dx = \int 2e^xdx - \int x^3dx = 2\int e^xdx - \int x^3dx = 2e^x - \frac{1}{4}x^4 + C\ .$

გავიხსენოთ, რომ მე-2 წესი, რომელიც ხარისხოვანი ფუნქციის ინტეგრებას ეხება, გამორიცხავს შემთხვევას, როცა $n = 1$ ანუ არ მოიცავს $f(x) = x^{-1}$ ფუნქციის ინტეგრების წესს. ამ ფუნქციის ინტეგრებისათვის გვაქვს შემდეგი წესი.

*წესი 6. განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)=x^{-1}$ ფუნქციიდან გამოითვლება შემდეგი ფორმულით*

$$\int x^{-1}dx=\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C, \qquad (x\neq 0)\,.$$

ეს წესი ადვილად შემოწმდება, თუ გავიხსენებთ, რომ

$$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}\,.$$

**მაგალითი 5.** გამოვთვალოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

$$\int\left(2x+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx.$$

**ამოხსნა:**

$$\int\left(2x+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx=\int 2x\,dx+\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{4}{x^2}dx=2\int x\,dx+3\int x^{-1}dx+4\int x^{-2}dx=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\right)x^2+3\ln|x|+4(-1)x^{-1}+C=x^2 3\ln|x|-\frac{4}{x}+C$$

### უმარტივესი დიფერენციალური განტოლება საწყისი პირობით

დაუბრუნდეთ ამოცანას, რომელიც ლექციის დასაწყისში დავსვით: *თუ მოცემულია ფუნქციის წარმოებული $f'$, შეგვიძლია თუ არა ვიპოვოთ $f$ ფუნქცია?* მაგალითად, ვთქვათ, მოცემულია ფუნქციის წარმოებული

$$f'(x)=2x-1 \tag{1}$$

და გვსურს ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქცია. გამომდინარე იქიდან, რაც უკვე ვიცით, $f$ ფუნქცია შეგვიძლია ვიპოვოთ (1) განტოლების ინტეგრებით. ამრიგად,

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-1)dx=x^2-x+C\,, \tag{2}$$

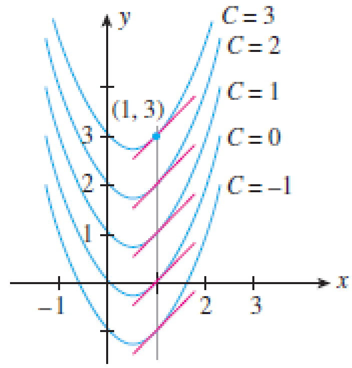
სადაც $C$ ნებისმიერი მუდმივია. ამრიგად, არსებობს უსასრულო რაოდენობა ფუნქციებისა, რომლებიც ერთმანეთისაგან მუდმივი შესაკრებით განსხვავდებიან და რომელთა წარმოებული $2x-1$ ტოლია.

(1) განტოლებას ***დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.*** ზოგადად, ***დიფერენციალური განტოლება ეწოდება განტოლებას, რომელიც საძიებელი ფუნქციის წარმოებულს ან დიფერენციალს შეიცავს.***

(1) განტოლებაში საძიებელი ფუნქციაა $f$. დიფერენციალური განტოლების ***ამონახსნი*** ეწოდება ნებისმიერ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას. ამრიგად, (2) ტოლობა გვაძლევს (1) დიფერენციალური განტოლების ყველა ამონახსნს და მას შესაბამისად $f'(x)=2x-1$ განტოლების ***ზოგად ამონახსნს*** უწოდებენ.

$f(x)=x^2-x+C$ ზოგადი ამონახსნის გრაფიკი $C$ ნებისმიერი მუდმივის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის მოცემულია 132-ე ნახაზზე. ამ გრაფიკებს აქვთ ერთი ზოგადი თვისება: $x$-ის ფიქსირებული მნიშვნელობისთვის ყველა გრაფიკის მხების საკუთხო

კოეფიციენტი ერთი და იგივეა. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ წირთა $f(x)=x^2-x+C$ ოჯახის ნებისმიერი წევრის მხების საკუთხო კოეფიციენტი




ნახაზი 132. ფუნქციათა გრაფიკები, რომელთა წარმოებული $f'(x)=2x-1$ ტოლია. $x$-ის ფიქსირებული მნიშვნელობისთვის ყველა გრაფიკის მხების საკუთხო კოეფიციენტი ერთ და იგივეა.

ფიქსირებული $x$-თვის უნდა იყოს $2x-1$ ტოლი. მიუხედავად იმისა, რომ $f'(x)=2x-1$ დიფერენციალურ განტოლებას გააჩნია უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ ***კერძო ამონახსნი,*** რომელიც $x$-ის მოცემული კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ღებულობს წინასწარ ნებისმიერად დასახელებულ მნიშვნელობას. მაგალითად, ვთქვათ საძიებელმა კერძო $f$ ამონახსნმა უნდა დააკმაყოფილოს პირობა $f(1)=3$ ანუ კერძო ამონახსნის გრაფიკი უნდა გადიოდეს (1,3) წერტილზე. თუ ამ პირობას გავითვალისწინებთ ზოგად ამონახსნში, გვექნება

$$f(1)=1-1+C=3,$$

საიდანაც $C=3$. ამრიგად, კერძო ამონახსნი იქნება $f(x)=x^2-x+3$ (ნახ. 132).

პირობა $f(1)=3$, რომლითაც შევარჩიეთ კერძო ამონახსნი წარმოადგენს ე.წ. ***საწყისი პირობის*** მაგალითს. ზოგადად, ***საწყისი პირობა*** არის პირობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს კერძო ამონახსნი $f$, როცა $x=a$.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მოძებნას საწყისი პირობით უწოდებენ ***ამოცანას საწყისი პირობით.*** განვიხილოთ მაგალითი.

**მაგალითი 6.** ვიპოვოთ $f$ ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ

$$f'(x)=3x^2-4x+8 \quad \text{და} \quad f(1)=9.$$

**ამოხსნა:** ამრიგად, ჩვენ ვიხილავთ ამოცანას საწყისი პირობით

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-4x+8 \\ f(1)=\qquad\qquad 9 \end{array}\right\}.$$

$f'$ ფუნქციის ინტეგრებით მივიღებთ

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x+8)dx=x^3-2x^2+8x+C.$$

$f(1)=9$ პირობის გამოყენებით მივიღებთ

$$9=f(1)=1^3-2(1)^2+8(1)+C=7+C \quad \text{ანუ} \quad C=2.$$

მაშასადამე, საძიებელ ფუნქციას აქვს სახე $f(x)=x^3-2x^2+8x+2.$

**მაგალითი 7.** განვიხილოთ მატარებლის მოძრაობა რკინიგზის სწორხაზოვან უბანზე. სპიდომეტრის მონაცემებით მატარებლის სიჩქარე დროის $t$ მომენტისათვის განისაზღვრება სიჩქარის ფუნქციით, რომელსაც აქვს სახე $v(t)=8t, \quad (0\le t\le 30)$. ვიპოვოთ მატარებლის მდებარეობა $t$ $(0\le t\le 30)$ მომენტისათვის, თუ ცნობილია, რომ საწყის მომენტში მატარებელი იმყოფებოდა საკოორდინატო ღერძის სათავეში.

**ამოხსნა:** ვთქვათ, მატარებლის მდებარეობა $t$ $(0\le t\le 30)$ მომენტისათვის განისაზღვრება $s(t)$ ფუნქციით. მაშინ $s'(t)=v(t)$. ამრიგად, გვაქვს ამოცანა საწყისი პირობით

$$\left.\begin{aligned} s'(t)&=8t\\ s(0)&=\ 0\end{aligned}\right\}.$$

სისტემის პირველი განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ

$$s(t)=\int s'(t)dt=\int 8tdt=4t^2+C,$$

სადაც $C$ ნემისმიერი მუდმივია. მის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ საწყისი პირობით $s(0)=0$. მივიღებთ $s(0)=4(0)+C=0$ ანუ $C=0$. მაშასადამე, მატარებლის მდებარეობა განისაზღვრება ფუნქციით $s(t)=4t^2, \quad (0\le t\le 30).$

## ჩასმის ხერხი განუსაზღვრელ ინტეგრალში.

ჩვენ ზემოთ განვიხილეთ ინტეგრების რამდენიმე წესი, რომლებიც უშუალოდ დაკავშირებული იყვნენ გაწარმოების წესებთან. ახლა განვიხილოთ ინტეგრების ერთი მეთოდი, რომელსაც ***ჩასმის ხერხი*** ეწოდება და რომელიც დაკავშირებულია რთული ფუნქციის გაწარმოების წესთან. ჩასმის ხერხი გამოიყენება უფრო ფართო კლასის ფუნქციების ინტეგრებისათვის. ვნახოთ თუ როგორ გამოიყენება ჩასმის ხერხი.

განვიხილოთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი

$$\int 2(2x+4)^5dx. \tag{3}$$

ამ ინტეგრალის გამოთვლა შეიძლება ინტეგრალქვეშა $(2x+4)^5$ ფუნქციის გაშლით და წევრწევრა ინტეგრებით. მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია გავამარტივოთ ინტეგრალი ცვლადის შეცვლით. კერძოდ, შემოვიღოთ აღნიშვნა ანუ შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $u=2x+4$, მაშინ დიფერენცირებით მივიღებთ $du=2dx$. თუ ამ სიდიდეებს ჩავსვავთ ინტეგრალში მივიღებთ

$$\int 2(2x+4)^5dx=\int (2x+4)^5(2dx)=\int u^5du.$$

გამოვიყენოთ ხარისხოვანი ფუნქციიდან ინტეგრების წესი ს~~, მივიღებთ~~

$$\int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C\,.$$

ამ შედეგის გამოყენებით, თუ დავუბრუნდებით ძველ ცვლადს, საბოლოოდ გვექნება

$$\int 2(2x+4)^5 dx = \frac{1}{6}(2x+4)^6 + C\,.$$

ჩვენ შგვიძლია შევამოწმოთ შედეგის სისწორე წარმოებულის გამოთვლით

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{6}(2x+4)^6 + C\right] = \frac{1}{6}\cdot 6(2x+4)^5(2) = 2(2x+4)^5\,,$$

რომელიც ზუსტად ემთხვევა ინტეგრალქვეშა ფუნქციას.

იმისათვის რომ ზოგადად დავინახოთ, თუ რა წესი გამოვიყენეთ ინტეგრალის გამოსათვლელად, შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x) = x^5 \quad \text{და} \quad g(x) = 2x+4\,.$$

მაშინ $g'(x) = 2$. აქედან გამომდინარე ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს $f$ და $g$ ფუნქციების კომპოზიციას

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^5 = (2x+4)^5\,.$$

მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\int f(g(x))g'(x)dx \tag{4}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (4) სახის ინტეგრალი ყოველთვის შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$\int f(u)du\,. \tag{5}$$

ვთქვათ, $F$ არის $f$ ფუნქციის რაიმე პირველადი. მაშინ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)\,.$$

მაშასადამე,

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,.$$

თუ დავუშვებთ $F' = f$ და მოვახდენთ ჩასმას $u = g(x)$, მივიღებთ

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(u) + C = \int F'(u)du = \int f(u)du$$

რაც უდა გვეჩვენებინა.

ამრიგად, ჩასმის ხერხი წარმატებით გამიყენება, თუ ცვლადის გარდაქმნით მიღებული ინტეგრალი მარტივად გამოითვლება, როგორც ეს (3) ინტეგრალის შემთხვევაში მოხდა.

ვიდრე სხვა მაგალითებს განვიხილავდეთ, ამოვწეროთ ის საფეხურები, რომლებიც განუსაზღვრელი ინტეგრალის ჩასმის ხერხით ინტეგრებისას გვჭირდება.

***ინტეგრება ჩასმის ხერხით:***

1. ***დავუშვათ*** $u = g(x)$, ***სადაც*** $g(x)$ ***არის ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ნაწილი, უფრო ზუსტად*** $f(g(x))$ ***კომპოზიციის „შიდა“ ფუნქცია;***
2. ***ვიპოვოთ*** $du = g'(x)dx$***;***

3. $u=g(x)$ *ჩასმისა და* $du=g'(x)dx$ *დიფერენციალის გამოყენებით მოცემული ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ინტეგრალის სახით, რომლის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება წარმოიდგინება საინტეგრაციო* $u$ *ცვლადით;*
4. *გამოვთვალოთ გარდაქმნის შედეგად მიღებული ინტეგრალი;*
5. *შევცვალოთ* $u$ *ცვლადი* $g(x)$ *-ით და საბოლოო პასუხი წარმოვადგინოთ* $x$ *ცვლადით.*

**მაგალითი 8.** გამოვთვალოთ $\int 2x(x^2+3)^4dx$.

**ამოხსნა: 1.** შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $(x^2+3)^4$ რთული ფუნქციაა, რომლის „შიდა ფუნქციაა“ $g(x)=x^2+3$. ამიტომ ავირჩევთ ჩასმას $u=x^2+3$.

**2.** $du=2xdx$;

**3.** ინტეგრალი ასე გარდაიქმნება

$$\int 2x(x^2+3)^4dx=\int (x^2+3)^4(2xdx)=\int u^4du\ ;$$

**4.** გამოვთვალოთ

$$\int u^4du=\frac{1}{5}u^5+C\ .$$

**5.** შევცვალოთ $u$ ცვლადი $x^2+3$-ით, მივიღებთ

$$\int 2x(x^2+3)^4dx=\frac{1}{5}(x^2+3)^5+C\ .$$

**მაგალითი 9.** გამოვთვალოთ $\int 3\sqrt{3x+1}dx$.

**ამოხსნა:** 1. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $\sqrt{3x+1}$ რთული ფუნქციაა, რომლის „შიდა ფუნქციაა“ $g(x)=3x+1$. ამიტომ შემოვიღოთ ახალაი ცვლადი $u=3x+1$;

2. ვიპოვოთ დიფერენციალი $du=3dx$;

3. აღნიშვნის შენდეგ ინტეგრალი ასე გარდაიქმნება

$$\int 3\sqrt{3x+1}dx=\int \sqrt{3x+1}(3dx)=\int \sqrt{u}du\ .$$

4. გამოვთვალოთ

$$\int \sqrt{u}du=\int u^{1/2}du=\frac{2}{3}u^{3/2}+C$$

5. $u$ შევცვალოთ $3x+1$-ით, მივღებთ

$$\int 3\sqrt{3x+1}dx=\frac{2}{3}(3x+1)^{3/2}+C\ .$$

**მაგალითი 9.** გამოვთვალოთ $\int e^{-3x}dx$.

**ამოხსნა:** ინტეგრალი გამოვთვალოთ საფეხურების მითითების გარეშე. ვთქვათ, $u=-3x$, მაშინ $du=-3dx$ ანუ $dx=-\frac{1}{3}du$. ამ გარდაქმნის შემდეგ გვექნება

$$\int e^{-3x}dx=\int e^u\left(-\frac{1}{3}du\right)=-\frac{1}{3}\int e^udu=-\frac{1}{3}e^u+C=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C\ .$$

**მაგალითი 10.** გამოვთვალოთ $\int \frac{x}{3x^2+1}dx$.

**ამოხსნა:** ვთქვათ, $u = 3x^2 + 1$. მაშინ $du = 6x\,dx$, საიდანაც $x\,dx = \frac{1}{6}du$. შესაბამისი ჩასმებით მივიღებთ

$$\int \frac{x}{3x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{6}du}{u} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{6}\ln|u| + C = \frac{1}{6}\ln(3x^2+1) + C.$$

**მაგალითი 10.** გამოვთვალოთ $\int \frac{(\ln x)^2}{2x}dx$.

**ამოხსნა:** დავუშვათ $u = \ln x$. მაშინ $du = \frac{d}{dx}(\ln x)dx = \frac{1}{x}dx$. ამიტომ

$$\int \frac{(\ln x)^2}{2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{6}u^3 + C = \frac{1}{6}(\ln x)^3 + C.$$

## სავარჯიშო

**შამოწმეთ, არის თუ არა $f$-ის პირველადი $F$:**

**1.** $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 2; f(x) = x^2 + 4x - 1$

**2.** $F(x) = xe^x + \pi; f(x) = e^x(1 + x)$

**3.** $F(x) = \sqrt{2x^2 - 1}; f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$

**4.** $F(x) = x\ln x - x; f(x) = \ln x$

**შემდეგ მაგალითებში: ა) შეამოწმეთ, რომ $G$ არის $f$ ფუნქციის პირველადი; ბ) იპოვეთ $f$ ფუნქციის ყველა პირველადი და გ) ააგეთ რამდენიმე პირველადის გრაფიკი ბ) პუნქტში მოძებნილი პირველადების ოჯახიდან:**

**5.** $G(x) = 2x; f(x) = 2$ **6.** $G(x) = 2x^2; f(x) = 4x$

**7.** $G(x) = \frac{1}{3}x^3; f(x) = x^2$ **8.** $G(x) = e^x; f(x) = e^x$

**გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები:**

9. $\int 6\,dx$

10. $\int \sqrt{2}\,dx$

11. $\int x^3\,dx$

12. $\int 2x^5\,dx$

13. $\int x^{-4}\,dx$

14. $\int 3t^{-7}\,dt$

15. $\int x^{2/3}\,dx$

16. $\int 2u^{3/4}\,du$

17. $\int x^{-5/4}\,dx$

18. $\int 3x^{-2/3}\,dx$

19. $\int \frac{2}{x^2}\,dx$

20. $\int \frac{1}{3x^5}\,dx$

21. $\int \pi\sqrt{t}\,dt$

22. $\int \frac{3}{\sqrt{t}}\,dt$

23. $\int (3-2x)\,dx$

24. $\int (1+u+u^2)\,du$

25. $\int (x^2+x+x^{-3})\,dx$

26. $\int (0.3t^2+0.02t+2)\,dt$

27. $\int 4e^x\,dx$

28. $\int (1+e^x)\,dx$

29. $\int (1+x+e^x)\,dx$

30. $\int (2+x+2x^2+e^x)\,dx$

31. $\int \left(4x^3-\frac{2}{x^2}-1\right)dx$

32. $\int \left(6x^3+\frac{3}{x^2}-x\right)dx$

33. $\int (x^{5/2}+2x^{3/2}-x)\,dx$

34. $\int (t^{3/2}+2t^{1/2}-4t^{-1/2})\,dt$

35. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$

36. $\int \left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

37. $\int \left(\frac{u^3+2u^2-u}{3u}\right)du$

მითითება: $\frac{u^3+2u^2-u}{3u}=\frac{1}{3}u^2+\frac{2}{3}u-\frac{1}{3}$

38. $\int \frac{x^4-1}{x^2}\,dx$

მითითება: $\frac{x^4-1}{x^2}=x^2-x^{-2}$

39. $\int (2t+1)(t-2)\,dt$

40. $\int u^{-2}(1-u^2+u^4)\,du$

41. $\int \frac{1}{x^2}(x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$ 42. $\int \sqrt{t}\,(t^2 + t - 1)\,dt$

43. $\int \frac{ds}{(s+1)^{-2}}$ 44. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x} - 2e^x\right)dx$

45. $\int (e^t + t^e)\,dt$ 46. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

47. $\int \left(\frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2}\right)dx$

48. $\int \frac{t^3 + \sqrt[3]{t}}{t^2}\,dt$

49. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x^2}\,dx$

50. $\int (x+1)^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)dx$

ამოხსენით ამოცანა საწყისი პირობით და იპოვეთ $f(x)$:

51. $f'(x) = 2x + 1; f(1) = 3$

52. $f'(x) = 3x^2 - 6x; f(2) = 4$

53. $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1; f(2) = 9$

54. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; f(4) = 2$

55. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}; f(1) = 2$

56. $f'(x) = e^x - 2x; f(0) = 2$

57. $f'(x) = \frac{x+1}{x}; f(1) = 1$

58. $f'(x) = 1 + e^x + \frac{1}{x}; f(1) = 3 + e$

იპოვეთ $f$ ფუნქცია, თუ მისი გრაფიკი გადის მოცემულ წერტილზე და მისი გრაფიკის მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი ნებისმიერ $(x, f(x))$ წერტილში $f'(x)$-ის ტოლია:

59. $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$; $(2, \sqrt{2})$

60. $f'(t) = t^2 - 2t + 3$; $(1, 2)$

61. $f'(x) = e^x + x$; $(0, 3)$ 62. $f'(x) = \frac{2}{x} + 1$; $(1, 2)$

ჩასმის ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი განუსაზღვრელი ინტეგრალები:

**63.** $\int 4(4x + 3)^4\,dx$ **64.** $\int 4x(2x^2 + 1)^7\,dx$

**65.** $\int (x^3 - 2x)^2(3x^2 - 2)\,dx$

**66.** $\int (3x^2 - 2x + 1)(x^3 - x^2 + x)^4\,dx$

**67.** $\int \frac{4x}{(2x^2 + 3)^3}\,dx$ **68.** $\int \frac{3x^2 + 2}{(x^3 + 2x)^2}\,dx$

**69.** $\int 3t^2\sqrt{t^3 + 2}\,dt$ **70.** $\int 3t^2(t^3 + 2)^{3/2}\,dt$

**71.** $\int (x^2 - 1)^9 x\,dx$ **72.** $\int x^2(2x^3 + 3)^4\,dx$

**73.** $\int \frac{x^4}{1 - x^5}\,dx$ **74.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 1}}\,dx$

**75.** $\int \frac{2}{x - 2}\,dx$ **76.** $\int \frac{x^2}{x^3 - 3}\,dx$

**77.** $\int \frac{0.3x - 0.2}{0.3x^2 - 0.4x + 2}\,dx$ **78.** $\int \frac{2x^2 + 1}{0.2x^3 + 0.3x}\,dx$

**79.** $\int \frac{x}{3x^2 - 1}\,dx$ **80.** $\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 1}\,dx$

**81.** $\int e^{-2x}\,dx$ **82.** $\int e^{-0.02x}\,dx$

**83.** $\int e^{2-x}\,dx$

**84.** $\int e^{2t+3}\,dt$

**85.** $\int xe^{-x^2}\,dx$

**86.** $\int x^2e^{x^3-1}\,dx$

**87.** $\int (e^x - e^{-x})\,dx$

**88.** $\int (e^{2x} + e^{-3x})\,dx$

**89.** $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

**90.** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$

**91.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

**92.** $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$

**93.** $\int \frac{e^{3x}+x^2}{(e^{3x}+x^3)^3}\,dx$

**94.** $\int \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^{3/2}}\,dx$

**95.** $\int e^{2x}(e^{2x}+1)^3\,dx$

**96.** $\int e^{-x}(1+e^{-x})\,dx$

**97.** $\int \frac{\ln 5x}{x}\,dx$

**98.** $\int \frac{(\ln u)^3}{u}\,du$

**99.** $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

**100.** $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

**101.** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

**102.** $\int \frac{(\ln x)^{7/2}}{x}\,dx$

**103.** $\int \left(xe^{x^2} - \frac{x}{x^2+2}\right)dx$

**104.** $\int \left(xe^{-x^2} + \frac{e^x}{e^x+3}\right)dx$

იპოვეთ $f$ ფუნქცია, თუ მისი გრაფიკი გადის მოცემულ წერტილზე და მისი გრაფიკის მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი ნებისმიერ $(x, f(x))$ წერტილში $f'(x)$-ის ტოლია:

**105.** $f'(x) = 5(2x-1)^4$; $(1, 3)$

**106.** $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$; $(1, 1)$

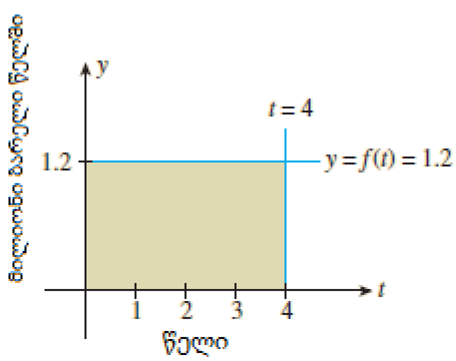
**107.** $f'(x) = -2xe^{-x^2+1}$; $(1, 0)$

**108.** $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$; $(0, 2)$

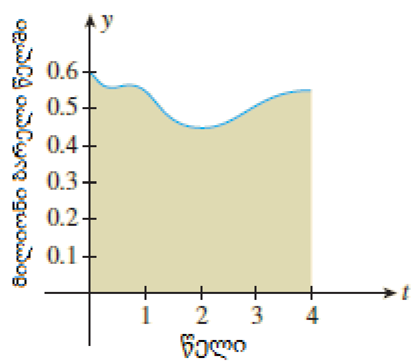
## მეცამეტე ლექცია

### ფიგურის ფართობი და განსაზღვრული ინტეგრალი. ინტუიციური ხედვა და მათემატიკური დაფუძნება

დაუშვათ, რომელიღაც სახელმწიფოს მიერ საწვავის წლიური მოხმარების განაკვეთი 4 წლის განმავლობაში მუდმივია და მოიცემა ფუნქციით $f(t)=1.2,\quad (0\le t\le 4)$, სადაც $t$ იზომება წლებში, ხოლო $f(t)$ მილიონი ბარელი წელიწადში. მაშინ სახელმწიფოს მიერ 4 წლის განმავლობაში მოხმარებული მთლიანი საწვავი იქნება $(1.2)\times(4-0)$ ანუ 4.8 მილიონი ბარელი. თუ დავაკვირდებით $f$ ფუნქციის გრაფიკს 133-ე ნახაზზე, დავინახავთ, რომ მთლიანი მოხმარებული საწვავის რაოდენობა რიცხობრივად ტოლია იმ მართკუთხედის ფართობისა, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $f$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან $t$ ღერძით და მარცხნიდან და მარჯვნიდან ვერტიკალური $t=0$ ($y$ ღერძი) და $t=4$ წრფეებით, შესაბამისად.




