



საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

სტუ

კოდნა ძეგლის...

ელემენტარული დიფერენციალური განტოლებები

ლექციების კურსი

R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider.

„Fundamentals of Differential Equations”, Eighth Edition

„აგროსაინჟინრო“

სპეციალობების სტუდენტებისათვის

(სტუ ბიბლიოთეკა)

2014

EIGHTH EDITION

Fundamentals of Differential Equations

R. Kent Nagle

Edward B. Saff

Vanderbilt University

Arthur David Snider

University of South Florida

Addison-Wesley

Boston Columbus Indianapolis New York San Francisco Upper Saddle River
Amsterdam Cape Town Dubai London Madrid Milan Munich Paris Montréal Toronto
Delhi Mexico City São Paulo Sydney Hong Kong Seoul Singapore Taipei Tokyo

დ.ნატროშვილი, გ. ბერიკელაშვილი, შ. ზაზაშვილი

ელემენტარული დიფერენციალური განტოლებები

ლექციების კურსი მომზადებულია სახელმძღვანელოს

R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider.
“Fundamentals of Differential Equations”, Eighth Edition

მიხედვით

2014

შინაარსი

შინაარსი	3
1. გამოყენებითი ასპექტის ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ დიფერენციალურ განტოლებებზე	5
სავარჯიშო 1	10
2. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი და ამოცანა საწყისი პირობით ...	12
სავარჯიშო 2	21
3. მიმართულებათა ველი	24
სავარჯიშო 3	31
4. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება. შესავალი	35
5. განცალკევებული ცვლადებიანი განტოლება	38
სავარჯიშო 4	44
6. წრფივი განტოლება	45
სავარჯიშო 5	51
7. განტოლება სრულ დიფერენციალებში	52
სავარჯიშო 6	61
8. მაინტეგრებელი მამრავლი	63
სავარჯიშო 7	67
9. ცვლადთა გარდაქმნა დიფერენციალურ განტოლებაში	68
სავარჯიშო 8	74
10. მათემატიკური მოდელირება	78
11. სექციური (ბლოკური) ანალიზი	81
სავარჯიშო 9	90
12. შენობების გათბობა-გაგრილების მათემატიკური მოდელი	92
სავარჯიშო 10	101
13. ნიუტონის მექანიკა	103
სავარჯიშო 11	111
14. ელექტრული წრედები	113
სავარჯიშო 12	117
15. ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდი	118
სავარჯიშო 13	126
16. მაღალი რიგის რიცხვითი მეთოდები: ტეილორი და რუნგე-კუტა	128
17. მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. შესავალი	133
სავარჯიშო 14	139

18. წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება. ზოგადი ამონახსნი	140
სავარჯიშო 15	148
19. მახასიათებელი განტოლება კომპლექსური ფესვებით	149
სავარჯიშო 16	157
20. ლაპლასის გარდაქმნა. შესავალი	158
21. ლაპლასის გარდაქმნის განსაზღვრა	161
სავარჯიშო 17	171
22. ლაპლასის გარდაქმნის თვისებები	173
სავარჯიშო 18	178
23. ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა	179
სავარჯიშო 19	189
24. საწყის პირობიანი ამოცანების ამოხსნა	191
სავარჯიშო 20	197
25. წყვეტილი და პერიოდული ფუნქციების გარდაქმნა	199
სავარჯიშო 21	210
26. ნახვევი	216
სავარჯიშო 22	223
27. იმპულსები და დირაკის დელტა ფუნქცია	226
სავარჯიშო 23	233
28. წრფივი სისტემების ამოხსნა ლაპლასის გარდაქმნით	234
სავარჯიშო 24	236
29. მატრიცული მეთოდი წრფივი სისტემებისათვის. შესავალი	237
სავარჯიშო 25	241
30. წრფივი ალგებრული განტოლებები	242
სავარჯიშო 26	245

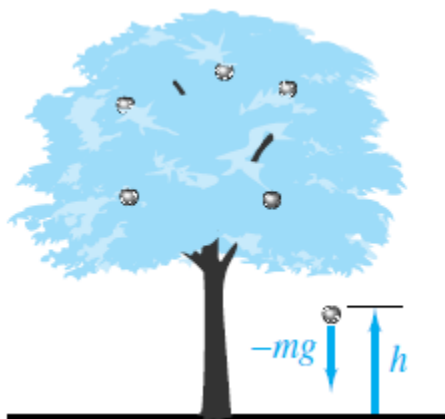
1. გამოყენებითი ასპექტის ამოცანები, რომლებსაც მივყავართ დიფერენციალურ განტოლებებზე

ბუნებაში მიმდინარე პროცესები აღიწერება გარკვეული ფუნქციებით, რომლებიც დამოკიდებულია ამ პროცესისათვის დამახასიათებელ ერთ ან რამდენიმე პარამეტრზე, როგორც ცვლადებზე. ამ პროცესების მათემატიკური მოდელირებისას ჩვეულებრივ ღებულობენ დამოკიდებულებებს, რომლებიც შეიცავენ პროცესის აღმწერ სამიხეობელ ფუნქციას და ამ სამიხეობელი ფუნქციის წარმოებულებს გარკვეულ რიგამდე. ამ დამოკიდებულებებს **დიფერენციალურ განტოლებებს უწოდებენ**.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზოგადად ფიზიკური პროცესის მათემატიკური მოდელირება, რაც გულისხმობს პროცესის აღმწერ პარამეტრებს შორის დამოკიდებულების შედგენას ანუ მათემატიკური მოდელის აგებას, ზოგადად საკმარისად რთული საქმეა.

ახლა განვიხილოთ ორი ფიზიკური ამოცანა, რომელთა მათემატიკური მოდელირება მიგვიყვანს ასეთი ტიპის განტოლებამდე.

მაგალითი 1. ვთქვათ, საგანი, გარკვეული სიმაღლიდან, დედამიწის მიზიდულობის ძალით განიცდის თავისუფალ ვარდნას (ნახ. 1).



ნახაზი 1. ვაშლის თავისუფალი ვარდნა.

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად, სხეულის მასისა და აჩქარების ნამრავლი ამ სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედის ტოლია, რაც ამ კონკრეტული მაგალითისათვის გვაძლევს შემდეგ განტოლებას

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -mg ,$$

სადაც m სხეულის მასაა, h სიმაღლეა დედამიწის ზედაპირიდან, $\frac{d^2h}{dt^2}$ სხეულის აჩქარებაა, g - სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, $-mg$ სიმძიმის ძალაა. როგორც ვხედავთ მიღებული განტოლება შეიცავს უცნობი h სიმაღლის, როგორც t დროის ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს, ამდენად იგი წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას. საბედნიეროდ ეს განტოლება ადვილად ამოიხსნება h -ის მიმართ. ამისათვის გავყოთ განტოლების ორივე მხარე m -ზე და ვაინტეგრირებთ მიღებული განტოლება ორჯერ t ცვლადით, გვექნება

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g,$$

$$\frac{dh}{dt} = -gt + c_1,$$

$$h = h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2.$$

შემდგომში ვნახავთ, რომ ინტეგრების მუდმივები c_1 და c_2 შეიძლება განისაზღვროს ცალსახად, თუ ჩვენ გვეცოდინება სხეულის საწყისი სიმაღლე, რომლიდანაც სხეული იწყებს თავისუფალ ვარდნას და საწყისი სიჩქარე. მუდმივების განსაზღვრის შემდეგ გვექნება სიმაღლის განსაზღვრის ცხადი ფორმულა დროის ნებისმიერი t მომენტისათვის.

მაგალითი 2. რადიოაქტიური დაშლის შემთხვევაში, ჩვენ ვუშვებთ, რომ დაშლის ინტენსივობა პროპორციულია არსებული რადიოაქტიური ნივთიერების რაოდენობის (ნახ. 2).



ნახაზი 2. რადიოაქტიური დაშლა.

ეს დაშვება მიგვიყვანს შემდეგ განტოლებაზე

$$\frac{dA}{dt} = -kA, \quad k > 0,$$

სადაც A ($A > 0$) წარმოადგენს რადიოაქტიური ნივთიერების რაოდენობას დროის t მომენტისათვის, ხოლო k პროპორციულობის კოეფიციენტია. ამ განტოლების ამოსახსნელად გადავწეროთ იგი შემდეგი სახით

$$\frac{1}{A} dA = -k dt,$$

საიდანაც ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int \frac{1}{A} dA = \int (-k) dt,$$

$$\ln A = -k t + c_1.$$

ამ უკანასკნელი განტოლებიდან მივიღებთ $A = A(t) = e^{\ln A} = e^{-kt} e^{c_1} = C e^{-kt}$, სადაც C აღნიშნავს e^{c_1} მუდმივს. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, C -ს მნიშვნელობა შეიძლება განვსაზღვროთ ზუსტად, თუ ვიცით რადიოაქტიური ნივთიერების საწყისი რაოდენობა. C -ს განსაზღვრის შემდეგ ჩვენ გვექნება ფორმულა, რომლითაც გვეცოდინება რადიოაქტიური ნივთიერების რაოდენობა დროის ყოველი t მომენტისათვის.

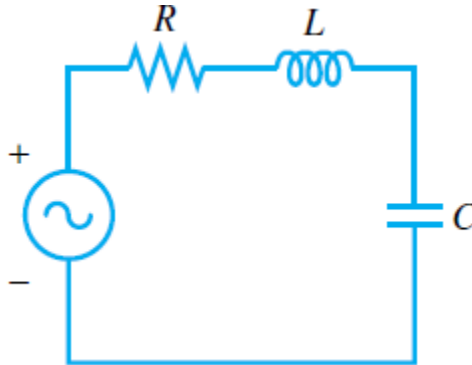
მიუხედავად იმისა, რომ ზემოთ განხილული განტოლებები მარტივად ამოვხსენით დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით, ისინი მაინც გვაძლევენ გარკვეულ წარმოდგენას დიფერენციალური განტოლების შესწავლის საქმეში. კერძოდ, უპირველესად შევნიშნოთ, რომ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი არის ფუნქცია, როგორიც იყო $h(t)$ ან $A(t)$ და არა მხოლოდ რიცხვი. მეორე შენიშვნა ეხება იმას, რომ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს წარმოადგენს ინტეგრება. მესამე შენიშვნა ეხება იმას, რომ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი არ არის ერთადერთი, ვინაიდან ამონახსნი დამოკიდებულია ინტეგრების ნებისმიერ მუდმივზე. სახელდობრ, პირველ მაგალითში ამონახსნი დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ მუდმივზე, ხოლო მეორე მაგალითში ერთ ნებისმიერ მუდმივზე.

დიფერენციალური განტოლებები გვხვდება ფიზიკური მოვლენების, ეკონომიკის, მედიცინის და მრავალ სხვადასხვა სფეროში არსებული პრობლემების მათემატიკური მოდელირებისას. ჩამოვთვალოთ რამდენიმე მათგანი:

1. თუ ბანკში ანაბარზე შევიტანეთ P_0 დოლარი წლიური რთული $r\%$ განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვით, მაშინ t წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა $P(t)$ აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{100} P_0; \quad (1)$$

2. დიფერენციალური განტოლების გამოყენების კლასიკური მაგალითია ელექტრომამოძრავებელი ძალის შესწავლა ელექტრულ წრედში, რომელიც შეიცავს წინაღობას, ინდუქციურ კოჭას და კონდენსატორს (ნახ. 3).



ნახაზი 3. ელექტრული წრედის სქემა.

კირხჰოფის კანონის გამოყენებით მივდივართ შემდეგ განტოლებამდე

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t), \quad (2)$$

სადაც L არის ინდუქტივობა, R არის წინაღობა, C არის ტევადობა, $E(t)$ არის ელექტრომამოძრავებელი ძალა, $q(t)$ არის კონდენსატორის მუხტი, t დროა;

3. ფსიქოლოგიაში სწავლების ამოცანის ერთი მოდელი დაკავშირებულია დიფერენციალურ განტოლებასთან

$$\frac{dy/dt}{y^{3/2}(1-y)^{3/2}} = \frac{2p}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

აქ y წარმოადგენს მოსწავლის უნარის დონეს, როგორც t ცვლადის ფუნქციას. p მუდმივი და n დამოკიდებულია მოსწავლე ინდივიდზე და ამოცანის ბუნებაზე;

4. სიმის რხევით წარმოშობილი ტალღების გავრცელების შესწავლისას, ვღებულობთ *კერძოწარმოებულიან* დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

სადაც t აღნიშნავს დროს, x -ადგილმდებარეობას სიმის გასწვრივ, u სიმის წერტილის გადაადგილებას, რომელიც დროისა და ადგილმდებარეობის ფუნქციაა.

ვიდრე დიფერენციალური განტოლებების შესწავლას დავიწყებდეთ, გავეცნოთ რამდენიმე ზოგად ტერმინს. თუ განტოლება შეიცავს ერთი ცვლადის წარმოებულს

მეორე ცვლადით, მაშინ პირველ ცვლადს ვუწოდოთ **დამოკიდებული ცვლადი**, ხოლო მეორეს **დამოუკიდებელი ცვლადი**. მაგალითად, განტოლებაში

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (5)$$

t არის დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო x დამოკიდებული ცვლადი. a და k - (5) განტოლების კოეფიციენტებია.

განტოლებაში

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y \quad (6)$$

x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო u დამოკიდებულ ცვლადი.

განტოლებას, რომელიც მხოლოდ ერთ დამოუკიდებელ ცვლადზე დამოკიდებული ცვლადის წარმოებულს შეიცავს, **ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება** წოდება. განტოლებას, რომელიც ერთზე მეტ დამოუკიდებელ ცვლადზე დამოკიდებული ცვლადის კერძო წარმოებულებს შეიცავს, **კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება** წოდება. (5) განტოლება წარმოადგენს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას, ხოლო (6) - კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალურ განტოლებას.

დიფერენციალური განტოლების **რიგი** ეწოდება ამ განტოლებაში შემავალი დამოკიდებული ცვლადის (საძიებელი ფუნქციის) წარმოებულის უმაღლეს რიგს. ამდენად, (5) განტოლება მეორე რიგისაა, რადგან d^2x/dt^2 წარმოადგენს უმაღლესი რიგის წარმოებულს. (6) განტოლება წარმოადგენს პირველი რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალურ განტოლებას, რადგან მხოლოდ პირველი რიგის კერძო წარმოებულებს შეიცავს.

სასარგებლო იქნება, თუ მოვახდენთ დიფერენციალური განტოლებების კლასიფიცირებას წრფივ და არაწრფივ განტოლებებად. გავიხსენოთ, რომ წრფე (ორგანზომილებიან სივრცეში) და სიბრტყე (სამგანზომილებიან სივრცეში) ვიზუალურად მარტივი წარმოსადგენია, როცა მათ ვადარებთ არაწრფივ ობიექტებს, როგორცაა შესაბამისად კუბური წირები და მეორე რიგის ზედაპირები. მაგალითად, შეგვიძლია მოვძებნოთ წრფეზე მდებარე ყოველი წერტილი, თუ ვიცით ამ წრფეზე მდებარე ორი წერტილი. შესაბამისად, წრფივი დიფერენციალური განტოლებები უფრო ექვემდებარებიან ამოხსნას ვიდრე არაწრფივი განტოლებები. წრფის $ax + by = c$ და სიბრტყის $ax + by + cz = d$ განტოლებებს აქვთ დამახასიათებელი თვისება, რომ ცვლადები შედიან **წრფივ კომბინაციაში მხოლოდ პირველი ხარისხით**. ანალოგიურად **წრფივი დიფერენციალური განტოლება** ეწოდება განტოლებას, რომელშიც დამოკიდებული y ცვლადი და მისი წარმოებულები შედიან წრფივ

კომბინაციაში მხოლოდ პირველი ხარისხით. უფრო ზუსტად, დიფერენციალური განტოლება არის წრფივი, თუ მას აქვს სახე

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x),$$

სადაც $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_0(x)$ და $F(x)$ დამოუკიდებელ x ცვლადზე დამოკიდებული მოცემული ფუნქციებია. წრფივ კომბინაციაში შესაძლებელია, რომ მამრავლები (კოეფიციენტები) დამოკიდებულები იყვნენ x ცვლადზე და არავითარი შეზღუდვა არ არსებობს ამ დამოკიდებულების ბუნებაზე. თუ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება არ არის წრფივი, მაშინ მას **არაწრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება** ეწოდება. მაგალითად,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y^3 = 0$$

არის მეორე რიგის არაწრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება y^3 წევრის გამო, მაშინ როცა განტოლება

$$t^3 \frac{dx}{dt} = t^3 + x$$

წრფივია, მიუხედავად t^3 წევრისა. განტოლება

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{dy}{dx} = \cos x$$

აგრეთვე არაწრფივია $y \frac{dy}{dx}$ წევრის გამო.

დიფერენციალური განტოლებების უმრავლესობა, რომლებიც პრაქტიკაში გვხვდება, ეკუთვნიან არაწრფივი განტოლებების კატეგორიას. მიუხედავად ამისა, მარტივი წრფივი დიფერენციალური განტოლებების შესწავლა პირველი მნიშვნელოვანი ნაბიჯია ამ მიმართულებით (ისევე როგორც მხეხი წრფე გვეხმარება რთული სახის წირების ლოკალური აპროქსიმაციის დროს).

სავარჯიშო 1

მოცემულია დიფერენციალური განტოლებები და მითითებულია დარგი, სადაც ეს განტოლება გვხვდება. დაადგინეთ:

- ა) დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ცვლადები;
- ბ) განტოლების რიგი;
- გ) განტოლება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა, თუ კერძოწარმოებუ-
ლიანი;

დ) წრფივია თუ არაწრფივი განტოლება, როცა იგი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა:

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(პერმიტის განტოლება, ქვანტურ-მექანიკური ჰარმონიული რხევა);

2. $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 9x = 2 \cos 3t$

(მექანიკური რხევა, ელექტრული წრედი, სეისმოლოგია);

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(ლაპლასის განტოლება, პოტენციალთა თეორია, ელექტროობა, აეროდინამიკა);

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2-3x)}{x(1-3y)}$ (ეკოლოგია);

5. $\frac{dx}{dt} = k(4-x)(1-x)$, სადაც k მუდმივია. (ქიმიური რეაქცია);

6. $y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = C$, სადაც C მუდმივია. (ბრახისტოხრონის ამოცანა, ვარიაციათა აღრიცხვა);

7. $\sqrt{1-y} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} = 0$ (კიდერის განტოლება, გაზის ნაკადი ფოროვან გარემოში);

8. $\frac{dp}{dt} = k p (P-p)$, სადაც k და P მუდმივებია. (ლოჯისტიკის წირი, ეპიდემიოლოგია, ეკონომიკა);

9. $8 \frac{d^4 y}{dx^4} = x(1-x)$ (სხივის გარდატეხა);

10. $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x y = 0$ (აეროდინამიკა);

11. $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} + k N$, სადაც k მუდმივია (ბირთვული დაშლა);

12. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 0.1(1-y^2) \frac{dy}{dx} + 9y = 0$ (ვან დერ პოლის განტოლება, ვაკუუმური ტრიოდული მილაკი).

2. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი და ამოცანა საწყისი პირობით

n -ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება არის ტოლობა, რომელიც აკავშირებს დამოუკიდებელ ცვლადს და დამოკიდებული ცვლადის n -ური და უფრო დაბალი რიგის წარმოებულებს. მაგალითად:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = x^3$$

არის მეორე რიგის განტოლება, x - დამოუკიდებელი ცვლადი, y - დამოკიდებული ცვლადი;

$$\sqrt{1 - \frac{d^2 y}{dt^2}} - y = 0$$

არის მეორე მეორე რიგის განტოლება, t - დამოუკიდებელი ცვლადი, y - დამოკიდებული ცვლადი;

$$\frac{d^4 x}{dt^4} = xt$$

არის მეოთხე რიგის განტოლება, t - დამოუკიდებელი ცვლადი, x - დამოკიდებული ცვლადი.

ამრიგად, n -ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახე, დამოუკიდებელი x ცვლადით და დამოკიდებული y ცვლადით, შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (1)$$

სადაც F არის ფუნქცია x, y და y -ის წარმოებულების n -ურ რიგამდე ჩათვლით. ჩვენ ვუშვებთ, რომ განტოლებას ადგილი აქვს ყოველი x -თვის ღია $I = (a, b)$ ინტერვალთან ($a < x < b$, სადაც a და b შეიძლება იყოს უსასრულოება). მრავალ შემთხვევაში შესაძლებელია (1) განტოლებიდან განვსაზღვროთ უმაღლესი რიგის წარმოებული და n -ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ასეთი ფორმით წარმოვადგინოთ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right), \quad (2)$$

რომელიც უფრო მოხერხებულია თეორიული და გამოთვლითი მიზნებისათვის.

განმარტება 1. (1) [ან (2)] დიფერენციალური განტოლების **ცხადი ამონახსნი** I ინტერვალში, ეწოდება $\Phi(x)$ ფუნქციას, თუ განტოლებაში y -ის ნაცვლად $\Phi(x)$ -ის, ხოლო y -ის წარმოებულების ნაცვლად $\Phi(x)$ ფუნქციის შესაბამისი რიგის

წარმოებულების ჩასმით ვღებულობთ ჭეშმარიტ ტოლობას ყოველი x -თვის I ინტერვალიდან.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ $\varphi(x) = x^2 - x^{-1}$ არის ცხადი ამონახსნი შემდეგი წრფივი განტოლების

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{x^2} y = 0, \quad (3)$$

ხოლო $\psi(x) = x^3$ არაა მისი ამონახსნი.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ $\varphi(x) = x^2 - x^{-1}$, $\theta(x) = 2x + x^{-2}$ და $\theta'(x) = 2 - 2x^{-3}$ ფუნქციები განსაზღვრულია ყველა x -თვის გარდა ნულისა. თუ (3) განტოლებაში y -ის ნაცვლად $\varphi(x)$ ჩავსვათ და $d^2 y / dx^2$ -ის ნაცვლად $\theta'(x)$ -ს, მივიღებთ

$$\left(2 - 2x^{-3}\right) - \frac{2}{x^2} (x^2 - x^{-1}) = (2 - 2x^{-3}) - (2 - 2x^{-3}) = 0.$$

რადგან ეს ტოლობა მართებულია ნებისმიერი არანულოვანი x -თვის, ამიტომ $\varphi(x) = x^2 - x^{-1}$ წარმოადგენს (3) განტოლების ცხად ამონახსნს $(-\infty, 0)$ და $(0, \infty)$ ინტერვალებში.

$\psi(x) = x^3$ ფუნქციისათვის გვაქვს $\psi'(x) = 3x^2$, $\psi''(x) = 6x$. (3) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$6x - \frac{2}{x^2} x^3 = 4x = 0,$$

რომელიც არ არის მართებული მთელ I ინტერვალში. მაშასადამე, $\psi(x)$ არ არის ამონახსნი.

მაგალითი 2. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი c_1 და c_2 მუდმივებისათვის $\varphi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ ფუნქცია წარმოადგენს

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad (4)$$

წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზუსტ ამონახსნს.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ $\theta(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}$ და $\theta'(x) = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x}$. ჩავსვათ განტოლებაში φ , θ და θ' შესაბამისად y , y' და y'' -ის ნაცვლად, მივიღებთ

$$\begin{aligned} (c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x}) - (-c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}) - 2(c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}) \\ = (c_1 + c_1 - 2c_1)e^{-x} + (4c_2 - 2c_2 - 2c_2)e^{2x} = 0. \end{aligned}$$

რადგან ამ ტოლობას ადგილი აქვს ყოველი x -თვის $(-\infty, \infty)$ ინტერვალიდან ამიტომ $\varphi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ წარმოადგენს (4) განტოლების ცხად ამონახსნს $(-\infty, \infty)$ ინტერვალში c_1 და c_2 მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის.

როგორც შემდგომში ვნახავთ, დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მეთოდები ყოველთვის არ გვაძლევს განტოლების ცხად ამონახსნს. ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ არაცხადი სახით. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ დამოკიდებულება

$$y^2 - x^3 + 8 = 0 \quad (5)$$

არაცხადი სახით განსაზღვრავს შემდეგი არაწრფივი

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y} \quad (6)$$

განტოლების ამონახსნს $(2, \infty)$ ინტერვალზე.

ამოხსნა. თუ (5) განტოლებას ამოვხსნით y -ის მიმართ, მივიღებთ $y = \pm\sqrt{x^3 - 8}$.

შევამოწმოთ, არის თუ არა $\Phi(x) = \sqrt{x^3 - 8}$ ფუნქცია განტოლების ცხადი ამონახსნი. რადგან

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 8}},$$

ამიტომ Φ და $\frac{d\Phi}{dx}$ ორივე განსაზღვრულია $(2, \infty)$ ინტერვალზე. (6) განტოლებაში ჩასმის შემდეგ გვექნება

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 8}} = \frac{3x^2}{2(\sqrt{x^3 - 8})},$$

რომელიც მართებულია ნებისმიერი x -თვის $(2, \infty)$ ინტერვალიდან. შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ $\Psi(x) = -\sqrt{x^3 - 8}$ აგრეთვე წარმოადგენს (6) განტოლების ცხად ამონახსნს $(2, \infty)$ ინტერვალში.

განმარტება 2. (1) დიფერენციალური განტოლების **არაცხადი ამონახსნი** I ინტერვალზე ვუწოდოთ $G(x, y) = 0$ დამოკიდებულებას, თუ იგი განსაზღვრავს ერთ ან რამდენიმე ცხად ამონახსნს I ინტერვალზე.

მაგალითი 4. ვაჩვენოთ, რომ

$$x + y + e^{xy} = 0 \quad (7)$$

არის შემდეგი არაწრფივი

$$(1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0 \quad (8)$$

განტოლების არაცხადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ჯერ შევნიშნოთ, რომ (7) განტოლებიდან არ შეგვიძლია უშუალოდ განვსაზღვროთ y როგორც x ცვლადის ფუნქცია. თუმცა, თუ ადგილი აქვს (7)

დამოკიდებულებას, მაშინ x -ის ნებისმიერი ცვლილება გამოიწვევს y -ის შესაბამის ცვლილებას. ამდენად, შეგვიძლია ვიფიქროთ, რომ (7) დამოკიდებულება არაცხადი სახით განსაზღვრავს ერთ $y(x)$ ფუნქციას მაინც. ამის უშუალოდ ჩვენება ძალიან რთულია, მაგრამ შეგვიძლია ამის მკაცრად დასაბუთება **არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის** გამოყენებით, რომელიც დიფერენციალურ აღრიცხვაში ისწავლება და შემდეგნაირად ყალიბდება.

თეორემა არაცხადი ფუნქციის არსებობის შესახებ. ვთქვათ, $G(x, y)$ ფუნქციას გააჩნია პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ მართკუთხედში, რომელიც შეიცავს (x_0, y_0) წერტილს. თუ $G(x_0, y_0) = 0$ და კერძო წარმოებული $G_y(x_0, y_0) \neq 0$, მაშინ არსებობს წარმოებადი $y = y(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ მიდამოში ($\delta > 0$) და აკმაყოფილებს განტოლებას $G(x, y(x)) = 0$ ყოველი x -თვის I ინტერვალში.

ამრიგად, თუ სრულდება თეორემის პირობები, მაშინ არსებობს x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული წარმოებადია $y(x)$ ფუნქცია. (7) ტოლობის მიხედვით $G(x, y) = x + y + e^{xy}$ და მას მთელ სიბრტყეში გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები. მას შემდეგ, რაც ვიცით, რომ y წარმოებადია x -ით, შეგვიძლია გამოვიყენოთ არაცხადი ფუნქციის გაწარმოების წესი. (7) ტოლობის x -ით გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dx}(x + y + e^{xy}) = 1 + \frac{dy}{dx} + e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ანუ

$$(1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0,$$

რომელიც (8) განტოლების იდენტურია. ამრიგად (7) დამოკიდებულება არის (8) განტოლების არაცხადი ამონახსნი.

მაგალითი 5. შევამოწმოთ, რომ C პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $4x^2 - y^2 = C$ დამოკიდებულება არის

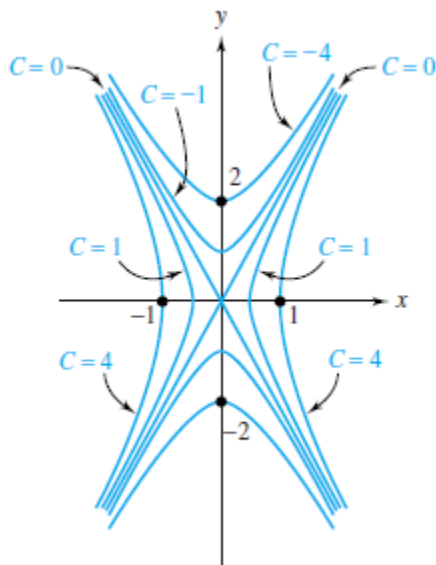
$$y \frac{dy}{dx} - 4x = 0 \quad (9)$$

განტოლების არაცხადი ამონახსნი. ასეთი ამონახსნების ერთობლიობას ვუწოდოთ *ამონახსნთა ერთპარამეტრიანი ოჯახი*. ავაგოთ არაცხადი ამონახსნების გრაფიკები C მუდმივის შემდეგი მნიშვნელობებისთვის $C = 0, \pm 1, \pm 4$.

ამოხსნა. თუ $4x^2 - y^2 = C$ განტოლებას, როგორც არაცხადი სახით მოცემულ ფუნქციას, გავაწარმოებთ x -ით, მივიღებთ

$$8x - 2y \frac{dy}{dx} = 0,$$

რომელიც (9) განტოლების ეკვივალენტურია. 1.4 ნახაზზე აგებულია არაცხადი ფუნქციის გრაფიკი, როცა $C = 0, \pm 1, \pm 4$.



ნახაზი 4. არაცხადი ამონახსნები $4x^2 - y^2 = C$.