ნახაზი 133. მთლიანი მოხმარებული საწვავის რაოდენობა მოიცემა მართკუთხედის ფართობით.



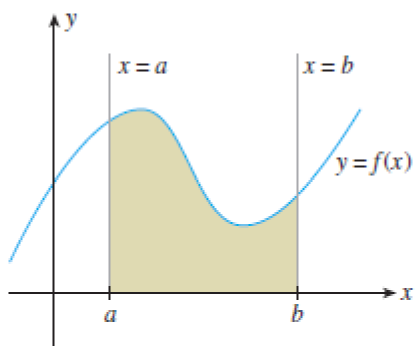

ნახაზი 134. დღეში მოხმარებული საწვავის რაოდენობა მოიცემა დაშტრიხული არის ფართობით

134-ე ნახაზი გვიჩვენებს რომელიღაც მეორე სახელმწიფოს მიერ საწვავის მოხმარების ფაქტობრივ სურათს 4 წლის განმავლობაში 1990 წლიდან $(t=0)$ 1994 წლამდე $(t=4)$. შევნიშნოთ, რომ მოხმარებული საწვავის რაოდენობა წლების განმავლობაში არ არის მუდმივი. ეს ნიშნავს, რომ $f$ ფუნქცია არ არის მუდმივი. რა იქნება სახელმწიფოს მიერ 4 წლის განმავლობაში მოხმარებული საწვავის მთლიანი რაოდენობა? მიზანშეწონილია ვივარაუდოთ, რომ მოხმარებული საწვავის მთლიანი რაოდენობა მოიცემა იმ არის ფართობით, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან $f$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან $t$ ღერძით და მარცხნიდან და მარჯვნიდან

ვერტიკალური $t=0$ და $t=4$ წრფეებით, შესაბამისად. ეს მაგალითი ბუნებრივად ბადებს ორ კითხვას:

1. *რა არის 134-ე ნახაზზე მოცემული ფიგურის ფართობი?*
2. *როგორ გამოვთვალოთ ეს ფართობი?*

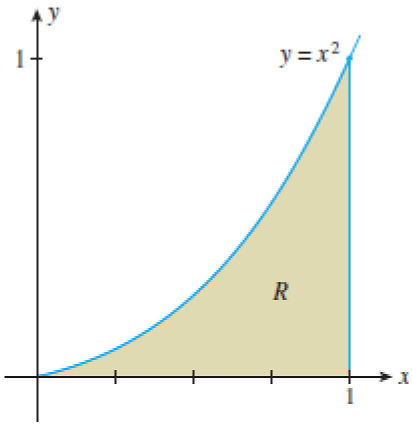
დასმული კითხვები ეხება დიფერენციალური აღრიცხვის მეორე ფუნდამენტურ ამოცანას: გამოვთვალოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია არაუარყოფითი $f$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და ვერტიკალური $x=a$ და $x=b$ წრფეებით (ნახ. 135). ამ ფიგურას ეწოდება ***მრუდწირული ტრაპეცია.*** სიმარტივისათვის და მსჯელობების გამარტივების მიზნით, ამ მრუდწირულ ტრაპეციას ასევე ვუწოდებთ $[a,b]$ ***ინტერვალზე მოცემული*** $f$ ***ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრულ მრუდწირულ ტრაპეციას*** ან ***მრუდწირულ ტრაპეციას, რომელიც შემოსაზღვრულია*** $f$ ***ფუნქციის გრაფიკით და რომლის ფუძეა*** $[a,b]$ ***ინტერვალი.***



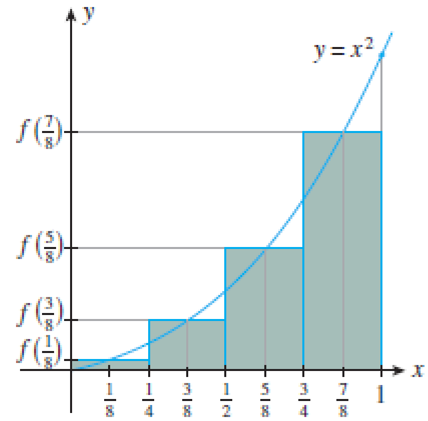

ნახაზი 135. მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც შემოსაზღვრულია
$y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x=a$ და $x=b$ წრფეებით.

გავიხსენოთ, რომ $f$ ფუნქციის გრაფიკის მოცემულ წერტილში გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის გამოვიყენეთ მკვეთი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი, რომლის გამოთვლაც ვიცით. ახლა ვისარგებლოთ ანალოგიური მიდგომით და ამჯერად მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი განვსაზღვროთ მართკუთხედის ფართობის დახმარებით, რომლის ფართობის გამოთვლაც შეგვიძლია. ამ მიზნით განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

**მაგალითი 1.** ვთქვათ, $f(x)=x^2$ და განვიხილოთ $R$ ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $f$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x=1$ წრფით (ნახ. 136).




ა)




ბ)

ნახაზი 136. ა) [0,1] ინტერვალზე $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული ფიგურა; ბ) ფიგურის ფართობი მიახლოებით ოთხი მართკუთხედის ფართობის ჯამის ტოლია.

$R$ ფიგურის ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობის მისაღებად ავაგოთ ოთხი ურთიერთ არაგადამფარავი მართკუთხედი შემდეგნაირად: დავანაწილოთ [0,1] ინტერვალი ტოლი სიგრძის ოთხ ქვეინტერვალად

$$\left[0,\frac{1}{4}\right],\quad \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right],\quad \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right],\quad \left[\frac{3}{4},1\right].$$

ავაგოთ ოთხი მართკუთხედი, რომელთა ფუძეებია ეს ქვეინტერვალები და სიმაღლეები შესაბამისად $f$ ფუნქციის მნიშვნელობები ამ ქვეინტერვალების შუაწერტილებში

$$\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}.$$

ამრიგად, თითოეული მართკუთხედის სიგანე იქნება $\frac{1}{4}$, ხოლო სიმაღლე შესაბამისად

$$f\left(\frac{1}{8}\right),\ f\left(\frac{3}{8}\right),\ f\left(\frac{5}{8}\right),\ f\left(\frac{7}{8}\right).$$

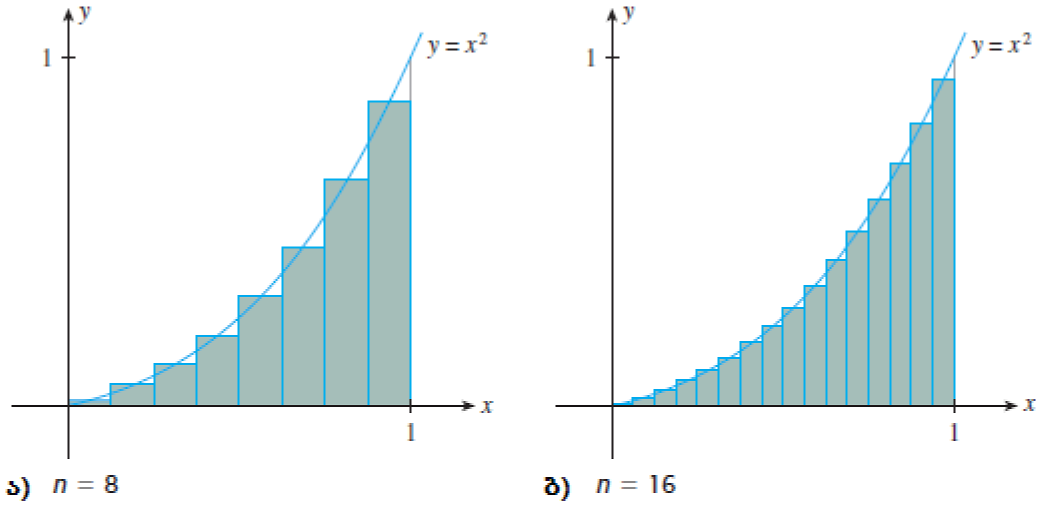
თუ $R$ ფიგურის $A$ ფართობის მიახლოებით მნიშვნელობად ავიღებთ აგებული ოთხი მართკუთხედის ფართობთა ჯამს, მივიღებთ

$$A\approx\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{5}{8}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{64}+\frac{9}{64}+\frac{25}{64}+\frac{49}{64}\right]=\frac{21}{64}\approx 0.328125$$

ამ მიდგომით ჩვენ შეგვიძლია $R$ ფიგურის $A$ ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა მივიღოთ $n$ რაოდენობა მართკუთხედის აღებით. ზემოთ განხილულ შემთხვევაში $n=4$. 137 ა) ნახაზი გვიჩვენებს, $R$ ფიგურის $A$ ფართობის

მიახლოებით მნიშვნელობას $n=8$ მართკუთხედის საშუალებით, ხოლო 137 ბ) ნახაზი კი - $n=16$ მართკუთხედის საშუალებით.




ნახაზი 137. როცა $n$ იზრდება, მართკუთხედების რიცხვი იზრდება და მიახლოება უმჯობესდება.

ეს ნახაზები გვიჩვენებს, რომ ფიგურის ფართობის აპროქსიმაცია უმჯობესდება, როცა $n$ იზრდება. ეს დასტურდება შემდეგი ცხრილითაც, რომელიც კომპიუტერის გამოყენებით არის შედგენილი:

| $n$ | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A\approx$ | 0.328125 | 0.332031 | 0.333008 | 0.333252 | 0.333313 | 0.333325 | 0.333331 |

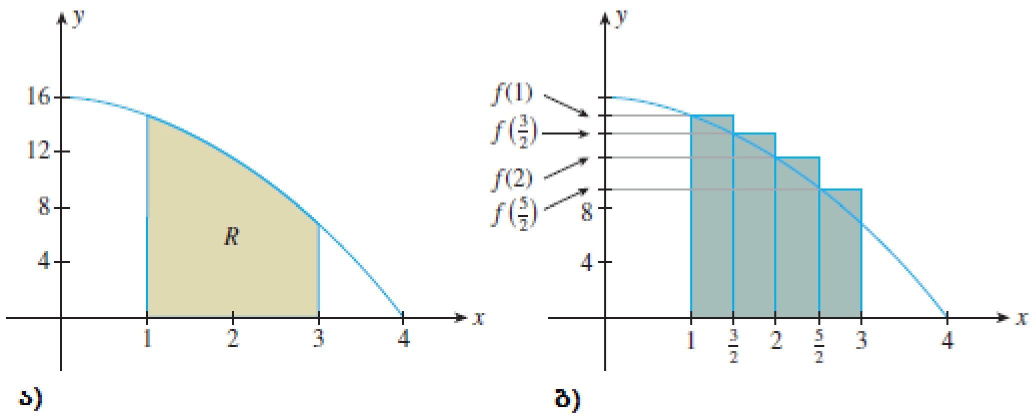
ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა უახლოვდება $\frac{1}{3}$-ს, როცა $n$ იზრდება. ამიტომ შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ $R$ ფიგურის $A$ ფართობი $\frac{1}{3}$ კვადრატული ერთეულია.

განხილულ მაგალითში ფიგურის ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობის მისაღებად თითოეულ ქვეინტერვალში ავირჩიეთ შუაწერტილი, რომელზედაც $f(x)$-ის მნიშვნელობის დათვლით ვღებულობდით ამ ინტერვალზე აგებული მართკუთხედის სიმაღლეს. ახლა განვიხილოთ მეორე მაგალითი, რომელშიც თითოეულ ქვეინტერვალში ავირჩევთ ქვეინტერვალის მარცხენა ბოლო წერტილს.

**მაგალითი 2.** ვთქვათ, $R$ მრუდწირული ტრაპეცია შემოსაზღვრულია $f(x)=16-x^2$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x=1$ და $x=3$ წრფეებით. ვიპოვოთ $R$ ფიგურის $A$ ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა $[1,3]$ ინტერვალის ოთხ ტოლი სიგრძის ქვეინტერვალად დაყოფით. ქვეინტერვალების მარცხენა ბოლო წერტილებზე გამოვთვალოთ $f(x)$-ის მნიშვნელობები და ეს მნიშვნელობები ავიღოთ შესაბამისი სააპროქსიმაციო მართკუთხედების სიმაღლეებად.

**ამოხსნა:** ფუნქციის გრაფიკი აგებულია 138-ე ნახაზზე. რადგან [1,3] ინტერვალის სიგრძე 2-ის ტოლია, ამიტომ თითოეული ქვეინტერვალის სიგრძე $\frac{1}{2}$-ის ტოლია. მაშასადამე, ქვეინტერვალები იქნება

$$\left[1,\frac{3}{2}\right],\quad \left[\frac{3}{2},2\right],\quad \left[2,\frac{5}{2}\right],\quad \left[\frac{5}{2},3\right].$$




ნახაზი 138. ა) [1,3] ინტერვალზე $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული ფიგურა; ბ) ფიგურის ფართობი მიახლოებით ოთხი მართკუთხედის ფართობის ჯამის ტოლია.

ქვეინტერვალების მარცხენა ბოლო წერტილებია 1, $\frac{3}{2}$, 2 და $\frac{5}{2}$. შესაბამისად მართკუთხედების სიმაღლეები იქნება $f(1), f\left(\frac{3}{2}\right), f(2)$ და $f\left(\frac{5}{2}\right)$ (ნახ. 138ბ). $R$ ფიგურის $A$ ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა იქნება ამ მართკუთხედების ფართობთა ჯამი:

$$A\approx\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)+f\left(\frac{5}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{[16-(1)^2]+\left[16-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+[16-(2)^2]+\left[16-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]\right\}=$$

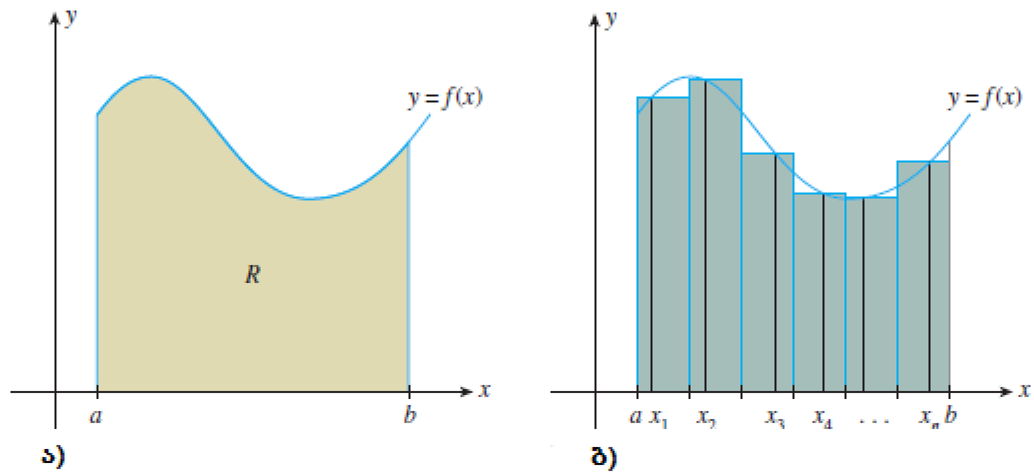
$$=\frac{1}{2}\left(15+\frac{55}{4}+12+\frac{39}{4}\right)=\frac{101}{4}\approx 25.25$$

კომპიუტერის გამოყენებით შეგვიძლია შევადგინოთ ცხრილი, რომელიც გვაძლევს დამოკიდებულებას მართკუთხედების რაოდენობასა და შესაბამისად ფიგურის ფართობის მიახლოებით მნიშვნელობებს შორის:

| $n$ | 4 | 10 | 100 | 1000 | 10 000 | 50 000 | 100 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A\approx$ | 25.25 | 24.1200 | 23.4132 | 23.3413 | 23.3341 | 23.3335 | 23.3334 |

- აქაც ვრწმუნდებით, რომ ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა უახლოვდება ერთადერთ რიცხვს $23\frac{1}{3}$-ს, როცა $n$ იზრდება. ამიტომ შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ 138 ა) ნახაზზე გამოსახული მრუდწირული ტრაპეციის $A$ ფართობი $23\frac{1}{3}$ კვადრატული ერთეულია.

პირველ და მეორე მაგალითში განხილული მიდგომა შეგვიძლია განვაზოგადოდ $[a,b]$ ინტერვალზე მოცემული ნებისმიერი არაუარყოფითი უწყვეტი $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის $A$ ფართობის განსაზღვრისათვის (ნახ.139 ა).




ნახაზი 139. **ა)** ნახაზზე მოცემული ფიგურის ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა **ბ)** ნახაზზე მოცემული მართკუთხედების ფართობების ჯამის ტოლია

დავანაწილოთ $[a,b]$ ინტერვალი $n$ რაოდენობა ტოლი სიგრძის ქვეინტერვალებად. თითოეული ქვეინტერვალის სიგრძე იქნება $\Delta x = (b-a)/n$. ნებისმიერად ავირჩიოთ $n$ რაოდენობა წერტილები $x_1,\ x_2, x_3, ..., x_n$ შესაბამისად, პირველი, მეორე და ა. შ. $n$-ური ქვეინტერვალიდან (ნახ.139ბ). მრუდწირული ტრაპეციის $A$ ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა იქნება იმ მართკუთხედების ფართობების ჯამი, რომელთაც ერთიდაიგივე სიგანე, კერძოდ $\Delta x$-ის ტოლი სიგანე აქვთ, ხოლო სიმაღლეები შესაბამისად $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3), ..., f(x_n)$ მნიშვნელობების ტოლია. ამიტომ ამ მართკუთხედების ფართობები იქნება

$$f(x_1)\Delta x,\quad f(x_2)\Delta x,\quad f(x_3)\Delta x,\ ...,\quad f(x_n)\Delta x,$$

რომელთა ჯამიც იძლევა განსახილველი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის მიახლოებით მნიშვნელობას:

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x\,.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარეში მდგომ ჯამს ეწოდება ***რიმანის ჯამი,*** გერმანელი მათემატიკოსის ბერნარდ რიმანის (1826-1866) პატივსაცემად. როგორც ზემოთ განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რიმანის ჯამი უახლოვდება ერთადერთ რიცხვს, როცა $n$ ხდება უსასრულოდ დიდი. განმარტების თანახმად, მრუდწირული ტრაპეციის ფართობად სწორედ ეს რიცხვია მიჩნეული.

***მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი.***
***ვთქვათ, $f$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა $[a,b]$ ინტერვალზე. მაშინ $f$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x=a$ და $x=b$ წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება***

$$A=\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)\right]\Delta x\,, \tag{1}$$

***სადაც $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ნებისმიერად აღებული წერტილებია $[a,b]$ ინტერვალის $n$ რაოდენობა ქვეინტერვალიდან, რომელთა სიგრძეები $\Delta x=(b-a)/n$ -ის ტოლია.***

როგორც ამ განმარტებიდან ჩანს, $[a,b]$ ინტერვალზე მოცემული არაუარყოფითი უწყვეტი $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი განისაზღვრება როგორც რიმანის ჯამის ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)\right]\Delta x\,.$$

ახლა შევისწავლოთ $[a,b]$ ინტერვალზე მოცემული $f$ ფუნქციის რიმანის ჯამის ზღვარი, როცა $f$ ფუნქცია არ არის არარაუარყოფითი. ასეთი ფუნქციებისათვის ანალოგიური ზღვრები ხშირად გვხვდება როგორც თეორიულ, ისე პრაქტიკულ ამოცნებში. დავიწყოთ განმარტებით.

***განსაზღვრული ინტეგრალი.***
***ვთქვათ, $f$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a,b]$ ინტერვალზე. თუ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ წერტილების ნებისმიერად არჩევის დროს $[a,b]$ ინტერვალის $n$ რაოდენობა ქვეინტერვალიდან, რომელთა სიგრძეები $\Delta x=(b-a)/n$ -ის ტოლია, არსებობს ზღვარი***

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x\right],$$

***მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი $f$ ფუნქციიდან $a$ -დან $b$ -მდე და ასე აღინიშნება***

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

***ამრიგად,***

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x\right]. \tag{2}$$

***$a$ რიცხვს ეწოდება ინტეგრალის ქვედა საზღვარი, ხოლო $b$ რიცხვს ინტეგრალის ზედა საზღვარი.***

შენიშვნა:

1. როცა $f$ არაუარყოფითია, მაშინ (2) ზღვარი იგივეა რაც (1) ზღვარი; მაშასადამე, განსაზღვრული ინტეგრალი გვაძლევს $[a,b]$ ინტერვალზე მოცემული არაუარყოფითი უწყვეტი $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს;
2. (2) ზღვარი აღვნიშნეთ ინტეგრალის $\int$ ნიშნით, რადგან, როგორც შემდეგ ვნახავთ, არსებობს კავშირი განსაზღვრულ ინტეგრალსა და განუსაზღვრელ ინტეგრალს შორის;
3. მნიშვნელოვანია გავაცნობიეროთ, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ რიცხვია, მაშინ როცა განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int f(x)dx$ წარმოადგენს ფუნქციათა ოჯახს ( $f$ ფუნქციის პირველადების სიმრავლეს);
4. როცა (2) ზღვარი არსებობს, მაშინ ვიტყვით, რომ $f$ ***ინტეგრებადი ფუნქციაა*** $[a,b]$ ინტერვალზე.