ამონახსნთა გრაფიკები ჰიპერბოლებია, რომელთაც საერთო $y = \pm 2x$ ასიმპტოტები გააჩნიათ. შევნიშნოთ, რომ არაცხადი ამონახსნების წირები (ნებისმიერი C -თვის) ავსებენ მთელ სიბრტყეს და არსად არ იკვეთებიან, როცა $C \neq 0$. როცა $C = 0$ არაცხადი ამონახსნი გვაძლევს ორ ცხად ამონახსნს $y = 2x$ და $y = -2x$, რომლებიც კოორდინატთა სათავეზე გადიან.

შემდგომში გამოვიყენებთ ერთ ტერმინს *ამონახსნი*, რომელშიც მოიაზრება ორივე როგორც ცხადი ასევე არაცხადი ამონახსნი.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, სხეულის თავისუფალი ვარდნის ამოცანაში, ამონახსნი დამოკიდებული იყო ინტეგრების ორ ნებისმიერ c_1 და c_2 მუდმივზე

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2,$$

მაშინ, როცა რადიოაქტიური დაშლის პირველი რიგის განტოლება შეიცავდა ერთ ნებისმიერ C მუდმივს

$$A(t) = Ce^{-kt}.$$

ცხადია, რომ მეოთხე რიგის მარტივი დიფერენციალური

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

განტოლების ამონახსნი დამოკიდებული იქნება ოთხ ნებისმიერ მუდმივზე

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

მოგვიანებით ვაჩვენებთ, რომ, ზოგადად, n -ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მეთოდებს შემოაქვს n რაოდენობა ნებისმიერი მუდმივი. უმრავლეს შემთხვევაში ჩვენ შევძლებთ გამოვთვალოთ ეს მუდმივები, თუ ცნობილია n რაოდენობა საწყისი პირობები $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$.

განმარტება 3. n -ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

ამოცანა საწყისი პირობით ნიშნავს: ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი I ინტერვალზე, რომელიც x_0 წერტილში აკმაყოფილებს n საწყის პირობას

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ \frac{dy}{dx}(x_0) &= y_1, \\ \frac{d^2 y}{dx^2}(x_0) &= y_2, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}(x_0) &= y_{n-1}, \end{aligned}$$

სადაც $x_0 \in I$ და $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ მოცემული რიცხვებია.

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში საწყისი პირობები დაიყვანება ერთ მოთხოვნაზე

$$y(x_0) = y_0,$$

ხოლო მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის საწყისი პირობას აქვს სახე

$$y(x_0) = y_0, \quad \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1.$$

ტერმინი საწყისი პირობა შემოდის მექანიკიდან, სადაც დამოუკიდებელი ცვლადი x აღნიშნავს დროს და ჩვეულებისამებრ აღნიშნავენ t ცვლადით. თუ t_0 არის საწყისი დრო, მაშინ $y(t_0) = y_0$ გვაძლევს სხეულის (ობიექტის) საწყის მდებარეობას, ხოლო $y'(t_0)$ გვაძლევს საწყის სიჩქარეს.

მაგალიტი 6. ვაჩვენოთ, რომ $\varphi(x) = \sin x - \cos x$ წარმოადგენს შემდეგი ამოცანის ამონახსნს საწყისი პირობით

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0; \quad y(0) = -1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1. \quad (10)$$

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ $\varphi(x) = \sin x - \cos x$, $d\varphi(x)/dx = \cos x + \sin x$ და $d^2\varphi(x)/dx^2 = -\sin x + \cos x$ ფუნქციები განსაზღვრულია $(-\infty, \infty)$ ინტერვალში. (10)

დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით ვღებულობთ

$$(-\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0,$$

რომელსაც ადგილი აქვს x ცვლადის ყველა მნიშვნელობისათვის $(-\infty, \infty)$ ინტერვალიდან. ამრიგად, $\varphi(x)$ არის (10) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი $(-\infty, \infty)$ ინტერვალში. ვნახოთ, აკმაყოფილებს თუ არა $\varphi(x)$ ფუნქცია საწყის პირობებს. გვაქვს

$$\varphi(0) = \sin 0 - \cos 0 = -1,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1,$$

რაც ემთხვევა (10) მოთხოვნებს. მაშასადამე, $\varphi(x)$ არის მოცემული ამოცანის ამონახსნი საწყისი პირობით.

მაგალიტი 7. როგორც მე-2 მაგალიტში ვაჩვენეთ $\varphi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ ფუნქცია არის

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

განტოლების ამონახსნი ნებისმიერი c_1 და c_2 მუდმივებისათვის. განვსაზღვროთ c_1 და c_2 მუდმივები ისე, რომ ამონახსნმა დააკმაყოფილოს შემდეგი საწყისი პირობები

$$y(0) = 2, \quad \frac{dy}{dx}(0) = -3.$$

ამოხსნა. c_1 და c_2 მუდმივების განსაზღვრისათვის გამოვთვალოთ $d\varphi/dx$. მივიღებთ $d\varphi/dx = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}$. მაშინ საწყისი პირობების გათვალისწინებით c_1 და c_2 მუდმივების მიმართ მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

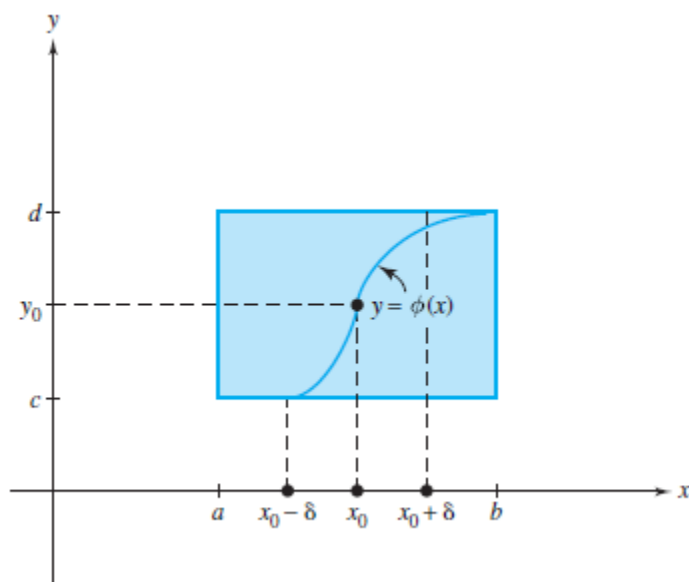
$$\begin{cases} \varphi(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 2, \\ \frac{d\varphi}{dx}(0) = -c_1 e^0 + 2c_2 e^0 = -3, \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2, \\ -c_1 + 2c_2 = -3, \end{cases}$$

უკანასკნელი სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ $c_1 = 7/3$, $c_2 = -1/3$. ამიტომ ამოცანის ამონახსნი საწყისი პირობით იქნება $\varphi(x) = (7/3)e^{-x} - (1/3)e^{2x}$.

ახლა განვიხილოთ ამოცანის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემა პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის საწყისი პირობით. ვთქვათ, დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

დაუშვათ, რომ მარჯვენა მხარე, $f(x, y)$ განსაზღვრულია (x_0, y_0) წერტილში, სადაც $y_0 = y(x_0)$. უფრო მეტიც, მოვითხოვთ, რომ f და $\partial f / \partial y$ უწყვეტი ფუნქციებია x -ის მიმართ რაიმე $a < x < b$ ინტერვალში, რომელიც შეიცავს x_0 და y -ის მიმართ რაიმე $c < y < d$ ინტერვალში, რომელიც შეიცავს y_0 . შევნიშნოთ, რომ (x, y) წერტილთა სიმრავლე Oxy სიბრტყეში, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $a < x < b$ და $c < y < d$ წარმოადგენს მართკუთხედს. ნახაზ 5-ზე გამოსახულია ეს მართკუთხედი საწყისი (x_0, y_0) წერტილით და ამ წერტილზე გამავალი ამონახსნის გრაფიკის ნაწილი, რომელიც ამ მართკუთხედში ძევს.



ნახაზი 5.

ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა

თეორემა 1. განვიხილოთ ამოცანა საწყისი პირობით

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

თუ f და $\partial f / \partial y$ უწყვეტი ფუნქციებია $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ მართკუთხედში, რომელიც შეიცავს (x_0, y_0) წერტილს, მაშინ ამოცანას საწყისი პირობით გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $\phi(x)$ რაიმე $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ინტერვალში, სადაც δ დადებითი რიცხვია.

ეს თეორემა ასაბუთებს ორ საკითხს. პირველი, როცა განტოლება აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს, მაშინ დარწმუნებული ვართ, რომ არსებობს ამოცანის ამონახსნი საწყისი პირობით. ბუნებრივია, სასურველია წინასწარ ვიცოდეთ, ნამდვილად აქვს თუ არა განტოლებას ამონახსნი, ვიდრე მის ამონახსნის ძებნაზე დავკარგავდეთ დიდ დროს. მეორე, როცა თეორემის პირობები სრულდება, მაშინ ამოცანას საწყისი პირობით აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამონახსნის ერთადერთობა გვეუბნება, რომ, თუ ჩვენ ვიპოვით ერთ რომელიმე ამონახსნს, მაშინ სწორედ იგი იქნება ის ერთადერთი ამონახსნი ამოცანისა საწყისი პირობით, რომელიც მას გააჩნია. გეომეტრიულად თეორემა გვეუბნება, რომ (x_0, y_0) წერტილზე გადის ერთადერთი წირი, რომელიც ამონახსნის გრაფიკია. სხვა სიტყვებით, მოცემული პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ორი ამონახსნი არ შეიძლება სადმე გადაიკვეთოს მართკუთხედში. შევნიშნოთ, რომ ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას ადგილი აქვს x_0 წერტილის რაიმე $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ მიდამოში. სამწუხაროდ, თეორემა არ მიუთითებს მიდამოს (2δ) სიგრძეს, უბრალოდ მიაჩნებებს, რომ იგი არ არის ნულის ტოლი.

როცა ამოცანა საწყისი პირობით გამოიყენება ფიზიკური მოვლენების მოდელირებაში, ბევრი პრაქტიკოსი უპირობოდ ვარაუდობს, რომ თეორემა 1-ის დასკვნები ძალაშია. მართლაც, ამოცანას საწყისი პირობით, თუ იგი გონივრული მოდელია, რა თქმა უნდა ველოდებით, რომ ექნება ამონახსნი, რადგან ეს მოვლენა ფიზიკურად მართლაც ხდება. უფრო მეტიც, ამონახსნი იქნებოდა ერთი და იგივე იმ შემთხვევებში, როცა ექსპერიმენტს ვიმეორებთ იდენტურ პირობებში და მთავრდება ერთი და იმავე შედეგით.

თეორემა 1 დამტკიცება ეფუძნება ინტეგრალურ განტოლებას და მისთვის პიკარის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით მიმდევრობის აგებას, რომელიც კრებადია ამონახსნისაკენ.

მაგალითი 8. მოცემულია ამოცანა საწყისი პირობით

$$3\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3, \quad y(1) = 6. \quad (11)$$

თეორემა 1 მიხედვით დავადგინოთ, აქვს თუ არა ამ ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი?

ამოხსნა. (11) განტოლების ორივე მხარის 3-ზე გაყოფით დავადგენთ, რომ ამ განტოლებისათვის $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^2 - xy^3)$ და $\frac{\partial f}{\partial y} = -xy^2$. როგორც f ასევე $\frac{\partial f}{\partial y}$ უწყვეტი

ფუნქციებია ნებისმიერ მართკუთხედში, რომელიც (1,6) წერტილს შეიცავს. მაშასადამე, სრულდება თეორემა 1-ის მოთხოვნები. ამიტომ (11) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x=1$ წერტილის მიდამოში ანუ $(1-\delta, 1+\delta)$ ინტერვალში, სადაც δ რაიმე დადებითი მუდმივია.

მაგალითი 9. მოცემულია ამოცანა საწყისი პირობით

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \quad y(2) = 0. \quad (12)$$

თეორემა 1 მიხედვით დავადგინოთ, აქვს თუ არა ამ ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი?

ამოხსნა. (12) განტოლებაში $f(x, y) = 3y^{2/3}$, ხოლო $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-1/3}$. სამწუხაროდ $\frac{\partial f}{\partial y}$ არ არის

განსაზღვრული, როცა $y=0$. შესაბამისად, არ არსებობს მართკუთხედი, რომელიც შეიცავს (2,0) წერტილს და რომელშიც ორივე f და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციები უწყვეტია. რადგან

თეორემის პირობები არ სრულდება, ჩვენ არ შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემა 1, რათა დავადგინოთ, ამოცანას საწყისი პირობით აქვს თუ არა აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

სავარჯიშო 2

1. ა) აჩვენეთ, რომ $y^2 + x - 3 = 0$ არის $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$ განტოლების არაცხადი ამონახსნი

$(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე;

ბ) აჩვენეთ, რომ $xy^3 - xy^3 \sin x = 1$ არის $\frac{dy}{dx} = \frac{(x \cos x + \sin x - 1)y}{3(x - x \sin x)}$ განტოლების

არაცხადი ამონახსნი $(0, \pi/2)$ ინტერვალზე;

2. ა) აჩვენეთ, რომ $\Phi(x) = x^2$ არის $x \frac{dy}{dx} = 2y$ განტოლების ცხადი ამონახსნი $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე;

ბ) აჩვენეთ, რომ $\Phi(x) = e^x - x$ არის $\frac{dy}{dx} + y^2 = e^{2x} + (1-2x)e^x + x^2 - 1$ განტოლების ცხადი ამონახსნი $(0, \pi/2)$ ინტერვალზე;

გ) აჩვენეთ, რომ $\Phi(x) = x^2 - x^{-1}$ არის $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 2y$ განტოლების ცხადი ამონახსნი $(0, \infty)$ ინტერვალზე;

შემდეგ მაგალითებში დაადგინეთ არის თუ არა მოცემული ფუნქციები მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი:

3. $x = 2 \cos t - 3 \sin t$, $x'' + x = 0$

4. $y = \sin x + x^2$, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + 2$

5. $x = \cos 2t$, $\frac{dx}{dt} + tx = \sin 2t$

6. $\theta = 2e^{3t} - e^{2t}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \theta \frac{d\theta}{dt} + 3\theta = -2e^{2t}$

7. $y = 3 \sin 2x + e^{-x}$, $y'' + 4y = 5e^{-x}$

8. $y = e^{2x} - 3e^{-x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

შემდეგ მაგალითებში დაადგინეთ არის თუ არა მოცემული დამოკიდებულება დიფერენციალური განტოლების არაცხადი ამონახსნი. იგულისხმეთ, რომ მოცემული დამოკიდებულება განსაზღვრავს y -ს როგორც x ცვლადის არაცხად ფუნქციას და გამოიყენეთ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული.

9. $y - \ln y = x^2 + 1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}$

10. $x^2 + y^2 = 4$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

11. $e^{xy} + y = x - 1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$

12. $x^2 - \sin(x+y) = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2x \sec(x+y) - 1$

13. $\sin y + xy - x^3 = 2$,

$$y'' = \frac{6xy' + (y')^3 \sin y - 2(y')^2}{3x^2 - y}$$

14. აჩვენეთ, რომ $\Phi(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ არის $d^2y/dx^2 + y = 0$ განტოლების ამონახსნი c_1 და c_2 მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. ამრიგად, $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ იქნება დიფერენციალური განტოლების ორ პარამეტრზე დამოკიდებული ამონახსნების ოჯახი.
15. შეამოწმეთ, რომ $\Phi(x) = 2/(1 - ce^x)$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, არის $\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-2)}{2}$ დიფერენციალური განტოლების ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ ამონახსნთა ოჯახს. ააგეთ ამონახსნთა გრაფიკები, როცა $c = 0, \pm 1, \pm 2$.
16. შეამოწმეთ, რომ $x^2 + cy^2 = 1$, სადაც c ნებისმიერი არანულოვანი მუდმივია, არის $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - 1}$ დიფერენციალური განტოლების ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ არაცხადი ამონახსნების ოჯახს. ააგეთ ამონახსნთა გრაფიკები c -ს ზოგიერთი მნიშვნელობებისათვის.
17. განსაზღვრეთ m -ის რომელი მნიშვნელობისათვის იქნება $\Phi(x) = e^{mx}$ ფუნქცია შემდეგი განტოლების ამონახსნი:
- ა) $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 0$;
- ბ) $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$.
18. განსაზღვრეთ m -ის რომელი მნიშვნელობისათვის იქნება $\Phi(x) = x^m$ ფუნქცია შემდეგი განტოლების ამონახსნი:
- ა) $3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 11x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$;
- ბ) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 5y = 0$.
19. შეამოწმეთ, რომ $\Phi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ ფუნქცია არის $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი c_1 და c_2 მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. განსაზღვრეთ c_1 და c_2 მუდმივები ისე, რომ ამონახსნმა დააკმაყოფილოს შემდეგი საწყისი პირობები:
- ა) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$;
- ბ) $y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$;

თეორემა 1 -ის მიხედვით დაადგინეთ, აქვს თუ არა შემდეგ ამოცანებს საწყისი პირობით ერთადერთი ამონახსნი:

20. $\frac{dy}{dx} = y^4 - x^4$, $y(0) = 7$

21. $\frac{dy}{dt} - ty = \sin^2 t$, $y(\pi) = 5$

22. $3x \frac{dx}{dt} + 4t = 0$, $x(2) = -\pi$

23. $\frac{dx}{dt} + \cos x = \sin t$, $x(\pi) = 0$

24. $y \frac{dy}{dx} = x$, $y(1) = 0$

25. $\frac{dy}{dx} = 3x - \sqrt[3]{y-1}$, $y(2) = 1$

3. მიმართულებათა ველი

ცხადია, ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემას დიდი მნიშვნელობა აქვს, მაგრამ იგი არ გვაძლევს რაიმე ინფორმაციას დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის ბუნების შესახებ. პრაქტიკული მიზნებისათვის ჩვენ შეიძლება დაგვჭირდეს ამონახსნის მნიშვნელობა რაიმე წერტილში ან ამონახსნის ზრდადობის ინტერვალი ან წერტილები, სადაც ამონახსნი აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. რა თქმა უნდა, როცა ამონახსნი მიღებული გვაქვს ცხადი სახით (ფორმულით), მაშინ შესაძლებელია ვუპასუხოთ ამ კითხვებს. მაგრამ დიფერენციალური განტოლებების უმრავლესობისათვის, რომლებიც რეალურ სამყაროში გვხვდება, შეუძლებელია ამონახსნის ასე ცხადად (ფორმულით) მოძებნა. უფრო მეტიც, მაშინაც კი, როდესაც ხერხდება ამონახსნის მიიღება არაცხადი სახით, ამ დამოკიდებულებიდან ამონახსნის ცხადი სახით განსაზღვრა შეიძლება საკმარისად რთული იყოს. ამიტომ ამონახსნის ანალიზისა და აპროქსიმაციისათვის ჩვენ უნდა დავეყრდნოთ სხვა მეთოდებს.

ერთი მეთოდი, რომელიც სასარგებლოა პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის (გრაფიკის) ვიზუალიზაციისთვის, გულისხმობს განტოლების მიმართულებათა ველის აგებას. მეთოდის აღწერისათვის შევნიშნოთ, რომ პირველი რიგის განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

f ფუნქციის განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში გვადლევს წირის მხეხის საკუთხო კოეფიციენტს. სხვა სიტყვებით, განტოლება გვადლევს მიმართულებას, რომელიც უნდა ჰქონდეს ამონახსნის გრაფიკს მოცემულ წერტილში. მაგალითად, განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y. \quad (1)$$

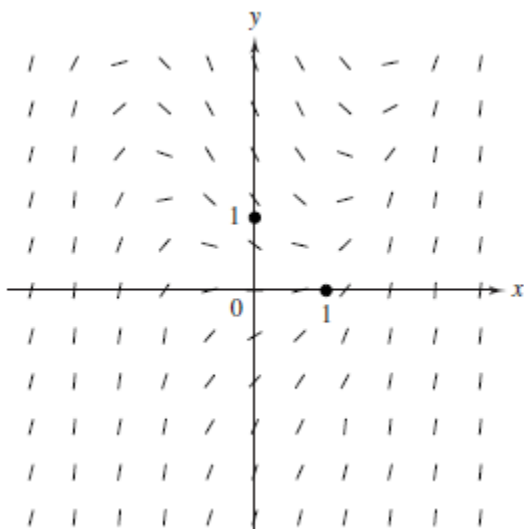
ამ შემთხვევაში $f(x, y) = x^2 - y$ და, ცხადია, იგი განსაზღვრულია მთელ Oxy სიბრტყეში. (1) განტოლების ამონახსნის გრაფიკს, რომელიც $(-2, 1)$ წერტილში გადის, ამ წერტილში საკუთხო კოეფიციენტი ექნება $(-2)^2 - 1 = 3$, ხოლო $(1, 1)$ წერტილში გამავალი ამონახსნის საკუთხო კოეფიციენტი ამავე წერტილში იქნება ნულის ტოლი.

თუ Oxy სიბრტყის ყოველ წერტილში ავიღებთ წრფის პატარა მონაკვეთს, რომელიც ემთხვევა ამონახსნის გრაფიკის მხეხს ამ წერტილში, მაშინ მთელი სიბრტყე დაიფარება ამ მონაკვეთებით და ჩვენ მივიღებთ დიფერენციალური განტოლების **მიმართულებათა ველს**. რადგან მიმართულებათა ველი გვადლევს „ამონახსნთა დინების“ ზოგად სურათს, ამიტომ იგი ხელს გვიწყობს რომელიმე კერძო ამონახსნის, კერძოდ, ამოცანის ამონახსნის გრაფიკის აგებაში საწყისი პირობით. 6 ა) ნახაზზე მოცემულია (1) განტოლების მიმართულებათა ველი, ხოლო 6 ბ) ნახაზზე აგებულია ზოგიერთი ამონახსნის გრაფიკი.

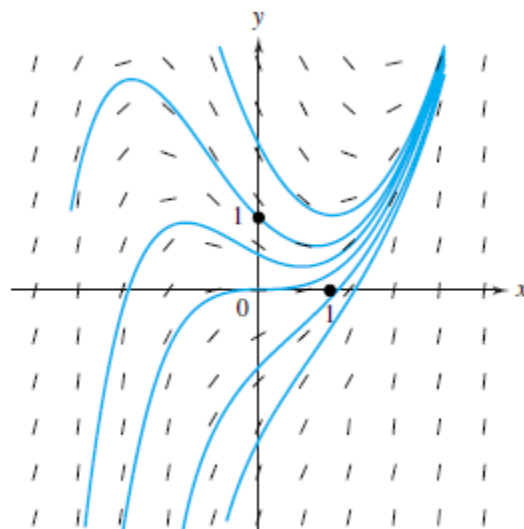
7 ნახაზზე მოცემულია მიმართულებათა ველის ზოგიერთი საინტერესო მაგალითი. 7 ა) ნახაზზე გამოსახულია რადიოაქტიური დაშლის $dy/dx = -2y$ განტოლების (გავიხსენოთ, რომ განტოლება ასე გვქონდა ჩაწერილი $dA/dt = -kA$) მიმართულებათა ველი. ამონახსნების დინების მიხედვით ვხედავთ, რომ ისინი ასიმპტოტურად უახლოვდებიან x ღერძის დადებით მიმართულებას, როცა x უსასრულოდ იზრდება. სხვა სიტყვებით, ნებისმიერი ნივთიერება, რომელიც იშლება ამ კანონის მიხედვით მცირდება და საბოლოოდ პრაქტიკულად ქრება. ეს პრაქტიკულად თანხვედრაშია ჩვენს მიერ ადრე მიღებულ ამონახსნთან $A = Ce^{-kt}$, ვინაიდან ამ კონკრეტულ შემთხვევაში $y = Ce^{-2x}$.

7 ბ) ნახაზზე გამოსახული მიმართულებათა ველის მიხედვით შეგვძლია ვივარაუდოთ, რომ $dy/dx = -y/x$ განტოლების ყველა ამონახსნი აგრეთვე უახლოვდება x ღერძს, როცა x მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. მაგრამ უფრო საინტერესოა იმის დანახვა, რომ არცერთი ამონახსნი არ კვეთს y ღერძს. $|y(x)|$ უსასრულოდ იზრდება, როცა x მიისწრაფვის ნულისაკენ ორივე მხრიდან. როგორც სიღრმისეული გამოკვლევით ჩანს, გამონაკლისია $y(x) \equiv 0$ ამონახსნი, რომელიც არ

აკმაყოფილებს ამ პირობას. შევნიშნოთ, რომ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს აქვს სახე $y = C / x$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.



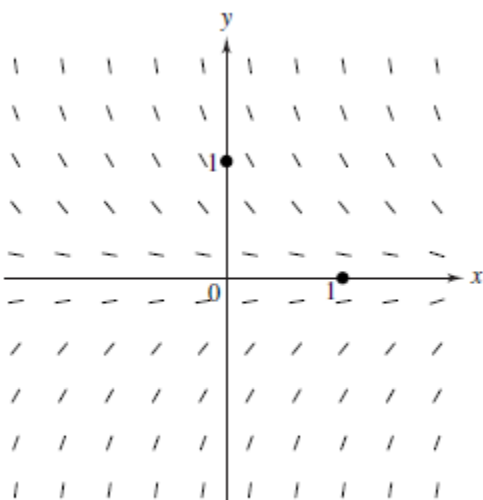
ა)



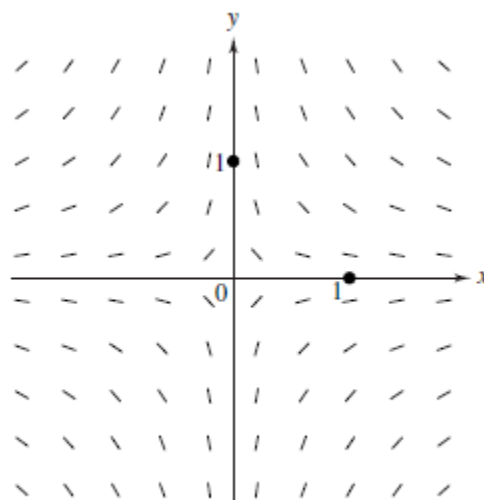
ბ)

ნახაზი 6. ა) $dy/dx = x^2 - y$ განტოლების მიმართულებათა ველი;

ბ) $dy/dx = x^2 - y$ განტოლების ამონახსნები.



ა) $\frac{dy}{dx} = -2y$



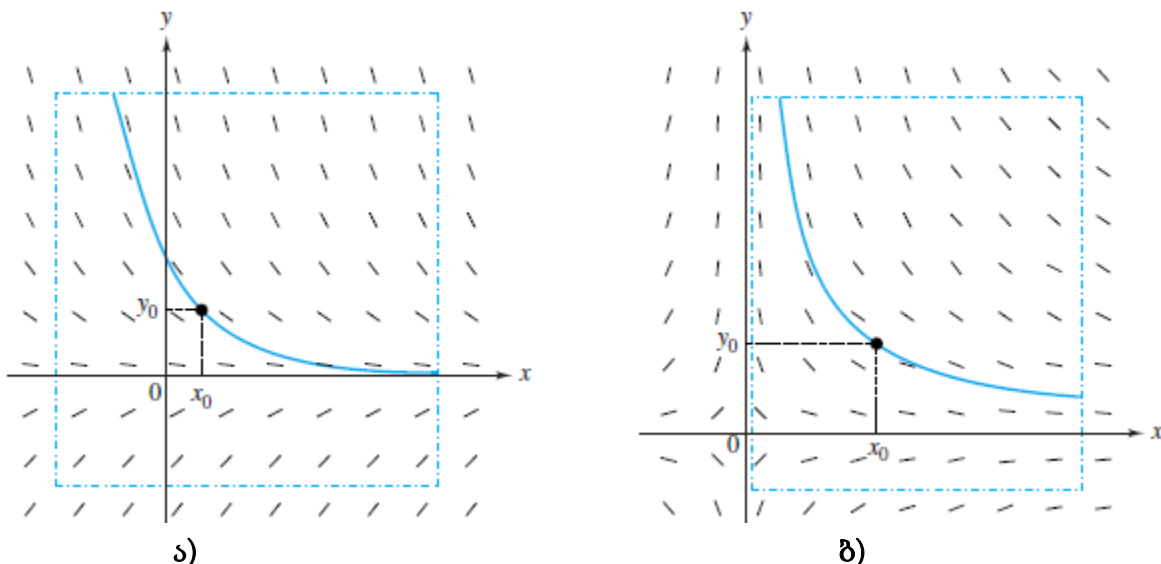
ბ) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

ნახაზი 7 ა) $dy/dx = -2y$ განტოლების მიმართულებათა ველი;

ბ) $dy/dx = -y/x$ განტოლების მიმართულებათა ველი.

ახლა მოვახდინოთ ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ინტერპრეტირება მიმართულებათა ამ ველებისათვის. 7 ა) ნახაზისათვის, სადაც $dy/dx = f(x, y) = -2y$ განტოლების მიმართულებათა ველია მოცემული, საწყის

წერტილად ავირჩიოთ x_0 და ამონახსნის საწყის მნიშვნელობად $y(x_0) = y_0$, როგორც ეს 8 ა) ნახაზზეა მოცემული.



ნახაზი 8. ა) $dy/dx = -2y$ განტოლების ამონახსნი; ბ) $dy/dx = -y/x$ განტოლების ამონახსნი.

რადგან განტოლების მარჯვენა მხარე $f(x, y) = -2y$ უწყვეტად წარმოებადია x და y ცვლადების მიმართ მთელ სიბრტყეში, ამიტომ ნებისმიერი საწყისი (x_0, y_0) წერტილი შეგვიძლია შემოვსაზღვროთ მართკუთხედით, რომელშიც, ბუნებრივია, უწყვეტი იქნება $f(x, y)$ ფუნქცია, როგორც ამას თეორემა 1 ითხოვს. რადგან სრულდება თეორემა 1-ის პირობები, ამიტომ დავასკვნით, რომ განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი, რომლის გრაფიკიც გადის (x_0, y_0) წერტილზე, როგორც ეს 8 ა) ნახაზზეა აღნიშნული.