ვნახოთ, რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია, რომ იგი იყოს ინტეგრებადი. ამ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს შემდეგი თეორემა, რომელსაც დაუმტკიცებლად გთავაზობთ.

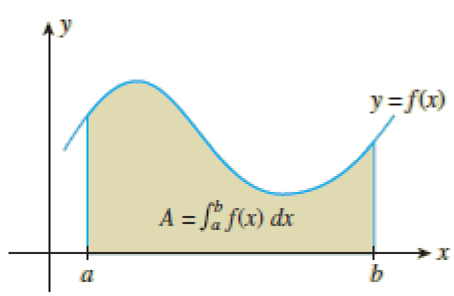
***თეორემა 1. თუ $f$ უწყვეტია $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია $[a,b]$ ინტერვალზე ე.ი. არსებობს განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ .***

***განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.***

***თუ $f$ არაუარყოფითი და ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალი***

$$\int_a^b f(x)dx$$

***წარმოადგენს $f$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x=a$ და $x=b$ წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს (ნახ. 140)***



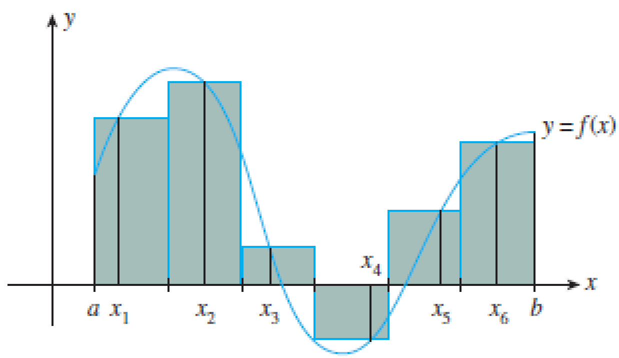

ნახაზი 140. თუ $f(x)\ge 0$ $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ $\int_a^b f(x)dx$

გვაძლევს მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს.

განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია გავავრცელოთ იმ შემთხვევებზეც, როცა ინტეგრალქვეშა $f$ ფუნქცია $[a,b]$ ინტერვალზე ღებულობს როგორც დადებით ასევე უარყოფით მნიშვნელობებს. ამ შემთხვევაშიც მოვიქცეთ ანალოგიურად და დავანაწილოთ $[a,b]$ ინტერვალი $n$ რაოდენობა ტოლი სიგრძის ქვეინტერვალებად. თითოეული ქვეინტერვალის სიგრძე იქნება $\Delta x=(b-a)/n$. კვლავ ნებისმიერად ავირჩიოთ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ წერტილები შესაბამისად, პირველი, მეორე და ა. შ. $n$-ური ქვეინტერვალიდან და შევადგინოთ $f$ ფუნქციის რიმანის ჯამი

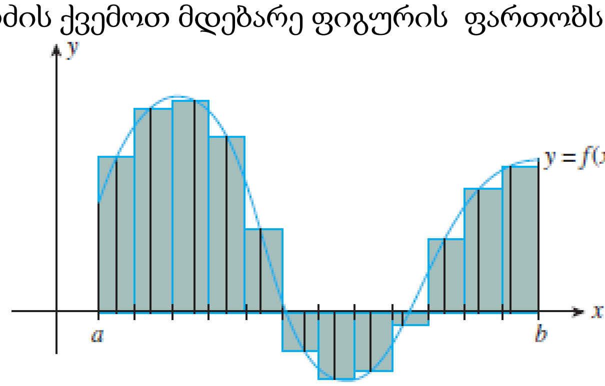
$$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x.$$

ამ ჯამში დადებითი წევრები შეესაბამება $x$ ღერძის ზემოთ მდებარე $f(x_p)$ სიმაღლის მქონე მართკუთხედების ფართობებს (ცხადია, $f(x_p)\geq 0$), ხოლო უარყოფითი წევრები შეესაბამება $x$ ღერძის ქვემოთ მდებარე $-f(x_m)$ სიმაღლის მქონე მართკუთხედების ფართობებს (ცხადია, $f(x_m)\leq 0$) (ნახ. 141, $n=6$).




ნახაზი 141. რიმანის ჯამში დადებითი წევრები შეესაბამებიან მართკუთხედების ფართობებს, რომლებიც მდებარეობენ $x$ ღერძის ზემოთ, ხოლო უარყოფითი წევრები შეესაბამებიან მართკუთხედების ფართობებს, რომლებიც მდებარეობენ $x$ ღერძის ქვემოთ.

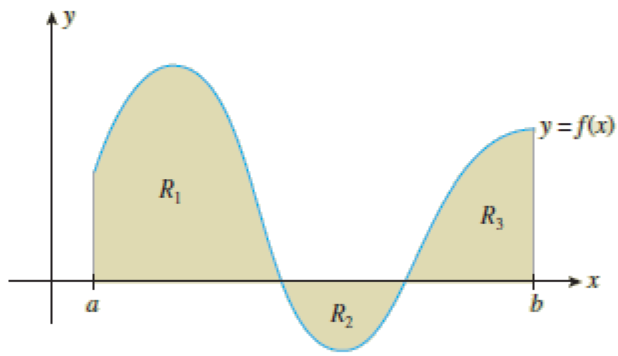
რაც უფრო იზრდება $n$, მით უფრო უახლოვდება $x$ ღერძის ზემოთ მდებარე მართკუთხედების ფართობების ჯამი იმ ფიგურის ფართობს, რომელიც $x$ ღერძის ზემოთ მდებარეობს. ანალოგიურად, როცა $n$ უფრო და უფრო იზრდება, მაშინ $x$ ღერძის ქვემოთ მდებარე მართკუთხედების ფართობების ჯამი უფრო და უფრო უახლოვდება $x$ ღერძის ქვემოთ მდებარე ფიგურის ფართობს (ნახ. 142).



ნახაზი 142. როცა $n$ იზრდება გვაქვს უკეთესი მიახლოება. აქ $n=12$ და
გვაქვს ორჯერ მეტი მართკუთხედი, ვუდრე 135 ნახაზში.

ამ შედეგებზე დაყრდნობით შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ $[a,b]$ ინტერვალზე მოცემული ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციიდან განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

***თუ $f$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ $\int_a^b f(x)dx$ ტოლია $f$ ფუნქციის გრაფიკით განსაზღვრული $[a,b]$ ინტერვალის ზემოთ მდებარე ფიგურის ფართობს გამოკლებული $[a,b]$ ინტერვალის ქვემოთ მდებარე ფიგურის ფართობი (ნახ. 143).***




ნახაზი 143. $\int_a^b f(x)dx = R_1$ ფართობს - $R_2$ ფართობი + $R_3$ ფართობი.

## ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემა, ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

განსაზღვრული ინტეგრალი $[a,b]$ ინტერვალზე მოცემული უწყვეტი ფუნქციიდან ზემოთ განვმარტეთ როგორც რიმანის ჯამის ზღვარი. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა განმარტების მიხედვით (რიმანის ჯამის შედგენა და შემდეგ მისი ზღვარის გამოთვლა) რუტინული შრომაა და ხშირ შემთხვევაში არაპრაქტიკული. მნიშვნელოვანია გავაცნობიეროთ, რომ ზემოგანხილულ პირველ და მეორე მაგალითებში საძიებელი ფიგურების ფართობები ჩვენ გამოვთვალეთ მიახლოებით, თუმცა, რასაკვირველია, ამ შედეგებმა მოგვცა საშუალება დაგვედგინა ფიგურის რეალური ფართობი. საბედნიეროდ, არსებობს ბევრად უკეთესი გზა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, როგორ გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი უწყვეტი ფუნქციიდან მისი პირველადის გამოყენებით. ეს თეორემა, რომელიც ***დიფერენციალური აღრიცხვის ფუნდამენტური თეორმის*** სახელწოდებით არის ცნობილი, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად დაამტკიცა ნიუტონმა (1642-1727) ინგლისში და ლაიბნიცმა (1646-1716) გერმანიაში.

***თეორემა 2 (დიფერენციალური აღრიცხვის ფუნდამენტური თეორმა).***

*თუ* $f$ *უწყვეტია* $[a,b]$ *ინტერვალზე, მაშინ*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{3}$$

*სადაც* $F$ *არის* $f$ *ფუნქციის ნებისმიერი პირველადი:* $F'(x) = f(x)$.

(3) ტოლობას ***ნიუტონ - ლაიბნიცის ფორმულას უწოდებენ.*** ქვემოთ შევეცდებით დავრწმუნდეთ ამ თეორემის მართებულობაში.

გამოყენების თვალსაზრისით, (3) ტოლობის მარჯვენა მხარისთვის მოსახერხებელია შემდეგი აღნიშვნით სარგებლობა

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

რომელიც ასე იკითხება: " ჩასმა $F(x)$ ფუნქციაში $a$-დან $b$-მდე ტოლია $F(b)-F(a)$".

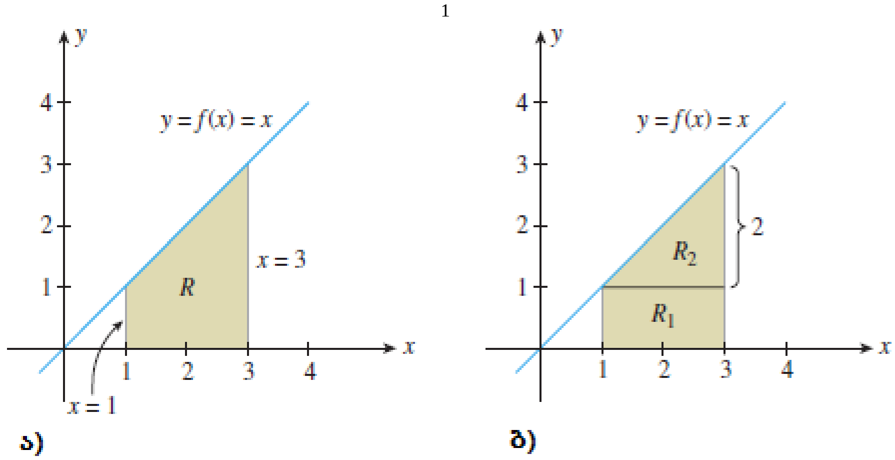
ამ აღნიშვნით (3) ასე ჩაიწერება

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**მაგალითი 3.** ვთქვათ, $R$ ფიგურა შემოსაზღვრულია $f(x) = x$ ფუნქციის გრაფიკით $[1,3]$ ინტერვალზე. გამოვთვალოთ $R$ ფიგურის $A$ ფართობი ფუნდამენტური თეორემის გამოყენებით და შევამოწმოთ შედეგის სისწორე ელემენტარული გზით.

**ამოხსნა:** 144 ა) ნახაზზე აგებულია $R$ ფიგურა. რადგან $f$ არაუარყოფითია $[1,3]$ ინტერვალზე, ამიტომ ფიგურის ფართობი იქნება განსაზღვრული ინტეგრალი

$$A = \int_1^3 x\,dx$$




ნახაზი 144. ფიგურის ფართობი შეიძლება გამოვითვალოთ ორი განსხვავებული გზით.

ფუნდამენტური თეორემის მიხედვით მოვძებნოთ ინტეგრალქვეშა $f(x) = x$ ფუნქციის პირველადი. მას ექნება სახე $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, სადაც $C$ ნებისმიერი მუდმივია. ამიტომ თეორემის თანახმად

$$A = \int_1^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + C\right]\Bigg|_1^3 = \left(\frac{9}{2} + C\right) - \left(\frac{1}{2} + C\right) = 4 \text{ (კვ. ერთეული).}$$

ელემენტარული გზით ამ შედეგის შესამოწმებლად შევნიშნოთ, რომ $A$ ფართობი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ორი ფიგურის, $R_1$ მართკუთხრდისა და $R_2$ სამკუთხედის, ფართობთა ჯამი ანუ

$$A = 2\times 1 + \frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2+2=4,$$

რაც ემთხვევა უკვე მიღებულ შედეგს.

შევნიშნოთ, რომ ამ მაგალითში ინტეგრალის გამოთვლის დროს ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივი გაქრა. ეს ფაქტი მართებულია ზოგადად, რადგან, თუ $F(x)+C$ წარმოადგენს რაიმე $f$ ფუნქციის პირველადს, მაშინ ჩასმა

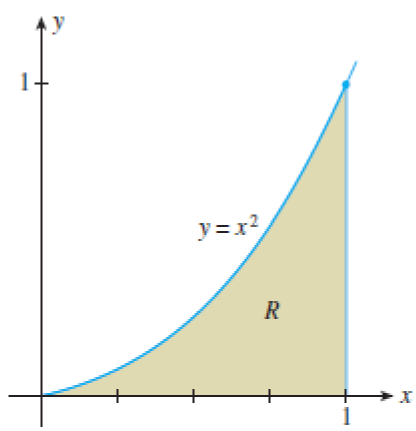
$$\left[F(x)+C\right]\Big|_a^b = \left[F(b)+C\right]-\left[F(a)+C\right] = F(b)+C-F(a)-C = F(b)-F(a)$$

არაა დამოკიდებული ნებისმიერ $C$ მუდმივზე. ამიტომ შემდეგში განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის დროს ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულაში პირველადის გმოსახულებაში ნებისმიერ მუდმივს ავიღებთ ნულის ტოლად.

განხილული მაგალითიდან ჩანს, თუ რამდენად ეფექტურია მარტივი ფიგურის ფართობის გამოთვლა ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით. ახლა გამოვიყენოთ იგივე ფორმულა უფრო რთული ფორმის ფიგურის ფართობის გამოსათვლელად.

**მაგალითი 4.** ზემოთ პირველ მაგალითში ჩვენ ვივარაუდეთ, რომ $f(x)=x^2$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x=1$ წრფით (ნახ. 136) შემოსაზღვრული $R$ ფიგურის $A$ ფართობი $\frac{1}{3}$ კვადრატული ერთეულია. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით შევამოწმოთ ეს ვარაუდი.

**ამოხსნა:** $R$ ფიგურა წარმოდგენილია 145-ე ნახაზზე. შევნიშნოთ, რომ $f$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა $[0,1]$ ინტერვალზე, ამიტომ $R$ ფიგურის $A$ ფართობი გამოითვლება განსაზღვრული ინტეგრალით $A=\int_0^1 x^2\,dx$.




ნახაზი 145. $R$ ფიგურის ფართობი $A=\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

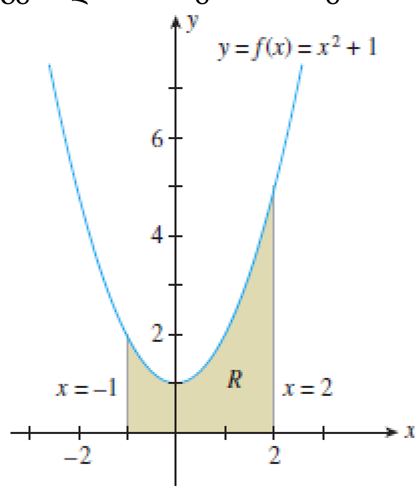
რადგან $f(x)=x^2$ ფუნქციის პირველადია $F(x)=\frac{1}{3}x^3$, ამიტომ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის თანხმად გვექნება

$$A=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{3} \text{ (კვადრატული ერთეული)},$$

რაც უნდა გვეჩვენებინა. აქ არსებითია შევნიშნოთ, რომ განმარტების თანახმად $R$ ფიგურის ფართობის ზუსტი მნიშვნელობა $\frac{1}{3}$ ტოლია.

**მაგალითი 5.** ვიპოვოთ $R$ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2+1$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით, და $x=-1$ და $x=2$ წრფეებით.

**ამოხსნა:** $R$ ფიგურა წარმოდგენილია 146-ე ნახაზზე.




ნახაზი 146. $R$ ფიგურის ფართობი $A=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$.

ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით

$$A=\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_{-1}^{3}=\left[\frac{1}{3}\times 8+2\right]-\left[\frac{1}{3}\times(-1)^3+(-1)\right]=6 \text{ კვ. ერთეული.}$$

**მაგალითი 6.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_1^3(3x^2+e^x)dx$.

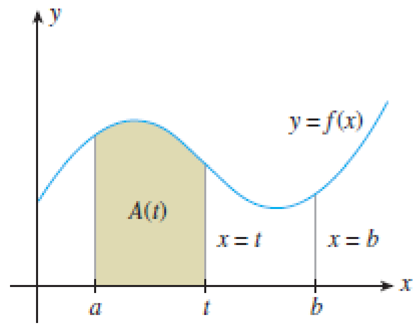
**ამოხსნა:** $\int_1^3(3x^2+e^x)dx=[x^3+e^x]\Big|_1^3=(27+e^3)-(1+e)=26+e^3-e$.

**მაგალითი 7.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

**ამოხსნა:** $\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-x^{-2}\right)dx=\ln|x|+\frac{1}{x}\Big|_1^2=\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)-(\ln 1+1)=\ln 2-\frac{1}{2}$.

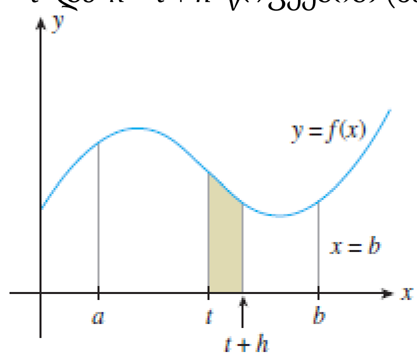
ახლა შევეცადოთ დავრწმუნდეთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის მართებულობაში იმ შემთხვევაში, როცა $f$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა $[a,b]$ ინტერვალზე. დავუშვათ, $A(t)$ წარმოადგენს ფიგურის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია

$y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x = a$ და $x = t$ წრფეებით, სადაც $a \le t \le b$ (ნახ. 147).



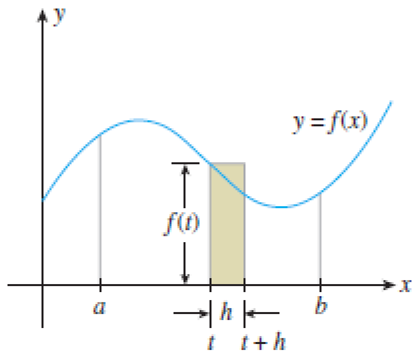

ნახაზი 147. $A(t)$ არის $f$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x = a$, $x = t$ წრფეებით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი.

თუ $h$ საკმარისად მცირე დადებითი რიცხვია, მაშინ $A(t+h)$ იქნება იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $f$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x = a$ და $x = t + h$ წრფეებით. მაშასადამე, $A(t+h) - A(t)$ სხვაობა იქნება იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $f$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x = t$ და $x = t + h$ წრფეებით (ნახ. 148).




ნახაზი 148. სხვაობა $A(t+h) - A(t)$ წარმოადგენს $x = t$ და $x = t + h$ წრფეებს შორის მოთავსებული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს.

ამ უკანასკნელი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა შეიძლება გამოვთვალოთ იმ მართკუთხედის ფართობით, რომლის სიგანეა $h$, ხოლო სიმაღლე - $f(t)$ ანუ $f(t) \cdot h$ ნამრავლით (ნახ. 149).




ნახაზი 149. მართკუთხედის ფართობია $f(t)\cdot h$.

ამრიგად, $A(t+h)-A(t)\approx f(t)\cdot h$, სადაც მიახლოება მით უფრო უკეთესი იქნება, რაც უფრო მცირე იქნება $h$. თუ ამ მიახლოებითი ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $h$-ზე, მივიღებთ

$$\frac{A(t+h)-A(t)}{h}\approx f(t)\cdot \tag{4}$$

თუ გამოვთვლით (4) თანაფარდობის მარცხენა მხარის ზღვარს, როცა $h$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, და გავიხსენებთ წარმოებულის განმარტებას, მივიღებთ

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{h}=A'(t).$$

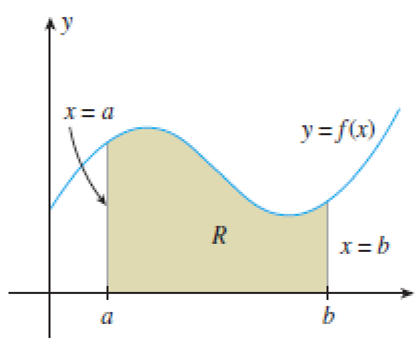
რადგან (4) თანაფარდობის მარჯვენა მხარე არაა დამოკიდებული $h$-ზე, ამიტომ მისი ზღვარი იგივე იქნება. ვინაიდან მიახლოებითი მნიშვნელობა ემთხვევა ზუსტ მნიშვნელობას, როცა $h$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, ამიტომ დავწერთ $A'(t)=f(t)$. რადგან ამ ტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი $t$-თვის $(a,b)$ ინტერვალიდან გამოდის, რომ ფიგურის ფართობი $A$, როგორც $t$ ცვლადის ფუნქცია წარმოადგენს $f(t)$ ფუნქციის პირველადს. ამრიგად, დავასკვნით, რომ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას

$$A(x)=F(x)+C, \tag{5}$$

სადაც $F$ არის $f$ ფუნქციის ერთერთი პირველადი, ხოლო $C$ რაიმე მუდმივია. $C$ მუდმივის განსაზღვრისათვის შევნიშნოთ, რომ $A(a)=0$. ამიტომ გვექნება

$$A(a)=F(a)+C=0 \quad \text{ანუ} \quad C=-F(a).$$

იმავე (5) ტოლობიდან გვექვს: $A(b)=F(b)+C=F(b)-F(a)$. ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ ფიგურის ფართობი ერთი მხრივ $A(b)$-ს ტოლია (ნახ. 150),



ნახაზი 150. $R$ ფიგურის ფართობი $A(b)$ ტოლია.

ხოლო მეორე მხრივ იგი გამოითვლება განსაზღვრული ინტეგრალით

$$\int_a^b f(x)dx,$$

შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ტოლობა

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

## განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები.

განსაზღვრულ ინტეგრალს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

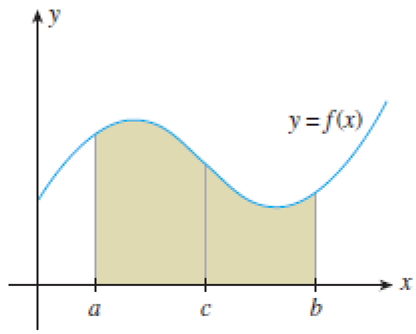
***თუ $f$ და $g$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ:***

1. $\int_a^a f(x)dx = 0;$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ (c მუდმივია),
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (a < c < b).$

მე-5 თვისება ადგენს, რომ თუ $c$ რაიმე რიცხვია $a$ და $b$ რიცხვებს შორის, მაშინ $[a,b]$ ინტერვალი დაიყოფა $[a,c]$ და $[c,b]$ ინტერვალებად და ინტეგრალი $f$ ფუნქციიდან $[a,b]$ ინტერვალზე შეიძლება გამოისახოს $f$ ფუნქციიდან $[a,c]$ და $[c,b]$ ინტერვალებზე აღებული ინტეგრალების ჯამის სახით. ამ თვისებას, როცა $f$ ფუნქცია არაუარყოფითია, აქვს შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. განმარტებით

$$\int_a^b f(x)dx$$

წარმოადგენს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $f$ ფუნქციის გრაფიკით და რომლის ფუძეა $[a,b]$ ინტერვალი (ნახ. 151).