რაც შეეხება განტოლებას

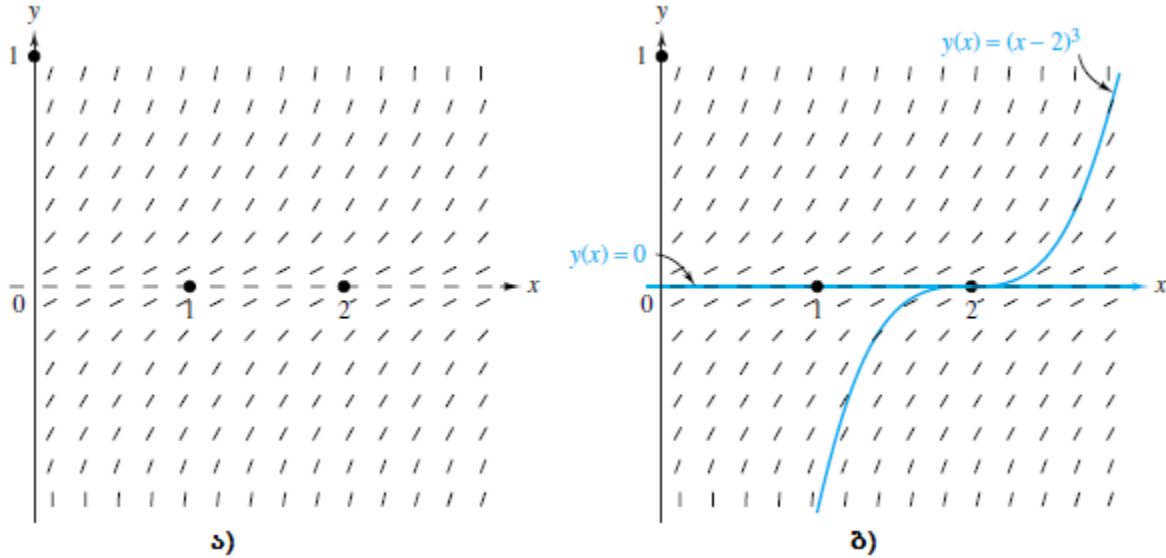
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{y}{x}$$

მარჯვენა მხარე $f(x, y) = -y/x$ არ აკმაყოფილებს უწყვეტობის პირობას, როცა $x = 0$ (ე. ი. y ღერძის წერტილებში). თუმცა ნებისმიერი არანულოვანი საწყისი x_0 -თვის და ნებისმიერი საწყისი $y(x_0) = y_0$ მნიშვნელობისათვის, შეგვიძლია ავიღოთ $f(x, y)$ ფუნქციის უწყვეტობის მართკუთხედი, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს (x_0, y_0) წერტილს და არ შეიცავს y ღერძის წერტილებს (ნახ. 8 ბ). ამ შემთხვევაში, თეორემა 1-ის თანახმად, დარწმუნებული უნდა ვიყოთ, რომ (x_0, y_0) წერტილზე გაივლის ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნის გრაფიკი.

დავუბრუნდეთ მე-2 პარაგრაფის მე-9 მაგალითში განხილულ

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$$

დიფერენციალურ განტოლებას. როგორც ვნახეთ, x ღერძის წერტილებში დარღვეულია ერთადერთობის თეორემის მოთხოვნები. ამიტომ $(2,0)$ წერტილში გადის ორი ამონახსნი $y(x) \equiv 0$ და $y(x) = (x-2)^3$. 9 ა) ნახაზზე მოცემულია მიმართულებათა ველი, ხოლო 9 ბ) ნახაზზე კი აგებულია ორივე ამონახსნის გრაფიკი.



ნახაზი 9. ა) $dy/dx = 3y^{2/3}$ განტოლების მიმართულებათა ველი;

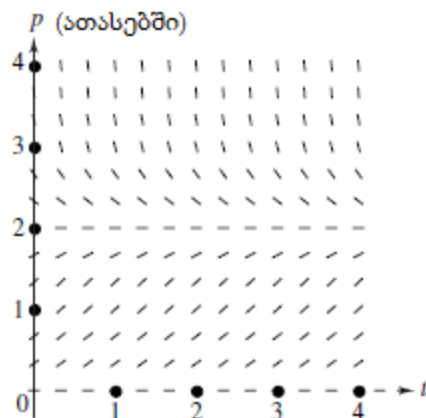
ბ) $dy/dx = 3y^{2/3}$ განტოლების ამონახსნები საწყისი პირობით $y(2) = 0$.

ცხადია, პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების მიმართულებათა ველის აგება სასარგებლოა ამონახსნის ვიზუალიზაციისათვის. თუმცა ველის აგება არაა საკმარისი იმისათვის, რათა ცალსახად დავინახოთ ამონახსნის გრაფიკი გადის თუ არა მოცემულ საწყის (x_0, y_0) წერტილზე.

მაგალითი 1. გარკვეულ სახეობებში p რაოდენობის (ათასებში) მოსახლეობისათვის ლოჯისტიკურ განტოლებას დროის t მომენტისათვის აქვს სახე

$$\frac{dp}{dt} = p(p-2). \quad (2)$$

ცხადია, p არაუარყოფითია. ამ განტოლების მიმართულებათა ველი გამოსახულია მე-10 ნახაზზე.



ნახაზი 10. ლოჯისტიკური განტოლების მიმართულებათა ველი.

მიმართულებათა ველის მიხედვით განვსაზღვროთ:

ა) თუ საწყისი მოსახლეობა არის 3000 [ე. ი. $p(0) = 3$], რა შეგვიძლია ვთქვათ

მოსახლეობის ზღვრულ რაოდენობაზე $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$?

ბ) შეიძლება თუ არა მოსახლეობამ დაიკლოს 1000-დან 500-მდე?

გ) შეიძლება თუ არა მოსახლეობის რაოდენობა ოდესმე გაიზარდოს 1000-დან 3000-მდე?

ამოხსნა. ა) მიმართულებათა ველი მიანიშნებს, რომ ყველა ამონახსნის გრაფიკი, გარდა იგივეურად ნულის ტოლი $p(t) \equiv 0$ ამონახსნისა, მიუახლოვდება ჰორიზონტალურ $p = 2$ წრფეს, როცა $t \rightarrow +\infty$ ანუ ეს წრფე იქნება ყველა დადებითი ამონახსნის ასიმპტოტი. ამრიგად, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 2$;

ბ) მიმართულებათა ველი აგრეთვე გვიჩვენებს, რომ 2000-ზე მეტი მოსახლეობა სტაბილურად დაიკლებს, მაშინ როცა 2000-ზე ნაკლები მოსახლეობა გაიზარდება. კერძოდ, 1000-ზე ნაკლები მოსახლეობა ვერასდროს დაიკლებს 500-მდე.

გ) როგორც ბ) პუნქტში აღვნიშნეთ, მოსახლეობა გაიზარდება დროში, თუ მათი რაოდენობა ამჟამად 1000-ს აღწევს, მაგრამ მიმართულებათა ველის მიხედვით იგი ვერასდროს ვერ მიაღწევს 2000-ს ანუ ამონახსნის გრაფიკი ვერ გადაკვეთს $p = 2$ წრფეს. მართლაც, მუდმივი ფუნქცია $p(t) \equiv 2$ არის (2) განტოლების ამონახსნი და ამონახსნის ერთადერთობა (თეორემა 1) გამორიცხავს ამონახსნთა გრაფიკების გადაკვეთას.

შევნიშნოთ, რომ მე-10 ნახაზზე გამოსახულ მიმართულებათა ველს აქვს ერთი კარგი დამახასიათებელი ნიშანი, კერძოდ ის, რომ საკუთხო კოეფიციენტები არ არიან დამოკიდებული t დროზე ანუ საკუთხო კოეფიციენტი ერთი და იგივეა ჰორიზონტალური წრფის გასწვრივ. იგივე ხდება 8 ა) და მე-10 ნახაზებში. ეს არის

მთავარი თვისება ე.წ. *ავტონომიური* $y' = f(y)$ განტოლებისათვის, რომლის მარჯვენა მხარე მხოლოდ დამოკიდებული ცვლადის ფუნქციაა.

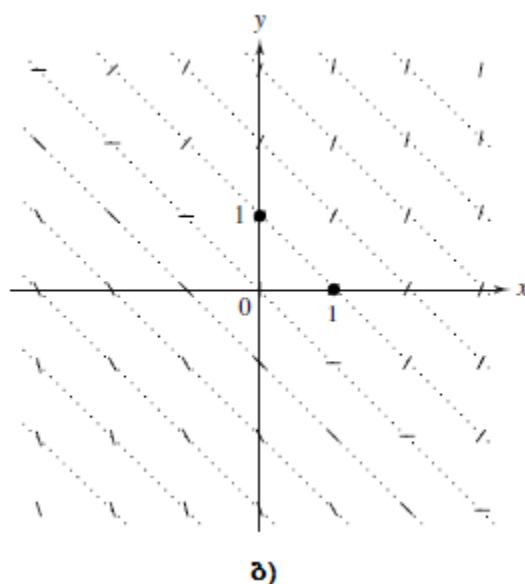
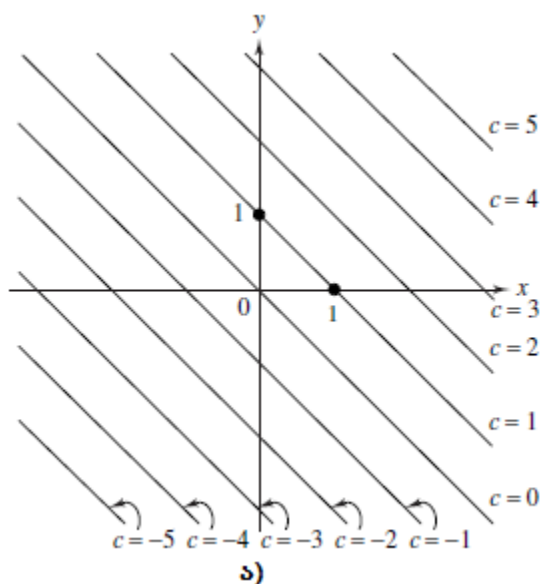
დიფერენციალური განტოლების მიმართულებათა ველის ხელით აგება ძალიან რთულია. საბედნიეროდ, არსებობს კომპიუტერული პროგრამები, რომელთა გამოყენებით შეგვიძლია ავაგოთ მიმართულებათა ველი. როცა ხელით აგება აუცილებელია, მაშინ სასარგებლოა გამოვიყენოთ *იზოკლინების მეთოდი*, რომელიც შრომას ამცირებს.

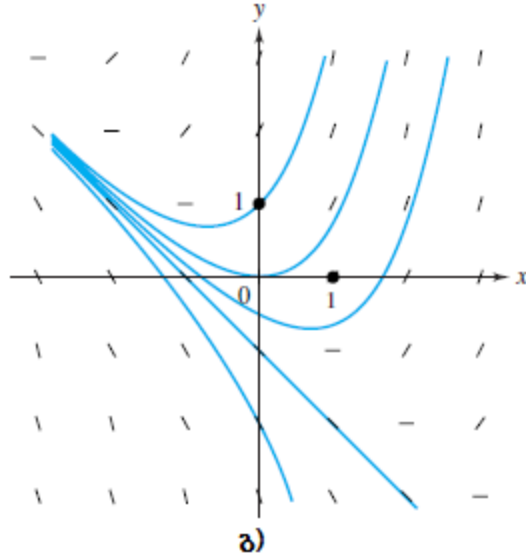
$y' = f(x, y)$ დიფერენციალური განტოლების *იზოკლინი* ეწოდება Oxy სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელ წერტილებშიც ყველა ამონახსნს აქვთ ერთი და იგივე საკუთხო კოეფიციენტი dy/dx . ცხადია, წერტილთა ეს სიმრავლე იქნება $f(x, y)$ ფუნქციის დონის წირი. მაგალითად, თუ

$$y' = f(x, y) = x + y, \quad (2)$$

მაშინ იზოკლინები იქნება წირები $x + y = c$ ანუ $y = -x + c$ წრფეები. აქ c ნებისმიერი მუდმივია. გეომეტრიულად c შეიძლება გავიგოთ, როგორც ყველა ამონახსნის გრაფიკის dy/dx საკუთხო კოეფიციენტის რიცხვითი მნიშვნელობა, როცა ის კვთს იზოკლინს. შევნიშნოთ, რომ c არ არის თავად იზოკლინის საკუთხო კოეფიციენტი. ცხადია, იზოკლინის კოეფიციენტი $y = -x + c$ განტოლების მიხედვით არის -1 .

11 ა) ნახაზზე გამოსახულია (2) განტოლების იზოკლინები.





ნახაზი 11. ა) $y' = x + y$ განტოლების იზოკლინები; ბ) $y' = x + y$ განტოლების მიმართულებათა ველი; გ) $y' = x + y$ განტოლების ამონახსნები.

იზოკლინების მეთოდის გამოყენებით მიმართულებათა ველის აგება ხდება შემდეგნაირად. c მუდმივის რამდენიმე კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობისათვის ავაგებთ შესაბამის $f(x, y) = c$ იზოკლინებს და ამ იზოკლინების გასწვრივ მოვნიშნავთ წრფის პატარა მონაკვეთებს, რომელთა საკუთხო კოეფიციენტი c -ს ტოლია. თუ შემდეგ ჩვენ წავშლით იზოკლინებს, მაშინ მონიშნული მონაკვეთები მოგვცემს დიფერენციალური განტოლების მიმართულებათა ველის ნაწილს. ცხადია, რაც უფრო მეტ იზოკლინს ავიღებთ და მის გასწვრივ რაც უფრო მეტ მონაკვეთებს მოვნიშნავთ, მიმართულებათა ველის უფრო სრულ სურათს ავაგებთ. 11 ა) ნახაზზე აგებულია იზოკლინები c მუდმივის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის; 11 ბ) ნახაზი ასახავს ამ პროცესს; 11 გ) ნახაზზე აგებულია რამდენიმე ამონახსნის გრაფიკი. იზოკლინები არ არის ყოველთვის წრფეები. ამიტომ, როცა იზოკლინებს რთული სახე აქვთ, ეს მეთოდი არაეფექტურია.

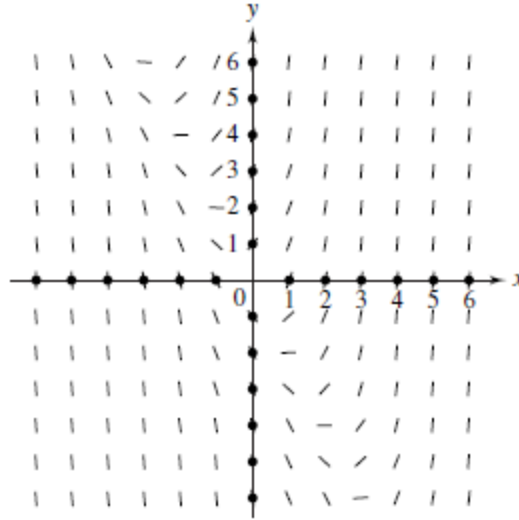
სავარჯიშო 3

1. მოცემულია $dy/dx = 2x + y$ განტოლების მიმართულებათა ველი (ნახ. 12):

ა) ააგეთ ამონახსნის გრაფიკი, რომელიც გადის $(0, -2)$ წერტილზე.

ბ) ააგეთ ამონახსნის გრაფიკი, რომელიც გადის $(-1, 3)$ წერტილზე;

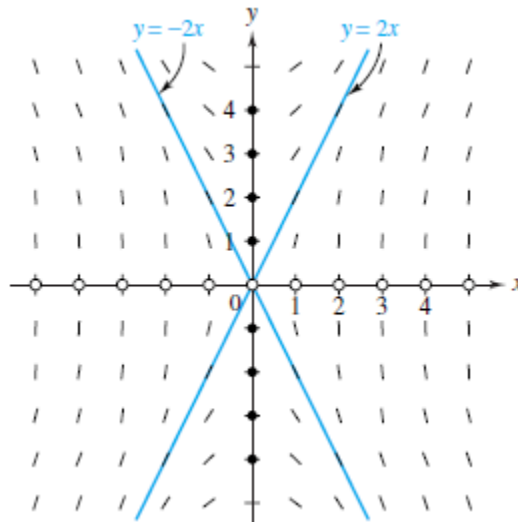
გ) რა შეგვიძლია ვთქვათ ბ) კითხვაში დასმულ ამონახსნზე, როცა $x \rightarrow +\infty$ ან $x \rightarrow -\infty$.



ნახაზი 12. $dy/dx = 2x + y$ განტოლების მიმართულებათა ველი.

2. მოცემულია $dy/dx = 4x/y$ განტოლების მიმართულებათა ველი (ნახ. 13):

- ა) შეამოწმეთ, რომ წრფე $y = \pm 2x$ წარმოადგენს ამონახსნს, როცა $x \neq 0$;
- ბ) ააგეთ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $y(0) = 2$;
- გ) ააგეთ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $y(2) = 1$;
- დ) რა შეგვიძლია ვთქვათ აგებული ამონახსნების ყოფაქცევაზე, როცა $x \rightarrow +\infty$ ან $x \rightarrow -\infty$.



ნახაზი 13. $dy/dx = 4x/y$ განტოლების მიმართულებათა ველი.

3. ზოგიერთ სახეობებში მოსახლეობის ლოჯისტიკურ განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{dp}{dt} = 3p - 2p^2.$$

- ა) ააგეთ მიმართულებათა ველი იზოკლინების მეთოდის გამოყენებით;

ბ) თუ საწყისი მოსახლეობა 3000-ის ტოლია [ანუ $p(0)=3$], რა შეგვიძლია ვთქვათ მოსახლეობის ზღვრულ რაოდენობაზე $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$?

გ) თუ $p(0)=0.8$, მაშინ რა იქნება $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$?

დ) შეიძლება თუ არა მოსახლეობამ 2000 ერთეულიდან დაიკლოს 800-მდე?

4. მოცემულია დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = x + \sin y.$$

ა) ამონახსნი გადის $(1, \pi/2)$ წერტილზე. რას უდრის საკუთხო კოეფიციენტი ამ წერტილში?

ბ) აჩვენეთ, რომ ყოველი ამონახსნი ზრდადია, როცა $x > 1$;

გ) აჩვენეთ, რომ ყოველი ამონახსნის მეორე წარმოებული აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + x \cos y + \frac{1}{2} \sin 2y;$$

დ) ამონახსნი გადის $(0,0)$ წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ ამ ამონახსნს $(0,0)$ წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი.

5. მოცემულია p (ათასებში) მოსახლეობის ლოჯისტიკური დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dp}{dt} = p(p-1)(p-2).$$

ზოგიერთ სახეობებში დროის t მომენტისათვის.

ა) ააგეთ მიმართულებათა ველი იზოკლინების მეთოდის გამოყენებით;

ბ) თუ საწყისი მოსახლეობა 4000-ის ტოლია [ანუ $p(0)=4$], რა შეგვიძლია ვთქვათ მოსახლეობის ზღვრულ რაოდენობაზე $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$?

გ) თუ $p(0)=1.7$, მაშინ რა იქნება $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$?

დ) თუ $p(0)=0.8$, მაშინ რა იქნება $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$?

ე) შეიძლება თუ არა მოსახლეობა 900 ერთეულიდან გაიზარდოს 1100-მდე?

6. ნაწილაკების მოძრაობა x ღერძის გასწვრივ აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{dx}{dt} = t^3 - x^3,$$

სადაც $x(t)$ აღნიშნავს ნაწილაკის პოზიციას დროის t მომენტში.

ა) თუ ნაწილაკი $t=2$ მომენტისათვის იმყოფება $x=1$ წერტილში, მაშინ რა იქნება ამ ნაწილაკის სიჩქარე ამ მომენტისათვის?

ბ) აჩვენეთ, რომ ნაწილაკის აჩქარება მოიცემა ფორმულით

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3t^2 - 3t^3x^2 + 3x^5;$$

გ) თუ ნაწილაკი $t = 2.5$ მომენტისათვის იმყოფება $x = 2$ წერტილში, მაშინ შეუძლია თუ არა მას მოგვიანებით მიაღწიოს $x = 1$ წერტილს?

[მითითება: $t^3 - x^3 = (t - x)(t^2 + tx + x^2)$].

7. ვთქვათ, $\phi(x)$ არის შემდეგი ამოცანის ამონახსნი საწყისი პირობით

$$\frac{dy}{dx} = x - y, \quad y(0) = 1.$$

ა) აჩვენეთ, რომ $\phi''(x) = 1 - \phi'(x) = 1 - x + \phi(x)$;

ბ) შეამოწმეთ, რომ $y = x - 1$ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია და ახსენით, რატომ არის $\phi(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ყოველთვის $y = x - 1$ წრფის მაღლა?

გ) ააგეთ მიმართულებათა ველი იზოკლინების მეთოდის გამოყენებით.

შემდეგ მაგალითებში ააგეთ იზოკლინები, შესაბამისი მიმართულებათა ველი და ზოგიერთი ამონახსნის გრაფიკი, მათ შორის წირებიც, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ საწყის პირობებს:

8. $dy/dx = -x/y$, $y(0) = 4$

9. $dy/dx = y$, $y(0) = 1$

10. $dy/dx = 2x$, $y(0) = -1$

11. $dy/dx = x/y$, $y(0) = -1$

12. $dy/dx = 2x^2 - y$, $y(0) = 0$

13. $dy/dx = x + 2y$, $y(0) = 1$

4. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება. შესავალი

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ვთქვათ, სხეულის დედამიწაზე ვარდნის დროს მასზე მოქმედებს მხოლოდ მიზიდულობის ძალა და ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა. განვსაზღვროთ სხეულის სიჩქარე, როგორც დროის ფუნქცია.

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად, სხეულის მასისა და აჩქარების ნამრავლი სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედის ტოლია

$$m \frac{dv}{dt} = F ,$$

სადაც F წარმოადგენს სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედს, m სხეულის მასაა, v სხეულის სიჩქარეა, ხოლო dv/dt - სიჩქარის წარმოებული დროით, რაც სხეულის აჩქარებას გვაძლევს. შემდგომში უფრო მოსახერხებელი იქნება v ჩავთვალოთ დადებითად, როცა იგი ქვემოთ არის მიმართული.

დედამიწის ზედაპირთან ახლოს მიზიდულობის ძალა სხეულის წონის ტოლია და აგრეთვე მიმართულია ქვემოთ. ეს ძალა გამოისახება ფორმულით mg , სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა. არ არსებობს სხეულზე მოქმედი ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის წარმოდგენის ზოგადი ზუსტი კანონი, რადგან ეს ძალა, ცხადია, დამოკიდებულია სხეულის სიჩქარეზე, ჰაერის სიმკვრივეზე და სხეულის ფორმაზე. მიუხედავად ამისა, ზოგიერთ მაგალითში, მიზანშეწონილი იქნება ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა წარმოვიდგინოთ $-bv$ სახით, სადაც b დადებითი მუდმივია, რომელიც დამოკიდებულია ჰაერის სიმკვრივეზე, სხეულის ფორმაზე. უარყოფითი ნიშანი ავიღეთ იმის გამო, რომ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა მოძრაობის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული. სხეულზე მოქმედი ძალები გამოსახულია მე-14 ნახაზზე (შევნიშნოთ, რომ ვახდენთ ჩვენს მიერ ადრე განხილული, სხეულის თავისუფალი ვარდნის ამოცანის განზოგადოებას ჰაერის წინააღმდეგობის ძალის ჩართვით).



ნახაზი 14. სხეულზე მოქმედი ძალები.

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად საბოლოოდ მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv. \quad (1)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ე. წ. **ცვლადთა განცალკევების მეთოდი**, რომელიც გამოვიყენეთ რადიოაქტიური დაშლის მოდელის ანალიზის დროს პირველ პარაგრაფში და რომელსაც დაწვრილებით შევისწავლით მომავალ პარაგრაფში. dv და dt განვიხილოთ როგორც დიფერენციალები და განტოლება გადავწეროთ ისეთი სახით, რომელშიც v და t ცვლადები განთავსებული იქნებიან განტოლების სხვადასხვა მხარეს:

$$\frac{dv}{mg - bv} = \frac{dt}{m}.$$

თუ ამ ტოლობას ვაინტეგრებთ მივიღებთ

$$\int \frac{dv}{mg - bv} = \int \frac{dt}{m} \quad (2)$$

საიდანაც

$$-\frac{1}{b} \ln |mg - bv| = \frac{t}{m} + C. \quad (3)$$

მაშასადამე,

$$|mg - bv| = e^{-bC} e^{-bt/m}$$

ანუ

$$mg - bv = Ae^{-bt/m},$$

სადაც ახალი A მუდმივის მოდულია e^{-bC} და A -ს აქვს იგივე ნიშანი, რაც $(mg - bv)$ სიდიდეს. v -ს მიმართ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$$v = \frac{mg}{b} - \frac{A}{b} e^{-bt/m}, \quad (4)$$

რომელსაც ეწოდება დიფერენციალური განტოლების **ზოგადი ამონახსნი**, რადგან როგორც შემდეგ ვნახავთ (1) განტოლების ყოველი ამონახსნი წარმოიდგინება (4) სახით.

კონკრეტულ შემთხვევაში მოცემული იქნება m , g და b სიდიდეები და ზოგად ამონახსნში მონაწილე ნებისმიერი A მუდმივი განისაზღვრება სხეულის საწყისი v_0 სიჩქარით. ამრიგად, ჩვენ ვხსნით ამოცანას საწყისი პირობით

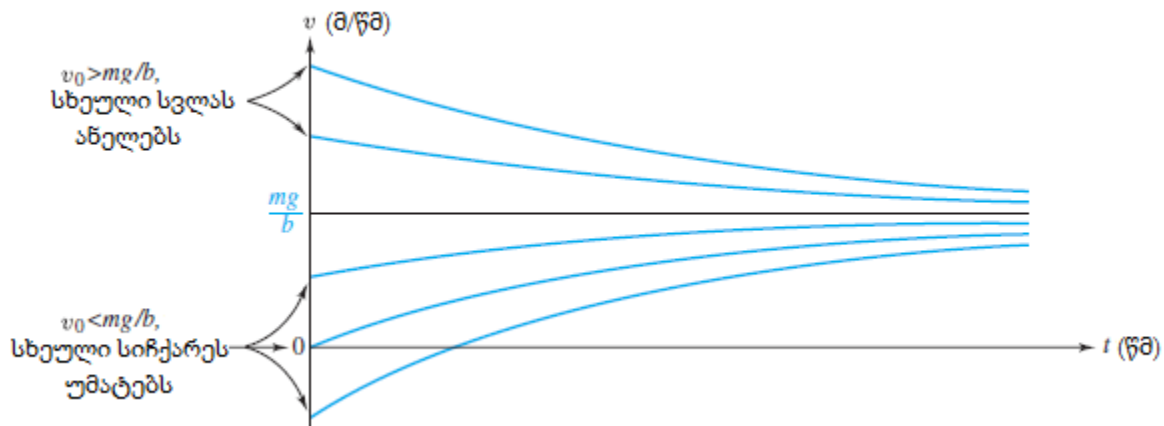
$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv, \quad v(0) = v_0.$$

თუ დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნში ჩავსვავთ $t = 0$ -ს, მივიღებთ

$A = b \left(\frac{mg}{b} - v_0 \right)$. თუ ამ მნიშვნელობას გავითვალისწინებთ ზოგად ამონახსნში, მაშინ ამოცანის ამონახსნი საწყისი პირობით საბოლოოდ ასე წარმოიდგინება

$$v = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b} \right) e^{-bt/m}. \quad (5)$$

წინამდებარე ფორმულა გვამღებს ვარდნის დროს სხეულის სიჩქარის დამოკიდებულებას t დროზე, როცა სხეულის საწყისი სიჩქარეა v_0 . მე-15 ნახაზზე მოცემულია $v(t)$ ფუნქციის გრაფიკები საწყისი v_0 სიჩქარის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.



ნახაზი 15. $v(t)$ ფუნქციის გრაფიკები საწყისი v_0 სიჩქარის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

($g = 9.8 \text{ მ/წმ}^2$, $m/b = 5 \text{ წმ}$).

ნახაზიდან ჩანს, რომ, როცა $t \rightarrow +\infty$, სიჩქარე $v(t)$ უახლოვდება $\frac{mg}{b}$ სიდიდეს მიუხედავად საწყისი v_0 სიჩქარისა. ეს მარტივად შეგვიძლია დავინახოთ (5) ფორმულიდან, როცა $t \rightarrow +\infty$. $\frac{mg}{b}$ მუდმივს უწოდებენ საგნის ზღვრულ ან საბოლოო სიჩქარეს.

სხეულის ვარდნის ამ მოდელიდან შეგვიძლია გავაკეთოთ რამდენიმე დასკვნა. რადგან $e^{-bt/m}$ სწრაფად მიისწრაფის ნულისაკენ, სიჩქარე დაახლოებით ტოლია სხეულის წონის შეფარდებისა ჰაერის წინაღობის ძალის b კოეფიციენტთან. ამრიგად, ჰაერის წინაღობის არსებობისას მძიმე სხეული უფრო სწრაფად დაეცემა დედამიწაზე ვიდრე მსუბუქი სხეული, თუ დავუშვებთ, რომ მათ ერთნაირი ფორმა და ზომა აქვთ. აგრეთვე, როცა ჰაერის წინაღობა შემცირდება (b ხდება მცირე) სხეული სწრაფად დაეცემა. ცხადია, ეს დასკვნები ეთანადება ჩვენს გამოცდილებას.