ნახაზი 151. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

ანალოგიურად, ინტეგრალები

$$\int_a^c f(x)dx \quad \text{და} \quad \int_c^b f(x)dx$$

წარმოადგენს ფართობებს იმ მრუდწირული ტრაპეციებისა, რომლებიც შემოსაზღვრულია $f$ ფუნქციის გრაფიკით და რომელთა ფუძეებია შესაბამისად $[a,c]$ და $[c,b]$ ინტერვალები. რადგან ეს ორი ერთმანეთის მოსაზღვრე მრუდწირული ტრაპეცია არ ფარავს ერთმანეთს (მათ მხოლოდ საერთო სასაზღვრო მონაკვეთი აქვთ), ამიტომ მთლიანი ტრაპეციის ფართობი შემადგენელი ტრაპეციების ფართობთა ჯამის ტოლი იქნება ანუ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

## სავარჯიშო

**იპოვეთ $[a,b]$ ინტერვალზე მოცემული $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა. თითოეულ შემთხვევაში მითითებულია ქვეინტერვალების რაოდენობა $n$ და თითოეული ქვეინტერვალიდან ასარჩევი წერტილები:**

1. $f(x) = x^2 + 1$; $[0, 2]$; $n = 5$; შუა წერტილი;
2. $f(x) = 4 - x^2$; $[-1, 2]$; $n = 6$; მარცხენა ბოლო წერტილი;
3. $f(x) = \frac{1}{x}$; $[1, 3]$; $n = 4$; მარჯვენა ბოლო წერტილი;
4. $f(x) = e^x$; $[0, 3]$; $n = 5$; შუა წერტილი.

ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით იპოვეთ $[a,b]$ ინტერვალზე მოცემული $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი და შედეგი შეამოწმეთ გეომეტრიის გამოყენებით:

**5.** $f(x) = 2; [1, 4]$ **6.** $f(x) = 4; [-1, 2]$

**7.** $f(x) = 2x; [1, 3]$ **8.** $f(x) = -\frac{1}{4}x + 1; [1, 4]$

იპოვეთ $[a,b]$ ინტერვალზე მოცემული $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი:

**9.** $f(x) = 2x + 3; [-1, 2]$ **10.** $f(x) = 4x - 1; [2, 4]$

**11.** $f(x) = -x^2 + 4; [-1, 2]$ **12.** $f(x) = 4x - x^2; [0, 4]$

**13.** $f(x) = \frac{1}{x}; [1, 2]$ **14.** $f(x) = \frac{1}{x^2}; [2, 4]$

**15.** $f(x) = \sqrt{x}; [1, 9]$ **16.** $f(x) = x^3; [1, 3]$

**17.** $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}; [-8, -1]$ **18.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; [1, 9]$

**19.** $f(x) = e^x; [0, 2]$ **20.** $f(x) = e^x - x; [1, 2]$

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

**21.** $\int_2^4 3\,dx$ **22.** $\int_{-1}^2 -2\,dx$

**23.** $\int_1^3 (2x + 3)\,dx$ **24.** $\int_{-1}^0 (4 - x)\,dx$

**25.** $\int_{-1}^3 2x^2\,dx$ **26.** $\int_0^2 8x^3\,dx$

**27.** $\int_{-2}^2 (x^2 - 1)\,dx$ **28.** $\int_1^4 \sqrt{u}\,du$

**29.** $\int_1^8 4x^{1/3}\,dx$ **30.** $\int_1^4 2x^{-3/2}\,dx$

**31.** $\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 1)\,dx$ **32.** $\int_1^2 (t^5 - t^3 + 1)\,dt$

**33.** $\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx$ **34.** $\int_1^3 \frac{2}{x}\,dx$

**35.** $\displaystyle\int_0^4 x(x^2-1)\,dx$

**36.** $\displaystyle\int_0^2 (x-4)(x-1)\,dx$

**37.** $\displaystyle\int_1^3 (t^2-t)^2\,dt$

**38.** $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2-1)^2\,dx$

**39.** $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$

**40.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x^3}\,dx$

**41.** $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

**42.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x}\,(\sqrt{x}+\sqrt{2})\,dx$

**43.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{3x^3-2x^2+4}{x^2}\,dx$

**44.** $\displaystyle\int_1^2 \left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\right) du$

## მეთოთხმეტე ლექცია

### ჩასმის ხერხი განსაზღვრულ ინტეგრალში

შემდეგ მაგალითში ჩვენ გამოვიყენებთ ორ მიდგომას, რომლითაც ვსარგებლობთ ხოლმე ზოგადად, ჩასმის ხერხით განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის დროს.

**მაგალითი 1.** გამოვთვალოთ $\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx$ .

**ამოხსნა:** 1) ჯერ გამოვთვალოთ შესაბამისი განუსაზღვრელი ინტეგრალი

$$I = \int x\sqrt{9+x^2}\,dx .$$

თუ მოვახდენთ ჩასმას $u = 9 + x^2$, მაშინ $du = \frac{d}{dx}(9+x^2)dx = 2xdx$, საიდანაც $xdx = \frac{1}{2}du$ და ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$I = \int \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(9+x^2)^{3/2} + C .$$

ამ შედეგის გათვალისწინებით, განსაზღვრული ინტეგრალი ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით ასე გამოითვლება

$$\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(9+x^2)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}\left[(9+16)^{3/2} - 9^{3/2}\right] = \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3} .$$

2) *ინტეგრების საზღვრების შეცვლა.* ისევე როგორც ზემოთ, მოვახდინოთ ჩასმა

$$u = 9 + x^2 . \tag{1}$$

მაშინ $du = \frac{d}{dx}(9+x^2)dx = 2xdx$, საიდანაც $xdx = \frac{1}{2}du$. შევნიშნოთ, რომ მოცემული ინტეგრალი ითვლება $x$ ცვლადით, რომელიც იცვლება საინტეგრო $[0,4]$ ინტერვალში. თუ შევასრულებთ ინტეგრებას $u$ ცვლადით (1) ჩასმის მიხედვით, მაშინ ჩვენ უნდა დავადგინოთ ახალი საინტეგრო $u$ ცვლადის ცვლილების სათანადო არე. ამისათვის, თუ (1) ტოლობაში ჩავსვავთ $x = 0$, მივიღებთ $u = 9 + 0^2 = 9$, რომელიც იქნება $u$ ცვლადით ინტეგრების ქვედა საზღვარი. ანალოგიურად, როცა $x = 4$, მაშინ $u = 9 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, რომელიც იქნება $u$ ცვლადით ინტეგრების ზედა საზღვარი. ამრიგად, საინტეგრო არე $u$ ცვლადით ინტეგრებისას იქნება $[9,25]$ ინტერვალი:

$$\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx = \int_9^{25} \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_9^{25} u^{1/2}du = \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_9^{25} = \frac{1}{3}(25^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3},$$

რაც ემთხვევა პირველი მეთოდით მიღებულ შედეგს.

**მაგალითი 2.** გამოვთვალოთ $\int_0^4 x e^{2x^2} dx$.

**ამოხსნა:** აღვნიშნოთ $u = 2x^2$; მაშინ $du = 4xdx$ და $xdx = \frac{1}{4}du$. როცა $x = 0$, მაშინ $u = 0$, და როცა $x = 4$, მაშინ $u = 8$. ამრიგად, $u$-ს ცვლილების ქვედა საზღვარია ნული, ხოლო ზედა საზღვარი 8. მოცემულ ინტეგრალში შესაბამისი ჩასმების შემდეგ მივიღებთ

$$\int_0^4 x e^{2x^2} dx = \int_0^4 \frac{1}{4}e^u du = \frac{1}{4}\int_0^4 e^u du = \frac{1}{4}e^u\Big|_0^8 = \frac{1}{4}(e^8 - e^0) = \frac{1}{4}(e^8 - 1).$$

**მაგალითი 3.** გამოვთვალოთ $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$.

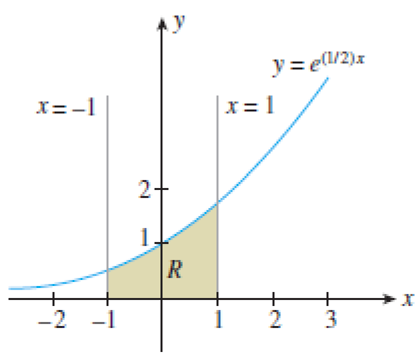
ამოხსნა: აღვნიშნოთ $u = x^3 + 1$; მაშინ $du = 3x^2dx$ და $x^2dx = \frac{1}{3}du$. როცა $x = 0$, მაშინ $u = 1$ და როცა $x = 1$, მაშინ $u = 2$. ამრიგად, $u$-ს ცვლილების ქვედა საზღვარია 1, ხოლო ზედა საზღვარი 2. მოცემულ ინტეგრალში შესაბამისი ჩასმების შემდეგ მივიღებთ

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{du}{u}dx = \frac{1}{3}\ln|u|\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{3}\ln 2.$$

## წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი

**მაგალითი 4.** ვიპოვოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $f(x) = e^{(1/2)x}$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x = -1$ და $x = 1$ წრფეებით.

**ამოხსნა:** ავაგოთ ნახაზი




ნახაზი 152. $R$ ფიგურის ფართობია $\int_{-1}^{1} e^{(1/2)x}dx$.

მოვახდინოთ ჩასმა $u=\frac{1}{2}x$; მაშინ $du=\frac{1}{2}dx$ და $dx=2du$. როცა $x=-1$, მაშინ $u=-\frac{1}{2}$ და როცა $x=1$, მაშინ $u=\frac{1}{2}$. ამრიგად, $u$-ს ცვლილების ქვედა საზღვარია $-\frac{1}{2}$, ხოლო ზედა საზღვარი $\frac{1}{2}$. მოცემულ ინტეგრალში შესაბამისი ჩასმების შემდეგ მივიღებთ

$$\int_{-1}^{1} e^{(1/2)x}dx = 2\int_{-1/2}^{1/2} e^{u}du = 2e^{u}\Big|_{-1/2}^{1/2} = 2(e^{1/2}-e^{-1/2}) \approx 2.08$$

## ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა სეგმენტზე

განსაზღვრული ინტეგრალის საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ $[a,b]$ ინტერვალზე (სეგმენტზე) მოცემული უწყვეტი ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა. გავიხსენოთ, რომ $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ რიცხვების საშუალო მნიშვნელობა (საშუალო არითმეტიკული) გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n}{n}.$$

ახლა, ვთქვათ, მოცემულია $[a,b]$ ინტერვალზე უწყვეტი $f$ ფუნქცია. დავანაწილოთ $[a,b]$ ინტერვალი $n$ რაოდენობა ქვეინტერვალებად, რომელთაც ტოლი $(b-a)/n$ სიგრძე აქვთ. ნებისმიერად ავირჩიოთ $n$ რაოდენობა წერტილი $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ შესაბამისად, პირველი, მეორე და ა. შ. $n$-ური ქვეინტერვალიდან. მაშინ $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n)$ რიცხვების საშუალო მნიშვნელობა

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)}{n} \tag{2}$$

იქნება $f$ ფუნქცის $[a,b]$ ინტერვალზე მიღებულ ყველა მნიშვნელობათა საშუალოს გარკვეული მიახლოება. (2) გამოსახულება ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)}{(b-a)}\left[f(x_1)\cdot\frac{1}{n}+f(x_2)\cdot\frac{1}{n}+f(x_3)\cdot\frac{1}{n}+\cdots+f(x_n)\cdot\frac{1}{n}\right]=\\
&=\frac{1}{b-a}\left[f(x_1)\cdot\frac{b-a}{n}+f(x_2)\cdot\frac{b-a}{n}+f(x_3)\cdot\frac{b-a}{n}+\cdots+f(x_n)\cdot\frac{b-a}{n}\right]=\\
&=\frac{1}{b-a}\left[f(x_1)\cdot\Delta x+f(x_2)\cdot\Delta x+f(x_3)\cdot\Delta x+\cdots+f(x_n)\cdot\Delta x\right].
\end{aligned} \tag{3}$$

როცა $n$ უსასრულოდ იზრდება, მაშინ (2) გამოსახულება უფრო მეტად უახლოვდება $f$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას $[a,b]$ ინტერვალზე. მეორე მხრივ (3) გამოსახულების კვადრატულ ფრჩხილებში ჩაწერილი გამოსახულება წარმოადგენს $f$ ფუნქციის რიმანის ჯამს. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)}{n}\right]=$$

$$=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\cdot\Delta x+f(x_2)\cdot\Delta x+f(x_3)\cdot\Delta x+\cdots+f(x_n)\cdot\Delta x\right]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

ამრიგად, მივედით შემდეგ დასკვნამდე.

**თუ $f$ ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ მისი საშუალო მნიშვნელობა $[a,b]$ ინტერვალზე ტოლია შემდეგი სიდიდისა**

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

**მაგალითი 5.** ვიპოვოთ $f(x)=\sqrt{x}$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $[0,4]$ ინტერვალზე.

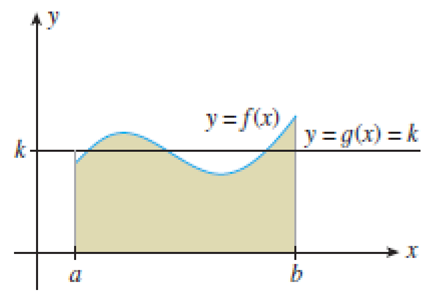
**ამოხსნა:** ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა იქნება

$$\frac{1}{4-0}\int_0^4\sqrt{x}dx=\frac{1}{4}\int_0^4 x^{1/2}dx=\frac{1}{6}x^{3/2}\Big|_0^4=\frac{1}{6}(4^{3/2})=\frac{4}{3}.$$

$[a,b]$ ინტერვალზე $f$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას აქვს შემდეგი გეომეტრიული აზრი. ვთქვათ, $f(x)$ არაუარყოფითი ფუნქციაა $[a,b]$ ინტერვალზე, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x)dx$$

გვაძლევს მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $f$ ფუნქციის გრაფიკით, $x$ ღერძით და $x=a$ და $x=b$ წრფეებით (ნახ. 153).




ნახაზი 153. ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $[a,b]$ ინტერვალზე არის $k$.

შევნიშნოთ, რომ ზოგადად ფუნქციის „სიმაღლე“ $f(x)$ იცვლება წერტილიდან წერტილში გადასვლისას. შეიძლება შევცვალოთ $f(x)$ მუდმივი $g(x)=k$ ფუნქციით (რომელსაც მუდმივი "სიმაღლე" აქვს) ისე, რომ $f$ და $g$ ფუნქციების გრაფიკებით $[a,b]$ ინტერვალზე შემოსაზღვრული ფიგურების ფართობები ტოლი იყოს? ეს მოხდება იმ შემთხვევაში, თუ $g(x)=k$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მართკუთხედის ფართობი და $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობები ტოლი იქნება

$$k(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$

ანუ

$$k=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

მაშასადამე, $k$ არის $f$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $[a,b]$ ინტერვალზე. ამრიგად, $f$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $[a,b]$ ინტერვალზე არის $(b-a)$ სიგრძის ფუძის მქონე მართკუთხედის სიმაღლე, რომლის ფართობიც ტოლია $f$ ფუნქციის გრაფიკით $[a,b]$ ინტერვალზე შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობისა.

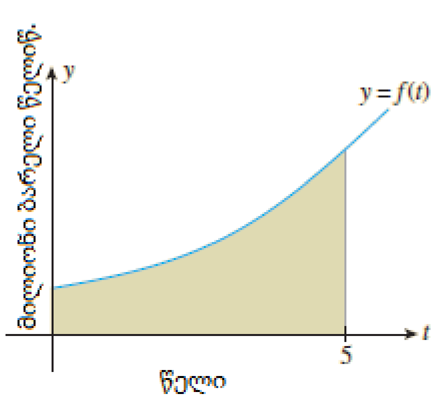
### ორი წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი

ვარაუდობენ, რომ გარკვეული ქვეყნის ნავთობის მოხმარება მომდევნო 5 წლის განმავლობაში გაიზრდება და $t$ წლისათვის მიაღწევს $f(t)$ მილიონ ბარელს წელიწადში. მაშინ ქვეყნის ნავთობის ჯამური მოხმარება 5 წლის განმავლობაში

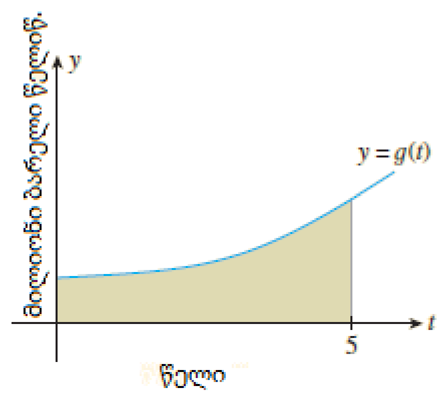
იქნება $f$ ფუნქციის გრაფიკით [0, 5] ინტერვალზე შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობის ტოლი (ნახ. 154).

დავუშვათ, რომ ქვეყნის მიერ ენერგიის კონსერვაციის გარკვეული ღონისძიებების გატარების შედეგად, ნავთობის მოხმარების მოსალოდნელი ზრდა განისაზღვრება $g(t)$ მილიონი ბარელით წელიწადში ნაცვლად პროგნოზირებული $f(t)$ სიდიდისა. მაშინ დაგეგმილი ნავთობის ჯამური მოხმარება 5 წლის განმავლობაში იქნება $g$ ფუნქციის გრაფიკით [0, 5] ინტერვალზე შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (ნახ. 155).

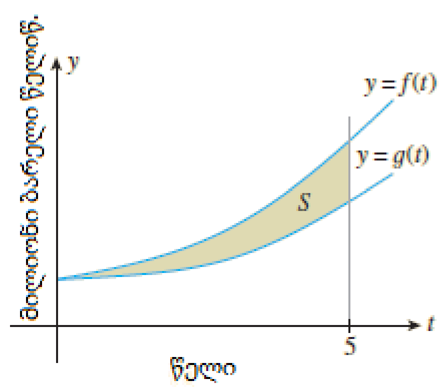
მაშასადამე, [0,5] ინტერვალზე $f$ და $g$ ფუნქციების გრაფიკებს შორის მოთავსებული $S$ ფიგურის ფართობი (ნახ. 156) მოგვცემს ნავთობის დანაზოგის მარაგს, რომელიც დაგროვდება 5 წლის განმავლობაში, ენერგიის კონსერვაციის გარკვეული ღონისძიებების გატარების შედეგად.



ნახაზი 154.



ნახაზი 155.



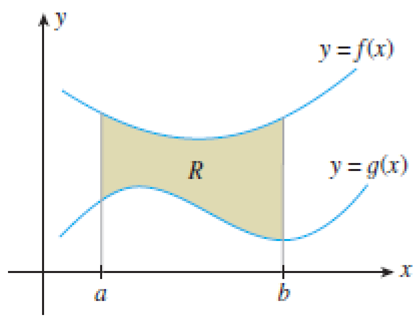
ნახაზი 156.

ცხადია, რომ $S$ ფიგურის ფართობი ტოლია $f$ ფუნქციის გრაფიკით [0,5] ინტერვალზე შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობს გამოკლებული $g$ ფუნქციის გრაფიკით [0, 5] ინტერვალზე შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი ანუ

$$\int_0^5 f(t)dt - \int_0^5 g(t)dt = \int_0^5 \left[ f(t) - g(t) \right] dt .$$

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ თუ როგორ უნდა გამოვითვალოთ ორ წირს შორის მოთავსებული ფიგურის ფართობი.

ახლა ჩვენი ყურადღება მივაპყროთ ფუნქციათა გრაფიკებით შემოსაზღვრული ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლის ამოცანას. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ერთი ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს მეორე ფუნქციის გრაფიკის ზემოთ. უფრო კონკრეტულად, ვთქათ $R$ ფიგურა შემოსაზღვრულია ზემოდან უწყვეტი $f$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან - უწყვეტი $g$ ფუნქციის გრაფიკით, სადაც $f(x) \geq g(x)$ $[a,b]$ ინტერვალზე, მარცხნიდან $x = a$ და მარჯვნიდან $x = b$ წრფეებით (ნახ. 157).




ნახაზი 157. $R$ ფიგურის ფართობი ტოლია $\int_a^b \left[ f(x) - g(x) \right] dx$.

როგორც ნახაზიდან ჩანს, $R$ ფიგურის ფართობი ტოლია $[a,b]$ ინტერვალზე უწყვეტი $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობისა და $[a,b]$ ინტერვალზე უწყვეტი $g$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის სხვაობისა ანუ

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[ f(x) - g(x) \right] dx .$$

**ორ წირს შორის მოთავსებული ფიგურის ფართობი.**

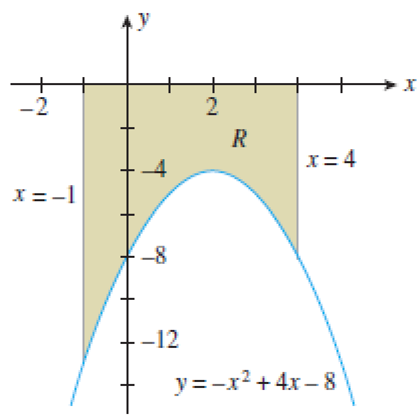
***თუ $f$ და $g$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a,b]$ ინტერვალზე, ამასთან $f(x) \geq g(x)$, მაშინ ფიგურის ფართობი, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან კი - $y = g(x)$ ფუნქციის გრაფიკით $[a,b]$ ინტერვალზე, გამოითვლება ფორმულით***

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\,. \qquad (4)$$

(4) ფორმულაში ჩვენ დავუშვით, რომ $f$ და $g$ არაუარყოფითი ფუნქციებია $[a,b]$ ინტერვალზე. მიუხედავად ამისა შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (4) მართებულია მაშინაც, როცა $f$ და $g$ უარყოფითი ფუნქციებია $[a,b]$ ინტერვალზე. როცა $g$ ნულია ყოველი $x$-თვის $[a,b]$ ინტერვალიდან, მაშინ ფიგურის ქვედა საზღვარი $x$ ღერძია და ამ შემთხვევაში (4) გვაძლევს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობს $x=a$-დან $x=b$-მდე, რაც მოსალოდნელი იყო.

**მაგალითი 6.** ვიპოვოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x$ ღერძით, $y=-x^2+4x-8$ ფუნქციის გრაფიკით და წრფეებით $x=-1$, $x=4$.