მრავალი სხვა ფიზიკური ამოცანა, როცა ჩამოყალიბებულია მათემატიკურად, მიიყვანება პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებაზე ან ამოცანაზე საწყისი

პირობით. ზოგიერთ მათგანს განვიხილავთ მოგვიანებით მომდებნო პარაგრაფებში. ახლა ჩვენ ვსწავლობთ, თუ როგორ ამოვიცნოთ და მივიღოთ პირველი რიგის ზოგიერთი სპეციალური ტიპის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

ჩვენ დავიწყებთ განცალკევებულ ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლების შესწავლით, შემდეგ შევისწავლით წრფივ განტოლებას და შემდეგ განტოლებას სრულ დიფერენციალებში.

5. განცალკევებულ ცვლადებიანი განტოლება

პირველი რიგის უმარტივესი დიფერენციალური განტოლებების კლასს მიეკუთვნება **განცალკევებულ ცვლადებიანი** დიფერენციალური განტოლება. ეს არის განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

რომელიც შეიძლება გადაიწეროს იმ სახით, რომელშიც განცალკევებული იქნება x და y ცვლადები (თავიანთ dx და dy დიფერენციალებთან ერთად) განტოლების სხვადასხვა მხარეს. კერძოდ, შემდეგი სახით

$$h(y)dy = g(x)dx.$$

ამრიგად, მოცემულ განტოლებაში მარჯვენა მხარე $f(x, y)$ უნდა წარმოიდგინებოდეს ნამრავლის სახით

$$f(x, y) = g(x) \cdot \frac{1}{h(y)}.$$

უფრო ფორმალურად, აღვნიშნოთ $p(y) = \frac{1}{h(y)}$ და მოვიყვანოთ შემდეგი განმარტება.

განმარტება 1. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ დიფერენციალურ განტოლებას ვუწოდოთ განცალკევებულ ცვლადებიანი, თუ განტოლების მარჯვენა მხარე შეიძლება წარმოვადგინოთ $g(x)$ ფუნქციისა და $p(y)$ ფუნქციის ნამრავლის სახით, სადაც $g(x)$ დამოკიდებულია მხოლოდ x ცვლადზე, ხოლო $p(y)$ მხოლოდ y ცვლადზე.

სხვა სიტყვებით, პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება არის განცალკევებულ ცვლადებიანი, თუ იგი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y).$$

მაგალითად, განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + xy}{y^2 + 1}$$

არის განცალკევად ცვლადებიანი, რადგან მარჯვენა მხარე შეგვიძლია წამრავლის სახით წარმოვადგინოთ

$$\frac{2x + xy}{y^2 + 1} = x \frac{2 + y}{y^2 + 1} = g(x)p(y).$$

თუმცა განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy$$

არ არის განცალკევად ცვლადებიანი, რადგან მარჯვენა მხარე არ წარმოიდგინება x ცვლადის ფუნქციისა და y ცვლადის ფუნქციის წამრავლის სახით.

არაფორმალურად ამბობენ, რომ განცალკევად ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლები იხსნება ცვლადების განცალკევებით ტოლობის სხვადასხვა მხარეს და შემდეგ ორივე მხარიდან ინტეგრალის აღებით.

განცალკევად ცვლადებიანი განტოლების ამოხსნის მეთოდი	
იმისათვის, რომ ამოვხსნათ	
	$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y) \quad (2)$
დიფერენციალური განტოლება, ამისათვის გადავამრავლოთ განტოლების ორივე მხარე dx და $h(y) := 1/p(y)$ სიდიდეებზე, რის შედეგადაც მივიღებთ	
	$h(y)dy = g(x)dx.$
ამ განტოლების ორივე მხარის ინტეგრებით გვექნება	
	$\int h(y)dy = \int g(x)dx,$
	$H(y) = G(x) + C, \quad (3)$
სადაც ინტეგრების ორი მუდმივი შეერთებულია და წარმოდგენილია ერთი C მუდმივის სახით. (3) განტოლება გვამღებს დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს არაცხადი სახით.	

შევნიშნოთ, რომ (2) განტოლების ამონახსნია ყველა მუდმივი $y \equiv c$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $p(c) = 0$, მაგრამ ეს ამონახსნები შეიძლება ეკუთვნოდეს (3) სახით მოცემულ ამონახსნთა სიმრავლეს, შეიძლება არა.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ არაწრფივი განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}.$$

ამოხსნა. მარტივი გარდაქმნით მივიღებთ

$$y^2 dy = (x-5)dx,$$

რაც გვიჩვენებს, რომ ცვლადთა განცალგება შესრულებულია. ამიტომ ორივე მხარის ინტეგრებით გვექნება

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{x^2}{2} - 5x + C.$$

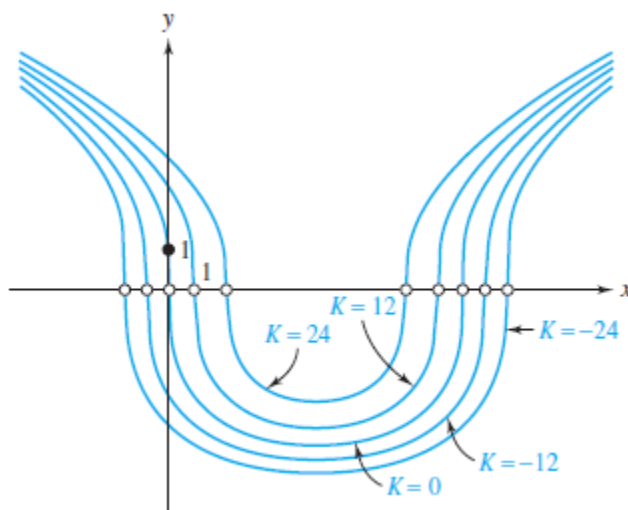
ამ უკანასკნელი განტოლებიდან y -ის განსაზღვრით მივიღებთ

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + 3C \right)^{1/3}.$$

რადგან C ინტეგრების მუდმივია ამიტომ იგი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი. ასევე შეიძლება ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი იყოს $3C$. თუ $3C$ -ს შევცვლით ერთი ნებისმიერი K სიმბოლოთი, მაშინ გვექნება

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + K \right)^{1/3}.$$

თუ გვსურს, რომ საბოლოო პასუხში ნებისმიერი მუდმივი კვლავ C -თი იყოს წარმოდგენილი, შეგვიძლია კიდევ ერთი ნაბიჯი გადავდგათ წინ და ამონახსნში K -ს ნაცვლად ავიღოთ C . ამ ამონახსნების ოჯახი გამოსახულია მე-16 ნახაზზე.



ნახაზი 16. ერთ K პარამეტრზე დამოკიდებულ ამონახსნთა ოჯახი.

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, თუ რაოდენ მარტივია განცალგებად ცვლადებიანი განტოლების ამოხსნა. თუმცა იგი დაკავშირებულია ინტეგრირების გამოთვლასთან, რაც ბუნებრივად მოითხოვს ინტეგრების მეთოდებისა და ტექნიკის ცოდნას.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ ამოცანა საწყისი პირობით

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}, \quad y(-1) = 0. \quad (4)$$

ამოხსნა. ცვლადების განცალკევა და ინტეგრება გვაძლევს

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y-1} &= \frac{dx}{x+3}, \\ \int \frac{dy}{y-1} &= \int \frac{dx}{x+3}, \\ \ln|y-1| &= \ln|x+3| + C. \end{aligned} \quad (5)$$

აქედან შეგვიძლია განვსაზღვროთ y ცხადი სახით, რომელიც შეიცავს C მუდმივს ან გამოვიყენოთ საწყისი პირობა C მუდმივის განსაზღვრისათვის და შემდეგ განვსაზღვროთ y ცხადი სახით. ვისარგებლოთ პირველი მიდგომით.

(5) განტოლებიდან გვექნება

$$\begin{aligned} e^{\ln|y-1|} &= e^{\ln|x+3|+C} = e^C e^{\ln|x+3|}, \\ |y-1| &= e^C |x+3| = C_1 |x+3|, \end{aligned} \quad (6)$$

სადაც $C_1 = e^C$. გავითვალისწინოთ, რომ $|y-1| = \pm(y-1)$. ანალოგიურად, $|x+3| = \pm(x+3)$. ამრიგად (6) შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$y-1 = \pm C_1(x+3) \quad \text{ან} \quad y = 1 \pm C_1(x+3),$$

სადაც ნიშნის არჩევა დამოკიდებულია x და y ცვლადების მნიშვნელობებზე. რადგან C_1 დადებითი მუდმივია (გავიხსენოთ, რომ $C_1 = e^C > 0$), ამიტომ $\pm C_1$ -ის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ რაიმე K მუდმივი, რომელიც იქნება ნებისმიერი არანულოვანი მუდმივი. ამრიგად, გვექნება

$$y = 1 + K(x+3) \quad (7)$$

ახლა შევარჩიოთ ნებისმიერი K მუდმივი ისე, რომ ამონახსნმა დააკმაყოფილოს საწყისი პირობა $y(-1) = 0$. ამისათვის ჩავსვათ (7)-ში $x = -1$ და $y = 0$, გვექნება

$$0 = 1 + K(-1+3) = 1 - 2K,$$

საიდანაც $K = -1/2$. ამრიგად, ამოცანის ამონახსნი საწყისი პირობით იქნება

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x+3) = -\frac{1}{2}(x+1).$$

ალტერნატიული მიდგომა. მეორე მიდგომა გულისხმობს საწყისი პირობის მიხედვით ჯერ შევარჩიოთ ნებისმიერი C მუდმივი და შემდეგ განვსაზღვროთ y ცხადი სახით. გვექნება

$$\begin{aligned} \ln|0-1| &= \ln|-1+3| + C, \\ 0 &= \ln 1 = \ln 2 + C \end{aligned}$$

ამიტომ $C = -\ln 2$. ამრიგად (5)-ის მიხედვით ამონახსნი უნდა განისაზღვროს განტოლებიდან

$$\ln(1-y) = \ln(x+3) - \ln 2.$$

აქ $|y-1|$ შევცვალოთ $1-y$ და $|x+3|$ კი $x+3$ -ით, რადგან ჩვენ გვაინტერესებს x და y მნიშვნელობები საწყისი პირობის, $x = -1$ და $y = 0$ მახლობლობაში (ასეთი მნიშვნელობებისათვის $y-1 < 0$ და $x+3 > 0$). y -ის მიმართ ამოხსნით მივიღებთ

$$\ln(1-y) = \ln(x+3) - \ln 2 = \ln\left(\frac{x+3}{2}\right),$$

$$1-y = \frac{x+3}{2},$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x+3) = -\frac{1}{2}(x+1),$$

რომელიც ემთხვევა პირველი მეთოდით მიღებულ (8) ამონახსნს.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ არაწრფივი განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2x + 1}{\cos y + e^y}. \quad (9)$$

ამოხსნა. ცვლადთა განცალგებით და ინტეგრებით მივიღებთ

$$(\cos y + e^y)dy = (6x^5 - 2x + 1)dx$$

$$\int (\cos y + e^y)dy = \int (6x^5 - 2x + 1)dx,$$

$$\sin y + e^y = x^6 - x^2 + x + C$$

ამჯერად შეუძლებელია, განვსაზღვროთ y ცხადი სახით. ასე ხშირად ხდება, როდესაც ვხსნით პირველი რიგის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებას. შესაბამისად, როცა ვამბობთ „ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება“, ვგულისხმობთ, რომ ზოგჯერ ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ არაცხადი სახით.

ცვლადთა განცალგების ტექნიკა გულისხმობს მოცემული დიფერენციალური განტოლების გარდაქმნას გარკვეული ალგებრული ოპერაციების გამოყენებით. კერძოდ, $dy/dx = g(x)p(y)$ განტოლების გადაწერა $h(y)dy = g(x)dx$ სახით გულისხმობს მოცემული განტოლების ორივე მხარის $p(y)$ -ზე გაყოფას. გავიხსენოთ ალგებრიდან, რომ ამ მოქმედებით შეიძლება დავკარგოთ განტოლების ამონახსნი. მაგალითად, $x(x-2) = 4(x-2)$ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი $x=2$ და $x=4$. მაგრამ, თუ განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ $(x-2)$ -ზე, მივიღებთ მხოლოდ ერთ ამონახსნს $x=4$ ანუ დავკარგეთ ერთი $x=2$ ამონახსნი. ამრიგად, ვიდრე გაყოფას შევასრულებდეთ უნდა ამოვწეროთ $(x-2)$ მამრავლის ნულები.

იმავე მიდგომით უნდა ვიმოქმედოთ დიფერენციალურ განტოლებაში ცვლადთა განცალებისას ანუ ჯერ უნდა ვიპოვოთ $p(y)$ მამრავლის ნულები, ვიდრე $dy/dx = g(x)p(y)$ განტოლების ორივე მხარეს $p(y)$ მამრავლზე გავყოფთ. მაგალითად, თუ $g(x)p(y) = (x-2)^2(y-13)$, მაშინ $p(y) = y-13$ და $y=13$ წარმოადგენს ამ მამრავლის ნულს. ამასთან შევნიშნოთ, რომ $y(x) \equiv 13$ წარმოადგენს $dy/dx = g(x)p(y) = (x-2)^2(y-13)$ განტოლების ამონახსნს, რადგან

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(13)}{dx} = 0,$$

$$g(x)p(y) = (x-2)^2(13-13) = 0.$$

მე-2 მაგალითში

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}$$

ჩვენ მივიღეთ ამონახსნთა ოჯახი $y = 1 + K(x+3)$, სადაც K ნებისმიერი არანულოვანი მუდმივია. შევნიშნოთ, რომ ამ ოჯახს არ ეკუთვნის იგივეურად მუდმივი $y \equiv 1$ ფუნქცია, რომელიც აგრეთვე ამონახსნია დიფერენციალური განტოლების (ეს ამონახსნი მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან, როცა $K=0$, რისი დაშვებაც არ შეგვიძლია). ამრიგად, დავკარგეთ ერთი ამონახსნი. ეს გამოწვეულია იმ მიზეზით, რომ ცვლადთა განცალებისას განტოლების ორივე მხარე გავყეთ $y-1$ მამრავლზე, რომელიც ნული ხდება, როცა $y=1$.

მეთოდის ფორმალური დაფუძნება

დასასრულს მიმოვიხილოთ ცვლადთა განცალების პროცესი უფრო მკაცრი მიდგომით. მოცემული დიფერენციალური განტოლება გადავწერეთ შემდეგი სახით

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x), \quad (10)$$

სადაც $h(y) := 1/p(y)$. დავუშვათ, $H(y)$ და $G(x)$ არიან შესაბამისად $h(y)$ და $g(x)$ ფუნქციების პირველადები

$$H'(y) = h(y) \quad \text{და} \quad G'(x) = g(x).$$

გადავწეროთ (10) განტოლება შემდეგი სახით

$$H'(y) \frac{dy}{dx} = G'(x).$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად, უკანასკნელი განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს $H(y(x))$ ფუნქციას კომპოზიციის წარმოებულს

$$\frac{d}{dx} H(y(x)) = H'(y(x)) \frac{dy}{dx}.$$

ამრიგად, თუ $y(x)$ წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს, მაშინ $H(y(x))$ და $G(x)$ არიან x ცვლადის ფუნქციები, რომლებსაც გააჩნიათ ერთი და იგივე წარმოებული. მაშასადამე, ისინი განსხვავდებიან მუდმივი შესაკრებით

$$H(y(x)) = G(x) + C. \quad (11)$$

მე-11 განტოლება ემთხვევა (3) განტოლებას, რომელიც არაფორმალურად იყო მიღებული.

სავარჯიშო 4

დაადგინეთ განცალკავად ცვლადებიანია თუ არა შემდეგი განტოლებები

$$1. \frac{dy}{dx} - \sin(x + y) = 0 \quad 2. \frac{dy}{dx} = 4y^2 - 3y + 1$$

$$3. \frac{ds}{dt} = t \ln(s^{2t}) + 8t^2 \quad 4. \frac{dy}{dx} = \frac{ye^{x+y}}{x^2 + 2}$$

$$5. (xy^2 + 3y^2)dy - 2x dx = 0$$

$$6. s^2 + \frac{ds}{dt} = \frac{s + 1}{st}$$

ამოხსენით განტოლებები

$$7. \frac{dx}{dt} = 3xt^2$$

$$8. x \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^3}$$

$$9. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2 \sqrt{1+x}}$$

$$10. \frac{dx}{dt} = \frac{t}{xe^{t+2x}}$$

$$11. \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 y}{1+x^2}$$

$$12. x \frac{dv}{dx} = \frac{1-4v^2}{3v}$$

$$13. \frac{dx}{dt} - x^3 = x$$

$$14. \frac{dy}{dx} = 3x^2(1+y^2)^{3/2}$$

$$15. y^{-1} dy + ye^{\cos x} \sin x dx = 0$$

$$16. (x + xy^2)dx + e^{x^2}y dy = 0$$

ამოხსენით ამოცანა საწყისი პირობით

$$17. y' = x^3(1 - y) , \quad y(0) = 3$$

$$18. \frac{dy}{dx} = (1 + y^2)\tan x , \quad y(0) = \sqrt{3}$$

$$19. \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} = \sqrt{y + 1} \cos x , \quad y(\pi) = 0$$

$$20. x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 - x - 2}{(x + 1)(y + 1)} , \quad y(1) = 1$$

$$21. \frac{1}{\theta} \frac{dy}{d\theta} = \frac{y \sin \theta}{y^2 + 1} , \quad y(\pi) = 1$$

$$22. x^2 dx + 2y dy = 0 , \quad y(0) = 2$$

$$23. t^{-1} \frac{dy}{dt} = 2 \cos^2 y , \quad y(0) = \pi/4$$

$$24. \frac{dy}{dx} = 8x^3 e^{-2y} , \quad y(1) = 0$$

$$25. \frac{dy}{dx} = x^2(1 + y) , \quad y(0) = 3$$

$$26. \sqrt{y} dx + (1 + x) dy = 0 , \quad y(0) = 1$$

6. წრფივი განტოლება

გამოყენებებში ხშირად გვხვდება პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები. პირველი პუნქტიდან გავიხსენოთ, რომ *პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება* ზოგადი სახით ასე ჩაიწერება

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) , \quad (1)$$

სადაც $a_1(x)$, $a_0(x)$ და $b(x)$ მოცემული ფუნქციებია და დამოკიდებულნი არიან მხოლოდ x ცვლადზე და არა y -ზე.

მაგალითად, განტოლება

$$x^2 \sin x - (\cos x)y = (\sin x) \frac{dy}{dx}$$

წრფივია, რადგან იგი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$(\sin x) \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = x^2 \sin x .$$

თუმცა განტოლება

$$y \frac{dy}{dx} + (\sin x)y^3 = e^x + 1$$

არ არის წრფივი, რადგან ის არ წარმოიდგინება (1) სახით y^3 და $y \frac{dy}{dx}$ წევრების გამო.

ორ კერძო შემთხვევაში წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა მარტივად ხდება. პირველ შემთხვევას ადგილი აქვს, როცა $a_0(x)$ კოეფიციენტი იგივეურად ნულის ტოლია. მაშინ განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} = b(x), \quad (2)$$

რომელიც ეკვივალენტურია ტოლობის

$$y(x) = \int \frac{b(x)}{a_1(x)} dx + C,$$

როცა $a_1(x)$ არ არის ნულის ტოლი.

მეორე შემთხვევა ნაკლებად ტრივიალურია. შევნიშნოთ, რომ თუ $a_0(x)$ აღმოჩნდება $a_1(x)$ კოეფიციენტის წარმოებული ე. ი. $a_0(x) = a_1'(x)$, მაშინ (1) განტოლების მარცხენა მხარე დაემთხვევა $a_1(x)y$ ნამრავლის წარმოებულს

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = a_1(x)y' + a_1'(x)y = \frac{d}{dx}[a_1(x)y],$$

რის გამოც (1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dx}[a_1(x)y] = b(x)$$

და ამონახსნი ელემენტარულად მოიძებნება

$$a_1(x)y = \int b(x)dx + C,$$

$$y(x) = \frac{1}{a_1(x)} \left(\int b(x)dx + C \right).$$

იშვიათად ხდება, რომ წრფივი განტოლება დაიყვანებოდეს ისეთ მარტივ სახეზე როგორც (2). მაგრამ (3) ფორმაზე შეიძლება მივიყვანოთ მოცემული (1) განტოლება, თუ მის ორივე მხარეს გადავამრავლებთ კარგად შერჩეულ $\mu(x)$ ფუნქციაზე. ასეთ $\mu(x)$ ფუნქციას „მაინტეგრებული მამრავლი“ ეწოდება. ამის საჩვენებლად დავიყვანოთ (1) განტოლება ე.წ. **სტანდარტულ სახეზე**, რისთვისაც გავყოთ (1) განტოლების ორივე მხარე $a_1(x)$ -ზე, მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (4)$$

სადაც $P(x) = a_0(x) / a_1(x)$ და $Q(x) = b(x) / a_1(x)$.

ახლა გადავამრავლოთ (4) განტოლება $\mu(x)$ მაინტეგრებელ მამრავლზე

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x) \quad (5)$$

და შევარჩიოთ $\mu(x)$ იმ პირობით, რომ (5) განტოლების მარცხენა მხარე იყოს $\mu(x)y$ ნამრავლის წარმოებული ანუ

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \frac{d}{dx} [\mu(x)y] = \mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu'(x)y.$$

ცხადია, ეს მოითხოვს, რომ μ აკმაყოფილებდეს პირობას

$$\mu' = \mu P. \quad (6)$$

როგორც ვხედავთ μ -ს შესარჩევად მივიღეთ (6) განტოლება, რომელიც წარმოადგენს განცალკევებულ ცვლადებიან განტოლებას

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx.$$

ინტეგრებით მივიღებთ

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \quad (7)$$

μ -ს შერჩევის შემდეგ, (5) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dx} [\mu(x)y] = \mu(x)Q(x),$$

რომლის ამონახსნია

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)Q(x)dx + C \right]. \quad (8)$$

აქ C ნებისმიერი მუდმივია. (8) გვაძლევს (4) განტოლების ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ ამონახსნთა ოჯახს. ამონახსნის ამ ფორმას ეწოდება (4) განტოლების **ზოგადი ამონახსნი**.

დაბოლოს, შევაჯამოთ წრფივი განტოლების ამოხსნის მეთოდი.

წრფივი განტოლების ამოხსნის მეთოდი	
ა) ჩავწეროთ განტოლება სტანდარტული სახით	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x);$
ბ) გამოვთვალოთ მაინტეგრებელი მამრავლი $\mu(x)$ ფორმულით	$\mu(x) = e^{\int P(x)dx};$
გ) გადავამრავლოთ განტოლების სტანდარტული სახე $\mu(x)$ -ზე და გავიხსენოთ, რომ მარცხენა მხარე არის ნამრავლის წარმოებული	$\underbrace{\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y}_{\frac{d}{dx}[\mu(x)y]} = \mu(x)Q(x),$ $\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x).$
დ) ვაინტეგრირებთ უკანასკნელი განტოლება და $\mu(x)$ -ზე გაყოფით განვსაზღვროთ y .	

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x \cos x$, $x > 0$, განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. სტანდარტულ სახეზე მისაყვანად გადავამრავლოთ განტოლების ორივე მხარე x -ზე, მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x.$$

აქ $P(x) = -2/x$, ამიტომ

$$\int P(x)dx = \int \frac{-2}{x}dx = -2 \ln|x|.$$

ამრიგად, მაინტეგრებელი მამრავლი იქნება

$$\mu(x) = e^{-2 \ln|x|} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}.$$

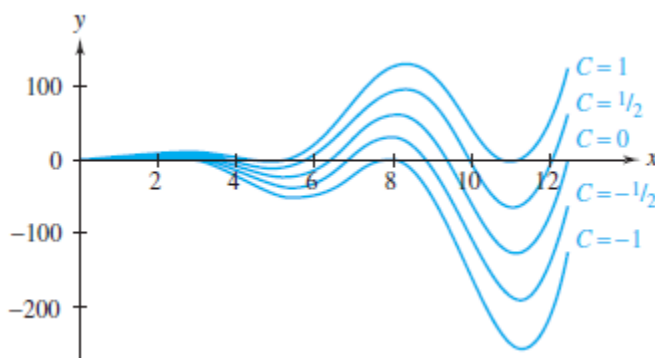
განტოლების $\mu(x)$ -ზე გადამრავლებით მივიღებთ

$$x^{-2} \frac{dy}{dx} - 2x^{-3}y = \cos x, \quad \frac{d}{dx}(x^{-2}y) = \cos x.$$

ორივე მხარის ინტეგრებით მივიღებთ

$$x^{-2}y = \int \cos x dx = \sin x + C, \quad y = x^2 \sin x + Cx^2. \quad (11)$$

მარტივად შევამოწმო, რომ მიღებული ფუნქცია ამონახსნია ყოველი $x > 0$ -თვის. მე-17 ნახაზზე აგებულია (11) ამონახსნები C მუდმივის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.



ნახაზი 17. $y = x^2 \sin x + Cx^2$ ამონახსნების გრაფიკები C მუდმივის ხუთი მნიშვნელობისათვის.

მაგალითი 2. ვთქვათ, გვაქვს ორი რადიოაქტიური იზოტოპი RA_1 და RA_2 , რომლებიც ერთი და იმავე რადიოაქტიურ ნივთიერებათა სერიას ეკუთვნიან; RA_1 გარდაიქმნება RA_2 იზოტოპად, რომელიც შემდეგ გარდაიქმნება სტაბილურ ატომებად. ვთქვათ, RA_1 -ს დაშლის სიჩქარე RA_2 იზოტოპად გარდაქმნის დროს არის $50e^{-10t}$ კგ/წმ. რადგან RA_2 -ის დაშლის სიჩქარე პროპორციულია RA_2 -ის $y(t)$ მასის, ამიტომ RA_2 იზოტოპის დაშლის სიჩქარე იქნება

$$\frac{dy}{dt} = 50e^{-10t} - ky \quad (12)$$

სადაც $k > 0$ არის დაშლის მუდმივი. ვიპოვოთ RA_2 -ის მასა $y(t)$, $t \geq 0$ -თვის, თუ ვიცით, რომ $k = 2$ /წმ და საწყის მომენტში $y(0) = 40$ კგ.

ამოხსნა. (12) განტოლება წრფივია, ამიტომ ჩავწეროთ იგი სტანდარტული სახით

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 50e^{-10t}, \quad y(0) = 40, \quad (13)$$

სადაც ავიღეთ $k = 2$. თუ ამ განტოლებას შევადარებთ წრფივი დიფერენციალური განტოლების სტანდარტულ ფორმას, მაშინ $P(t) = 2$, ამიტომ $\int P(t)dt = \int 2dt = 2t$.

ამრიგად, მაინტეგრებული მამრავლი $\mu(t) = e^{2t}$. გადავამრავლოთ (13) განტოლება $\mu(t)$ -ზე მივიღებთ.

$$e^{2t} \frac{dy}{dt} + 2e^{2t} y = 50e^{-10t+2t} = 50e^{-8t},$$

$$\frac{d}{dt}(e^{2t} y) = 50e^{-8t}.$$

უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარის ინტეგრებით და y -ის მიმართ ამოხსნით მივიღებთ

$$e^{2t} y = -\frac{25}{4} e^{-8t} + C,$$

$$y = -\frac{25}{4} e^{-10t} + C e^{-2t}.$$

ჩავსვათ $t = 0$ და $y(0) = 40$, მივიღებთ

$$40 = -\frac{25}{4} e^0 + C e^0 = -\frac{25}{4} + C,$$

საიდანაც $C = 40 + 25/4 = 185/4$. ამრიგად, RA_2 -ის მასა $y(t)$ დროის t მომენტისათვის იქნება

$$y = \frac{185}{4} e^{-2t} - \frac{25}{4} e^{-10t}, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემა ასე ჩამოყალიბდება.

თეორემა 1. ვთქვათ, $P(x)$ და $Q(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია (a,b) ინტერვალში, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს x_0 წერტილს. მაშინ ნებისმიერი საწყისი y_0 მნიშვნელობისათვის არსებობს

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (15)$$

ამოცანის ერთადერთი $y(x)$ ამონახსნი (a,b) ინტერვალზე და ამონახსნი მოიცემა (8) ფორმულით C მუდმივის შესაბამისი შერჩევით.

შევნიშნოთ, რომ წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის (15) ამოცანას საწყისი პირობით გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მთელ (a,b) ინტერვალზეა განსაზღვრული და არა x_0 წერტილის რაიმე მცირე ინტერვალზე, როგორც ეს სხვა განტოლებების შემთხვევაში გვაქვს. პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას ყოველთვის გააჩნია ზოგადი ამონახსნი, რომელიც (8) ფორმულით მოიცემა.

სავარჯიშო 5

განსაზღვრეთ, არის თუ არა მოცემული განტოლება განცალკეად ცვლადებიანი, წრფივი, არც ერთი ან ორივე

$$1. \frac{dx}{dt} + xt = e^x \quad 2. x^2 \frac{dy}{dx} + \sin x - y = 0$$

$$3. 3t = e^t \frac{dy}{dt} + y \ln t \quad 4. (t^2 + 1) \frac{dy}{dt} = yt - y$$

$$5. 3r = \frac{dr}{d\theta} - \theta^3 \quad 6. x \frac{dx}{dt} + t^2 x = \sin t$$

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

$$7. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2x + 1 \quad 8. \frac{dy}{dx} - y - e^{3x} = 0$$

$$9. x \frac{dy}{dx} + 2y = x^{-3} \quad 10. \frac{dr}{d\theta} + r \tan \theta = \sec \theta$$

$$11. (t + y + 1)dt - dy = 0 \quad 12. \frac{dy}{dx} = x^2 e^{-4x} - 4y$$

$$13. y \frac{dx}{dy} + 2x = 5y^3$$

$$14. x \frac{dy}{dx} + 3(y + x^2) = \frac{\sin x}{x}$$

$$15. (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + xy - x = 0$$

$$16. (1 - x^2) \frac{dy}{dx} - x^2 y = (1 + x) \sqrt{1 - x^2}$$

ამოხსენით ამოცანა საწყისი პირობით:

$$17. \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^x, \quad y(1) = e - 1$$

$$18. \frac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0, \quad y(0) = \frac{4}{3}$$

$$19. t^2 \frac{dx}{dt} + 3tx = t^4 \ln t + 1, \quad x(1) = 0$$

$$20. \frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} + 2 = 3x, \quad y(1) = 1$$

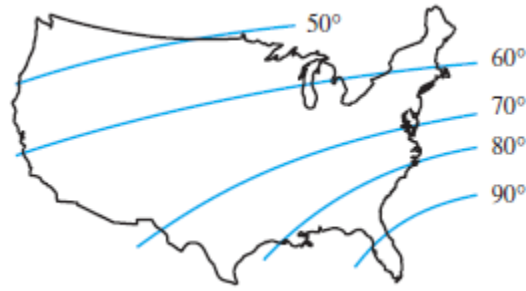
$$21. \cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 2x \cos^2 x,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-15\sqrt{2}\pi^2}{32}$$

$$22. \sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

7. განტოლება სრულ დიფერენციალებში

დავუშვათ, $F(x, y)$ ფუნქცია წარმოადგენს რაიმე ფიზიკურ სიდიდეს, როგორცაა, მაგალითად, ტემპერატურა Oxy სიბრტყის რაიმე არეში. მაშინ F ფუნქციის დონის წირი, სადაც $F(x, y) \equiv \text{constant}$, შეიძლება აღვიქვათ როგორც იზოთერმები ამინდის რუკაზე, როგორც ეს მე-18 ნახაზზეა მოცემული.



ნახაზი 18. $F(x, y)$ ფუნქციის დონის წირები.

როგორ გამოვთვალოთ დონის წირების მხები წრფის საკუთხო კოეფიციენტი? ამის საშუალებას გვაძლევს არაცხადი დიფერენცირების წესი. ამისათვის გავაწარმოთ $F(x, y) = C$ განტოლების ორივე მხარე x ცვლადით და მხედველობაში მივიღოთ ის, რომ y დამოკიდებულია x -ზე დონის წირის გასწვრივ:

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = \frac{d}{dx} (C)$$

ანუ

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1)$$

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტის მიმართ მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \quad (2)$$

თუ (1) განტოლებას გადავამრავლებთ dx -ზე, მაშინ მარცხენა მხარე დაემთხვევა F ფუნქციის სრულ დიფერენციალს

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

და გამოდის, რომ $F(x, y) = C$ დონის წირის $f(x, y)$ საკუთხო კოეფიციენტის მოძებნის პროცესი დაიყვანება F ფუნქციის სრული დიფერენციალის გამოთვლაზე და $dF = 0$ განტოლების ამოხსნაზე.

რადგან (2) ტოლობას დიფერენციალური განტოლების სახე აქვს, ამიტომ შესაძლებელია საპირიპიროდ შევცვალოთ ჩენი მსჯელობა და გამოვიყენოთ იგი ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი პირველი რიგის დიფერენციალური $dy/dx = f(x, y)$ განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით (დიფერენციალებში)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (3)$$

თუ (3) განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს რაიმე F ფუნქციის სრულ დიფერენციალს

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF(x, y),$$

მაშინ მისი ამონახსნი (არაცხადი სახით) იქნება F ფუნქციის დონის წირები: $F(x, y) = C$, ნებისმიერი C მუდმივისათვის.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 1}{2x^2y}.$$

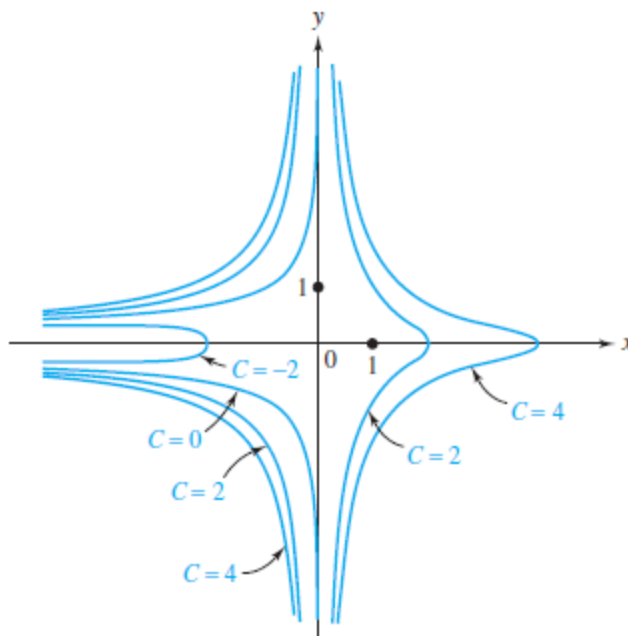
ამოხსნა. გადავწეროთ განტოლება შემდეგი სახით

$$(2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy = 0.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს $F(x, y) = x^2y^2 + x$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს

$$(2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 + x)dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 + x)dy = d[x^2y^2 + x].$$

ამრიგად, განტოლების ამონახსნი მივიღეთ არაცხადი სახით შემდეგი ფორმულით $x^2y^2 + x = C$. ინტეგრალური წირები C მუდმივის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის აგებულია მე-19 ნახაზზე.



ნახაზი 19. მაგალითი 1-ის ამონახსნები.

განმარტება 2. ვიტყვით, რომ $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ დიფერენციალური ფორმა არის სრული დიფერენციალი R მართკუთხედში, თუ არსებობს ამ მართკუთხედში განსაზღვრული ისეთი $F(x, y)$ ფუნქცია, რომ

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = M(x, y) \quad \text{და} \quad \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = N(x, y) \quad (4)$$

ყოველი (x, y) -თვის R -დან ე. ი. $F(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი დააკმაყოფილებს პირობას

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

თუ $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ დიფერენციალური ფორმა არის სრული დიფერენციალი, მაშინ განტოლებას $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში.

გამოყენებებში იშვიათად ვხვდებით დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც მოცემულია სრული დიფერენციალის ფორმით. თუმცა ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ განტოლება, რომელიც სრულ დიფერენციალებშია მოცემული, ძალიან მარტივად და სწრაფად იხსნება. კერძოდ, მაგალითი 1-ში ვნახეთ, რომ ასეთი განტოლების ამოხსნის პროცესი მოიცავს ორ საფეხურს: 1) შევამოწმოთ არის თუ არა $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ დიფერენციალური ფორმა სრული დიფერენციალი და 2) თვით $F(x, y)$ ფუნქციის მოძებნა.

შევნიშნოთ, რომ თუ $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ დიფერენციალური ფორმა არის სრული დიფერენციალი

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dF ,$$

მაშინ $F(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულების უწყვეტობის გამო

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y}$$

ანუ M და N ფუნქციებმა აუცილებლად უნდა დააკმაყოფილონ პირობა

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) .$$

თეორემა 2 ადგენს, რომ ეს უკანასკნელი ტოლობა აგრეთვე საკმარისი პირობაა იმისა, რომ $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ დიფერენციალური ფორმა იყოს სრული დიფერენციალი.

თეორემა 2. ვთქვათ, $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ფუნქციებს R მართკუთხედში გააჩნიათ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები. მაშინ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

იქნება განტოლება სრულ დიფერენციალებში R მართკუთხედში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (5)$$

R მართკუთხედის ყოველი (x, y) წერტილში.

ვიდრე თეორემა 2-ს დავამტკიცებდეთ შევნიშნოთ, რომ მაგალითი 1-ში დიფერენციალური ფორმა, რომელიც სრულ დიფერენციალს წარმოადგენდა აქვს სახე

$$(2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy = 0 .$$

ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ სრულდება (5) პირობა:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^2 + 1) = 4xy ,$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^2y) = 4xy .$$

აგრეთვე ცხადია, რომ, თუ მაგალითი 1-ში მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას ჩავწერდით სხვა ფორმით, მაგალითად,

$$\frac{2xy^2 + 1}{2x^2y} dx + dy = 0 \quad \text{ან} \quad dx + \frac{2x^2y}{2xy^2 + 1} dy = 0 ,$$

მაშინ ეს დიფერენციალური ფორმები არ დააკმაყოფილებდნენ (5) პირობას.

თეორემა 2-ის დამტკიცება. დამტკიცება გავყოთ ორ ნაწილად: 1) თუ დიფერენციალური ფორმა სრული დიფერენციალია, მაშინ სრულდება (5) პირობა და

2) თუ სრულდება (5) პირობა, მაშინ დიფერენციალური ფორმა სრული დიფერენციალია. რაც შეეხება პირველ ნაწილს, ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ თუ გვაქვს განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ (5) პირობა უბრალოდ წარმოადგენს $F(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულების ტოლობას. მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ვიცით, რომ ამისათვის საკმარისია მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულების უწყვეტობა. რადგან თეორემა 2-ის პირობები უზრუნველყოფს ამ უკანასკნელ მოთხოვნას, ამიტომ მართებულია (5) ტოლობა.

ვიდრე თეორემის მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ, გამოვიყვანოთ $F(x, y)$ ფუნქციის გამოსათვლელი ფორმულა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $\partial F / \partial x = M$ და $\partial F / \partial y = N$. პირველი განტოლების x ცვლადით ინტეგრებით მივიღებთ

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y). \quad (6)$$

შევნიშნოთ, რომ ინტეგრების ნებისმიერი C მუდმივის ნაცვლად ავიღეთ მხოლოდ y ცვლადზე დამოკიდებული ნებისმიერი ფუნქცია $g(y)$. ეს გამართლებულია იმ გარემოებით, რომ x ცვლადით ინტეგრებისას y ფიქსირებულია და ამიტომ ინტეგრების „მუდმივი“ დამოკიდებული იქნება y -ზე. $g(y)$ ფუნქციის განსასაზღვრელად გავაწარმოთ (6) ტოლობის ორივე მხარე y ცვლადით. მივიღებთ

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + \frac{\partial g(y)}{\partial y}. \quad (7)$$

რადგან $g(y)$ მხოლოდ y ცვლადის ფუნქციაა, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ $\partial g / \partial y = g'(y)$. თუ (7) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ $g'(y)$ -ს მივიღებთ

$$g'(y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx.$$

რადგან $\partial F / \partial y = N$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx. \quad (8)$$

მიუხედავად იმისა, რომ (8) მარჯვენა მხარე მიუთითებს x ცვლადზე შესაძლო დამოკიდებულებას, მაინც არ უნდა მივაქციოთ ყურადღება ამ ცვლადის არსებობას, რადგან მარცხენა მხარე, $g'(y)$, დამოკიდებულია მხოლოდ y -ზე. (8) ტოლობის ინტეგრებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ $g(y)$ მუდმივი შესაკრების სიზუსტით და მაშასადამე შეგვიძლია განვსაზღვროთ $F(x, y)$ ფუნქცია მუდმივი შესაკრების სიზუსტით $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ფუნქციების საშუალებით.

თეორემა 2-ის მტკიცების დასასრულებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ (5) პირობა საკმარისია იმისათვის, რათა $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ განტოლება იყოს სრულ

დიფერენციალებში. ამის საჩვენებლად საკმარისია ავაგოთ $F(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $\partial F / \partial x = M$ და $\partial F / \partial y = N$. საბედნიეროდ, ასეთი ფუნქციის მიძებნა არც თუ ისე რთული საქმეა. თეორემის მტკიცების პირველი ნაწილის განხილვისას ასეთი $F(x, y)$ ფუნქციას სავარაუდოდ უნდა ჰქონდეს (6) სახე, სადაც $g'(y)$ განისაზღვრება (8) ფორმულით. სახელდობრ $F(x, y)$ ასე შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + g(y), \quad (9)$$

სადაც (x_0, y_0) ფიქსირებული წერტილია R მართკუთხედში, ხოლო $g(y)$ განისაზღვრება მუდმივი შესაკრების სიზუსტით შემდეგი განტოლებიდან

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(t, y) dt. \quad (10)$$

მივაქციოთ ყურადღება ერთ მნიშვნელოვან საკითხს. კერძოდ, როგორ შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ (10) სახით მოცემული $g'(y)$ ნამდვილად არის მხოლოდ y ცვლადის ფუნქცია? ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ (10)-ის მარჯვენა მხარე არაა დამოკიდებული x ცვლადზე ანუ მისი წარმოებული x ცვლადით ნულის ტოლია. ამის ჩვენება კი (5) პირობის გამოყენებით არის შესაძლებელი. მართლაც,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(t, y) dt \right) = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x M(t, y) dt.$$

აქ თუ გავითვალისწინებთ, რომ (5) პირობის ძალით $\partial N / \partial x = \partial M / \partial y$ და

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x M(t, y) dt = M(x, y),$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(t, y) dt \right) = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0.$$

ამრიგად, (10) მარჯვენა მხარე არაა დამოკიდებული x ცვლადზე. თუ ვაინტეგრებთ (10) განტოლებას y ცვლადით, მაშინ მუდმივი შესაკრების სიზუსტით გვექნება

$$g(y) = \int_{y_0}^y N(x, t) dt - \int_{y_0}^y \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^x M(s, y) ds \right] dt = \int_{y_0}^y N(x, t) dt - \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{x_0}^x M(s, y_0) ds.$$

ამიტომ საბოლოოდ

$$F(x, y) = \int_{y_0}^y N(x, t) dt + \int_{x_0}^x M(s, y_0) ds.$$

დასასრულს აღვნიშნოთ, რომ თეორემა 2-ის დამტკიცების დროს ჩვენ ფაქტობრივად ჩამოვაყალიბეთ ის ცხადი საფეხურები, რომლებიც უზრუნველყოფენ სრულ დიფერენციალებში მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის აგებას.

ამოხსნის მეთოდი განტოლებისათვის სრულ დიფერენციალებში	
1.	თუ $Mdx + Ndy = 0$ არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ $\partial F / \partial x = M$. ამ უკანასკნელი განტოლების x ცვლადით ინტეგრებით მივიღებთ $F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y); \quad (11)$
2.	$g(y)$ გამოსათვლელად ვიპოვოთ (11) განტოლების ორივე მხარის კერძო წარმოებული y ცვლადით და $\partial F / \partial y$ -ის ნაცვლად ჩავსვათ N . შემდეგ ამოვხსნათ განტოლება $g'(y)$ -ის მიმართ;
3.	ვაინტეგრეთ $g'(y)$ და განვსაზღვროთ $g(y)$ მუდმივი შესაკრების სიზუსტით. შემდეგ $g(y)$ -ის მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (11) და განვსაზღვროთ $F(x, y)$;
4.	$Mdx + Ndy = 0$ განტოლების ამონახსნი არაცხადი სახით წარმოდგინება ფორმულით $F(x, y) = C.$ ($F(x, y)$ ფუნქციის განსაზღვრა შესაძლებელია მეორე ალტერნატიული გზით. კერძოდ, დავიწყებთ $\partial F / \partial y = N$ ტოლობის y ცვლადით ინტეგრებას. იხილე მაგალითი 3)

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$\left(2xy - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx + (x^2 + 2y)dy = 0. \quad (12)$$

ამოხსნა. აქ $M(x, y) = 2xy - \frac{1}{\cos^2 x}$, ხოლო $N(x, y) = x^2 + 2y$. რადგან

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

ამიტომ (12) განტოლება სრულ დიფერენციალებშია. $F(x, y)$ ფუნქციის მოსაძებნად ვაინტეგრეთ $M(x, y)$ ფუნქცია x ცვლადით. გვაქვს

$$F(x, y) = \int \left(2xy - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx + g(y) = x^2y - \tan x + g(y). \quad (13)$$

გავაწარმოთ (13) y ცვლადით და $\partial F / \partial y$ -ის ნაცვლად ჩავსვათ $N(x, y) = x^2 + 2y$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y),$$

$$x^2 + g'(y) = x^2 + 2y.$$

ამრიგად, $g'(y) = 2y$ და რადგან ინტეგრების მუდმივის შერჩევა არ არის მნიშვნელოვანი, ამიტომ ავიღებთ $g(y) = y^2$. აქედან გამომდინარე, გვექნება

$$F(x, y) = x^2 y - t g x + y^2$$

და (12) განტოლების ამონახსნი არაცხადი სახით მოიცემა განტოლებით $x^2 y - t g x + y^2 = C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

შენიშვნა. სრულ დიფერენციალებში განტოლების ამოხსნა მოითხოვს რამდენიმე საფეხურის შესრულებას. თვითშემოწმების მიზნით გვახსოვდეს, რომ $g'(y)$ -ის მიმართ მიღებული განტოლების მარჯვენა მხარე არ უნდა იყოს x ცვლადზე დამოკიდებული. თუ ეს ასე არ არის, მაშინ ჩვენ დავუშვით შეცდომა $F(x, y)$ -ის ან $\partial M / \partial y$ და $\partial N / \partial x$ გამოთვლისას.

$F(x, y)$ ფუნქციის აგებისას პირველად შეგვიძლია ვაინტეგროთ y ცვლადით $N(x, y)$, რის შედეგადაც მივიღებთ

$$F(x, y) = \int N(x, y) dy + h(x) \quad (14)$$

და შემდეგ მოვძებნოთ $h(x)$. ეს ალტერნატიული მეთოდი გამოვიყენოთ შემდეგ მაგალითში.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$(1 + e^x y + x e^x y) dx + (x e^x + 2) dy = 0. \quad (15)$$

ამოხსნა. ამ განტოლებაში $M(x, y) = 1 + e^x y + x e^x y$, ხოლო $N(x, y) = x e^x + 2$. რადგან

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = e^x + x e^x = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

ამიტომ (15) განტოლება სრულ დიფერენციალებშია. თუ ვაინტეგრებთ $N(x, y)$ ფუნქციას y ცვლადით მივიღებთ

$$F(x, y) = \int (x e^x + 2) dy + h(x) = x e^x y + 2y + h(x).$$

გავაწარმოთ უკანასკნელი განტოლება x ცვლადით და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y),$$

მაშინ $e^x y + x e^x y + h'(x) = 1 + e^x y + x e^x y$, საიდანაც $h'(x) = 1$. ამიტომ $h(x) = x$. აქედან გამომდინარე $F(x, y) = x e^x y + 2y + x$ და (15) განტოლების ამონახსნი არაცხადი სახით მოიცემა განტოლებით $x e^x y + 2y + x = C$. ამ კონკრეტულ შემთხვევაში y შეგვიძლია განვსაზღვროთ ცხადი სახით $y = (C - x) / (2 + x e^x)$.

შენიშვნა. რადგან $F(x, y)$ ფუნქციის მოსაძებნად შეგვიძლია ორი სხვადასხვა გზა გამოვიყენოთ, ამიტომ სჯობს წინასწარ განვიხილოთ ინტეგრალები $\int M(x, y)dx$ და $\int N(x, y)dy$ და დავადგინოთ რომელი მათგანის გამოთვლაა უფრო მარტივი. თუ პირველი ინტეგრალის გამოთვლა უფრო მარტივია ვიდრე მეორესი, მაშინ ავირჩევთ პირველ გზას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ავირჩევთ მეორე ალტერნატიულ გზას.

მაგალითი 4. ვაჩვენოთ, რომ განტოლება

$$(x + 3x^3 \sin y)dx + (x^4 \cos y)dy = 0 \quad (16)$$

არ არის სრულ დიფერენციალებში, მაგრამ მისი x^{-1} მამრავლზე გადამრავლებით განტოლება გადაიქცევა განტოლებად სრულ დიფერენციალებში. გავითვალისწინოთ ეს ფაქტი და ამოვხსნათ (16) განტოლება.

ამოხსნა. აქ $M(x, y) = x + 3x^3$, ხოლო $N(x, y) = x^4 \cos y$. რადგან

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^3 \cos y \neq 4x^3 \cos y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

ამიტომ (16) განტოლება არ არის სრულ დიფერენციალებში. გადავამრავლოთ (16) x^{-1} მამრავლზე მივიღებთ

$$(1 + 3x^2 \sin y)dx + (x^3 \cos y)dy = 0. \quad (17)$$

ამ შემთხვევაში $M(x, y) = 1 + 3x^2$, ხოლო $N(x, y) = x^3 \cos y$. ამჯერად

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \cos y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

და, მაშასადამე, (17) განტოლება არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში. (17)-ის ამოხსნით მივიღებთ, რომ მისი ამონახსნი არაცხადი სახით ასე მოიძებნა $x + x^3 \sin y = C$. რადგან (16) და (17) განტოლებები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან x მამრავლით, მაშინ ერთის ამონახსნი იქნება მეორეს ამონახსნი როდესაც $x \neq 0$. აქედან გამომდინარე (16)-ის ამონახსნი არაცხადი სახით იქნება $x + x^3 \sin y = C$.

შემდეგ პუნქტში განვიხილავთ მეთოდს, რომლითაც შეგვიძლია მოვძებნოთ მამრავლი, რომელზე გადამრავლებითაც დიფერენციალური განტოლება შეგვიძლია გადავაქციოთ განტოლებად სრულ დიფერენციალებში მსგავსად ზემოთ განხილული მაგალითისა, თუ რა თქმა უნდა მოცემული განტოლება არ არის სრულ დიფერენციალებში.

სავარჯიშო 6

დაადგინეთ, რა სახისაა შემდეგი განტოლებები: განცალკავადი, წრფივი, სრულ დიფერენციალებში, თუ არც ერთი მათგანი. შევნიშნოთ, რომ ზოგიერთი მათგანი შეიძლება იყოს რამდენიმე სახის.

1. $(x^{10/3} - 2y)dx + x dy = 0$
2. $(x^2y + x^4 \cos x)dx - x^3 dy = 0$
3. $\sqrt{-2y - y^2} dx + (3 + 2x - x^2)dy = 0$
4. $(ye^{xy} + 2x)dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0$
5. $xy dx + dy = 0$
6. $y^2 dx + (2xy + \cos y)dy = 0$
7. $[2x + y \cos(xy)]dx + [x \cos(xy) - 2y]dy = 0$
8. $\theta dr + (3r - \theta - 1)d\theta = 0$

დაადგინეთ, არის თუ არა მოცემული განტოლებები სრულ დიფერენციალებში. თუ სრულ დიფერენციალებშია, მაშინ ამოხსენით.

9. $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$
10. $(2xy + 3)dx + (x^2 - 1)dy = 0$
11. $(\cos x \cos y + 2x)dx - (\sin x \sin y + 2y)dy = 0$
12. $(e^x \sin y - 3x^2)dx + (e^x \cos y + y^{-2/3}/3)dy = 0$
13. $(t/y)dy + (1 + \ln y)dt = 0$
14. $e^t(y - t)dt + (1 + e^t)dy = 0$
15. $\cos \theta dr - (r \sin \theta - e^\theta)d\theta = 0$
16. $(ye^{xy} - 1/y)dx + (xe^{xy} + x/y^2)dy = 0$
17. $(1/y)dx - (3y - x/y^2)dy = 0$
18. $[2x + y^2 - \cos(x + y)]dx + [2xy - \cos(x + y) - e^y]dy = 0$
19. $\left(2x + \frac{y}{1 + x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{1 + x^2y^2} - 2y\right)dy = 0$
20. $\left[\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + y \cos(xy)\right]dx + [x \cos(xy) - y^{-1/3}]dy = 0$

ამოხსენით ამოცანა საწყისი პირობით

21. $(1/x + 2y^2x)dx + (2yx^2 - \cos y)dy = 0$,

$y(1) = \pi$

22. $(ye^{xy} - 1/y)dx + (xe^{xy} + x/y^2)dy = 0$,

$y(1) = 1$

23. $(e^t y + te^t y)dt + (te^t + 2)dy = 0$, $y(0) = -1$

24. $(e^t x + 1)dt + (e^t - 1)dx = 0$, $x(1) = 1$

25. $(y^2 \sin x)dx + (1/x - y/x)dy = 0$, $y(\pi) = 1$

26. $(\tan y - 2)dx + (x \sec^2 y + 1/y)dy = 0$,

$y(0) = 1$

27. შემდეგ განტოლებებში მოძებნეთ $M(x, y)$ ზოგადი სახით ისე, რომ განტოლებები გადაიქცეს განტოლებებად სრულ დიფერენციალებში:

ა) $M(x, y)dx + \left(\frac{1}{\cos^2 y} - \frac{x}{y} \right) dy = 0$;

ბ) $M(x, y)dx + (\sin x \cos y - xy - e^{-y}) dy = 0$.

28. შემდეგ განტოლებებში მოძებნეთ $N(x, y)$ ზოგადი სახით ისე, რომ განტოლებები გადაიქცეს განტოლებებად სრულ დიფერენციალებში:

ა) $(y \cos(xy) + e^x) dx + N(x, y) dy = 0$;

ბ) $(ye^{xy} - 4x^3 y + 2) dx + N(x, y) dy = 0$.

29. განიხილეთ განტოლება

$$(y^2 + 2xy)dx - x^2 dy = 0.$$

ა) აჩვენეთ, რომ განტოლება არ არის სრულ დიფერენციალებში;

ბ) აჩვენეთ, რომ განტოლების ორივე მხარის y^{-2} გამრავლებით გადამრავლების შედეგად მიღებული განტოლება იქნება სრულ დიფერენციალებში;

გ) გამოიყენეთ გადამრავლების შედეგად მიღებული განტოლების ამონახსნი მოცემული განტოლების ამონახსნის მისაღებად.

30. განიხილეთ განტოლება

$$(5x^2 y + 6x^3 y^2 + 4xy^2)dx + (2x^3 + 3x^4 y + 3x^2 y)dy = 0.$$

ა) აჩვენეთ, რომ განტოლება არ არის სრულ დიფერენციალებში;

ბ) განტოლების ორივე მხარე გადამრავლეთ $x^n y^m$ გამრავლებით და ისე განსაზღვრეთ n და m , რომ მიღებული განტოლება იყოს სრულ დიფერენციალებში;

გ) გამოიყენეთ გადამრავლების შედეგად მიღებული განტოლების ამონახსნი მოცემული განტოლების ამონახსნის მისაღებად.

8. მაინტეგრელი მამრავლი

თუ ავიღებთ პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას სტანდარტული სახით

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

და dx -ზე გადამრავლებით და ტოლობის ცალ მხარეს დალაგებით გადავწერთ მას დიფერენციალური ფორმით მივიღებთ

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0.$$

ეს განტოლება ნამდვილად არ არის სრულ დიფერენციალებში, მაგრამ მისი მაინტეგრებელ $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ მამრავლზე გადამრავლებით მივიღებთ განტოლებას

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx + \mu(x)dy = 0,$$

რომელიც იქნება განტოლება სრულ დიფერენციალებში. მართლაც, ამ შემთხვევაში $M(x, y) = \mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)$, ხოლო $N(x, y) = \mu(x)$ ამიტომ

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \mu(x)P(x) = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

ამ ფაქტს მივყავართ მაინტეგრებული მამრავლის ცნების განზოგადებამდე.

განმარტება 3. თუ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

არ არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაგრამ

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

განტოლება, რომელიც მიიღება (1) განტოლების $\mu(x, y)$ ფუნქციაზე გადამრავლებით, არის სრულ დიფერენციალებში, მაშინ $\mu(x, y)$ -ს ეწოდება (1) განტოლების მაინტეგრებული მამრავლი.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ $\mu(x, y) = xy^2$ არის

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0 \quad (3)$$

განტოლების მაინტეგრებული მამრავლი და მისი გამოყენებით ამოვხსნათ განტოლება.

ამოხსნა. ის, რომ მოცემული განტოლება არ არის სრულ დიფერენციალებში, ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ. გავავამრავლოთ (3) განტოლება $\mu(x, y) = xy^2$ მამრავლზე, მივიღებთ

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0. \quad (4)$$

ამ განტოლებისათვის $M = 2xy^3 - 6x^2y^2$, ხოლო $N = 3x^2y^2 - 4x^3y$. რადგან

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 - 12x^2y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

ამიტომ (4) განტოლება სრულ დიფერენციალებშია, აქედან გამომდინარე, $\mu(x, y) = xy^2$ ნამდვილად არის (3) განტოლების მაინტეგრირებადი მამრავლი.

ახლა ამოვხსნათ (4) განტოლება. $F(x, y)$ ფუნქციის მოსამებნად ვაინტეგრირებთ M ფუნქციას x ცვლადით

$$F(x, y) = \int (2xy^3 - 6x^2y^2)dx + g(y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + g(y).$$

გავაწარმოთ $F(x, y)$ ფუნქცია y ცვლადით და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

მივიღებთ

$$3x^2y^2 - 4x^3y + g'(y) = 3x^2y^2 - 4x^3y.$$

ამრიგად, $g'(y) = 0$ და შეგვიძლია ავიღოთ $g(y) \equiv 0$. აქედან გამომდინარე $F(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$ და შესაბამისად (4) განტოლების ამონახსნი არაცხადი სახით ასე ჩაიწერება $x^2y^3 - 2x^3y^2 = C$.

შევნიშნოთ, რომ მაინტეგრირებელ $\mu(x, y)$ მამრავლზე გადამრავლების შედეგად მიღებულმა განტოლებამ შეიძლება დაკარგოს ან შეიძინოს ამონახსნი ან კიდევ მოცემულ განტოლებას და მაინტეგრირებელ მამრავლზე გადამრავლების შედეგად მიღებულ განტოლებას ჰქონდეთ ერთი და იგივე ამონახსნი. ამ კონკრეტულ მაგალითში $y \equiv 0$ არის (4) განტოლების ამონახსნი, მაგრამ არ არის (3)-ის ამონახსნი. ეს გამოწვეულია იმით, რომ (3) განტოლების $\mu(x, y) = xy^2$ გადამრავლებით ფაქტორივად დავუშვით ტოლობის ორივე მხარის ისეთ მამრავლზე გადამრავლება, რომელიც შეიძლება ნული იყოს, თუ $y \equiv 0$.