**ამოხსნა:** ფიგურა, რომლის ფართობიც უნდა გამოვთვალოთ, გამოსახულია 158-ე ნახაზზე.




ნახაზი 158. $R$ ფიგურის ფართობია $-\int_{-1}^{4} g(x)dx$

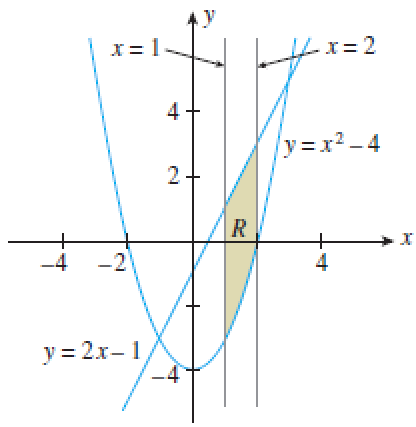
$R$ ფიგურა შემოსაზღვრულია ზემოდან $f(x)=0$ ფუნქციის გრაფიკით ($x$ ღერძით) და ქვემოდან $g(x)=-x^2+4x-8$ ფუნქციის გრაფიკით [-1,4] ინტერვალზე. ამიტომ $R$ ფიგურის ფართობი ასე გამოითვლება

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_{-1}^{4}\left[0-(-x^2+4x-8)\right]dx = \int_{-1}^{4}(x^2-4x+8)\,dx =$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+8x\right)\Bigg|_{-1}^{4} = \left[\frac{1}{3}\times 64-2\times 16+8\times 4\right]-\left[\frac{1}{3}\times(-1)-2\times 1+8\times(-1)\right]=31\frac{2}{3}$$

**მაგალითი 7.** ვიპოვოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $f(x)=2x-1$ და $g(x)=x^2-4$ ფუნქციების გრაფიკებით და წრფეებით $x=1$, $x=2$.

**ამოხსნა:** ავაგოთ $f(x)=2x-1$ და $g(x)=x^2-4$ ფუნქციების გრაფიკები, $x=1$, $x=2$ წრფეები და მოვნიშნოთ გამოსათვლელი ფართობი (ნახ. 159).




ნახაზი 159. $R$ ფიგურის ფართობია $\int_1^2 [f(x)-g(x)]dx$.

რადგან $[1,2]$ ინტერვალში $f$ ფუნქციის გრაფიკი მაღლა მდებარეობს ვიდრე $g$ ფუნქციის გრაფიკი, ამიტომ საძიებელი ფართობია

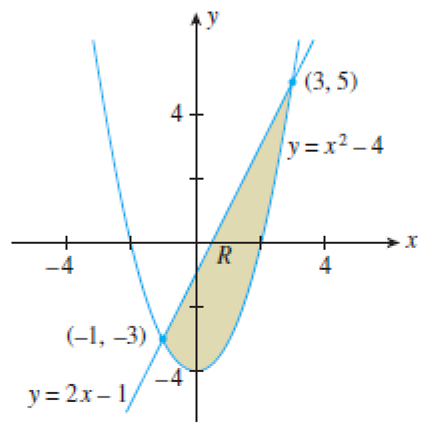
$$\int_1^2 [f(x)-g(x)]dx=\int_1^2 \left[(2x-1)-(x^2-4)\right]dx=\int_1^2 (-x^2+2x+3)dx=$$
$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right)\Bigg|_1^2=\left(-\frac{8}{3}+4+6\right)-\left(-\frac{1}{3}+1+3\right)=\frac{11}{3}.$$

**მაგალითი 8.** ვიპოვოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $f(x)=2x-1$ და $g(x)=x^2-4$ ფუნქციების გრაფიკებით.

**ამოხსნა:** პირველ რიგში ვიპოვოთ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილები. ამისათვის ამოვხსნათ სისტემა, რომელიც $y=2x-1$ და $y=x^2-4$ განტოლებებისაგან შედგება. $y$-ის მნიშვნელობების ერთმანეთთან გატოლებით მივიღებთ

$$x^2-4=2x-1,$$
$$x^2-2x-3=0,$$
$$(x+1)(x-3)=0.$$

ამრიგად ფუნქციათა გრაფიკები იკვეთებიან წერტილებში, რომელთა აბსცისებია $x=-1$ და $x=3$ (ნახ. 160).




ნახაზი 160. $R$ ფიგურის ფართობია $\int_{-1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]dx$.

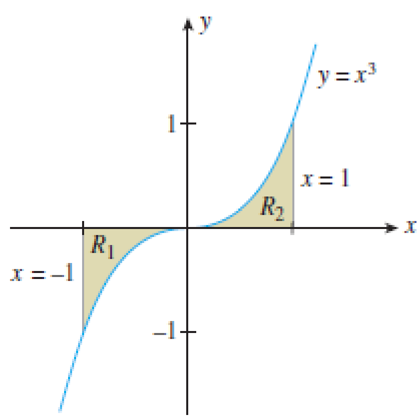
შევნიშნოთ, რომ $R$ ფიგურა ზემოდან შემოსაზღვრულია $f(x)=2x-1$ ფუნქციის გრაფიკით, ქვემოდან $g(x)=x^2-4$ ფუნქციის გრაფიკით. რადგან $f$ ფუნქციის გრაფიკი ძევს $g$ ფუნქციის გრაფიკის ზევით [-1,3] ინტერვალზე, ამიტომ საძიებელი ფართობია

$$\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{-1}^{3}\left[(2x-1)-(x^2-4)\right]dx=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right)\Bigg|_{-1}^{3}=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}.$$

**მაგალითი 9.** ვიპოვოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $f(x)=x^3$ და $x$ ღერძით და წრფეებით $x=-1$, $x=1$.

**ამოხსნა:** ფიგურა, რომლის ფართობიც ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ შედგება ორი $R_1$ და $R_2$ ფიგურისაგან, როგორც ეს 161-ე ნახაზზეა მოცემული.




ნახაზი 161. $R_1$ ფიგურის ფართობი = $R_2$ ფიგურის ფართობს.

შევნიშნოთ, რომ $x$ ღერძი წარმოიდგინება $g(x)=0$ ფუნქციით. რადგან $g(x)\geq f(x)$ [-1, 0] ინტერვალზე, ამიტომ $R_1$ ფიგურის ფართობი ასე გამოითვლება

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx = \int_{-1}^{0} (0-x^3)\,dx = -\int_{-1}^{0} x^3 dx = -\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{4}.$$

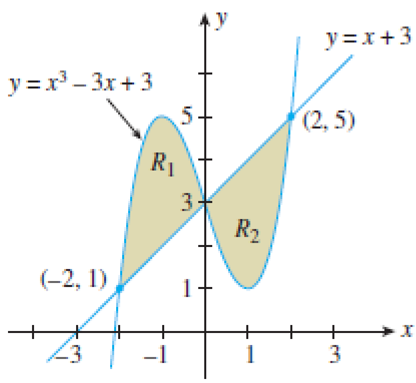
შევნიშნოთ, რომ $[0,1]$ ინტერვალში $f(x) \ge g(x)$, ამიტომ $R_2$ ფიგურის ფართობი იქნება

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_0^1 (x^3-0)dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

ამრიგად, მთლიანი ფიგურის ფართობი იქნება $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

**მაგალითი 10.** ვიპოვოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $f(x)=x^3-3x+3$ და $g(x)=x+3$ ფუნქციების გრაფიკებით.

**ამოხსნა:** პირველ რიგში ავაგოთ მოცემულ ფუნქციათა გრაფიკები და მოვნიშნოთ ფიგურა, რომლის ფართობიც უნდა გამოვთვალოთ. მონიშნული ფიგურა შედგება ორი პატარა $R_1$ და $R_2$ ფიგურებისაგან, რომლებიც 162-ე ნახაზზეა წარმოდგენილი.




ნახაზი 162. $R_1$ ფიგურის ფართობი + $R_2$ ფიგურის ფართობი =

$$\int_{-2}^{0} [f(x)-g(x)]\,dx + \int_0^2 [g(x)-f(x)]\,dx$$

ვიპოვოთ ფუნქციათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილები. ამისათვის ამოვხსნათ სისტემა, რომელიც $y=x+3$ და $y=x^3-3x+3$ განტოლებებისაგან შედგება. $y$-ის მნიშვნელობების ერთმანეთთან გატოლებით მივიღებთ

$$x^3-3x+3=x+3,$$
$$x^3-4x=0,$$
$$x(x^2-4)=0,$$
$$x(x-2)(x+2)=0,$$
$$x=0,\ -2,\ 2.$$

ამრიგად, წირების გადაკვეთის წერტილებია (-2,1), (0,3) და (2,5).

როცა $-2 \le x \le 0$, მაშინ $f(x) \ge g(x)$ და ამიტომ $R_1$-ის ფართობი იქნება

$$\int_{-2}^{0} \left[(x^3-3x+3)-(x+3)\right]dx = \int_{-2}^{0} (x^3-4x)\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} = 4;$$

როცა $0 \le x \le 2$, მაშინ $g(x) \ge f(x)$ და ამიტომ $R_2$-ის ფართობი იქნება

$$\int_0^2 \left[(x+3)-(x^3-3x+3)\right]dx = \int_0^2 (-x^3+4x)\,dx = \left(-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right)\Bigg|_0^2 = 4\,.$$

საბოლოოდ მთლიანი ფიგურის ფართობი იქნება 8.

### ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი

ისევე როგორც ჩასმის ხერხი, ნაწილობითი ინტეგრებაც არის ინტეგრების ერთ-ერთი ხერხი, რომელიც დაფუძნებულია გაწარმოების შესაბამის წესზე, კერძოდ, ნამრავლის გაწარმოების წესზე. ვიცით, რომ თუ $f$ და $g$ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x). \tag{5}$$

თუ ამ განტოლების ორივე მხარეს ვაინტეგრებთ $x$-ის მიმართ, მივიღებთ

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx,$$

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx.$$

უკანასკნელი ტოლობა ასე შეგვიძლია გადავწეროთ

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx\,,$$

რომელსაც ნაწილობითი ***ინტეგრების ფორმულა ეწოდება.*** ეს ძალიან სასარგებლო ფორმულაა, რადგან იგი გვაძლევს შესაძლებლობას ერთი განუსაზღვრელი ინტეგრალი შევცვალოთ მეორეთი, რომელიც გამოსათვლელად უფრო მარტივია. იგი შეიძლება ჩავწეროთ უფრო მარტივად, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u = f(x), \qquad dv = g'(x)dx,$$

$$du = f'(x)dx, \qquad v = g(x).$$

ამ აღნიშვნების შემდეგ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას ექნება სახე

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{6}$$

**მაგალითი 11.** გამოვთვალოთ $\int xe^x dx.$

**ამოხსნა:** ამ ინტეგრალს ვერ გამოვთვლით ჩვენს მიერ უკვე განხილული ინტეგრების მეთოდებით. ამიტომ ჩავწეროთ მოცემული ინტეგრალი იმ ფორმით, რომ გაადვილდეს მისი გამოთვლა. უფრო ზუსტად, გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების (6) ფორმულა. აღვნიშნოთ

$$u = x, \qquad dv = e^x dx,$$

$$du = dx, \qquad v = e^x.$$

მაშინ

$$\int x e^x dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = xe^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)\,e^x + C\,.$$

ნაწილობითი ინტეგრება შედეგიანია, როცა სწორად ხდება $u$-ს და $dv$-ს შერჩევა. მაგალითად, თუ იმავე ზემოგანხილულ ინტეგრალში ავირჩევდით

$$u = e^x, \qquad dv = x\,dx,$$

$$du = e^x, \qquad v = \tfrac{1}{2}x^2,$$

მაშინ გვექნებოდა

$$\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = \tfrac{1}{2}x^2e^x - \int \tfrac{1}{2}x^2e^x dx\,.$$

რადგან ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მიღებული ინტეგრალი უფრო რთულია, ვიდრე საწყისი ინტეგრალი, ამიტომ $u$-ს და $dv$-ს ასეთი არჩევანი არაა გამართლებული.

ზოგადად, ნაწილობითი ინტეგრების დროს $u$-ს და $dv$-ს არჩევისას ვისარგებლოთ შემდეგი მითითებით.

***ისე ავირჩიოთ $u$ და $dv$, რომ:***

1. ***$du$ უფრო მარტივი იყოს ვიდრე $u$;***
2. ***$dv$-ს ინტეგრება იყოს მარტივი.***

**მაგალითი 12.** გამოვთვალოთ $\int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}dx.$

**ამოხსნა:** ვთქვათ,

$$u = x\,e^x, \qquad dv = \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$du = e^x(x+1)\,dx, \qquad v = -\tfrac{1}{x+1}.$$

მაშასადამე

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\,e^x\left(\frac{-1}{x+1}\right) - \int\left(\frac{-1}{x+1}\right)e^x(x+1)dx =$$

$$= -\frac{x\,e^x}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{x\,e^x}{x+1} + e^x + C.$$

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ხანდახან გვიწევს ნაწილობითი ინტეგრების განმეორებით გამოყენება ინტეგრალის გამოთვლის დროს.

**მაგალითი 13.** გამოვთვალოთ $\int x^2e^x dx.$

**ამოხსნა:** ვთქვათ,

$$u = x^2, \qquad dv = e^x dx,$$

$$du = 2xdx, \qquad v = e^x,$$

მაშინ

$$\int x^2e^x dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x^2e^x - \int e^x(2x)\,dx = x^2e^x - 2\int x\,e^x dx\,.$$

რომ დავასრულოთ მოცემული ინტეგრალის გამოთვლა, უდა გამოვთვალოთ ტოლობის მარჯვენა მხარეში არსებული ინტეგრალი

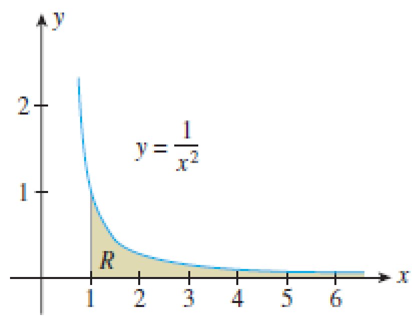
$$\int x\,e^x dx\,.$$

მაგრამ ეს ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით უკვე გამოვთვალეთ ზემოთ. ამიტომ ამ შედეგის გამოყენებით საბოლოოდ გვექნება

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left[(x-1)e^x\right] + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

## არასაკუთრივი ინტეგრალები

როგორც ვნახეთ, ყოველ განსაზღვრულ ინტეგრალში გვაქვს სასრული სიგრძის საინტეგრო ინტერვალი. მიუხედავად ამისა, პრაქტიკულ გამოყენნებებში გვხვდება ინტეგრალები, რომელთა აქვთ შემოუსაზღვრელი საინტეგრო ინტერვალი. ასეთ ინტეგრალებს ***არასაკუთრივ ინტეგრალებს*** უწოდებენ. ვიდრე არასაკუთრივ ინტეგრალს განვმარტავდეთ $f$ ფუნქციიდან უსასრულო ინტერვალზე, განვიხილოთ ფიგურის ფართობის გამოთვლის მაგალითი: ვიპოვოთ $y = f(x) = 1/x^2$ ფუნქციის გრაფიკით და $x$ ღერძით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი $x=1$ წრფის მარჯვნივ (ნახ. 163)

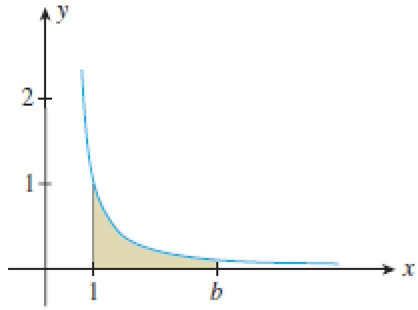



ნახაზი 163. შემოუსაზღვრელი $R$ ფიგურის ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოითვლება განსაზღვრული ინტეგრალით.

რადგან ინტერვალი რომელზედაც უნდა შევასრულოთ ინტეგრება შემოუსაზღვრელია, ამიტომ ინტეგრების ის მეთოდები რასაც ადრე ვიყენებდით არ შეგვიძლია პირდაპირ გამოვიყენოთ ამ ამოცანის გადასაწყვეტად. მიუხედავად ამისა, ჩვენ შეგვიძლია $R$ ფიგურის ფართობი მიახლოებით გამოვთვალოთ შემდეგი განსაზღვრული ინტეგრალით

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx,$$

რომელიც გვაძლევს ფიგურის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = f(x) = 1/x^2$ წირით $x=1$-დან $x=b$-მდე (ნახ.164).




ნახაზი 164. დაშტრიხული ფიგურის ფართობია $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$.

შევნიშნოთ, რომ $R$ ფიგურის ფართობს უკეთესად მივუახლოვდებით, თუ ინტეგრების ზედა საზღვარი $b$ გახდება უფრო და უფრო დიდი. აქედან გამომდინარე, უნდა ვივარაუდოთ, რომ თუ $I(b)$ ფუნქციას განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად

$$I(b)=\int_1^b \frac{1}{x^2}dx,$$

მაშინ $R$ ფიგურის საძიებელი ფართობი შეგვიძლია განვმარტოთ, როგორც $I(b)$ ფუნქციის ზღვარი, როცა $b$ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ

$$\lim_{b\to\infty} I(b)=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx.$$

***არასაკუთრივი ინტეგრალი $f$ ფუნქციიდან შემოუსაზღვრელ $[a,\infty)$ ინტერვალზე.***

***თუ $f$ უწყვეტია შემოუსაზღვრელ $[a,\infty)$ ინტერვალზე, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $f$ ფუნქციიდან $[a,\infty)$ განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით***

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

***თუ ზღვარი არსებობს.***

თუ ზღვარი არსებობს, მაშინ ვიტყვით, რომ ***არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია.*** წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ***არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.***

**მაგალითი 14.** კრებადია თუ არა ინტეგრალი $\int_2^\infty \frac{1}{x}dx$.

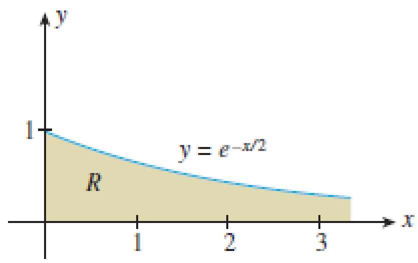
**ამოხსნა:**

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_2^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 2).$$

რადგან $\ln b\to\infty$, როცა $b\to\infty$, ამიტომ არ არსებობს ზღვარი და, მაშასადამე, არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

**მაგალითი 15.** ვიპოვოთ $R$ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x$ ღერძით და $y=e^{-x/2}$ ფუნქციის გრაფიკით $x\ge 0$-თვის.

**ამოხსნა:** ფიგურა გამოსახულია 165-ე ნახაზზე.




ნახაზი 165. ფიგურის ფართობია $\int_0^{\infty} e^{-x/2}dx$.

ავიღოთ $b>0$ და გამოვთვალოთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=e^{-x/2}$ წირით, $x$ ღერძით და $x=0$ და $x=b$ წრფეებით. მაშინ

$$I(b)=\int_0^b e^{-x/2}dx=-2e^{-x/2}\Big|_0^b=-2e^{-b/2}+2$$

და საძიებელი ფართობი იქნება

$$\lim_{b\to\infty} I(b)=\lim_{b\to\infty}(-2e^{-b/2}+2)=2-2\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{b/2}}=2.$$

ზემოთ განხილულ არასაკუთრივ ინტეგრალში საინტეგრო არე იყო მარჯვნიდან შემოუსაზღვრელი ინტერვალი. პრაქტიკაში გვხვდება არასაკუთრივი ინტეგრალები, რომელთა საინტეგრო არე არის მარცხნიდან შემოუსაზღვრელი ინტერვალი. ასეთი ინტეგრალები ზემოთ განხილულის ანალოგიურად განიმარტება.

***არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty,b]$ ინტერვალზე.***

***თუ $f$ უწყვეტია შემოუსაზღვრელ $(-\infty,b]$ ინტერვალზე, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $f$ ფუნქციიდან $(-\infty,b]$ ინტერვალზე განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით***

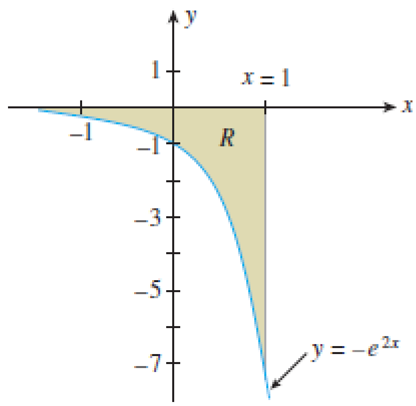
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

***თუ ზღვარი არსებობს.***

თუ ზღვარი არსებობს, მაშინ ვიტყვით, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

**მაგალითი 16.** ვიპოვოთ $R$ ფიგურის ფართობი, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $x$ ღერძით, ქვემოდან $y=-e^{2x}$ ფუნქციის გრაფიკით, ვერტიკალური $x=1$ წრფის მარჯვნივ.

**ამოხსნა:** ფიგურა გამოსახულია 166-ე ნახაზზე. ავიღოთ $a<1$ და გამოვთვალოთ ფიგურეს ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან $x$ ღერძით, ქვემოდან $y=-e^{2x}$ ფუნქციის გრაფიკით, $x=a$ წრფიდან $x=1$ წრფემდე:




ნახაზი 166. ფიგურის ფართობია $-\int\limits_{-\infty}^{1} e^{-x/2}dx$ .

$$I(a)=\int\limits_a^1[0-(-e^{2x})]dx=\int\limits_a^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_a^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^{2a}.$$

საძიებელი ფართობი იქნება

$$\lim_{a\to-\infty}I(a)=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^{2a}\right)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}e^{2a}=\frac{1}{2}e^2.$$

პრაქტიკაში ასევე გვხვდება არასაკუთრივი ინტეგრალები, რომელთა საინტეგრო არე მოიცავს მთელ ღერძს, $(-\infty,\infty)$ ინტერვალს. ასეთი ინტეგრალები შემდეგნაირად განიმარტება.

***არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty,\infty)$ ინტერვალზე.***

***ვთქვათ, $f$ უწყვეტია შემოუსაზღვრელ $(-\infty,\infty)$ ინტერვალზე და დავუშვათ $c$ რაიმე ნამდვილი რიცხვია. თუ არასაკუთრივი ინტეგრალები***

$$\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx \quad \text{და} \quad \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx \tag{7}$$

***კრებადია, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $f$ ფუნქციიდან $(-\infty,\infty)$ ინტერვალზე ასე განისაზღვრება***

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty,\infty)$ ინტერვალზე კრებადია. თუ (7) ინტეგრალებიდან ერთი მაინც განშლადია, მაშინ ვიტყვით, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty,\infty)$ ინტერვალზე განშლადია. ზოგადად, ვირჩევთ $c=0$.

**მაგალითი 17.** გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$ და გავარკვიოთ მისი გეომეტრიული აზრი.

**ამოხსნა:** ავიღოთ $c$ ნულის ტოლი და გამოვთვალოთ (7) ინტეგრალები:

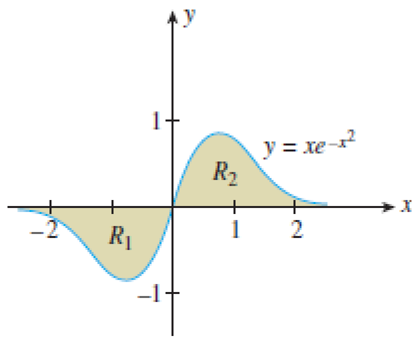
$$\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2} dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x e^{-x^2} dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-a^2}\right] = -\frac{1}{2};$$

$$\int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x e^{-x^2} dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

ამრიგად,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0.$$

$y = xe^{-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკი გამოსახულია 167-ე ნახაზზე.




ნახაზი 167. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx$

არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx$ გვაძლევს $R_1$ ფიგურის ფართობს უარყოფითი ნიშნით, ხოლო $\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx$ ინტეგრალი - $R_2$ ფიგურის ფართობს. რადგან $f(x) = xe^{-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ, ამიტომ $R_1$ და $R_2$ ფიგურებს ერთიდაიგივე ფართობები აქვთ, სხვა სიტყვებით,

$$\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2} dx = -\int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

მაშასადამე,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx = 0,$$

რაც ზემოთ ვაჩვენეთ.

## სავარჯიშო

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

1. $\int_0^2 x(x^2-1)^3\,dx$
2. $\int_0^1 x^2(2x^3-1)^4\,dx$
3. $\int_0^1 x\sqrt{5x^2+4}\,dx$
4. $\int_1^3 x\sqrt{3x^2-2}\,dx$
5. $\int_0^2 x^2(x^3+1)^{3/2}\,dx$
6. $\int_1^5 (2x-1)^{5/2}\,dx$
7. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$
8. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$
9. $\int_1^2 (2x-1)^4\,dx$
10. $\int_1^2 (2x+4)(x^2+4x-8)^3\,dx$
11. $\int_{-1}^1 x^2(x^3+1)^4\,dx$
12. $\int_1^2 \left(x^3+\frac{3}{4}\right)(x^4+3x)^{-2}\,dx$
13. $\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx$
14. $\int_1^4 x\sqrt{x+1}\,dx$
15. $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$
16. $\int_0^1 e^{-x}\,dx$
17. $\int_0^1 (e^{2x}+x^2+1)\,dx$
18. $\int_0^2 (e^t-e^{-t})\,dt$
19. $\int_{-1}^1 xe^{x^2+1}\,dx$
20. $\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
21. $\int_3^6 \frac{2}{x-2}\,dx$
22. $\int_0^1 \frac{x}{1+2x^2}\,dx$
23. $\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2-1}\,dx$
24. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$
25. $\int_1^2 \left(4e^{2u}-\frac{1}{u}\right)du$
26. $\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}+e^x\right)dx$
27. $\int_1^2 \left(2e^{-4x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$
28. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$

იპოვეთ $[a,b]$ ინტერვალზე $f$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი:

**29.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $[-1, 2]$

**30.** $f(x) = x^3 + x$; $[0, 1]$ **31.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $[1, 2]$

**32.** $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$; $[0, 3]$

**33.** $f(x) = e^{-x/2}$; $[-1, 2]$ **34.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{4x}$; $[1, 2]$

იპოვეთ $f$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $[a,b]$ ინტერვალზე:

**35.** $f(x) = 2x + 3$; $[0, 2]$ **36.** $f(x) = 8 - x$; $[1, 4]$

**37.** $f(x) = 2x^2 - 3$; $[1, 3]$ **38.** $f(x) = 4 - x^2$; $[-2, 3]$

**39.** $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $[-1, 2]$

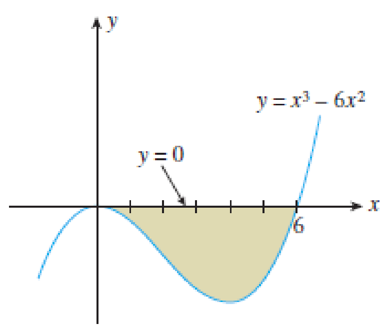
**40.** $f(x) = x^3$; $[-1, 1]$ **41.** $f(x) = \sqrt{2x+1}$; $[0, 4]$

**42.** $f(x) = e^{-x}$; $[0, 4]$ **43.** $f(x) = xe^{x^2}$; $[0, 2]$

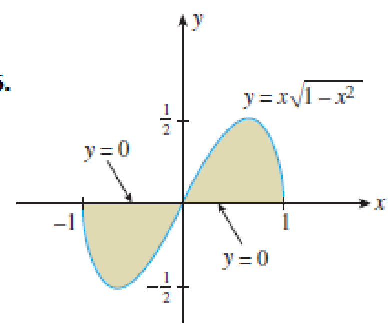
**44.** $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $[0, 2]$

იპოვეთ დაშტრიხული ფიგურის ფართობი:

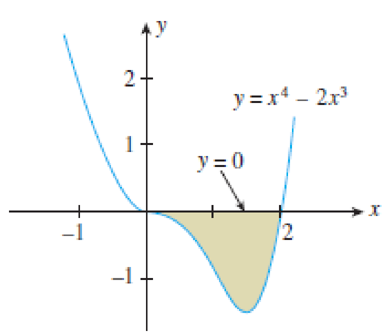
**45.**



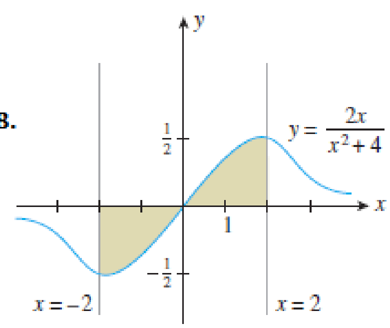

**46.**



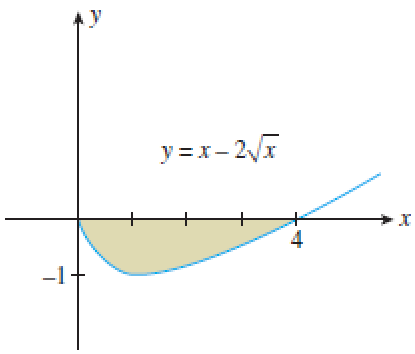

**47.**



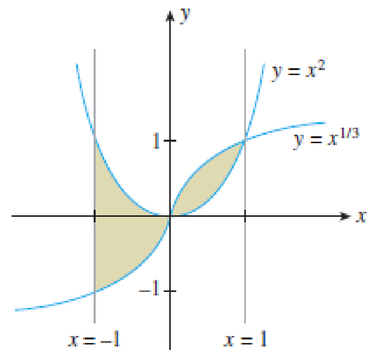

**48.**



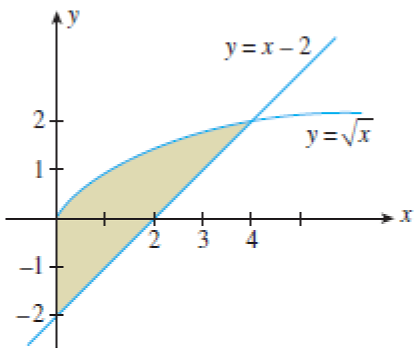
**49.**



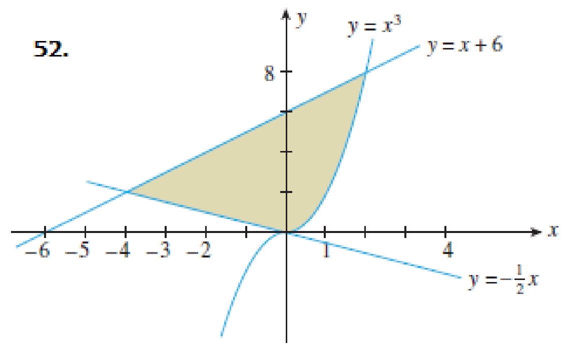

**50.**




**51.**




**52.**




ააგეთ ნახაზი და იპოვეთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ქვემოდან $f$ ფუნქციის გრაფიკით, ზემოდან $x$ ღერძით, $x=a$-დან $x=b$-მდე.

**53.** $f(x) = -x^2$; $a = -1, b = 2$

**54.** $f(x) = x^2 - 4$; $a = -2, b = 2$

**55.** $f(x) = x^2 - 5x + 4$; $a = 1, b = 3$

**56.** $f(x) = x^3$; $a = -1, b = 0$

**57.** $f(x) = -1 - \sqrt{x}$; $a = 0, b = 9$

**58.** $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x}$; $a = 0, b = 4$

**59.** $f(x) = -e^{(1/2)x}$; $a = -2, b = 4$

**60.** $f(x) = -xe^{-x^2}$; $a = 0, b = 1$

იპოვეთ $f$ და $g$ ფუნქციების გრაფიკებით და $x=a$ და $x=b$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი. ააგეთ ნახაზი.

**61.** $f(x) = x^2 + 3, g(x) = 1; a = 1, b = 3$

**62.** $f(x) = x + 2, g(x) = x^2 - 4; a = -1, b = 2$

**63.** $f(x) = -x^2 + 2x + 3, g(x) = -x + 3; a = 0, b = 2$

**64.** $f(x) = 9 - x^2, g(x) = 2x + 3; a = -1, b = 1$

**65.** $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \frac{1}{3}x^3; a = -1, b = 2$

**66.** $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = -\frac{1}{2}x - 1; a = 1, b = 4$

**67.** $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2x - 1; a = 1, b = 4$

**68.** $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x^2}; a = 1, b = 3$

**69.** $f(x) = e^x, g(x) = \frac{1}{x}; a = 1, b = 2$

**70.** $f(x) = x, g(x) = e^{2x}; a = 1, b = 3$

იპოვეთ $f$ ფუნქციის გრაფიკით და $y=0$, $x=a$, $x=b$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი. ააგეთ ნახაზი.

**71.** $f(x) = x; a = -1, b = 2$

**72.** $f(x) = x^2 - 2x; a = -1, b = 1$

**73.** $f(x) = -x^2 + 4x - 3; a = -1, b = 2$

**74.** $f(x) = x^3 - x^2; a = -1, b = 1$

**75.** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x; a = 0, b = 2$

**76.** $f(x) = 4x^{1/3} + x^{4/3}; a = -1, b = 8$

**77.** $f(x) = e^x - 1; a = -1, b = 3$

**78.** $f(x) = xe^{x^2}; a = 0, b = 2$

იპოვეთ $f$ და $g$ ფუნქციების გრაფიკებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი. ააგეთ ნახაზი.

**79.** $f(x) = x + 2$ და $g(x) = x^2 - 4$

**80.** $f(x) = -x^2 + 4x$ და $g(x) = 2x - 3$

**81.** $f(x) = x^2$ და $g(x) = x^3$

**82.** $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ და $g(x) = 0$

**83.** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ და $g(x) = x^2 - 3x$

**84.** $f(x) = \sqrt{x}$ და $g(x) = x^2$

**85.** $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$ და $g(x) = 0$

**86.** $f(x) = 2x$ და $g(x) = x\sqrt{x + 1}$

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

**87.** $\int xe^{2x}\,dx$ **88.** $\int xe^{-x}\,dx$

**89.** $\int xe^{x/4}\,dx$ **90.** $\int 6xe^{3x}\,dx$

**91.** $\int (e^x - x)^2\,dx$ **92.** $\int (e^{-x} + x)^2\,dx$

**93.** $\int (x + 1)e^x\,dx$ **94** $\int (x - 3)e^{3x}\,dx$

**95.** $\int x(x + 1)^{-3/2}\,dx$ **96.** $\int x(x + 4)^{-2}\,dx$

**97.** $\int x\sqrt{x - 5}\,dx$ **98.** $\int \frac{x}{\sqrt{2x + 3}}\,dx$

**99.** $\int x \ln 2x\,dx$ **100.** $\int x^2 \ln 2x\,dx$

**101.** $\int x^3 \ln x\,dx$ **102.** $\int \sqrt{x} \ln x\,dx$

**103.** $\int \sqrt{x} \ln \sqrt{x}\,dx$ **104.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

**105.** $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **106.** $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

**107.** $\int \ln x\,dx$

მითითება: $u = \ln x$ და $dv = dx$.

**ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი განსაზღვრული ინტეგრალები:**

**108.** $\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx$ **109.** $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$ **110.** $\int_1^4 \ln x\,dx$

**111.** $\int_1^2 x\ln x\,dx$ **112.** $\int_0^2 xe^{2x}\,dx$ **113.** $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

**იპოვეთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით მითითებულ ინტერვალში:**

**114.** $f(x)=\dfrac{2}{x^2};\ x\ge 3$

**115.** $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2};\ x\ge 3$

**116.** $f(x)=\dfrac{1}{x^{3/2}};\ x\ge 1$

**117.** $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^{5/2}};\ x\ge 0$

**118.** $f(x)=e^{2x};\ x\le 2$

**119.** $f(x)=\dfrac{2}{x^3};\ x\ge 2$

**120.** $f(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3};\ x\ge 0$

**121.** $f(x)=\dfrac{3}{x^{5/2}};\ x\ge 4$

**122.** $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^{3/2}};\ x\le 0$

**123.** $f(x)=xe^{-x^2};\ x\ge 0$

**124.** იპოვეთ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x$ ღერძით და $f(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ ფუნქციის გრაფიკით.

**გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები, თუ კრებადია:**

**125.** $\int_1^\infty \frac{3}{x^4}\,dx$ **126.** $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$

**127.** $\int_4^\infty \frac{2}{x^{3/2}}\,dx$ **128.** $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

**129.** $\int_1^\infty \frac{4}{x}\,dx$ **130.** $\int_2^\infty \frac{3}{x}\,dx$

**131.** $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-2)^3}\,dx$ **132.** $\int_2^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

**133.** $\int_1^\infty \frac{1}{(2x-1)^{3/2}}\,dx$ **134.** $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(4-x)^{3/2}}\,dx$

**135.** $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ **136.** $\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx$

**137.** $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx$ **138.** $\int_{-\infty}^0 e^{3x}\,dx$

**139.** $\int_1^\infty \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

**140.** $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

**141.** $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$

**142.** $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$

**143.** $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$

**144.** $\int_{-\infty}^\infty x^3\,dx$

**145.** $\int_{-\infty}^\infty x^3(1+x^4)^{-2}\,dx$

**146.** $\int_{-\infty}^\infty x(x^2+4)^{-3/2}\,dx$

**147.** $\int_{-\infty}^\infty xe^{1-x^2}\,dx$

**148.** $\int_{-\infty}^\infty \left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2+x-1}\,dx$

**149.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

**150.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}\,dx$

**151.** $\int_e^\infty \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

**152.** $\int_{e^2}^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$

# მეთხუთმეტე ლექცია

## მრავალი ცვლადის ფუნქცია. ორი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრის არე, გრაფიკი

აქამდე ვსწავლობდით მხოლოდ ერთ ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალურ აღრიცხვას. მრავალი პრაქტიკული ამოცანის მათემატიკური მოდელირების დროს გვხვდება ფუნქციები, რომლებიც ორ და მეტ ცვლადზეა დამოკიდებული. მაგალითად, ვთქვათ ფირმა აწარმოებს სამი სხვადასხვა $A, B$ და $C$ სახის სუვენირს და გეგმავს, რომ მოგება თითოეული სახის ერთეული პროდუქციიდან შესაბამისად ექნება \$6, \$5 და \$4. თუ ფირმის მიერ დამზადებული $A, B$ და $C$ სახის სუვენირების რაოდენობა შესაბამისად არის $x, y$ და $z$, მაშინ ფირმის მთლიანი მოგება $P$ მოიცემა ტოლობით

$$P = 6x + 5y + 4z.$$

როგორც ვხედავთ, მთლიანი მოგება დამოკიდებულია სამ $x, y$ და $z$ ცვლადზე.

მრავალი ცვლადის ფუნქციებიდან ჩვენ ძირითადად შევისწავლით ორი ცვლადის ფუნქციას. ასეთი მიდგომა გამართლებულია იმ გარემოებით, რომ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში შეგვიძლია ვისარგებლოთ გეომეტრიული ინტერპრეტაციით, რაც მეტად მნიშვნელოვანია თვალსაჩინოებისათვის. ორი ცვლადის ფუნქციის შესწავლის შედეგად მღებული ცოდნა დაგვეხმარება, გავიგოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციასთან დაკავშირებული ძირითადი ცნებები, განსაზღვრებები და შედეგები.

***ორი ცვლადის ფუნქცია.***

***ვთქვათ, $A$ არის $xoy$ სიბრტყის წერტილთა რაიმე სიმრავლე. თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვითაც $A$ სიმრავლის ყოველ $(x, y)$ წერტილს შეესაბამება ერთადერთი $z$ ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქცია და ასე ჩავწერთ $z = f(x, y)$.***

$x$ და $y$ სიდიდეებს ***დამოუკიდებელ ცვლადებს*** უწოდებენ, ხოლო $z$-ს, რომლის მნიშვნელობაც დამოკიდებულია $x$ და $y$ ცვლადებზე, ***დამოკიდებულ ცვლადს*** უწოდებენ. $z = f(x, y)$ რიცხვს ეწოდება $f$ ***ფუნქციის მნიშვნელობა*** $(x, y)$ ***წერტილში.*** $A$ სიმრავლეს ეწოდება $f$ ***ფუნქციის განსაზღვრის არე.***

**მაგალითი 1.** ვთქვათ, $f(x, y) = x + xy + y^2 + 2$. გამოვთვალოთ $f(0,0)$, $f(1,2)$ და $f(2,1)$.

**ამოხსნა:** გვექნება

$$f(0,0) = 0 + 0 \cdot 0 + 0^2 + 2 = 2,$$

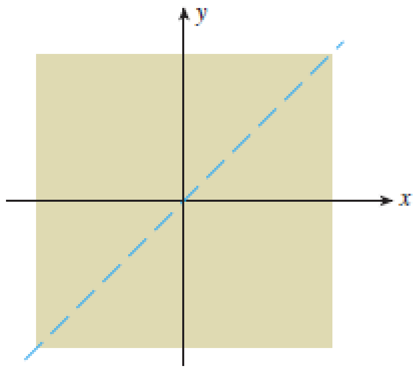
$$f(1,2) = 1 + 1 \cdot 2 + 2^2 + 2 = 9,$$

$$f(2,1) = 2 + 2 \cdot 1 + 1^2 + 2 = 7.$$

**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არე:

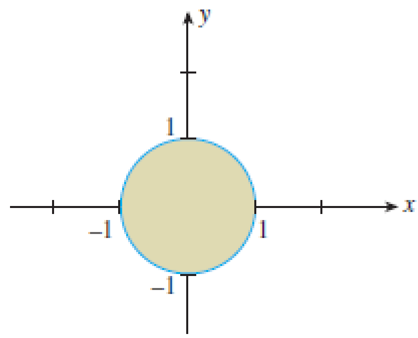
ა) $f(x,y)=x^2+y^2$; ბ) $g(x,y)=\dfrac{2}{x-y}$; გ) $h(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ .

**ამოხსნა:** ა) $f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი $x$ და $y$-თვის, ამიტომ განსაზღვრის არე იქნება $xoy$ სიბრტყის ყველა წერტილის სიმრავლე;
ბ) $g(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყველა $(x,y)$ წერტილში, სადაც $x \neq y$ ანუ გეომეტრიულად $g$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $xoy$ სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლე $y=x$ წრფის წერტილების გამოკლებით (ნახ. 168ა)




**ა)** g ფუნქციის განსაზღვრის არე

ნახაზი 168ა.

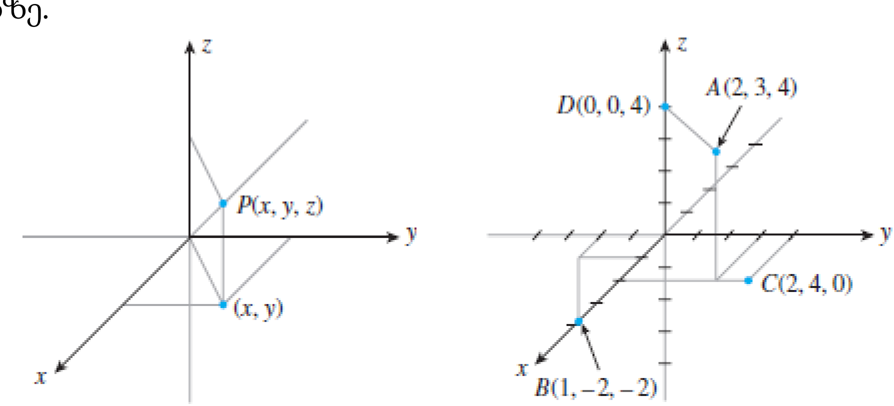



**ბ)** h ფუნქციის განსაზღვრის არე

ნახაზი 168ბ.

გ) აქ უნდა მოვითხოვოთ, რომ $1-x^2-y^2 \geq 0$ ანუ $x^2+y^2 \leq 1$, რომელიც გვაძლევს სიმრავლეს იმ წერტილებისა, რომლებიც მდებარეობენ ერთეულ რადიუსიან წრეწირზე ან მის შიგნით (წრეწირის ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში) (ნახ. 168ბ).

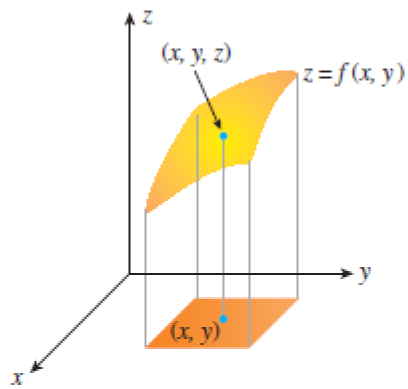
ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად ჩვენ გვჭირდება დეკარტეს სამგანზომილებიანი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. წერტილი სამგანზომილებიან სივრცეში წარმოიდგინება რიცხვთა დალაგებული სამეულით $(x,y,z)$ და პირიქით, რიცხვთა ნებისმიერი დალაგებული სამეული სამგანზომილებიან სივრცეში განსაზღვრავს ერთადერთ წერტილს (ნახ.169ა). მაგალითად, $A(2,3,4)$, $B(1,-2,-2)$, $C(2,4,0)$ და $D(0,0,4)$ წერტილები ნაჩვენებია 169ბ ნახაზზე.




**ა)** **ბ)**

ნახაზი 169.