ზოგადად აღვნიშნოთ, რომ მაინტეგრირებელ მამრავლზე გადამრავლების დროს უნდა შევამოწმოთ, არის თუ არა $\mu(x, y) = 0$ განტოლების ამონახსნი მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

როგორ მოვძებნოთ მაინტეგრირებადი მამრავლი? თუ $\mu(x, y)$ არის (1) განტოლების მაინტეგრირებადი მამრავლი, მაშინ (2) განტოლების მიხედვით ადგილი უნდა ჰქონდეს პირობას

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)N(x, y)].$$

ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mu. \quad (5)$$

(5) განტოლების ამოხსნა μ -ს მიმართ გაცილებით რთულია, ვიდრე მოცემული (1) განტოლება.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები, როცა შესაძლებელია მაინტეგრებელი მამრავლის მოძებნა:

1. ვთქვათ (1) განტოლებას გააჩნია მაინტეგრებელი მამრავლი, რომელიც მხოლოდ x ცვლადზეა დამოკიდებული ე.ი. $\mu = \mu(x)$. ამ შემთხვევაში (5) დაიყვანება განცალკევად ცვლადებიან განტოლებაზე

$$\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} \right) \mu, \quad (6)$$

სადაც $(\partial M / \partial y - \partial N / \partial x) / N$ სავარაუდოდ x ცვლადზეა დამოკიდებული.

2. ანალოგიურად, თუ (1) განტოლებას გააჩნია მაინტეგრებელი მამრავლი, რომელიც მხოლოდ y ცვლადზეა დამოკიდებული ე.ი. $\mu = \mu(y)$, ამ შემთხვევაში (5) დაიყვანება განცალკევად ცვლადებიან განტოლებაზე

$$\frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{\partial N / \partial x - \partial M / \partial y}{M} \right) \mu, \quad (7)$$

სადაც $(\partial N / \partial x - \partial M / \partial y) / M$ სავარაუდოდ y ცვლადზეა დამოკიდებული.

შეგვიძლია პირიქით დავსვათ ამოცანა. კერძოდ, თუ $(\partial M / \partial y - \partial N / \partial x) / N$ მხოლოდ x ცვლადზეა დამოკიდებული, მაშინ (6) განტოლების ამოხსნით მივიღებთ (1) განტოლების მაინტეგრებელ მამრავლს

$$\mu(x) = \exp \left[\int \left(\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} \right) dx \right].$$

ანალოგიურად, თუ $(\partial N / \partial x - \partial M / \partial y) / M$ მხოლოდ y ცვლადზეა დამოკიდებული, მაშინ (7) განტოლების ამოხსნით მივიღებთ (1) განტოლების მაინტეგრებელ მამრავლს

$$\mu(y) = \exp \left[\int \left(\frac{\partial N / \partial x - \partial M / \partial y}{M} \right) dy \right].$$

შეგვიძლია შევაჯამოთ ეს შედეგები თეორემის სახით.

თეორემა 3. თუ $(\partial M / \partial y - \partial N / \partial x) / N$ უწყვეტია და დამოკიდებულია მხოლოდ x ცვლადზე, მაშინ

$$\mu(x) = \exp \left[\int \left(\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} \right) dx \right] \quad (8)$$

არის (1) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი.

თუ $(\partial N / \partial x - \partial M / \partial y) / M$ $(\partial M / \partial y - \partial N / \partial x) / N$ უწყვეტია და დამოკიდებულია მხოლოდ y ცვლადზე, მაშინ

$$\mu(y) = \exp \left[\int \left(\frac{\partial N / \partial x - \partial M / \partial y}{M} \right) dy \right] \quad (9)$$

არის (1) განტოლების მაინტეგრებული მამრავლი.

თეორემა 3 გვთავაზობს შემდეგ სქემას.

მაინტეგრებული მამრავლის მოძებნის მეთოდი	
თუ $Mdx + Ndy = 0$ განტოლება არც განცალკეა და არც წრფივი, მაშინ გამოვთვალოთ $\partial M / \partial y$ და $\partial N / \partial x$. თუ $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$, მაშინ განტოლება სრულ დიფერენციალებშია. თუ არ არის სრულ დიფერენციალებში, განვიხილოთ შეფარდება	
$\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N}.$	(10)
თუ (10) იქნება მხოლოდ x ცვლადის ფუნქცია, მაშინ მაინტეგრებული მამრავლი მოიცემა (8) ფორმულით. თუ (10) არ არის მხოლოდ x ცვლადის ფუნქცია, მაშინ განვიხილოთ შეფარდება	
$\frac{\partial N / \partial x - \partial M / \partial y}{M}.$	(11)
თუ (11) იქნება მხოლოდ y ცვლადის ფუნქცია, მაშინ მაინტეგრებული მამრავლი მოიცემა (9) ფორმულით.	

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0. \quad (12)$$

ამოხსნა. უშუალო შემოწმებით დავადგენთ, რომ მოცემული განტოლება არც განცალკეა და არც წრფივი. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq (2xy - 1) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

რადგან (12) არ არის სრულ დიფერენციალებში, ამიტომ გამოვთვალოთ

$$\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{2(1 - xy)}{-x(1 - xy)} = \frac{-2}{x}.$$

მივიღეთ მხოლოდ x ცვლადის ფუნქცია, ამიტომ (12)-ის მაინტეგრებელ მამრავლს ექნება სახე

$$\mu(x) = \exp \left[\int \frac{-2}{x} dx \right] = x^{-2}.$$

თუ (12) ტოლობას გადავამრავლებთ $\mu = x^{-2}$ მამრავლზე, მაშინ მივიღებთ განტოლებას სრულ დიფერენციალებში

$$(2 + yx^{-2})dx + (y - x^{-1})dy = 0.$$

ამ განტოლების ამონახსნი არაცხადი სახით ასე ჩაიწერება

$$2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} = C. \quad (13)$$

შევნიშნოთ, რომ ამონახსნი $x \equiv 0$ დავკარგეთ $\mu = x^{-2}$ მამრავლზე გადამრავლების შედეგად. აქედან გამომდინარე (12) განტოლების ამონახსნია $x \equiv 0$ და (13).

არსებობს მრავალი დიფერენციალური განტოლება, რომელიც არ ექვემდებარება თეორემა 3-ს, მიუხედავად იმისა, რომ მათთვის არსებობს მაინტეგრებული მამრავლი. ძირითადი სირთულე მაინტეგრებული მამრავლის ცხადი სახით აგებაა, როცა იგი ზოგადად ორივე x და y ცვლადებზეა დამოკიდებული.

სავარჯიშო 7

დაადგინეთ განცალკევად ცვლადებიანია, წრფივია, თუ სრულ დიფერენციალებში შემდეგი განტოლებები ან რომელს გააჩნია მაინტეგრებული მამრავლი, რომელიც მართო x -ის ან y -ის ფუნქციაა.

1. $(2x + yx^{-1})dx + (xy - 1)dy = 0$
2. $(2y^3 + 2y^2)dx + (3y^2x + 2xy)dy = 0$
3. $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$
4. $(y^2 + 2xy)dx - x^2 dy = 0$
5. $(x^2 \sin x + 4y)dx + x dy = 0$
6. $(2y^2x - y)dx + x dy = 0$

ამოხსენით განტოლებები

7. $(2xy)dx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$
8. $(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$
9. $(x^4 - x + y)dx - x dy = 0$
10. $(2y^2 + 2y + 4x^2)dx + (2xy + x)dy = 0$
11. $(y^2 + 2xy)dx - x^2 dy = 0$
12. $(2xy^3 + 1)dx + (3x^2y^2 - y^{-1})dy = 0$

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების $x^n y^m$ სახის მაინტეგრებული მამრავლი და შემდეგ ამოხსენით განტოლებები

13. $(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy = 0$
14. $(12 + 5xy)dx + (6xy^{-1} + 3x^2)dy = 0$

9. ცვლადთა გარდაქმნა დიფერენციალურ განტოლებაში

როდესაც განტოლება $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ არ არის განცალკეულად ცვლადებიანი ან წრფივი განტოლება, ის შესაძლოა ისე გარდავქმნათ, რომ შევძლოთ მისი ამოხსნა. სწორედ ასე მოვიქცებით წინა პუნქტში, სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ მაინტეგრებული მამრავლი მოცემული განტოლების გარდაქმნის მიზნით, უფრო ზუსტად, სრულ დიფერენციალებში განტოლების მისაღებად.

ამჯერად შევისწავლით ოთხი ტიპის განტოლებას, რომლებიც შეიძლება გარდავქმნათ განცალკეულად ცვლადებიან ან წრფივ განტოლებად ცვლადების შესაბამისი გარდაქმნით.

ცვლადის გარდაქმნის ხერხები
1. დავადგინოთ განტოლების ტიპი და შევარჩიოთ შესაბამისი გარდაქმნა; 2. გადავწეროთ მოცემული განტოლება ახალ ცვლადებში; 3. ამოვხსნათ გარდაქმნით მიღებული განტოლება; 4. ამონახსნი გამოვსახოთ თავდაპირველ ცვლადებში.

ერთგვაროვანი განტოლება

განმარტება 4. თუ განტოლების

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

მარჯვენა მხარე შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც y/x შეფარდების ფუნქცია, მაშინ ვიტყვი, რომ (1) განტოლება არის ერთგვაროვანი.

მაგალითად, განტოლება

$$(x - y)dx + xdy = 0 \quad (2)$$

შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x} = \frac{y}{x} - 1.$$

რადგან $(y - x)/x$ წარმოვადგინეთ როგორც y/x შეფარდების ფუნქცია (ე.ი. $(y - x)/x = G(y/x)$), სადაც $G(v) = v - 1$), ამიტომ (2) იქნება ერთგვაროვანი განტოლება.

განტოლება

$$(x - 2y + 1)dx + (x - y)dy = 0 \quad (3)$$

შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y+1}{y-x} = \frac{1-2(y/x)+(1/x)}{(y/x)-1}.$$

აქ მარჯვენა მხარე არ წარმოიდგინა როგორც y/x შეფარდების ფუნქცია, რადგან მრიცხველში გვაქვს $1/x$ სახის წევრი. აქედან გამომდინარე, (3) არ არის ერთგვაროვანი განტოლება.

ერთი წესი, რომლითაც შეგვიძლია შევამოწმოთ, არის თუ არა (1) განტოლება ერთგვაროვანი, შემდეგში მდგომარეობს. ჩავსვათ (1) განტოლების მარჯვენა მხარეში x -ის ნაცვლად tx , ხოლო y -ის ნაცვლად ty და თუ ადგილი ექნება ტოლობას

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

ნებისმიერი $t \neq 0$ -თვის, მაშინ (1) განტოლება იქნება ერთგვაროვანი.

ერთგვაროვანი განტოლების ამოსახსნელად მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$v = \frac{y}{x}.$$

ამ გარდაქმნით მოცემული ერთგვაროვანი განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{dy}{dx} = G(v) \quad (4)$$

და დაგვრჩა გამოვსახოთ dy/dx ახალი v ცვლადით და x -ით. რადგან $v = y/x$, მაშინ $y = vx$. დავიმახსოვროთ, რომ v და y ორივე x ცვლადის ფუნქციებია. ნამრავლის წარმოებულის ფორმულის გამოყენებით $y = vx$ ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}.$$

ამ მნიშვნელობის (4) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$v + x \frac{dv}{dx} = G(v). \quad (5)$$

(5) განტოლება არის განცალკევად ცვლადებიანი, რომლის ამოხსნით მივიღებთ ამონახსნს არაცხადი სახით

$$\int \frac{dv}{G(v)-v} = \int \frac{dx}{x}.$$

ინტეგრების შემდეგ ამონახსნი უნდა გამოვსახოთ თავდაპირველ ცვლადებში ანუ x და y ცვლადებში.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$(xy + y^2 + x^2)dx - x^2dy = 0. \quad (6)$$

ამოხსნა. შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ განტოლება არ არის განცალკევად ცვლადებიანი, არც წრფივია და არც სრულ დიფერენციალებში. თუ (6)-დან განვსაზღვრავთ წარმოებულს, გვექნება

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1. \quad (7)$$

ვხედავთ, რომ (7) განტოლების მარჯვენა მხარე არის y/x შეფარდების ფუნქცია. ამიტომ (6) არის ერთვაროვანი განტოლება.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $v = y/x$ და გავიხსენოთ, რომ $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$. მაშინ (7) მიიღებს სახეს

$$v + x \frac{dv}{dx} = v + v^2 + 1.$$

მიღებული განტოლება განცალკევად ცვლადებიანია, ამიტომ ცვლადთა განცალკევებით და ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int \frac{dv}{v^2 + 1} = \int \frac{dx}{x}, \quad \arctg v = \ln|x| + C.$$

აქედან გამომდინარე, $v = \operatorname{tg}(\ln|x| + C)$. თუ დავუბრუნდებით თავდაპირველ ცვლადებს, მივიღებთ (6) განტოლების ამონახსნს არაცხადი სახით $y = x \operatorname{tg}(\ln|x| + C)$.

$dy/dx = G(ax + by)$ სახის დიფერენციალური განტოლება

როცა $dy/dx = f(x, y)$ სახის განტოლების მარჯვენა მხარე შეიძლება წარმოვადგინოთ წრფივი $ax + by$ კომბინაციის ფუნქციის სახით, სადაც a და b მუდმივებია ანუ

$$\frac{dy}{dx} = G(ax + by),$$

მაშინ $z = ax + by$ ჩასმით მოცემული განტოლება გარდაიქმნება განცალკევად ცვლადებიან განტოლებად. ამის ილუსტრირება მოვახდინოთ შემდეგ მაგალითზე.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1}. \quad (8)$$

ამოხსნა. მარჯვენა მხარე შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც $x - y$ სხვაობის ფუნქცია ანუ

$$y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1} = -(x - y) - 1 + [(x - y) + 2]^{-1}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $z = x - y$, მაშინ $dz/dx = 1 - dy/dx$ და (8) განტოლება მიიღებს სახეს

$$1 - \frac{dz}{dx} = -z - 1 + (z + 2)^{-1}$$

ანუ

$$\frac{dz}{dx} = (z+2) - (z+2)^{-1}.$$

ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$$\int \frac{z+2}{(z+2)^2-1} dz = \int dx,$$
$$\frac{1}{2} \ln |(z+2)^2-1| = x + C_1.$$

აქედან გვექნება $(z+2)^2 = Ce^{2x} + 1$. თუ დავუბრუნდებით ძველ ცვლადებს, საბოლოოდ მივიღებთ (8) განტოლების ამონახსნს არაცხადი სახით $(x-y+2)^2 = Ce^{2x} + 1$.

ბერნულის განტოლება

განმარტება 5. პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (9)$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია (a,b) ინტერვალში და n ნამდვილი რიცხვია, ეწოდება ბერნულის განტოლებას.

შევნიშნოთ, რომ როცა $n=0$ ან 1 , მაშინ (9) განტოლება კვლავ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება იქნება, რომელიც ადრე შევისწავლეთ. n -ის სხვა მნიშვნელობებისათვის ვიყენებთ ჩასმას

$$v = y^{1-n},$$

რომელიც ბერნულის განტოლებას გარდაქმნის წრფივ განტოლებად. მართლაც, თუ (9)-ის ორივე მხარეს გავყოფთ y^n -ზე მივიღებთ

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \quad (10)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $v = y^{1-n}$, მაშინ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

და (10) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{(1-n)} \frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x).$$

რადგან $1/(1-n)$ მუდმივია, ამიტომ წინამდებარე განტოლება მართლაც წრფივია.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3. \quad (11)$$

ამოხსნა. ეს არის ბერნულის განტოლება, როცა $n=3$, $P(x)=-5$ და $Q(x)=-5x/2$.
ორივე მხარის y^3 -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x.$$

ვისარგებლოთ ჩასმით $v = y^{-2}$. რადგან $dv/dx = -2y^{-3}dy/dx$, ამიტომ

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} - 5v &= -\frac{5}{2}x, \\ \frac{dv}{dx} + 10v &= 5x. \end{aligned} \quad (12)$$

(12) განტოლება წრფივია და თუ გამოვიყენებთ მისი ამოხსნის მეთოდს, მივიღებთ

$$v = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}.$$

თუ ჩავსვავთ $v = y^{-2}$ მივიღებთ მოცემული განტოლების ამონახსნს

$$y^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}.$$

ეს ამონახსნი არ შეიცავს $y \equiv 0$ ამონახსნს, რომელიც დაიკარგა (11) განტოლების y^3 -ზე გაყოფის შედეგად.

განტოლება წრფივი კოეფიციენტებით

ჩვენ გამოვიყენეთ სხვადასხვა ჩასმები y -ის ნაცვლად, რათა გარდავექმნათ მოცემული განტოლება ახალ განტოლებად, რომლის ამოხსნაც შეგვიძლია. ზოგიერთ შემთხვევაში გვიწევს ორივე x და y ცვლადების შეცვლა ახალი, ვთქვათ u და v ცვლადებით. ასეთ სიტუაციასთან გვაქვს საქმე, როცა ვიხილავთ **დიფერენციალურ განტოლებას წრფივი კოეფიციენტებით** ანუ შემდეგი სახის განტოლებას

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0, \quad (13)$$

სადაც a_i , b_i და c_i მოცემული მუდმივებია. თუ $a_1b_2 = a_2b_1$, მაშინ შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (13) განტოლება დაიყვანება $dy/dx = G(ax+by)$ განტოლებაზე, რომელიც იხსნება $z = ax + by$ ჩასმით (თავად დარწმუნდით ამ ფაქტის სისწორეში).

ვიდრე ზოგად შემთხვევას ($a_1b_2 \neq a_2b_1$) განვიხილავდეთ დავუშვათ, რომ $c_1 = c_2 = 0$. მაშინ (13) განტოლება მიიღებს სახეს

$$(a_1x + b_1y)dx + (a_2x + b_2y)dy = 0,$$

რომელიც შემდეგი სახით შეგვიძლია გადავწეროთ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y} = -\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}.$$

ეს უკანასკნელი ერთგვაროვანი განტოლებაა და იგი შეგვიძლია ამოვხსნათ ზემოთ განხილული მეთოდით.

ვთქვათ, $a_1b_2 \neq a_2b_1$. მოვახდინოთ საკოორდინატო სისტემის გარდაქმნა (გადატანა)

$$\begin{cases} x = u + h, \\ y = v + k, \end{cases}$$

და h და k მუდმივები შევარჩიოთ პირობით

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

ამ სისტემას ცხადია გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რადგან ჩვენი დაშვებით $a_1b_2 \neq a_2b_1$. ახლა ვთქვათ (h, k) წარმოადგენს (14) სისტემის ამონახსნს, მაშინ ასეთი ცვლადთა გარდაქმნით მოცემული დიფერენციალური განტოლება გადაიქცევა ერთგვაროვან განტოლებად

$$\frac{dv}{du} = -\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v} = -\frac{a_1 + b_1 \frac{v}{u}}{a_2 + b_2 \frac{v}{u}}, \quad (15)$$

რომელიც ვიცით, როგორ იხსნება.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება

$$(-3x + y + 6)dx + (x + y + 2)dy = 0. \quad (16)$$

ამოხსნა. რადგან $a_1b_2 = (-3)(1) \neq (1)(1) = a_2b_1$, ამიტომ ვისარგებლებთ გარდაქმნით $x = u + h$ და $y = v + k$, სადაც h და k აკმაყოფილებენ სისტემას

$$\begin{cases} -3h + k + 6 = 0, \\ h + k + 2 = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ $h = 1$ და $k = -3$. აქედან გამომდინარე, ავიღებთ $x = u + 1$ და $y = v - 3$. რადგან $dy = dv$ და $dx = du$, ამიტომ (16) განტოლება ასე გადაიწერება

$$(-3u + v)du + (u + v)dv = 0,$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{3 - \frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}}.$$

უკანასკნელი განტოლება ერთგვაროვანია, ამიტომ, თუ აღვნიშნავთ $z = v/u$, მაშინ

$$\frac{dv}{du} = z + u \frac{dz}{du}$$

და მივიღებთ

$$z + u \frac{dz}{du} = \frac{3-z}{1+z}.$$

ცვლადების განცალგებით მივიღებთ

$$\int \frac{z+1}{z^2+2z-3} dz = -\int \frac{1}{u} du,$$

$$\frac{1}{2} \ln|z^2+2z-3| = -\ln|u| + C_1,$$

საიდანაც $z^2+2z-3 = Cu^{-2}$. დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადებს

$$(v/u)^2 + 2(v/u) - 3 = Cu^{-2},$$

$$v^2 + 2uv - 3u^2 = C,$$

$$(y+3)^2 + 2(x-1)(y+3) - 3(x-1)^2 = C.$$

უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს (16) განტოლების ამონახსნს არაცხადი სახით.

სავარჯიშო 8

დაადგინეთ მხოლოდ (არ ამოხსნათ) ერთგვაროვანია, ბერნულის, ჭრფივი კოეფიციენტებით თუ $y' = G(ax+by)$ სახის შემდეგი განტოლებები

1. $2tx \, dx + (t^2 - x^2) \, dt = 0$

2. $(y - 4x - 1)^2 \, dx - dy = 0$

3. $dy/dx + y/x = x^3 y^2$

4. $(t + x + 2) \, dx + (3t - x - 6) \, dt = 0$

5. $\theta \, dy - y \, d\theta = \sqrt{\theta y} \, d\theta$

6. $(ye^{-2x} + y^3) \, dx - e^{-2x} \, dy = 0$

7. $\cos(x+y) \, dy = \sin(x+y) \, dx$

8. $(y^3 - \theta y^2) \, d\theta + 2\theta^2 y \, dy = 0$

ამოხსენით ერთგვაროვანი განტოლებები

$$9. (xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$$

$$10. (3x^2 - y^2)dx + (xy - x^3y^{-1})dy = 0$$

$$11. (y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$$

$$12. (x^2 + y^2)dx + 2xy dy = 0$$

$$13. \frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + t\sqrt{t^2 + x^2}}{tx}$$

$$14. \frac{dy}{d\theta} = \frac{\theta \sec(y/\theta) + y}{\theta}$$

$$15. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{3xy} \quad 16. \frac{dy}{dx} = \frac{y(\ln y - \ln x + 1)}{x}$$

გამოიყენეთ $y' = G(ax + by)$ განტოლების ამოხსნის მეთოდი შემდეგი განტოლებების ამოსახსნელად

$$17. dy/dx = \sqrt{x + y} - 1 \quad 18. dy/dx = (x + y + 2)^2$$

$$19. dy/dx = (x - y + 5)^2 \quad 20. dy/dx = \sin(x - y)$$

გამოიყენეთ ბერნულის განტოლების ამოხსნის მეთოდი შემდეგი განტოლებების ამოსახსნელად

$$21. \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2y^2$$

$$22. \frac{dy}{dx} - y = e^{2x}y^3$$

$$23. \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} - x^2y^2$$

$$24. \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x-2} = 5(x-2)y^{1/2}$$

$$25. \frac{dx}{dt} + tx^3 + \frac{x}{t} = 0 \quad 26. \frac{dy}{dx} + y = e^xy^{-2}$$

$$27. \frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r\theta}{\theta^2} \quad 28. \frac{dy}{dx} + y^3x + y = 0$$

ამოხსენით განტოლებები წრფივი კოეფიციენტებით

$$29. (-3x + y - 1)dx + (x + y + 3)dy = 0$$

$$30. (x + y - 1)dx + (y - x - 5)dy = 0$$

$$31. (2x - y)dx + (4x + y - 3)dy = 0$$

$$32. (2x + y + 4)dx + (x - 2y - 2)dy = 0$$

33. $y = vx^2$ ჩასმის გამოყენებით ამოხსენით განტოლება $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \cos(y/x^2)$.

ამოხსენით განტოლებები, რომლებიც მოცემულია სავარჯიშო 8-ის 1-8 მაგალითებში.

ამოხსენით განტოლებები

34. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{y-1}$

35. $(x^2 - 2y^{-3})dy + (2xy - 3x^2)dx = 0$

36. $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = x^2 - 4x + 3$

37. $[\sin(xy) + xy \cos(xy)]dx + [1 + x^2 \cos(xy)]dy = 0$

38. $2xy^3 dx - (1 - x^2)dy = 0$

39. $t^3 y^2 dt + t^4 y^{-6} dy = 0$

40. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2x^2 y^2$

41. $(x^2 + y^2)dx + 3xy dy = 0$

42. $[1 + (1 + x^2 + 2xy + y^2)^{-1}]dx + [y^{-1/2} + (1 + x^2 + 2xy + y^2)^{-1}]dy = 0$

43. $\frac{dx}{dt} = 1 + \cos^2(t - x)$

44. $(y^3 + 4e^x y)dx + (2e^x + 3y^2)dy = 0$

45. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 \sin 2x$

46. $\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t-1} = t^2 + 2$

47. $\frac{dy}{dx} = 2 - \sqrt{2x - y + 3}$

48. $\frac{dy}{dx} + y \tan x + \sin x = 0$

49. $\frac{dy}{d\theta} + 2y = y^2$

50. $\frac{dy}{dx} = (2x + y - 1)^2$
51. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy dy = 0$
52. $\frac{dy}{d\theta} + \frac{y}{\theta} = -4\theta y^{-2}$
53. $(y - 2x - 1)dx + (x + y - 4)dy = 0$
54. $(2x - 2y - 8)dx + (x - 3y - 6)dy = 0$
55. $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$
56. $(\sqrt{y/x} + \cos x)dx + (\sqrt{x/y} + \sin y)dy = 0$
57. $y(x - y - 2)dx + x(y - x + 4)dy = 0$
58. $\frac{dy}{dx} + xy = 0$
59. $(3x - y - 5)dx + (x - y + 1)dy = 0$
60. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 1}{x + y + 5}$
61. $(4xy^3 - 9y^2 + 4xy^2)dx + (3x^2y^2 - 6xy + 2x^2y)dy = 0$
62. $\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2 - (x + y - 1)^2$

ამოხსენით ამოცანა საწყისი პირობით

63. $(x^3 - y) dx + x dy = 0$, $y(1) = 3$
64. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$, $y(1) = -4$
65. $(t + x + 3)dt + dx = 0$, $x(0) = 1$
66. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2 \cos x$, $y(\pi) = 2$
67. $(2y^2 + 4x^2)dx - xy dy = 0$, $y(1) = -2$
68. $[2 \cos(2x + y) - x^2]dx + [\cos(2x + y) + e^y]dy = 0$, $y(1) = 0$
69. $(2x - y)dx + (x + y - 3)dy = 0$, $y(0) = 2$
70. $\sqrt{y} dx + (x^2 + 4)dy = 0$, $y(0) = 4$
71. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^{-1}y^{-1}$, $y(1) = 3$
72. $\frac{dy}{dx} - 4y = 2xy^2$, $y(0) = -4$

10. მათემატიკური მოდელირება

თანამედროვე ეტაპზე, ბუნების შემდგომი შემეცნებისათვის მეცნიერის კვლევა, ინჟინრების მიერ ტექნიკური პრობლემების გადაწყვეტის გზების პრაგმატული ძიება და რეალური სამყაროს პრობლემების მათემატიკურ ტერმინებში აღწერის ტექნიკა ფასდაუდებელ ინსტრუმენტად იქცა. მათემატიკური ენის გამოყენებით რეალობის იმიტაციის პროცესს *მათემატიკურ მოდელირებას უწოდებენ*.

პრობლემის მათემატიკურ ტერმინებში ფორმულირება სასარგებლოა რამდენიმე თვალსაზრისით. რეალური სამყაროს პრობლემები ხშირად კომპლექსურია და შეიცავს რამდენიმე განსხვავებულ და შესაძლებელია ურთიერთდაკავშირებულ პროცესებსაც. ვიდრე მათემატიკურ მსჯელობას გავაგრძელებდეთ, უნდა განვსაზღვროთ, რომელი ცვლადებია მნიშვნელოვანი და რომელი ცვლადები შეიძლება არ გავითვალისწინოთ. ხშირად, ზოგიერთი ცვლადებისათვის ურთიერთკავშირი კანონის სახით არის ჩამოყალიბებული, ან ფორმულითაა განსაზღვრული, ან თეორიულადაა აღწერილი. ასეთი დაშვებები შეადგენენ მოდელის *იდეალიზაციას*.

მათემატიკა გამოირჩევა თეორიული დებულებებისა და პრაქტიკული აპარატის მდიდარი რესურსებით, რაც მეტად მნიშვნელოვანია მათემატიკური გარდაქმნების ჩასატარებლად და შესაბამისი ლოგიკური დასკვნების გასაკეთებლად. ეს უზრუნველყოფს, ჩატარდეს გამოსაკვლევი პრობლემის ანალიზი უცნობი მოსალოდნელი შედეგების შესახებ რაიმე წინასწარი ინფორმაციის გარეშე. ძალიან მნიშვნელოვანია აგრეთვე ის, რომ მათემატიკა უზრუნველყოფს რიცხვითი შედეგების მიღებას კომპიუტერის გამოყენებით.

ეფექტური მათემატიკური მოდელის აგების პროცესი მოითხოვს შესაბამის უნარჩვევებს, აბსტრაქტული წარმოსახვისა და ობიექტური შეფასების უნარს. რა თქმა უნდა, რამდენიმე არსებული მოდელების გამოყენება, რომლებიც მოდელირების სხვადასხვა ასპექტებს ასახავს, გვეხმარება პროცესის უკეთ შეცნობაში. არსებობს ჩინებული წიგნები და სტატიები, რომლებიც ექსკლუზიურად ამ თემას ეძღვნება. ამ პუნქტში ჩვენ ყურადღებას გავამახვილებთ მოდელების მაგალითებზე, რომლებიც მოიცავენ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს. ამ საკითხის შესწავლისას და მოდელის აგებისას სასარგებლოა პროცესის წარმართვის შემდეგი სქემა:

ამოცანის ფორმულირება

ამოცანა უნდა დავსვათ ისეთი სახით, რომ შესაძლებელი იყოს „პასუხის“ გაცემა მათემატიკურად. ეს ბუნებრივად მოითხოვს იმ დარგის გაცნობიერებას, რომელშიც ეს ამოცანა დაისვა და ასევე შესაბამისი მათემატიკური აპარატის ცოდნას. ამ ეტაპზე შეიძლება დაგვჭირდეს ამ დარგის სათანადო ლიტერატურის გაცნობა ან ექსპერტთან გასაუბრება.