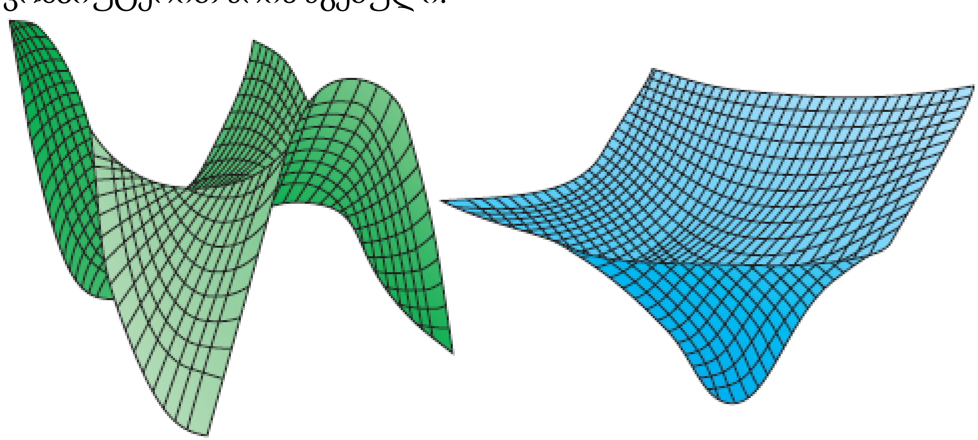
ვთქვათ, $z = f(x, y)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $xoy$ სიბრტყის წერტილთა რაიმე სიმრავლე. ამ სიმრავლის ყოველ $(x, y)$ წერტილს $f$ ფუნქცია შეუსაბამებს ერთადერთ $z$ ნამდვილ რიცხვს და რიცხვთა დალაგებული $(x, y, z)$ სამეულების სიმრავლე ანუ სივრცის $(x, y, f(x, y))$ წერტილთა სიმრავლე გვაძლევს $f$ ფუნქციის გრაფიკს, რომელიც წარმოადგენს ზედაპირს სამგანზომილებიან სივრცეში (ნახ. 170).




ნახაზი 170. $f$ ფუნქციის გრაფიკი სამგანზომილებიან სივრცეში.

ფუნქციის გრაფიკის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის დროს $(x, y)$ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა $z = f(x, y)$, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც $(x, y, z)$ წერტილის დაშორება, „სიმაღლე“ $xoy$ სიბრტყიდან. თუ $f(x, y) > 0$, მაშინ $(x, y, z)$ წერტილი მდებარეობს $f(x, y)$ ერთეულით მაღლა $xoy$ სიბრტყიდან და თუ $f(x, y) < 0$, მაშინ $(x, y, z)$ წერტილი მდებარეობს $|f(x, y)|$ ერთეულით ქვემოთ $xoy$ სიბრტყიდან.

ზოგადად, საკმარისად რთულია ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკის აგება ტექნიკის გამოყენების გარეშე. მაგრამ კომპიუტერით მარტივად შეგვიძლია ავაგოთ ასეთი ფუნქციების გრაფიკები. ქვემოთ, 171-ე ნახაზზე მოცემულია ორი ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც კომპიუტერით არის აგებული.



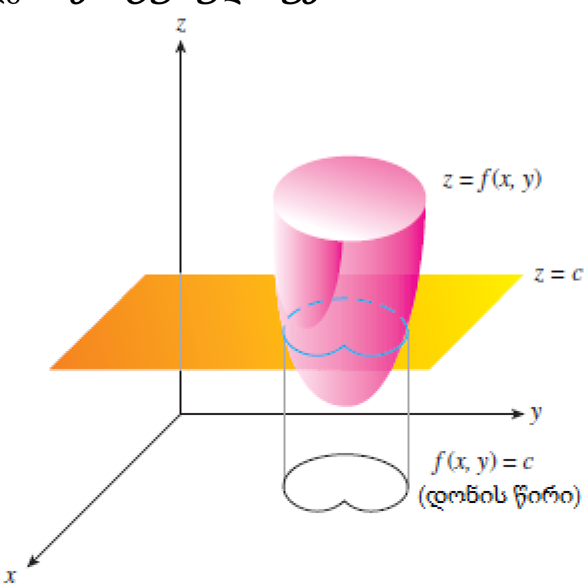
ა) $f(x, y) = x^3 - 3y^2x$ ბ) $f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2 + 1)$

ნახაზი 171. ორი ცვლადის ფუნქციათა გრაფიკები.

## დონის წირები

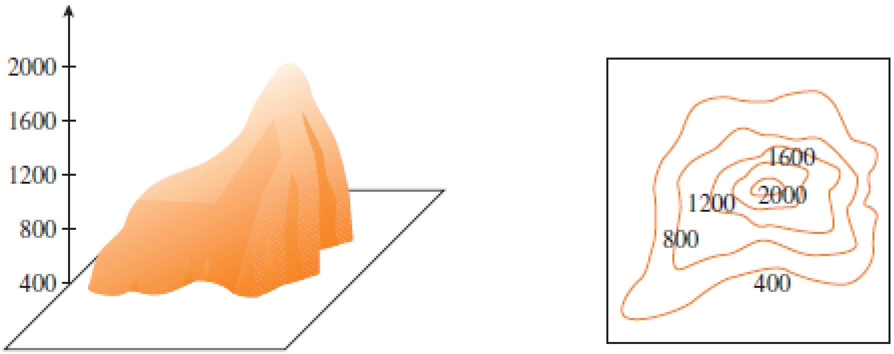
როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ორი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკის აგება საკმარისად რთულია, ამიტომ ჩვენ თავს ავარიდებთ ამ რთულ პროცედურას. სამაგიეროდ შევეცდებით აღვწეროთ ერთი მეთოდი, რომელიც ტოპოგრაფიული რუკების დასამზადებლად გამოიყენება. ეს მეთოდი შედარებით მარტივია გამოსაყენებლად და გვაძლევს საკმარის ინფორმაციას ფუნქციის გრაფიკის შესახებ.

ვთქვათ, 172-ე ნახაზზე მოცემული ზედაპირი წარმოადგენს ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკს. თუ $c$ არის $f$ ფუნქციის რაიმე მნიშვნელობა, მაშინ განტოლება $f(x,y)=c$ აღწერს წირს, რომელიც ძევს $z=c$ სიბრტყეში და ეწოდება $f$ ფუნქციის *კვალი* $z=c$ სიბრტყეში. თუ ამ კვალს ორთოგონალურად დავაგეგმილებთ $xoy$ სიბრტყეში, მივიღებთ წირს $xoy$ სიბრტყეში, რომელსაც ***დონის წირი*** ეწოდება. თუ ავაგებთ დონის წირებს, რომლებიც შეესაბამებიან $c$-ს ზოგიერთ დასაშვებ მნიშვნელობებს, მივიღებთ ***კონტურულ რუკას.***




ნახაზი 172. $z = f(x,y)$ ფუნქციის გრაფიკი და მისი თანაკვეთა $z=c$ სიბრტყესთან.

შევნიშნოთ, რომ აგების თანახმად კონკრეტული დონის წირის ყოველ წერტილს $z=f(x,y)$ ზედაპირზე შეესაბამება ისეთი წერტილები, რომლებიც მუდმივი მანძილითაა დაშორებული $xoy$ სიბრტყიდან. ამრიგად, კონტურული რუკა გვაძლევს ზოგად წარმოდგენას $f$ ფუნქციით მოცემული ზედაპირის ფორმის შესახებ. 173ა ნახაზზე მოცემულია მთის ქედი ერთი მწვერვალით, ხოლო 173ბ ნახაზზე შესაბამისი კონტურული რუკა.




**ა)** მთის ქედი ერთი მწვერვალით **ბ)** მთის ქედის კონტურული რუკა

ნახაზი 173.

**მაგალითი 3.** ავაგოთ $f(x,y)=x^2+y^2$ ფუნქციის კონტურული რუკა.

**ამოხსნა:** დონის წირები მოიცემა $x^2+y^2=c$ განტოლებით, სადაც $c$ არაუარყოფითი რიცხვია. მაგალითად, თუ ავიღებთ $c=0,\ 1,\ 4,\ 9$ და 16 მივიღებთ

$$c=0:\ x^2+y^2=0;$$

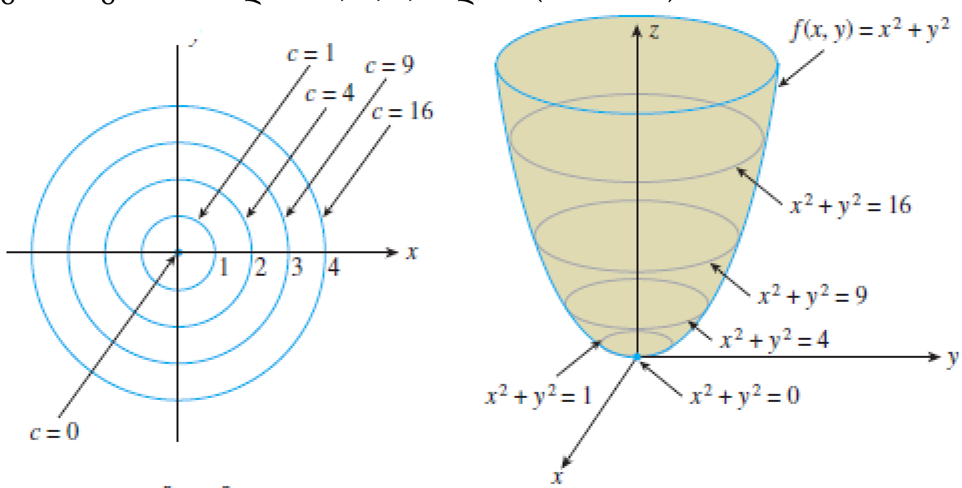
$$c=1:\ x^2+y^2=1;$$

$$c=4:\ x^2+y^2=4=2^2;$$

$$c=9:\ x^2+y^2=9=3^2;$$

$$c=16:\ x^2+y^2=16=4^2;$$

ამრიგად, დონის წირები ყოფილან კონცენტრული წრეწირები, ცენტრით სათავეში და რადიუსებით შესაბამისად $r=0,\ 1,\ 2,\ 3$ და $4$ (ნახ. 174ა)




**ა)** $f(x, y) = x^2 + y^2$ დონის წირები **ბ)** $f(x, y) = x^2 + y^2$ გრაფიკი

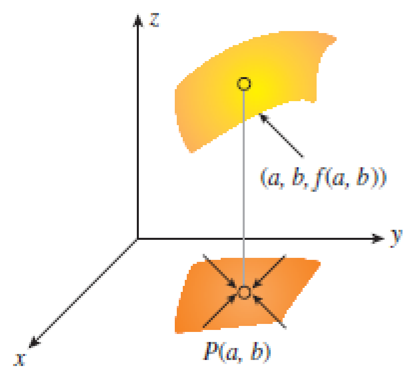
ნახაზი 174.

$f(x,y)=x^2+y^2$ ფუნქციის გრაფიკი შესაბამისი მითითებებით მოცემულია 174ბ ნახაზზე.

## პირველი რიგის კერძო წარმოებულები

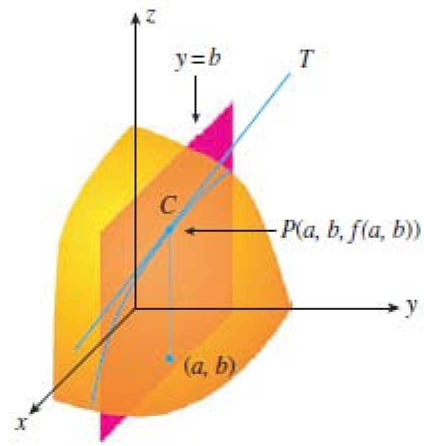
გავიხსენოთ, რომ ერთი ცვლადის $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარის დადგენა $x$ ცვლადის მიმართ $x=a$ წერტილში მოითხოვს გარკვეული გამოსახულების ზღვრის გამოთვლას, როცა $x$ მიისწრაფვის $a$-კენ. ამ შემთხვევაში, ცხადია $x$ ცვლადის მოძრაობის მიმართულება შეზღუდულია და მან უნდა იმოძრაოს მხოლოდ $x$ ღერძის გასწვრივ.

გაცილებით რთულადაა საქმე, როცა გვინდა შევისწავლოთ ორი და მეტი ცვლადის ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე რაიმე წერტილში. მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე $D$ წარმოადგენს სიბრტყის წერტილთა ქვესიმრავლეს (ნახ.175).




ნახაზი 175. წერტილს სიბრტყეზე შეიძლება მივუახლოვდეთ უსასრულოდ ბევრი მიმართულებით.

დავუშვათ $P(a,b)$ რაიმე წერტილია $f$ ფუნქციის განსაზღვრის $D$ არიდან. ცხადია, არსებობს უსასრულოდ ბევრი მიმართულება, რომელთა გასწვრივ $D$ არის ნებისმიერი წერტილი შეიძლება მიუახლოვდეს $P$ წერტილს. ამიტომ ჩვენ შეიძლება ვისაუბროთ $f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეზე $P(a,b)$ წერტილში ერთი რომელიმე მიმართულების გასწვრივ ამ უსასრულო რაოდენობა მიმართულებებიდან. ჩვენ არ განვიხილავთ ამ ზოგად შემთხვევას და შევიზღუდებით $f(x,y)$ ფუნქციის $P(a,b)$ წერტილში ცვლილების სიჩქარის შესწავლით ორი სასურველი, კერძოდ, $x$ ღერძის პარალელური მიმართულებით და $y$ ღერძის პარალელური მიმართულებით. დავუშვათ, $y=b$, სადაც $b$ მუდმივია და განვიხილოთ $f(x,b)$, როგორც ერთი $x$ ცვლადის ფუნქცია. რადგან $z=f(x,y)$ წარმოადგენს ზედაპირის განტოლებას, მაშინ $z=f(x,b)$ იქნება ზედაპირზე მდებარე $C$ წირის განტოლება, რომელიც მიიღება ამ ზედაპირისა და $y=b$ სიბრტყის თანაკვეთით (ნახ. 176).




ნახაზი 176. $C$ წირი მიიღება $y=b$ სიბრტყის თანაკვეთით $z=f(x,y)$ ზედაპირთან.

რადგან $f(x,b)$ წარმოადგენს ერთი $x$ ცვლადის ფუნქციას, ჩვენ შეიძლება გამოვითვალოთ მისი წარმოებული $x$-ის მიმართ $x=a$ წერტილში. ამ წარმოებულს ეწოდება $f$ ***ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებული*** $x$ ***ცვლადის მიმართ*** $(a,b)$ წერტილში და ასე ჩაიწერება

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b) \text{ ან } \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad f_x(a,b).$$

ამრიგად,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},$$

იმ პირობით, რომ ზღვარი არსებობს. $f$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებული $x$ ცვლადის მიმართ $(a,b)$ წერტილში ერთდროულად გვაძლევს $C$ წირის $T$ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტს და $f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს $x$ ღერძის მიმართულებით, როცა $x=a$ და $y=b$. ჩვენ ასევე ჩავწერთ

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}=f_x(a,b).$$

ანალოგიურად, თუ დავაფიქსირებთ $x$ ცვლადს და შედეგად მიღებულ $f(a,y)$ ფუნქციას გავაწარმოებთ $y$ ცვლადით, მივიღებთ $f$ ***ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულს*** $y$ ***ცვლადის მიმართ*** $(a,b)$ წერტილში და ასე ჩავწერთ

$$\frac{\partial z}{\partial y}(a,b) \text{ ან } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \quad f_y(a,b).$$

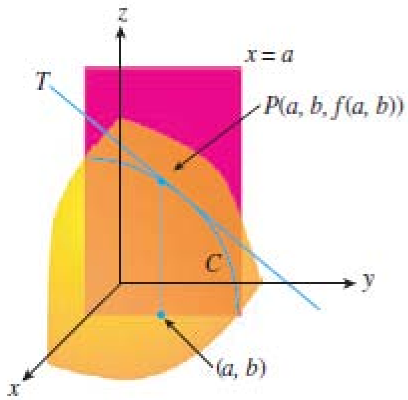
ამრიგად,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k},$$

იმ პირობით, რომ ზღვარი არსებობს. $f$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებული $y$ ცვლადის მიმართ $(a,b)$ წერტილში გვაძლევს ზედაპირის $x=a$ სიბრტყით კვეთისას მიღებული $C$ წირის $T$ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტს

(ნახ. 177) და $f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს $y$ ღერძის მიმართულებით, როცა $x=a$ და $y=b$. ჩვენ ასევე ჩავწერთ

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}=f_x(a,b).$$




ნახაზი 177. $f$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებული $y$ ცვლადის მიმართ $(a,b)$ წერტილში გვაძლევს $C$ წირის $T$ მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტს.

ვიდრე მაგალითებს განვიხილავდეთ, ამოვწეროთ განმარტებები.

***$f(x,y)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები.***

***ვთქვათ, მოცემულია ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქცია. მაშინ პირველი რიგის კერძო წარმოებული $x$ ცვლადის მიმართ $(x,y)$ წერტილში ტოლია***

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$

***თუ ზღვარი არსებობს.***

***$f(x,y)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებული $y$ ცვლადის მიმართ $(x,y)$ წერტილში ტოლია***

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k},$$

***თუ ზღვარი არსებობს.***

**მაგალითი 4**. ვიპოვოთ $f(x,y)=x^2-xy^2+y^3$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ და ვიპოვოთ $f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეები $x$ და $y$ ღერძების მიმართულებით (1,2) წერტილში.

**ამოხსნა:** $\frac{\partial f}{\partial x}$ წარმოებულის გამოსათვლელად $f$ ფუნქციაში $y$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $x$ ცვლადით. გვექნება

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y^2.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ წარმოებულის გამოსათვლელად $f$ ფუნქციაში $x$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $y$ ცვლადით. გვექნება

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 3y^2 .$$

$f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე $x$ ღერძის მიმართულებით $(1,2)$ წერტილში იქნება

$$f_x(1,2) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2(1) - 2^2 = -2$$

ანუ $f$ იკლებს 2 ერთეულით $x$ ღერძის მიმართულებით ერთი ერთეულით გადაადგილებისას ($y$ ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას $y = 2$).

$f$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე $y$ ღერძის მიმართულებით $(1,2)$ წერტილში იქნება

$$f_y(1,2) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)} = -2\times 1\times 2 + 3\times 2^2 = 8$$

ანუ $f$ იზრდება 8 ერთეულით $y$ ღერძის მიმართულებით ერთი ერთეულით გადაადგილებისას ($x$ ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას $x = 1$).

**მაგალითი 5.** ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების კერძო წარმოებულები:

ა) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$; ბ) $g(s,t) = (s^2 - st + t^2)^5$;

გ) $h(u,v) = e^{u^2 - v^2}$; დ) $f(x,y) = \ln(x^2 + 2y^2)$.

**ამოხსნა:** ა) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$-ის გამოსათვლელად $y$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $x$ ცვლადით. წილადის წარმოებულის წესის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)y - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 y + y^3 - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$-ის გამოსათვლელად $x$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $y$ ცვლადით. წილადის წარმოებულის წესის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)x - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

ბ) $\dfrac{\partial g}{\partial s}$-ის გამოსათვლელად $t$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $s$ ცვლადით. ხარისხის წარმოებულის წესის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 5(s^2 - st + t^2)^4(2s - t) = 5(2s - t)(s^2 - st + t^2)^4 .$$

$\dfrac{\partial g}{\partial t}$-ის გამოსათვლელად $s$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $t$ ცვლადით. ხარისხის წარმოებულის წესის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 5(s^2 - st + t^2)^4(-s + 2t) = 5(2t - s)(s^2 - st + t^2)^4;$$

**გ)** $\frac{\partial h}{\partial u}$ -ის გამოსათვლელად $v$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $u$ ცვლადით. მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებულის წესის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial h}{\partial u} = e^{u^2 - v^2} \cdot 2u = 2ue^{u^2 - v^2};$$

$\frac{\partial h}{\partial v}$ -ის გამოსათვლელად $u$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $v$ ცვლადით. მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებულის წესის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial h}{\partial v} = e^{u^2 - v^2} \cdot (-2v) = -2ve^{u^2 - v^2};$$

**დ)** $\frac{\partial f}{\partial x}$ -ის გამოსათვლელად $y$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $x$ ცვლადით. ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებულის წესის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 2y^2};$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ -ის გამოსათვლელად $x$ ცვლადი ჩავთვალოთ მუდმივად და გავაწარმოოთ იგი $y$ ცვლადით. ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებულის წესის თანახმად, გვექნება

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{x^2 + 2y^2}.$$

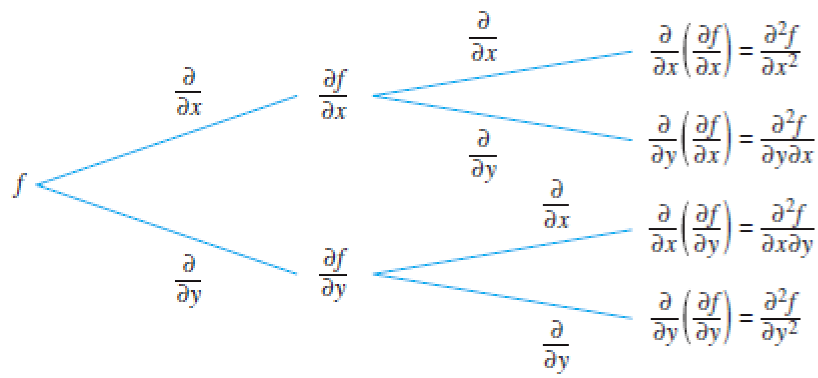
### მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $f_x(x, y)$ და $f_y(x, y)$ კვლავ წარმოადგენენ $x$ და $y$ ცვლადების ფუნქციებს. თუ $f_x$ და $f_y$ ფუნქციებს გავაწარმოებთ $x$ და $y$ ცვლადებით, მივიღებთ $f$ ***ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს*** (იხ. სქემა 178). ამრიგად, $f_x$ ფუნქციის $x$ ცვლადით გაწარმოება გვაძლევს მეორე რიგის კერძო წარმოებულს

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x).$$

ასევე $f_x$ ფუნქციის $y$ ცვლადით გაწარმოება გვაძლევს მეორე რიგის კერძო წარმოებულს

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x).$$




სქემა 178. მივიღებთ $f$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

ანალოგიურად, $f_y$ გაწარმოება $x$ და $y$ ცვლადებით შესაბამისად მოგვცემს მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y),$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y).$$

**მაგალითი 6**. ვიპოვოთვი $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^2$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

**ამოხსნა:** $f$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები იქნება

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^2) = 3x^2 - 6xy + 3y^2;$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^2) = -3x^2 + 6xy + 2y.$$

მაშასადამე,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 6xy + 3y^2) = 6x - 6y = 6(x - y);$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 6xy + 3y^2) = -6x + 6y = 6(y - x);$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 6xy + 2y) = -6x + 6y = 6(y - x);$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2 + 6xy + 2y) = 6x + 2 = 6(y - x).$$

**მაგალითი 7.** ვიპოვოთ $f(x,y)=e^{xy^2}$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.
**ამოხსნა:** $f$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები იქნება

$$f_x=\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy^2})=y^2e^{xy^2};$$
$$f_y=\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy^2})=2xye^{xy^2}.$$

მაშასადამე,

$$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(f_x)=\frac{\partial}{\partial x}(y^2e^{xy^2})=y^4e^{xy^2};$$
$$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(f_x)=\frac{\partial}{\partial y}(y^2e^{xy^2})=2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2}=2ye^{xy^2}(1+xy^2);$$
$$f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(f_y)=\frac{\partial}{\partial x}(2xye^{xy^2})=2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2}=2ye^{xy^2}(1+xy^2);$$
$$f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(f_y)=\frac{\partial}{\partial y}(2xye^{xy^2})=2xe^{xy^2}+(2xy)(2xy)e^{xy^2}=2xe^{xy^2}(1+2xy^2).$$

## ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების გამოყენებით ექსტრემუმის დადგენა

ჩვენ ადრე ვნახეთ, რომ ერთი ცვლადის ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის ამოცანა ხშირად დაიყვანება ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობების მოძებნის ამოცანაზე. პრაქტიკაში გვხვდება ასევე ამოცანები, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია ორი და მეტი ცვლადის ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმის და აბსოლუტური მინიმუმის მოძებნით.

მაგალითად, ვთქვათ ფირმა აწარმოებს ორი სახის კომპაქტურ დისკებს. დავუშვათ, რომ ფირმის მიერ ერთ კვირაში წარმოებული თითოეული სახის პროდუქციის რაოდენობა შესაბამისად არის $x$ და $y$ ერთეული. მაშინ, ცხადია, ერთ კვირაში გამოშვებული პროდუქციის გაყიდვით მიღებული მოგება $P$ იქნება $x$ და $y$ სიდიდეების ფუნქცია ე.ი $P=f(x,y)$. საწარმოსთვის უდიდესი მნიშვნელობა აქვს დაადგინოს, თუ თითოეული სახის რა რაოდენობის პროდუქცია უნდა აწარმოოს კვირაში, რომ მისი კვირეული მოგება იყოს მაქსიმალური? ამ ამოცანის ამოხსნა მათემატიკურად ნიშნავს, ვიპოვთ $x$ და $y$ სიდიდეების ისეთი მნიშვნელობები, რომელთათვის $f(x,y)$ მიაღწევს მაქსიმუმს. როგორც ვხედავთ, ამ კონკრეტული ამოცანის განხილვისას მივედით ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნის ამოცანზე.

ანალოგიურად ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევისა, ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაშიც გვაქვს ლოკალური ექსტრემუმი და აბსოლუტური ექსტრემუმი.

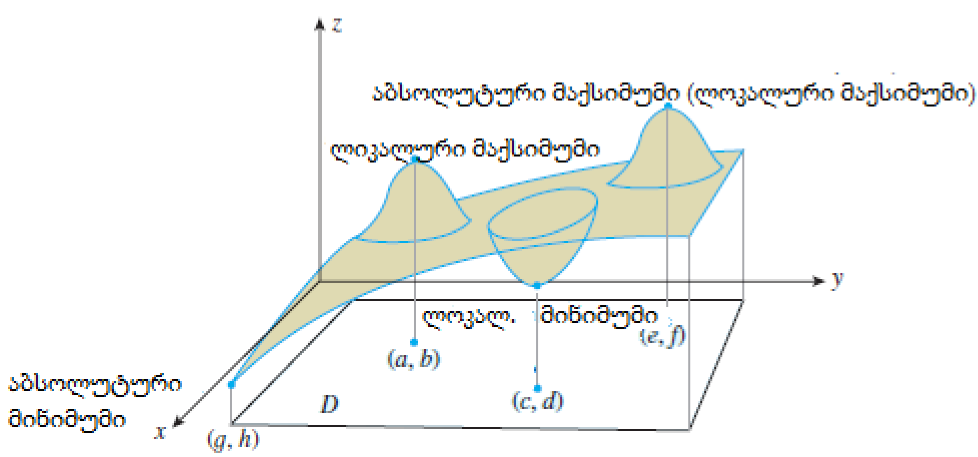
***ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი.***

***ვთქვათ $f$ ფუნქცია განსაზღვრულია $R$ არეში, რომელიც შეიცავს $(a,b)$ წერტილს. მაშინ $f$ ფუნქციას $(a,b)$ წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, თუ $f(x,y)\le f(a,b)$, ყოველი $(x,y)$ წერტილისათვის, რომლებიც საკმარისად ახლოსაა $(a,b)$ წერტილთან. $f(a,b)$ რიცხვს ეწოდება $f$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმალური მნიშვნელობა.***

***ანალოგიურად, $f$ ფუნქციას $(a,b)$ წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი, თუ $f(x,y)\ge f(a,b)$, ყოველი $(x,y)$ წერტილისათვის, რომლებიც საკმარისად ახლოსაა $(a,b)$ წერტილთან. $f(a,b)$ რიცხვს ეწოდება $f$ ფუნქციის ლოკალური მინიმალური მნიშვნელობა.***

მარტივად რომ ვთქვათ, $f$ ფუნქციას $(a,b)$ წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, თუ $(a,b,f(a,b))$ არის $f$ ფუნქციის გრაფიკის უმაღლესი წერტილი ახლომდებარე წერტილებთან შედარებით. მსგავსი ინტერპრეტაცია აქვს ლოკალურ მინიმუმს.

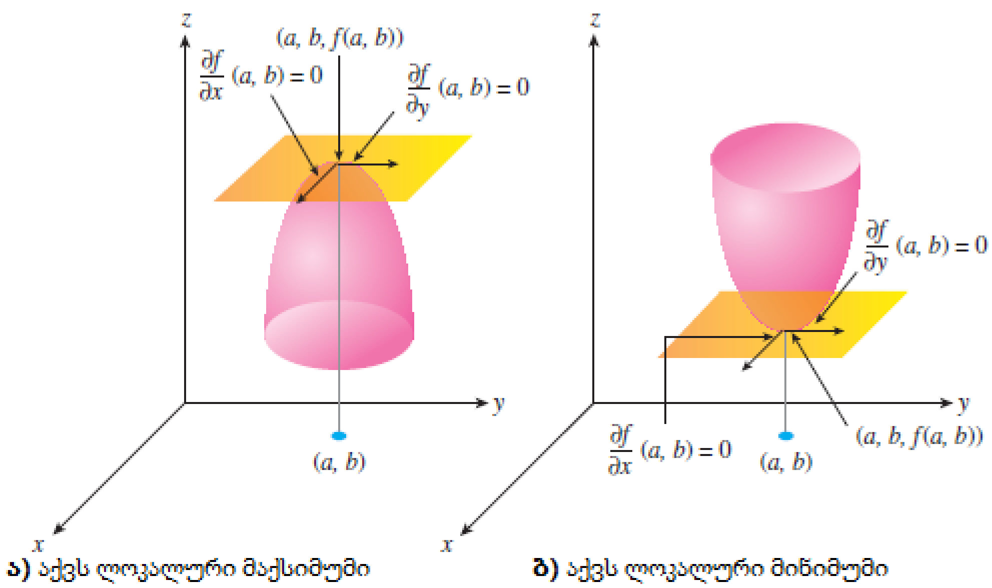
თუ განმარტებაში მოყვანილ უტოლობებს ადგილი აქვს ყველა $(x,y)$ წერტილისათვის $f$ ფუნქციის განსაზღვრის არიდან, მაშინ $f$ ფუნქციას $(a,b)$ წერტილში აქვს აბსოლუტური მაქსიმუმი (ან აბსოლუტური მინიმუმი), რომელიც $f(a,b)$-ს ტოლია. 179-ე ნახაზზე მოცემულია ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც ლოკალური მაქსიმუმი აქვს $(a,b)$ და $(e,f)$ წერტილებში და ლოკალური მინიმუმი აქვს $(c,d)$ წერტილში. ფუნქციას აბსოლუტური მაქსიმუმი აქვს $(e,f)$ წერტილში და აბსოლუტური მინიმუმი $(g,h)$ წერტილში.




ნახაზი 179.

ახლა შევისწავლოთ ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი. დავუშვათ, რომ ორი ცვლადის წარმოებად $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი (ლოკალური მინიმუმი) $(a,b)$ წერტილში. 180-ე ნახაზიდან ცხადია, რომ ზედაპირზე ნებისმიერი მიმართულებით გავლებული მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი უნდა იყოს ნულის ტოლი. კერძოდ, ნული უნდა იყოს საკუთხო კოეფიციენტები

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \text{და} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$




ნახაზი 180.

ამრიგად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ წარმოებად $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი (ლოკალური მინიმუმი) $(a,b)$ წერტილში, მაშინ მისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები აკმაყოფილებს პირობებს:

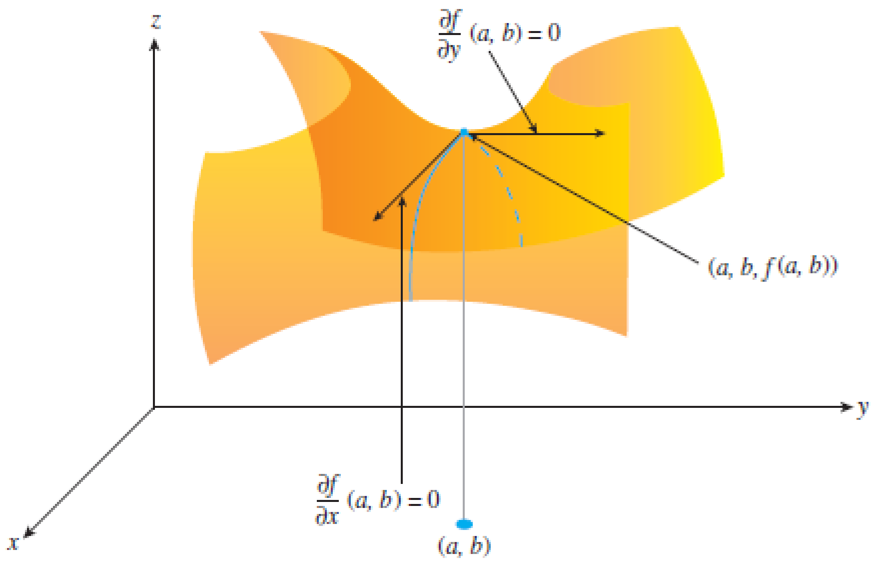
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{და} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0. \tag{1}$$

ახლა დავუშვათ, რომ წარმოებადი $f$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები აკმაყოფილებს (1) პირობებს. მაშინ საინტერესოა, ექნება თუ არა $f$ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი $(a,b)$ წერტილში? სხვანაირად, არის თუ არა (1) ლოკალური ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა? ამის შესამოწმებლად განვიხილოთ $f$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკს წარმოადგენს 181-ე ნახაზზე მოცემული ზედაპირი. ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{და} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0,$$

მაგრამ $f$ ფუნქციას $(a,b)$ წერტილში არც ლოკალური მაქსიმუმი აქვს და არც ლოკალური მინიმუმი, რადგან ზედაპირზე $(a,b,f(a,b))$ წერტილის მიმდებარე

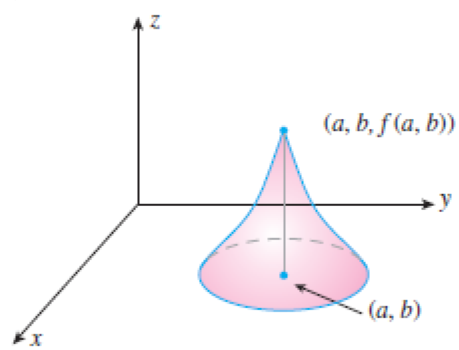
წერტილებიდან ზოგიერთი წერტილი მაღლა და ზოგიერთი დაბლა მდებარეობს თავად $(a,b,f(a,b))$ წერტილთან შედარებით. $(a,b,f(a,b))$ წერტილს ***უნაგირა წერტილს*** **უწოდებენ.**




ნახაზი 181. $(a,b,f(a,b))$ წერტილს უნაგირა წერტილი ეწოდება.

ამრიგად, განხილული მაგალითის მიხედვით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ (1) პირობები არ არის საკმარისი ლოკალური ექსტრემუმის არსებობისათვის.

შევნიშნოთ, რომ $f$ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს იმ წერტილებში, სადაც $\partial f/\partial x$ და $\partial f/\partial y$ კერძო წარმოებულები არ არსებობს. $f$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც 182-ე ნახაზზეა მოცემული, ადასტურებს, რომ $(a,b)$ წერტილში ფუნქციას გააჩნია ლოკალური მაქსიმუმი, მაგრამ $\partial f/\partial x$ და $\partial f/\partial y$ კერძო წარმოებულები არ არსებობს.




ნახაზი 182. $f$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი $(a,b)$ წერტილში, მაგრამ $\partial f/\partial x$ და $\partial f/\partial y$ კერძო წარმოებულები არ არსებობს.

მაშასადამე, ორი ცვლადის $f$ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს $(a,b)$ წერტილში, სადაც ორივე კერძო წარმოებული $\partial f/\partial x$ და $\partial f/\partial y$ არსებობს და ნულის ტოლია ან ამ კერძო წარმოებულებიდან ერთი მაინც არ არსებობს. როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში, აქაც შემოგვაქვს კრიტიკული წერტილის ცნება.

*$f$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი.*

*$f$ ფუნქციის განსაზღვრის არის $(a,b)$ წერტილს ეწოდება კრიტიკული წერტილი, თუ ამ წერტილში*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \text{და} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0,$$

*ან ამ კერძო წარმოებულებიდან ერთი მაინც არ არსებობს.*

იმისათვის, რომ დავადგინოთ ნამდვილად გააჩნია თუ არა ორი ცვლადის ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი კრიტიკულ წერტილში, ვიყენებთ $f$ ფუნქციის *მეორე რიგის კერძო წარმოებულების წესს.*

მთლიანობაში ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნა შემდეგ პროცედურებს გულისხმობს:

1. ვიპოვოთ $f(x,y)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)=0; \end{cases}$$

2. მეორე წარმოებულის წესი: ვთქვათ, $D(x,y)=f_{xx}f_{yy}-\left(f_{xy}\right)^2$. მაშინ:

   ა) თუ $D(a,b)>0$ და $f_{xx}(a,b)<0$, ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი $(a,b)$ წერტილში;

   ბ) თუ $D(a,b)>0$ და $f_{xx}(a,b)>0$, ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი $(a,b)$ წერტილში;

   გ) თუ $D(a,b)<0$, ფუნქციას არც ლოკალური მაქსიმუმი აქვს და არც ლოკალური მინიმუმი $(a,b)$ წერტილში; $(a,b,f(a,b))$ წერტილს უნაგირა წერტილი ეწოდება;

   დ) თუ $D(a,b)=0$, წესი ვერ არკვევს ექსტრემუმის არსებობის საკითხს.

**მაგალითი 8.** ვიპოვოთ $f(x,y)=x^2+y^2$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი.

**ამოხსნა:** გვაქვს

$$f_x=2x,$$
$$f_y=2y.$$

კრიტიკული წერტილის მოსაძებნად გავუტოლოთ ნულს კერძო წარმოებულები

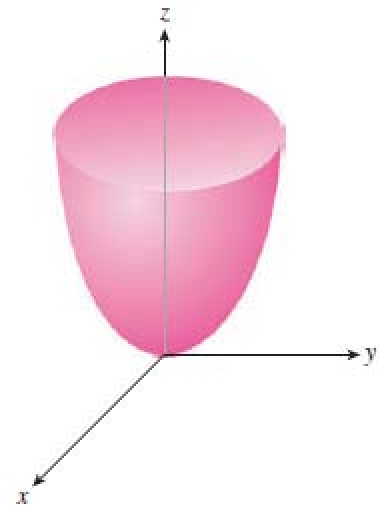
$$f_x=2x=0,$$
$$f_y=2y=0,$$

რაც გვაძლევს ერთადერთ კრიტიკულ წერტილს (0,0). მეორე წარმოებულის წესის მიხედვით გამოვთვალოთ

$$f_{xx}=2, \quad f_{xy}=0, \quad f_{yy}=2.$$

მაშინ $D(x,y)=f_{xx}f_{yy}-\left(f_{xy}\right)^2=2\times2-0=4$. კერძოდ $D(0,0)=4$. რადგან $D(0,0)>0$ და $f_{xx}(0,0)=2>0$, დავასკვნით, რომ $f(x,y)$ აქვს ლოკალური მინიმუმი (0,0) წერტილში.

ფუნქციის ლოკალური მინიმალური მნიშვნელობა $f(0,0)=0$ და იგი ამავე დროს არის აბსოლუტური მინიმალური მნიშვნელობა (ნახ. 183)




ნახაზი 183. $f(x,y)=x^2+y^2$ ფუნქციის გრაფიკი.

**მაგალითი 9.** ვიპოვოთ $f(x,y)=4y^3+x^2-12y^2-36y+2$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი.

**ამოხსნა:** კრიტიკული წერტილების მოსაძებნად გამოვთვალოთ წარმოებულები და გავუტოლოთ ნულს

$$f_x=2x=0,$$
$$f_y=12y^2-24y-36=0.$$

პირველი განტოლება გვაძლევს $x=0$. მეორე განტოლებიდან

$$y^2-2y-3=0,$$
$$(y+1)(y-3)=0$$

ანუ $y=-1$ ან $y=3$. მაშასადამე, გვაქვს ორი კრიტიკული წერტილი (0,-1) და (0,3). მეორე წარმოებულის წესის მიხედვით გამოვთვალოთ

$$f_{xx}=2,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=24y-24=24(y-1).$$

მაშასადამე, $D(x,y)=f_{xx}f_{yy}-\left(f_{xy}\right)^2=48(y-1).$

(0,-1) წერტილისათვის $D(0,-1)=48(-1-1)=-96<0$. რადგან $D(0,-1)<0$, დავასკვნით, რომ (0,-1) უნაგირა წერტილია.

(0,3) წერტილისათვის $D(0,3)=48(3-1)=96>0$. რადგან $D(0,3)>0$ და $f_{xx}(0,3)=2$ დავასკვნით, რომ (0,3) წერტილში ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი. რადგან

$$f(0,3)=4\times3^3+0^2-12\times3^2-36\times3+2=-106,$$

ამიტომ ფუნქციის ლოკალური მინიმალური მნიშვნელობა ტოლია -106.

## სავარჯიშო

1. ვთქვათ, $f(x,y)=2x+3y-4$. გამოთვალეთ $f(0,0)$, $f(1,0)$, $f(0,1)$, $f(1,2)$;
2. ვთქვათ, $g(x,y)=2x^2-y^2$. გამოთვალეთ $g(1,2)$, $g(2,1)$, $g(1,1)$, $g(-1,1)$;
3. ვთქვათ, $f(x,y)=x^2+2xy-x+3$. გამოთვალეთ $f(1,2)$, $f(2,1)$, $f(-1,2)$, $f(2,-1)$;
4. ვთქვათ, $h(x,y)=(x+y)/(x-y)$. გამოთვალეთ $h(0,1)$, $h(-1,1)$, $h(2,1)$, $h(\pi,-\pi)$;
5. ვთქვათ, $f(x,y)=xye^{x^2+y^2}$. გამოთვალეთ $f(0,0)$, $f(0,1)$, $f(1,1)$, $f(-1,-1)$;
6. ვთქვათ, $f(u,v)=(u^2+v^2)e^{uv^2}$. გამოთვალეთ $f(0,1)$, $f(-1,-1)$;

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არე:

**7.** $f(x, y) = 2x + 3y$ **8.** $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

**9.** $h(u, v) = \dfrac{uv}{u - v}$ **10.** $f(s, t) = \sqrt{s^2 + t^2}$

**11.** $g(r, s) = \sqrt{rs}$ **12.** $f(x, y) = e^{-xy}$

**13.** $h(x, y) = \ln(x + y - 5)$ **14.** $h(u, v) = \sqrt{4 - u^2 - v^2}$

ააგეთ დონის წირები $z$ -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის:

**15.** $f(x, y) = 2x + 3y$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$

**16.** $f(x, y) = -x^2 + y$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$

**17.** $f(x, y) = 2x^2 + y$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$

**18.** $f(x, y) = xy$; $z = -4, -2, 2, 4$

**19.** $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; $z = 0, 1, 2, 3, 4$

**20.** $f(x, y) = e^x - y$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების პირველი რიგის კერძო წარმოებულები:

**21.** $f(x, y) = 2x + 3y + 5$ **22.** $f(x, y) = 2xy$

**23.** $g(x, y) = 2x^2 + 4y + 1$ **24.** $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

**25.** $f(x, y) = \dfrac{2y}{x^2}$ **26.** $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + y}$

**27.** $g(u, v) = \dfrac{u - v}{u + v}$ **28.** $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

**29.** $f(s, t) = (s^2 - st + t^2)^3$ **30.** $g(s, t) = s^2t + st^{-3}$

**31.** $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$ **32.** $f(x, y) = x\sqrt{1 + y^2}$

**33.** $f(x, y) = e^{xy+1}$ **34.** $f(x, y) = (e^x + e^y)^5$

**35.** $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$ **36.** $f(x, y) = x^2e^{y^2}$

**37.** $g(u, v) = e^u \ln v$ **38.** $f(x, y) = \dfrac{e^{xy}}{x + y}$

**39.** $f(x, y, z) = xyz + xy^2 + yz^2 + zx^2$

**40.** $g(u, v, w) = \dfrac{2uvw}{u^2 + v^2 + w^2}$

**41.** $h(r, s, t) = e^{rst}$ **42.** $f(x, y, z) = xe^{y/z}$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების პირველი რიგის კერძო წარმოებულების მნიშვნელობები მოცემულ წერტილში:

**43.** $f(x, y) = x^2y + xy^2$; $(1, 2)$

**44.** $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - y$; $(-1, 2)$

**45.** $f(x, y) = x\sqrt{y} + y^2$; $(2, 1)$

**46.** $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $(3, 4)$

**47.** $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$; $(1, 2)$

**48.** $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$; $(1, -2)$

**49.** $f(x, y) = e^{xy}$; $(1, 1)$

**50.** $f(x, y) = e^x \ln y$; $(0, e)$

**51.** $f(x, y, z) = x^2yz^3$; $(1, 0, 2)$

**52.** $f(x, y, z) = x^2y^2 + z^2$; $(1, 1, 2)$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მეორე რიგის კერძო წარმოებულები და თითოეულ შემთხვევაში აჩვენეთ, რომ შერეული წარმოებულები $f_{xy}$ და $f_{yx}$ ერთმანეთის ტოლია:

**53.** $f(x, y) = x^2y + xy^3$

**54.** $f(x, y) = x^3 + x^2y + x + 4$

**55.** $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + x - 2y$

**56.** $f(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^3 + x + y$

**57.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

**58.** $f(x, y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$

**59.** $f(x, y) = e^{-x/y}$

**60.** $f(x, y) = \ln(1 + x^2y^2)$

იპოვეთ ფუნქციის კრიტიკული წერილები. გამოიყენეთ მეორე წარმოებულის წესი და დაადგინეთ, აქვს თუ არა მოცემულ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი. იპოვეთ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემალური მნიშვნელობა.

**61.** $f(x, y) = 1 - 2x^2 - 3y^2$

**62.** $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$

**63.** $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 1$

**64.** $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3$

**65.** $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x + 8y - 1$

**66.** $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^2 + 4x + 8y - 1$

**67.** $f(x, y) = 2x^3 + y^2 - 9x^2 - 4y + 12x - 2$

**68.** $f(x, y) = 2x^3 + y^2 - 6x^2 - 4y + 12x - 2$

**69.** $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy + 7x - 8y + 4$

**70.** $f(x, y) = 2y^3 - 3y^2 - 12y + 2x^2 - 6x + 2$

**71.** $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 - 2$

**72.** $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2 + 5$

**73.** $f(x, y) = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y}$ **74.** $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2} + xy$

**75.** $f(x, y) = x^2 - e^{y^2}$ **76.** $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

**77.** $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ **78.** $f(x, y) = e^{xy}$

**79.** $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

**80.** $f(x, y) = xy + \ln x + 2y^2$