მოდელის განვითარება

აქ უნდა გაკეთდეს ორი რამ:

პირველი, უნდა გადავწყვიტოთ რომელი ცვლადები არიან მნიშვნელოვანი და რომელი არამნიშვნელოვანი. არამნიშვნელოვანია ცვლადები, რომლებიც პროცესზე მცირე გავლენას ან არავითარ ეფექტს არ ახდენენ. მაგალითად, სხეულის ვარდნის ამოცანის შესწავლისას, სხეულის ფერს ნაკლები მნიშვნელობა აქვს. მნიშვნელოვანი ცვლადები იყოფიან დამოუკიდებელ ცვლადებად და დამოკიდებულ ცვლადებად. დამოუკიდებელი ცვლადები არიან სიდიდეები, რომელთა ეფექტი პროცესზე მნიშვნელოვანია და გამოდგება როგორც მოდელის მონაცემი. სხეულის ვარდნის ამოცანაში, მისი ფორმა, მასა, საწყისი მდებარეობა, საწყისი სიჩქარე და დრო შესაძლებელია იყვნენ დამოუკიდებელი ცვლადები. დამოკიდებული ცვლადები არიან ისინი, რომლებიც იმყოფებიან დამოუკიდებელი ცვლადების გავლენის ქვეშ და რომლებიც მნიშვნელოვანია ამოცანის გადაწყვეტის დროს. სხეულის ვარდნის ამოცანაში, სიჩქარე, მდებარეობა და ზემოქმედების დრო, ყველა შესაძლო დამოკიდებული ცვლადებია.

მეორე, უნდა განვსაზღვროთ ან დავადგინოთ დამოკიდებულებები (მაგალითად, დიფერენციალური განტოლება), რომლებიც არსებობს შესაბამის ცვლადებს შორის. ეს მოითხოვს დარგის კარგ ცოდნას და პრობლემის არსში წვდომას. მოდელირება ჩვეუნიანად შეიძლება დავიწყოთ არასრული მოდელის აგებით და შემდეგ მასზე დაყრდნობით დავხვეწოთ იგი საჭიროების შესაბამისად. მაგალითად, სხეულის ვარდნის ამოცანაში მოდელის აგება შეიძლება დავიწყოთ სხეულზე მოქმედი ხახუნის ძალის უგულებელყოფით. შემდეგ კი, თუ აუცილებელი იქნება უფრო ადეკვატური პასუხის მიღება, მხედველობაში მივიღოთ ხახუნის ძალა, რომელიც გავლენას ახდენს სხეულის მოძრაობაზე.

მოდელის შემოწმება

ვიდრე დავადგენდეთ მოდელის „სისწორეს“, მისი საშუალებით მიღებული შედეგების ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შედარებით, უნდა განვიხილოთ შემდეგი საკითხები:

- I. არგუმენტირებულია თუ არა დაშვებები?
- II. არის თუ არა განტოლებებში მონაწილე სიდიდეები განზომილებებით თავსებადი? (მაგალითად, არ შეიძლება ძალის ერთეულს მივუმატოთ სიჩქარის ერთეული).
- III. არის თუ არა მოდელი შინაგანად თავსებადი იმ აზრით, რომ მოდელში არსებული განტოლებები არ არიან წინააღმდეგობაში ერთმანეთთან?
- IV. აქვთ თუ არა ამონახსნები განტოლებებს?
- V. ერთადერთია თუ არა ამონახსნი?
- VI. რამდენად რთულია განტოლების ამოხსნა?
- VII. შესაბამისობაშია თუ არა განტოლების ამონახსნი შესასწავლი ამოცანის პასუხთან?

როცა ეს შესაძლებელია, მოდელის მართებულობა უნდა შევამოწმოთ მოდელის საშუალებით მიღებული სავარაუდო პასუხებისა და ექსპერიმენტით დადგენილი მონაცემების შედარებით. შედარებას ვიწყებთ მარტივი პროგნოზების შემოწმებით, რომლებიც საჭიროებენ მცირე გამოთვლებს ან ანალიზს. შემდეგ, როცა მოდელი დაზუსტდება შემოწმებით, დავრწმუნდეთ, რომ მოდელის სავარაუდო პასუხის სიზუსტე თანხვედრაშია ჩვენ დაშვებებთან. ზოგიერთ შემთხვევაში მოდელის მართებულობის შემოწმება შეუძლებელია ან არაგონივრულია სოციალური, პოლიტიკური, ეკონომიკური ან მორალური თვალსაზრისით. მაგალითად, როგორ შევამოწმოთ მოდელის სისწორე, რომელიც წინასწარმეტყველებს, თუ როდის „ჩაქრება“ მზე?

მათემატიკური მოდელი ყოველთვის გამოიყენება პროცესის სავარაუდო შედეგების დასადგენად და, აქედან გამომდინარე, იგი წარმოადგენს ტესტს მოდელის ადექვატურობის დასადგენად. კონკრეტული მოდელის საშუალებით მიღებული შედეგები უზრუნველყოფს მოდელის შემოწმებას, რომელმაც შეიძლება მიგვიყვანოს მოდელის შემდგომი დაზუსტების ან გამარტივების აუცილებლობამდე. შესასწავლი პრობლემის შინაარსისა და მიზნების გათვალისწინებით, ხშირ შემთხვევაში ირჩევენ გამარტივებულ მოდელს, რაც გვადლევს სწრაფ პასუხს, რომლის მიღებაც არაა

დაკავშირებული დიდ ფინანსურ დანახარჯებთან. თუმცა რასაკვირველია გასათვალისწინებელია, რომ საკმარისი სიზუსტე ყოველთვის უნდა იყოს დაცული.

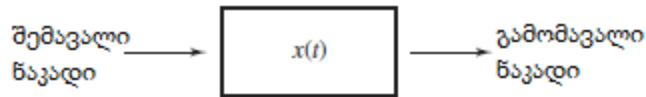
ერთი რამ ყოველთვის უნდა გვახსოვდეს, რომ მოდელი არ არის რეალობა, ის არის მხოლოდ რეალობის ასახვა. ცხადია, რომ დაზუსტებული მოდელი უზრუნველყოფს ბუნებაში მიმდინარე პროცესების უკეთ გაცნობიერებას. აქედან გამომდინარე, გამოყენებითი მათემატიკის სპეციალისტები ყოველთვის ცდილობენ ააგონ უკეთესი, უფრო დაზუსტებული მოდელი. მოდელის რეალურობა გამოიხატება მის შესაძლებლობაში, მოძებნოს დასმული ამოცანის შესატყვისი პასუხი.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ სხვადასხვა მოდელს, რომლებიც შეიცავენ დიფერენციალურ განტოლებებს. მომდევნო პარაგრაფში, რომელსაც ეწოდება „სექციური (ბლოკური) ანალიზი“, ჩვენ შევისწავლით სითხეთა შერევის ამოცანებს და პოპულაციის მოდელებს. ასევე შევისწავლით ისეთ ფიზიკურ მოდელებს როგორიცაა: გათბობა-გაგრილების, ნიუტონის მექანიკის და ელექტრული წრედის მოდელები. დაბოლოს, განვიხილავთ რამდენიმე რიცხვით მეთოდს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის ამოცანის ამოსახსნელად საწყისი პირობით. ეს მეთოდი გვაძლევს შესაძლებლობას განვიხილოთ უფრო რეალური მოდელები, რომლებიც არ შეგვეძლია ამოვხსნათ ჩვენს მიერ ადრე განხილული მეთოდებით.

11. სექციური (ბლოკური) ანალიზი

მათემატიკური მოდელირების დროს მრავალი რთული პროცესი შეიძლება დავყოთ განსხვავებულ ეტაპებად და პროცესის მთლიანი მოდელი ავაგოთ სხვადასხვა ეტაპებს შორის ურთიერთქმედების აღწერით. ასეთ სისტემებს უწოდებენ **სექციურ (ბლოკურ) სისტემას** და გრაფიკულად გამოისახება **ბლოკ დიაგრამით**. ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით ასეთი სისტემების ძირითად ერთეულს, ერთ სექციას (ბლოკს) და გავაანალიზებთ რამდენიმე მარტივ პროცესს, რომელსაც შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ასეთ მოდელში.

ძირითადი, რასაც ერთ სექციანი სისტემა შეიცავს არის $x(t)$ ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს სექციაში არსებული ნივთიერების რაოდენობას დროის t მომენტისათვის, როდესაც შემავალი ნაკადით ნივთიერების გარკვეული რაოდენობა შედის სექციაში და გამომავალი ნაკადით გარკვეული რაოდენობა ტოვებს სექციას (ნახ. 20).



ნახაზი 20. ერთ სექციანი სისტემის სქემატური წარმოდგენა.

რადგან $x(t)$ ფუნქციის წარმოებული t ცვლადით შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნეს როგორც სექციაში არსებული ნივთიერების რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე დროში, ამიტომ ერთ სექციანი სისტემისათვის გვექნება

$$\frac{dx}{dt} = \text{შემავალ ოდენობას} - \text{გამომავალი ოდენობა.} \quad (1)$$

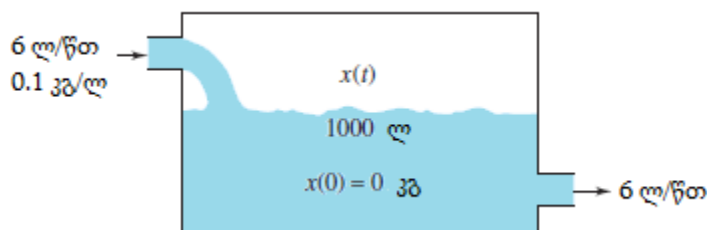
შერევის ამოცანები

ერთ სექციანი სისტემის გამოყენების კონკრეტული მაგალითია ავზში სითხეების შერევის ამოცანა. ვთქვათ, $x(t)$ წარმოადგენს ავზში (სექციაში) რაიმე ნივთიერების ოდენობას დროის t მომენტისათვის. სექციური ანალიზის მოდელის გამოსაყენებლად ჩვენ უნდა შეგვეძლოს განვსაზღვროთ ავზში შემავალი და გამომავალი ნივთიერების რაოდენობა. შერევის ამოცანებში ხშირად მოცემულია ნაკადის სიჩქარე, რომლითაც ნივთიერების შემცველი სითხე მიეწოდება ავზს და მასთან ერთად ცნობილია ნივთიერების კონცენტრაცია ამ სითხეში. აქედან გამომდინარე, ნაკადის სიჩქარის (მოცულობა/დრო) გადამრავლება კონცენტრაციაზე (რაოდენობა/მოცულობა) გვაძლევს სითხის ავზში მიწოდების სიჩქარეს (რაოდენობა/დრო).

ავზიდან გამომავალი ნივთიერების რაოდენობის განსაზღვრა ზოგადად უფრო ძნელია. თუ მოცემულია ავზში არსებული სითხეების ნარევის ავზიდან გამომავალი რაოდენობა, მაშინ როგორ განვსაზღვროთ ნივთიერების კონცენტრაცია ამ ნარევაში? სიმარტივისათვის ჩვენ ვუშვებთ, რომ ნარევაში კონცენტრაციის ერთგვაროვნების პირობა დაცულია. მაშინ ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ნარევაში ნივთიერების კონცენტრაცია $x(t)$ სიდიდის გაყოფით ავზში დროის t მომენტისათვის არსებული ნარევის მოცულობაზე. ამ კონცენტრაციის გადამრავლებით ავზიდან გამომავალი ნარევის ნაკადის სიჩქარეზე, მივიღებთ სასურველი ნივთიერების გამომავალ რაოდენობას. განვიხილოთ ამ მოდელის რაელიზება კონკრეტულ ამოცანებში.

მაგალითი 1. ვთქვათ, საკმარისად დიდ ავზში ასხია 1000 ლ სუფთა წყალი და მარილხსნარის ნაკადი მუდმივი 6 ლ/წთ სიჩქარით იწყებს მასში შერევას. ხსნარი ავზის შიგნით კარგად ირევა და ნარევის ნაკადი გამოედინება ავზიდან გარეთ 6

ლ/წთ სიჩქარით. განსაზღვრეთ, როდის მიაღწევს ავზში მარილის კონცენტრაცია 0.05 კგ/ლ, თუ ავზში შემავალ მარილხსნარში მარილის კონცენტრაცია არის 0.1 კგ/ლ (ნახ. 21)



ნახაზი 21. შერევის ამოცანა ტოლი ნაკადებით.

ამოხსნა. ჩვენ შეგვიძლია ავზი განვიხილოთ როგორც სექცია, რომელიც შეიცავს მარილს. თუ $x(t)$ ფუნქციით აღვნიშნავთ მარილის მასას ავზში დროის t მომენტისათვის, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ მარილის კონცენტრაცია $x(t)$ სიდიდის გაყოფით t მომენტისათვის ავზში არსებულ სითხის მოცულობაზე. ჩვენ გამოვიყენოთ (1) განტოლებით აღწერილი მათემატიკურ მოდელი, რომლის ამოხსნითაც მოვძებნით $x(t)$ ფუნქციას. ამისათვის, პირველ რიგში ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ ავზში შემავალი მარილის რაოდენობა დროის ერთეულში. მოცემულია, რომ მარილხსნარის ნაკადის ავზში მიწოდების სიჩქარეა 6 ლ/წთ. რადგან კონცენტრაციაა 0.1 კგ/ლ, ამიტომ დავასკვნით, რომ ავზში შემავალი მარილის რაოდენობა დროის ერთეულში ტოლია

$$(6 \text{ ლ/წთ})(0.1 \text{ კგ/ლ}) = 0.6 \text{ კგ/წთ}. \quad (2)$$

ახლა ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ დროის ერთეულში ავზიდან გამომავალი მარილის რაოდენობა. ავზში მარილხსნარი კარგად არის შერეული, ამიტომ უნდა დავუშვათ, რომ მარილის კონცენტრაცია ავზში ერთგვაროვანია ე.ი. დროის t მომენტისათვის ავზის ნებისმიერ ნაწილში მარილის კონცენტრაცია ერთი და იგივეა და უდრის $x(t)$ გაყოფილი ავზში არსებული სითხის მოცულობაზე. რადგან საწყის მომენტში ავზი შეიცავდა 1000 ლ სითხეს და ავზში შემავალი და გამავალი ნაკადების რაოდენობები ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ ავზში ნარევის მოცულობა მუდმივად იქნება 1000 ლ-ის ტოლი. აქედან გამომდინარე, დროის ერთეულში ავზიდან გამომავალ ნაკადში მარილის რაოდენობა იქნება

$$(6 \text{ ლ/წთ}) \left[\frac{x(t)}{1000} \text{ კგ/ლ} \right] = \frac{3x(t)}{500} \text{ კგ/წთ} \quad (3)$$

ავზი საწყის მომენტში შეიცავდა სუფთა წყალს, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $x(0) = 0$. თუ (1) განტოლებაში ჩავსვავთ (2) და (3) გამოსახულებებს, მივიღებთ ამოცანას საწყისი პირობით

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0.6 - \frac{3x(t)}{500}, \quad x(0) = 0, \quad (4)$$

რომელიც წარმოადგენს შერევის ამოცანის მათემატიკურ მოდელს.

(4) თანაფარდობაში წარმოადგენილი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა ძალიან მარტივია. იგი არის წრფივი განცალკევად ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება. საწყის პირობიანი (4) ამოცანის ამონახსნი ასე წარმოდგინება (შეამოწმეთ!)

$$x(t) = 100(1 - e^{-3t/500}) . \quad (5)$$

ამრიგად, მარილის კონცენტრაცია ავზში დროის t მომენტისათვის იქნება

$$\frac{x(t)}{1000} = 0.1(1 - e^{-3t/500}) \text{ კგ/ლ.}$$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ როდის მიაღწევს მარილის კონცენტრაცია ავზში 0.05 კგ/ლ, წინამდებარე განტოლების მარჯვენა მხარე უნდა გავუტოლოთ 0.05 და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება t -ს მიმართ. გვექნება

$$0.1(1 - e^{-3t/500}) = 0.05 \quad \text{ანუ} \quad e^{-3t/500} = 0.5,$$

საიდანაც

$$t = \frac{500 \ln 2}{3} \approx 115.52 \text{ წთ.}$$

შესაბამისად, 115.52 წთ-ის შემდეგ მარილის კონცენტრაცია ავზში იქნება 0.05 კგ/ლ. მე-5 განტოლებიდან ჩანს, რომ ავზში მარილის მასა სტაბილურად იზრდება და აქვს შემდეგი ზღვრული მნიშვნელობა, როდესაც t უსასრულოდ იზრდება,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 100(1 - e^{-3t/500}) = 1000 \text{ კგ.}$$

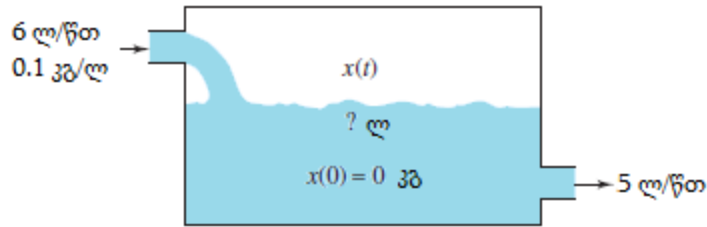
ამრიგად, ავზში მარილის კონცენტრაციის ზღვრული მნიშვნელობა იქნება 0.1 კგ/ლ, რომელიც ზუსტად იგივეა, რაც ავზში შემავალი მარილხსნარის კონცენტრაცია. ეს უეჭველად ეთანხმება ჩვენს მოლოდინს.

ალბათ, საინტერესოა, ვნახოთ, თუ როგორი იქნებოდა კონცენტრაცია, როცა ავზში შემავალი ნაკადის ოდენობა აღემატება ავზიდან გამომავალი ნაკადის ოდენობას.

მაგალითი 2. ახლა დავუშვათ, რომ პირველ მაგალითში განხილულ შერევის ამოცანაში ავზიდან ნარევის გამოსვლის სიჩქარეა 5 ლ/წთ, ნაცვლად 6 ლ/წთ-სა, ხოლო ყველა სხვა მონაცემი პირველი მაგალითისა დავტოვოთ უცვლელად. განვსაზღვროთ მარილის კონცენტრაცია ავზში როგორც t დროის ფუნქცია (ნახ. 22).

ამოხსნა. სხვაობა დროის ერთეულში ავზში შემავალი ნაკადის რაოდენობასა და ავზიდან გამომავალი ნარევის ნაკადის რაოდენობას შორის არის $6-5=1$ ლ/წთ; ამიტომ t წუთის შემდეგ ავზში სითხის რაოდენობა იქნება $(1000+t)$ ლ. აქედან გამომდინარე, მარილის რაოდენობა, რომელიც ტოვებს ავზს იქნება

$$(5 \text{ ლ/წთ}) \left[\frac{x(t)}{1000+t} \text{ კგ/ლ} \right] = \frac{5x(t)}{1000+t} \text{ კგ/წთ}$$



ნახაზი 22. შერევის ამოცანა სხვადასხვა ნაკადით.

წინა მაგალითის ანალოგიურად, მივიღებთ შემდეგ ამოცანას საწყისი პირობით

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0.6 - \frac{5x(t)}{1000+t}, \quad x(0) = 0, \quad (6)$$

რომელიც წარმოადგენს შერევის ამოცანის მათემატიკურ მოდელს.

(6) წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალური განტოლებას უცნობი $x(t)$ ფუნქციის მიმართ. მაინტეგრირებადი მამრავლი არის $\mu(t) = (1000+t)^5$. ამიტომ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(1000+t)^5 x] &= 0.6(1000+t)^5, \\ (1000+t)^5 x &= 0.1(1000+t)^6 + C, \\ x(t) &= 0.1(1000+t) + C(1000+t)^{-5}. \end{aligned}$$

საწყისი $x(0) = 0$ პირობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $C = -0.1(1000)^6$ და (6) ამოცანის ამონახსნი იქნება

$$x(t) = 0.1[(1000+t) - (1000)^6(1000+t)^{-5}].$$

რადგან ავზში მარილის კონცენტრაცია დროის t მომენტისათვის არის

$$\frac{x(t)}{1000+t} = 0.1[1 - (1000)^6(1000+t)^{-6}] \text{ კგ/ლ}, \quad (7)$$

როგორც პირველ მაგალითში, (7) სახით მოცემული კონცენტრაცია უახლოვდება სიდიდეს 0.1კგ/ლ, როცა $t \rightarrow \infty$. თუმცა უნდა გავითვალისწინოთ, რომ მეორე მაგალითში დროის უსასრუოდ ზრდასთან ერთად ავზში სითხის მოცულობა ხდება შემოუსაზღვრელი და როცა ავზი გადაივსება და სითხე დაიწყებს გადმოღინებას, მაშინ (6) პირობებით აღწერილი მოდელი უკვე აღარ გამოდგება.

პოპულაციის მოდელი

როგორ შევისწავლოთ პოპულაციის ზრდის პროგნოზირება? თუ ჩვენ გვაინტერესებს ერთი სახეობის პოპულაცია, შეგვიძლია მეხსიერებაში წარმოვიდგინოთ სექცია, რომელიც შეიცავს ამ სახეობას და ერთსეფციანი სისტემის ანალიზის გამოყენებით შევისწავლოთ მისი ზრდის პროცესი.

დაუშვათ $p(t)$ არის პოპულაციის რაოდენობა დროის t მომენტისათვის. ვინაიდან ელემენტების რაოდენობა პოპულაციაში ყოველთვის მთელი რიცხვით გამოისახება

და იგი საკმარისად დიდი რიცხვია, ამიტომ ძალიან მცირე ცდომილების სიზუსტით შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $p(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა. ახლა ჩვენ გვჭირდება, დავადგინოთ პოპულაციის ზრდის სიჩქარე („შემაგალი ნაკადი“) და გარდაცვალების რაოდენობა („გამავალი ნაკადი“) დროის ერთეულში.

განვიხილოთ ბაქტერიების გამრავლების პროცესი, რომელიც უჯრედის მარტივი გაყოფით წარმოებს. ამ მოდელში ჩვენ ვუშვებთ, რომ პოპულაციის ზრდის სიჩქარე პროპორციულია პოპულაციაში არსებული ელემენტების სრული რაოდენობისა. ეს დაშვება თავსებადია ბაქტერიების რაოდენობის ზრდის ექსპერიმენტებით დადგენილ შედეგებთან. ვიდრე არსებობს საკმარისი სივრცე და საკმარისი საკვები პოპულაციაში შემაგალი ბაქტერიებისათვის, ჩვენ აგრეთვე შეგვიძლია დავუშვათ, რომ სიკვდილიანობის რაოდენობა ნულის ტოლია (შევნიშნოთ, რომ უჯრედის გაყოფისას „დედა“ უჯრედი არ კვდება, არამედ ერთი უჯრედიდან მისი გაყოფით წარმოიშვება ორი ახალი უჯრედი). აქედან გამომდინარე, ბაქტერიების გამრავლების მათემატიკური მოდელი იქნება

$$\frac{dp(t)}{dt} = k_1 p(t), \quad p(0) = p_0, \quad (8)$$

სადაც $k_1 > 0$ ზრდის პროპორციულობის კოეფიციენტი, ხოლო p_0 არის ბაქტერიების რაოდენობა $t = 0$ მომენტისათვის. შევნიშნოთ, რომ ადამიანთა პოპულაციისათვის იმის დაშვება, რომ საკმარისი სივრცისა და საკმარისი საკვების შემთხვევაში სიკვდილიანობის რაოდენობა ნულია, რა თქმა უნდა, არ იქნება სწორი. თუმცა, თუ დავუშვებთ, რომ ადამიანი კვდება მხოლოდ ბუნებრივი მიზეზით, აგრეთვე მოსალოდნელია, რომ სიკვდილიანობის რაოდენობა კვლავ პოპულაციის რაოდენობის პროპორციული იყოს. მაშინ (8) განტოლება ასე გადაიწერება

$$\frac{dp}{dt} = k_1 p - k_2 p = (k_1 - k_2) p = kp, \quad (9)$$

სადაც $k = k_1 - k_2$ და k_2 არის სიკვდილიანობის პროპორციულობის კოეფიციენტი. დავუშვათ, რომ $k_1 > k_2$ ანუ $k > 0$. ამ შემთხვევაში გვექნება მათემატიკური მოდელი

$$\frac{dp}{dt} = kp, \quad p(0) = p_0, \quad (10)$$

რომელსაც პოპულაციის ზრდის *ექსპონენციალურ კანონს* ანუ *მალთუსის კანონს* უწოდებენ (თომას რ. მალთუსი (1766-1834) იყო ბრიტანელი ეკონომისტი, რომელიც სწავლობდა პოპულაციის მოდელს).

(10) განტოლება განცალკევებულია და საწყის პირობიანი ამოცანის ამოხსნით მივიღებთ

$$p(t) = p_0 e^{kt}. \quad (11)$$

მალთუსის მოდელის შესამოწმებლად გამოვიყენოთ იგი შეერთებული შტატების დემოგრაფიულ ისტორიაში.

მაგალითი 3. შეერთებული შტატების მოსახლეობა 1790 წელს იყო 3.93 მილიონი, ხოლო 1890 წელს კი - 62.98 მილიონი. გამოვიყენოთ მალთუსის მოდელი და შეერთებული შტატების მოსახლეობის რაოდენობა წარმოვადგინოთ როგორც დროის ფუნქცია.

ამოხსნა. თუ საწყის $t=0$ მომენტად ავიღებთ 1790 წელს, მაშინ (11) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$p(t) = (3.93)e^{kt}, \quad (12)$$

სადაც $p(t)$ არის მოსახლეობის რაოდენობა მილიონობით. k რიცხვის მოსაძებნად ვისარგებლოთ ამოცანის პირობით, რომ 1890 წელს ე.ი. $t=100$ წლის შემდეგ, მოსახლეობის რაოდენობა გახდა 62.98 მილიონი. გვექნება

$$p(100) = 62.93 = (3.93)e^{100k}.$$

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებას k -ს მიმართ, დავადგენთ

$$k = \frac{\ln(62.98) - \ln(3.93)}{100} \approx 0.027742.$$

თუ ჩვასვავთ k -ს ამ მნიშვნელობას (12) განტოლებაში, საბოლოოდ მივიღებთ მოსახლეობის რაოდენობის წარმოდგენას დროის ფუნქციის საშუალებით

$$p(t) = (3.93) e^{(0.027742)t}.$$

მალთუსის მოდელში ვიხილავდით სიკვდილიანობას მხოლოდ ბუნებრივი მიზეზით. როგორ შეიცვლება მოდელი, თუ მხედველობაში მივიღებთ არასაკმარისი სამედიცინო მომსახურებით, გადამდები სნეულებებით, კრიმინალების ძალადობით, ცუდი კვებით და კიდევ სხვა დამატებითი ფაქტორებით გამოწვეულ ნაადრევ სიკვდილიანობას? ეს ფაქტორები ერთვებიან კონკურენციაში პოპულაციის შიგნით, ამიტომ ჩვენ უნდა დავუშვათ, რომ არსებობს სიკვდილიანობის რაოდენობის განმსაზღვრელი დამატებითი კომპონენტი, რომელიც პროპორციულია პოპულაციის ინდივიდების ორმხრივი ურთიერთქმედებების რიცხვისა ანუ შესაძლო განსხვავებული წყვილების რაოდენობისა მოცემულ პოპულაციაში. ასეთი შესაძლო განსხვავებული წყვილების რაოდენობა p რაოდენობის პოპულაციისათვის იქნება $p(p-1)/2$. ამრიგად, თუ ჩვენ დავაკავშირებთ დაბადების ზრდის მახასაითებელს (8)

განტოლების მიხედვით და სიკვდილიანობას და მოვახდენთ ელემენტარულ გარდაქმნებს, მივიღებთ ე.წ. **ლოჯისტიკურ მოდელს**

$$\frac{dp}{dt} = k_1 p - k_3 \frac{p(p-1)}{2}$$

ანუ

$$\frac{dp}{dt} = -Ap(p - p_1), \quad p(0) = p_0, \quad (14)$$

სადაც $A = k_3 / 2$ და $p_1 = (2k_1 / k_3) + 1$.

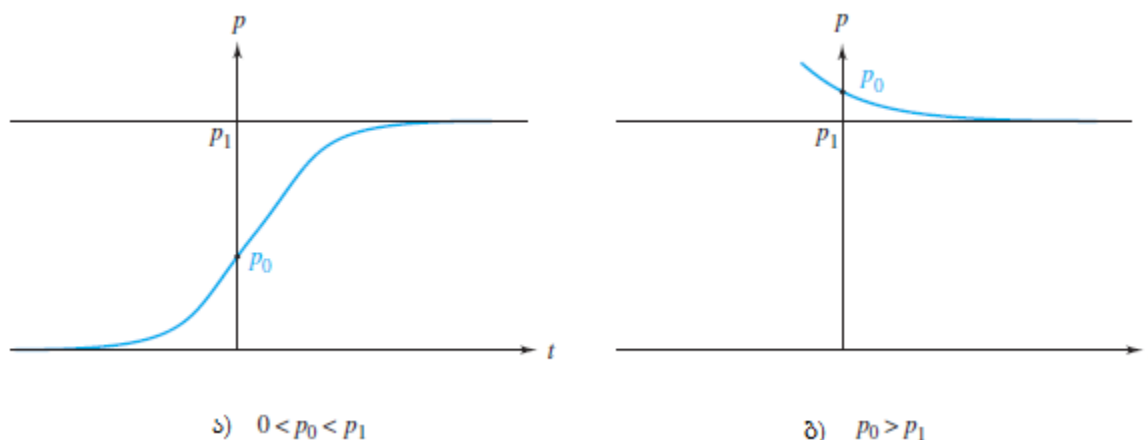
(14) განტოლებას აქვს ორი მუდმივი (წონასწორული) ამონახსენი: $p(t) \equiv p_1$ და $p(t) \equiv 0$. არაწონასწორული ამონახსნები შეიძლება ვიპოვოთ ცვლადთა განცალგებით და ინტეგრებით

$$\int \frac{dp}{p(p - p_1)} = -A \int dt \quad \text{ან} \quad \frac{1}{p_1} \ln \left| \frac{p - p_1}{p} \right| = -At + c_1 \quad \text{ან} \quad \left| 1 - \frac{p_1}{p} \right| = c_2 e^{-Ap_1 t}.$$

თუ $p(t) = p_0$, როცა $t = 0$, და $c_3 = 1 - p_1 / p_0$, მაშინ უკანასკნელი განტოლების ამოხსნით $p(t)$ -ს მიმართ მივიღებთ

$$p(t) = \frac{p_1}{1 - c_3 e^{-Ap_1 t}} = \frac{p_0 p_1}{p_0 + (p_1 - p_0) e^{-Ap_1 t}}. \quad (15)$$

(15) ფორმულით მოცემულ $p(t)$ ფუნქციას ეწოდება **ლოჯისტიკის ფუნქცია**. მისი გრაფიკი მოცემულია 23-ე ნახაზზე.



ნახაზი 23. ლოჯისტიკური წირები.

შევნიშნოთ, რომ, როცა $A > 0$ და $p_0 > 0$, მაშინ ზღვრული პოპულაცია, როცა $t \rightarrow \infty$, იქნება p_1 .

შევამოწმოთ ლოჯისტიკის მოდელი შეერთებული შტატების მოსახლეობის ზრდაზე.

მაგალითი 4. შეერთებული შტატებში 1790 წელს არსებული მოსახლეობის რაოდენობა, 3.93 მილიონი, მივიღოთ მოსახლეობის საწყის რაოდენობად და

ლოჯისტიკური მოდელის გამოყენებით შევაფასოთ მოსახლეობის რაოდენობა დროის ნებისმიერი t მომენტისათვის, თუ ცნობილია, რომ შეერთებული შტატებში 1840 და 1890 წლებში მოსახლეობის რაოდენობები, შესაბამისად 17.07 და 62.98 მილიონი იყო.

ამოხსნა. როგორც აღვნიშნეთ $t=0$ მომენტს შეესაბამება 1790 წელი, ამიტომ $p_0 = 3.93$. ახლა განვსაზღვროთ (15) განტოლებაში შემავალი A და p_1 პარამეტრები. მოცემულობის მიხედვით $p(50)=17.07$ და $p(100)=62.98$. ამიტომ გვექნება

$$17.07 = \frac{3.93p_1}{3.93 + (p_1 - 3.93)e^{-50Ap_1}}, \quad (16)$$

$$62.98 = \frac{3.93p_1}{3.93 + (p_1 - 3.93)e^{-100Ap_1}}, \quad (17)$$

(16) და (17) წარმოადგენს ორ არაწრფივ განტოლებას ორი A და p_1 უცნობით. მარტივი გარდაქმნებით ამ სისტემიდან შეგვიძლია p_1 -ის მიმართ მივღოთ ერთუცნობიანი განტოლება, რომლის ამოხსნითაც დავადგენთ

$$p_1 \approx 251.7812 \quad \text{და} \quad A \approx 0.000121. \quad (18)$$

ამრიგად, ლოჯისტიკურ მოდელის ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე

$$p(t) = \frac{989.50}{3.93 + (247.85)e^{-(0.030463)t}}. \quad (19)$$

(14) განტოლების მიხედვით ჩანს, რომ ლოჯისტიკურ მოდელში p და $\frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$ გამოსახულება წრფივ დამოკიდებულებაშია ერთმანეთთან

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = Ap_1 - Ap,$$

სადაც Ap_1 ღერძიდან ჩამოჭრილი მონაკვეთია, ხოლო $-A$ საკუთხო კოეფიციენტი.

სავარჯიშო 9

1. მარილხსნარის ნაკადი მუდმივი 8 ლ/წთ სიჩქარით ჩაედინება დიდი მოცულობის ავზში, რომელშიც ასხია 100 ლ ხსნარი, რომელშიც გახსნილია 0.5 კგ მარილი. შემდინარე მარილხსნარი კარგად ერევა ავზის შიგნით არსებულ ხსნარს და თანაბრად განზავებული ნარევის ნაკადი გამოედინება ავზიდან იმავე სიჩქარით. განსაზღვრეთ მარილის მასა ავზში t დროის შემდეგ, თუ ავზში შემავალ მარილწყალის ნაკადში მარილის კონცენტრაცია არის 0.05 კგ/ლ. როდის მიაღწევს მარილის კონცენტრაცია ავზში 0.02 კგ/ლ-ს?
2. მარილხსნარის ნაკადი მუდმივი 6 ლ/წთ სიჩქარით ჩაედინება დიდი მოცულობის ავზში, რომელშიც ასხია 50 ლ ხსნარი, რომელშიც გახსნილია 0.5 კგ მარილი. შემდინარე მარილხსნარი კარგად ერევა ავზის შიგნით არსებულ ხსნარს და თანაბრად განზავებული ნარევის ნაკადი გამოედინება ავზიდან იმავე სიჩქარით. განსაზღვრეთ მარილის მასა ავზში t დროის შემდეგ, თუ ავზში შემავალ მარილხსნარში მარილის კონცენტრაცია არის 0.05 კგ/ლ. როდის მიაღწევს მარილის კონცენტრაცია ავზში 0.03 კგ/ლ?
3. აზოტის მჟავას ხსნარის ნაკადი მუდმივი 6 ლ/წთ სიჩქარით ჩაედინება დიდი მოცულობის ავზში, რომელშიც ასხია 200 ლ აზოტის მჟავას 0.5% ხსნარი. ხსნარები ავზის შიგნით კარგად ერევა ერთმანეთს და გამოედინება ავზიდან მუდმივი 8 ლ/წთ სიჩქარით. განსაზღვრეთ ავზში აზოტის მჟავას მოცულობა t დროის შემდეგ, თუ ავზში შემავალი აზოტის მჟავას ხსნარის კონცენტრაციაა 20%. როდის გახდება ავზში აზოტის მჟავას ხსნარის კონცენტრაცია 10%?
4. მარილხსნარის ნაკადი მუდმივი 4 ლ/წთ სიჩქარით ჩაედინება დიდი მოცულობის ავზში, რომელშიც ასხია 100 ლ წმინდა წყალი. ხსნარი და წყალი ავზის შიგნით კარგად ერევა ერთმანეთს და ნარევი გამოედინება ავზიდან 3 ლ/წთ სიჩქარით. განსაზღვრეთ მარილის მასა ავზში t დროის შემდეგ, თუ ავზში შემავალ მარილწყალში მარილის კონცენტრაცია არის 0.2 კგ/ლ. როდის მიაღწევს მარილის ხსნარის კონცენტრაცია ავზში 0.1 კგ/ლ?
5. 10 000 გალონის მოცულობის საცურაო აუზში ასხია ქლორიანი წყალი, რომლის კონცენტრაციაა 0.01%. $t = 0$ მომენტიდან დაწყებული ქალაქის 0.001% კონცენტრაციის ქლორიანი წყალი იტუმბება აუზში 5 გალ/წთ სიჩქარით. აუზიდან ქლორიანი წყალის ნაკადი იმავე სიჩქარით გამოედინება გარეთ. რამდენი პროცენტიანი ქლორიანი წყალი იქნება აუზში ერთი საათის შემდეგ? როდის იქნება აუზში 0.002% ქლორიანი წყალი?

6. ოთახში, რომლის ზომებია 12 ფუტი $\times$ 8 ფუტი $\times$ 8 ფუტი, ჰაერი შეიცავს 3% ნახშირბადის მონოქსიდს (მზუთავი აირი). $t=0$ მომენტიდან დაწყებული, სუფთა ჰაერის ნაკადი, რომელიც არ შეიცავს ნახშირბადის მონოქსიდს, შედის ოთახში 100 ფუტი³/წთ სიჩქარით. როდის იქნება ოთახის ჰაერში ნახშირბადის მონოქსიდის შემცველობა 0.01%, თუ ოთახიდან ჰაერი გამოედინება სავენტილაციო არხით იმავე 100 ფუტი³/წთ სიჩქარით?
7. ავზი, რომლის ტევადობა 60 გალონია ავსებულია მარილწყალით. $t=0$ მომენტიდან დაწყებული, მასში იტუმბება სუფთა წყალი 3 გალ/წთ სიჩქარით. ამ ავზიდან იმავე სიჩქარით სულ უფრო და უფრო ნაკლებად მარილიანი ხსნარი გადაედინება მეორე 60 გალონიან ავზში, რომელიც წინასწარ შევსებულია სუფთა წყლით. დაბოლოს მეორე ავზიდან ხსნარი იმავე ნაკადის სიჩქარით იღვრება ნიადაგში. როდის იქნება მეორე ავზში წყალი ყველაზე მარილიანი, თუ დავუშვებთ, რომ ორივე ავზში ხდება სითხეების სრულად შერევა? სახელდობრ, როგორი მარილიანი იქნება ხსნარი ამ დროს საწყის მარილწყალთან შედარებით?
8. ავზში არსებულ 200 გალონ წყალში გახსნილია s_0 გირვანქა მარილი, სადაც s_0 რაიმე დადებითი რიცხვია. $t=0$ მომენტიდან დაწყებული, ავზში იწყებს შესვლას წყალი, რომელიც შეიცავს 0.5 გირვანქა მარილს ერთ გალონზე, 4 გალ/წთ სიჩქარით და კარგად შერევის შემდეგ გამოედინება ავზიდან იმავე სიჩქარით. დავუშვათ, რომ მარილის კონცენტრაცია ავზში დროის t მომენტისათვის არის $c(t)$. ვაჩვენოთ, რომ დროის უსასრულოდ ზრდასთან ერთად ზღვრული კონცენტრაციის სიდიდეა $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0.5$ გირვ/გალ.
9. 1990 წელს შეერთებული შტატების ბუნებრივი რესურსების დეპარტამენტმა ტბაში გაუშვა შეჯვარებით გამოყვანილი კალმახის 1000 ერთეული. 1997 წელს თევზების პოპულაცია ტბაში დაახლოებით 3000 ერთეული იყო. პოპულაციის ზრდის მალთუსის კანონის გამოყენებით გამოიანგარიშეთ, დაახლოებით რამდენი ერთეული კალმახი იქნება ტბაში 2020 წლისათვის?
10. (15) ფორმულით მოცემული ლოგისტიკური წირისათვის დავუშვათ, რომ $p_a = p(t_a)$ და $p_b = p(t_b)$ მოცემული სიდიდეებია, სადაც $t_b = 2t_a$ ($t_a > 0$). აჩვენეთ, რომ

$$p_1 = \left[\frac{p_a p_b - 2p_0 p_b + p_0 p_a}{p_a^2 - p_0 p_b} \right] p_a,$$

$$A = \frac{1}{p_1 t_a} \ln \left[\frac{p_b (p_a - p_0)}{p_0 (p_b - p_a)} \right].$$

[მითითება: შემოიტანეთ აღნიშვნა $\chi = \exp(-Ap_1 t_a)$].

11. დავუშვათ მე-9 ამოცანაში გვაქვს დამატებითი ინფორმაცია, რომ 2004 წლისათვის ტბაში იყო დაახლოებით 5000 კალმახი. გამოიყენეთ ლოჯისტიკური მოდელი და გამოიანგარიშეთ, დაახლოებით რამდენი კალმახი იქნება ტბაში 2020 წლისათვის?
12. 1980 წელს ალიგატორების პოპულაცია კენედის კოსმოსური ცენტრის მახლობელ ტერიტორიაზე შეადგენდა დაახლოებით 1500 ერთეულს. 2006 წელს პოპულაცია გაიზარდა 6000 ერთეულამდე. პოპულაციის ზრდის მალთუსის კანონის გამოყენებით გამოიანგარიშეთ დაახლოებით რამდენი ალიგატორი იქნება კენედის კოსმოსური ცენტრის მახლობელ ტერიტორიაზე 2020 წლისათვის.
13. მე-12 ამოცანაში დავუშვათ, გვაქვს დამატებითი ინფორმაცია, რომ 1993 წელს ალიგატორების პოპულაცია კენედის კოსმოსური ცენტრის მახლობლად შეადგენდა დაახლოებით 4100 ერთეულს. გამოიყენეთ ლოჯისტიკური მოდელი და გამოიანგარიშეთ დაახლოებით რამდენი ალიგატორი იქნება 2020 წლისათვის. რა იქნება სავარაუდო ზღვრული პოპულაცია? [მითითება: გამოიყენეთ მე-10 ამოცანაში მოცემული ფორმულები].

12. შენობების გათბობა-გაგრილების მათემატიკური მოდელი

ამ პარაგრაფში ჩვენი მიზანია, მივიღოთ მათემატიკური მოდელი, რომელიც აღწერს 24 საათიან ტემპერატურულ რეჟიმს შენობის შიგნით, როგორც შენობის გარეთ არსებული ტემპერატურისა და შენობის შიგნით არსებული სითბოს წყაროს ფუნქციას, როცა შენობის შიგნით გათბობა ხდება გამათბობელი ღუმელით და გაგრილება - კონდიციონერით. ამ მოდელით ჩვენ პასუხი უნდა გავცეთ სამ კითხვას:

- ა) რამდენი ხანი დასჭირდება, რომ შენობის ტემპერატურა მნიშვნელოვნად შეიცვალოს?
- ბ) როგორ იცვლება შენობის ტემპერატურა გაზაფხულისა და შემოდგომის განმავლობაში, როცა არ გვაქვს ღუმელით გათბობა და კონდიციონერით გაგრილება?
- გ) როგორ იცვლება შენობის ტემპერატურა ზაფხულში, როცა გვაქვს კონდიციონერით გაგრილება ან ზამთარში, როცა გვაქვს ღუმელით გათბობა?

შენობის შიგნით ტემპერატურის მოდელირებისათვის ბუნებრივი მიდგომა იქნება სექციური (ბლოკური) ანალიზის გამოყენება. შენობა წარმოვიდგინოთ ერთ სექციად და ვთქვათ t დროისათვის შენობის შიგნით ტემპერატურა არის $T(t)$. მაშინ ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე განისაზღვრება სითბოს გამოყოფისა და შთანთქმის ყველა ფაქტორის გათვალისწინებით.

ჩვენ განვიხილავთ სამ ძირითად ფაქტორს, რომლებიც მოქმედებენ ტემპერატურაზე შენობის შიგნით. პირველი - ეს არის სითბო, რომელიც გამოიყოფა შენობის შიგნით არსებული ხალხის მიერ, ასევე განათებით და აპარატ-დანადგარებით. ეს იწვევს ტემპერატურის გაზრდას, რომელიც $H(t)$ სიდიდით აღვნიშნოთ.

მეორე - ეს არის გათბობა ღუმელით ან გაგრილება კონდიციონერით. ამ შემთხვევაში ტემპერატურის გაზრდის (ან კლების) სიდიდე აღვნიშნოთ $U(t)$ ფუნქციით. ზოგადად, დამატებითი გათბობის $H(t)$ ცვლილება და ღუმელით გათბობის (ან კონდიციონერით გაგრილების) შედეგად ტემპერატურის ცვლილება $U(t)$ აღიწერება ენერგიის ტერმინებში დროის ერთეულში (როგორიცაა ბრიტანული თერმული ერთეულები საათში). თუმცა, შენობის სითბოტევადობაზე (რომელიც იზომება ტემპერატურის გრადუსებში ცვლილებით სითბური ენერგიის ერთეულზე გაანგარიშებით) გადამრავლებით ჩვენ შეგვიძლია გამოვსახოთ $H(t)$ და $U(t)$ სიდიდეები ტემპერატურის ტერმინებში ერთეულ დროში. ამიტომ ისინი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე.

მესამე - ეს არის შენობის გარეთ არსებული $M(t)$ ტემპერატურის ზეგავლენა შენობის შიგნით არსებულ ტემპერატურაზე. ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, რომ ეს ფაქტორები შეიძლება მოდელირებულ იქნეს ნიუტონის კანონით გაგრილების შესახებ. კანონის არსი ის არის, რომ $T(t)$ ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე პროპორციულია შენობის გარეთ არსებული $M(t)$ და შენობის შიგნით არსებული $T(t)$ ტემპერატურების სხვაობისა. ამრიგად, შენობის შიგნით არსებული ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე იქნება

$$K[M(t) - T(t)].$$

დადებითი K მუდმივი კოეფიციენტი დამოკიდებულია შენობის ფიზიკურ მონაცემებზე, როგორიცაა კარების და ფანჯრების რაოდენობა და თბოიზოლაციის ტიპი, მაგრამ არაა დამოკიდებული M -ზე, T -ზე ან t -ზე. აქედან გამომდინარე, როცა შენობის გარეთ ტემპერატურა უფრო მაღალია ვიდრე შენობის შიგნით, მაშინ $M(t) - T(t) > 0$ და შენობის შიგნით ტემპერატურა იზრდება. მეორე მხრივ, როცა

შენობის გარეთ ტემპერატურა უფრო დაბალია ვიდრე შენობის შიგნით, მაშინ $M(t) - T(t) < 0$ და შენობის შიგნით ტემპერატურა იკლებს. თუ შევაჯამებთ ამ ეფექტებს, შეგვიძლია დავწეროთ ტემპერატურული ბალანსის შემდეგი განტოლება

$$\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)] + H(t) + U(t), \quad (1)$$

სადაც დამატებითი გათბობის სიდიდე $H(t)$ ყოველთვის არაუარყოფითია და $U(t)$ დადებითია ღუმელით გათბობის დროს და უარყოფითია კონდიციონერით გაგრილების დროს. შენობის ტემპერატურის დინამიკის უფრო დეტალური მოდელი შეიძლება მოიცავდეს მეტ ცვლადებს, რათა ასახოს სხვადასხვა ტემპერატურები სხვადასხვა ოთახებში ან ზონებში. ასეთ მიდგომით სარგებლობისას შესაძლებელია გამოვიყენოთ სექციური ანალიზი, რომელშიც თითოეული ოთახი უნდა იქნეს განხილული, როგორც განსხვავებული სექცია.

(1) განტოლება წრფივია ამიტომ გადავწეროთ იგი სტანდარტული ფორმით და ამოვხსნათ

$$\frac{dT}{dt}(t) + P(t)T(t) = Q(t), \quad (2)$$

სადაც

$$P(t) = K, \quad Q(t) = KM(t) + H(t) + U(t). \quad (3)$$

მაინტეგრებელ მამრავლს ექნება სახე

$$\mu(t) = \exp\left(\int K dt\right) = e^{Kt}.$$

გადავამრავლოთ (2) განტოლება მაინტეგრებელ მამრავლზე და ვაინტეგრეთ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} e^{Kt} \frac{dT}{dt}(t) + Ke^{Kt}T(t) &= e^{Kt}Q(t), \\ e^{Kt}T(t) &= \int e^{Kt}Q(t)dt + C. \end{aligned}$$

$T(t)$ -ს მიმართ ამოხსნით მივიღებთ

$$T(t) = e^{-Kt} \int e^{Kt}Q(t)dt + Ce^{-Kt} = e^{-Kt} \left\{ \int e^{Kt} [KM(t) + H(t) + U(t)] dt + C \right\}. \quad (4)$$

მაგალითი 1. დავუშვათ, სამუშაო დღის დასასრულს (t_0 დროისათვის), როდესაც ხალხი ტოვებს შენობას, ტემპერატურა გარეთ მუდმივია და უდრის M_0 -ს, ხოლო შენობის შიგნით დამატებითი გათბობის H სიჩქარე, ასევე ღუმელით გათბობის (ან კონდიციონერით გაგრილების) შედეგად ტემპერატურის ცვლილების U სიჩქარე არის ნულის ტოლი. განვსაზღვროთ $T(t)$, თუ მოცემულია საწყისი პირობა $T(t_0) = T_0$. ამოხსნა. რადგან $M = M_0$, $H = 0$ და $U = 0$, ამიტომ მე-4 განტოლებიდან გვექნება

$$T(t) = e^{-Kt} \left[\int e^{Kt} K M_0 dt + C \right] = e^{-Kt} [M_0 e^{Kt} + C] = M_0 + C e^{-Kt}.$$

თუ დავუშვებთ $t = t_0$ და გამოვიყენებთ ტემპერატურის საწყის T_0 მნიშვნელობას მივიღებთ, რომ $C = (T_0 - M_0) e^{K t_0}$. აქედან გამომდინარე,

$$T(t) = M_0 + (T_0 - M_0) e^{-K(t-t_0)}. \quad (5)$$

როცა $M_0 < T_0$, მაშინ (5) ამონახსენი ექსპონენციალურად კლებულობს საწყისი T_0 ტემპერატურიდან საბოლოო M_0 ტემპერატურამდე. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ დროის სიდიდე, რომელიც საჭიროა ტემპერატურის არსებითად შესაცვლელად, განვიხილოთ მარტივი წრფივი განტოლება $dA/dt = -\alpha A$, რომლის ამონახსენს აქვს სახე $A(t) = A(0) e^{-\alpha t}$. ახლა, როცა $t \rightarrow +\infty$, $A(t)$ ფუნქცია ან ექსპონენციალურად კლებადია ($\alpha > 0$) ან იზრდება ექსპონენციალურად ($\alpha < 0$). ყოველ შემთხვევაში, დრო რომელიც საჭიროა $A(t)$ ტემპერატურის ცვლილებისათვის $A(0)$ -დან $A(0)/e$ -მდე ($\approx 0.368 A(0)$) ტოლია $1/\alpha$, რადგან

$$A\left(\frac{1}{\alpha}\right) = A(0) e^{-\alpha(1/\alpha)} = \frac{A(0)}{e}.$$

$1/|\alpha|$ სიდიდეს, რომელიც არ არის დამოკიდებული $A(0)$ -ზე, ეწოდება განტოლების **დროის მუდმივი**. უფრო ზოგადი სახის წრფივი დიფერენციალური $dA/dt = -\alpha A + g(t)$ განტოლებისათვის ჩვენ კვლავ მოვიხსენიებთ $1/|\alpha|$ სიდიდეს როგორც დროის მუდმივს.

დავუბრუნდეთ განსახილველ მაგალითს. ჩვენ ვხედავთ, რომ $T(t)$ ტემპერატურა აკმაყოფილებს განტოლებებს

$$\frac{dT}{dt}(t) = -KT(t) + KM_0, \quad \frac{d(T - M_0)}{dt}(t) = -K[T(t) - M_0],$$

რადგან M_0 მუდმივია. ყოველ შემთხვევაში, დროის მუდმივი არის ზუსტად $1/K$, რაც წარმოადგენს დროს, რომელიც აუცილებელია ტემპერატურათა $T - M_0$ სხვაობის შეცვალისათვის $T - M_0$ მნიშვნელობიდან $(T - M_0)/e$ მნიშვნელობამდე. ჩვენ $1/K$ სიდიდეს აგრეთვე ვუწოდებთ **შენობის დროის მუდმივს** (გათბობის და გაგრილების გარეშე). შენობის მუდმივის მნიშვნელობა ზოგადად მერყეობს 2-დან 4 სთ-მდე, მაგრამ დროის მუდმივი შეიძლება იყოს გაცილებით მცირე, თუ ფანჯრები ღიაა ან გვაქვს ვენტილიატორი, რომელიც ჰაერის ცირკულიაციას ახდენს. ამავე დროს, დროის მუდმივი შეიძლება იყოს უფრო დიდი, თუ შენობას კარგი თბოიზოლაცია აქვს.

პირველი მაგალითის ფარგლებში ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ დროის მუდმივის ცნება, რათა პასუხი გავცეთ ა) კითხვას: შენობის ტემპერატურა იცვლება ექსპონენციალურად დროის $1/K$ მუდმივის მიმართ.

ბ) კითხვაზე პასუხი, კერძოდ შენობის შიგნით ტემპერატურის ცვლილების შესახებ გაზაფხულზე და შემოდგომით, მოცემულია შემდეგ მაგალითში.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ შენობის ტემპერატურა $T(t)$, თუ შენობის შიგნით დამატებითი გათბობის $H(t)$ სიჩქარე ტოლია H_0 მუდმივის, გათბობა ან გაგრილება არ გვაქვს ($U(t) \equiv 0$) და შენობის გარეთ M ტემპერატურა იცვლება სინუსოიდალური კანონით 24 საათიან პერიოდში, მისი მინიმუმით $t = 0$ დროისათვის (შუაღამე) და მაქსიმუმით $t = 12$ დროისათვის (შუადღე) ე. ი.

$$M(t) = M_0 - B \cos \omega t,$$

სადაც B დადებითი მუდმივია, M_0 საშუალო გარე ტემპერატურაა, ხოლო $\omega = 2\pi / 24 = \pi / 12$ რადიანი/სთ. ეს შეიძლება იყოს გაზაფხულის ან შემოდგომის პერიოდში, როდესაც არც ღუმელით გათბობა ხდება და არც ჰაერის კონდიციონერით გაგრილება.

ამოხსნა. $Q(t)$ ფუნქცია (3) განტოლებაში იქნება

$$Q(t) = K(M_0 - B \cos \omega t) + H_0.$$

თუ აღვნიშნავთ $B_0 = M_0 + H_0 / K$, მაშინ $Q(t)$ ასე შეგვიძლია გადავწეროთ

$$Q(t) = K(B_0 - B \cos \omega t), \quad (6)$$

სადაც KB_0 წარმოადგენს $Q(t)$ -ს საშუალო დღიურ მნიშვნელობას ე.ი.

$$KB_0 = \frac{1}{24} \int_0^{24} Q(t) dt.$$

თუ (6) ტოლობით განსაზღვრულ სითბოს წყაროს $Q(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობას შევიტანთ ტემპერატურის გამოსათვლელ (4) ფორმულაში და მოვახდენთ ნაწილობით ინტეგრებას, მივიღებთ

$$T(t) = e^{-Kt} \left\{ \int e^{Kt} (KB_0 - KB \cos \omega t) dt + C \right\} = B_0 - BF(t) + Ce^{-Kt}, \quad (7)$$

სადაც

$$F(t) = \frac{\cos \omega t + (\omega / K) \sin \omega t}{1 + (\omega / K)^2}.$$

C მუდმივი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ შუადამისას ($t = 0$) ტემპერატურა ტოლი იყოს რაიმე საწყისი T_0 ტემპერატურისა. ამრიგად,

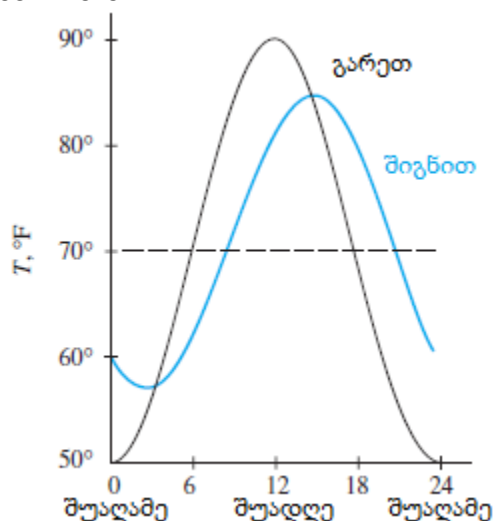
$$C = T_0 - B_0 + BF(0) = T_0 - B_0 + \frac{B}{1 + (\omega / K)^2}.$$

შევნიშნოთ, რომ (7) ამონახსნის მესამე წევრი, რომელიც შეიცავს C მუდმივს მიისწრაფის ნულისაკენ ექსპონენციალურად. მუდმივი B_0 წევრი (7) ამონახსნში ტოლია $M_0 + H_0 / K$ სიდიდის და წარმოადგენს შენობის შიგნით დღიურ საშუალო ტემპერატურას (ექსპონენციალური წევრის უგულვებელყოფით). როცა შენობის შიგნით არ გვაქვს დამატებითი გათბობის საშუალება ($H_0 = 0$) ეს საშუალო ტემპერატურა ტოლია შენობის გარეთ არსებული საშუალო M_0 ტემპერატურისა. $BF(t)$ წევრი (7) ტოლობაში წარმოადგენს შენობის შიგნით ტემპერატურის სინუსოიდალურ ცვალებადობას, რომელიც აღწერს შენობის გარე ტემპერატურის ცვალებადობის ზეგავლენას. რადგან $F(t)$ შეიძლება ასეთი სახით ჩაიწეროს

$$F(t) = [1 + (\omega / K)^2]^{-1/2} \cos(\omega t - \phi), \quad (8)$$

სადაც $\tan \phi = \omega / K$, ამიტომ შენობის შიგნით ტემპერატურის სინუსოიდალური ცვალებადობა ჩამორჩება შენობის გარეთ ტემპერატურის ცვალებადობას ϕ / ω საათით. ამასთან ერთად, შენობის შიგნით ტემპერატურის ცვლილება ოდნავ ნაკლებია, $[1 + (\omega / K)^2]^{-1/2}$ მამრავლით, ვიდრე ცვლილება შენობის გარეთ. ცვლილების ω კუთხური სიხშირე ტოლია $2\pi / 24$ რადიანი/სთ (რომელიც დაახლოებით $1/4$ -ია). უგანზომილებო ω / K კოეფიციენტის მნიშვნელობები ზოგადად მოთავსებულია $1/2$ -სა და 1 -ს შორის. ამ შუალედისათვის შენობის შიდა და გარე ტემპერატურებს შორის ჩამორჩენა დაახლოებით 1.8 სთ-დან 3 სთ-მდეა და შენობის შიგნით ტემპერატურის ცვალებადობის სიდიდე მერყეობს გარე ტემპერატურის ცვალებადობის 89% -სა და 71% -ს შორის. 24 -ე ნახაზი გვიჩვენებს გარე ტემპერატურის 24 -საათიან სინუსოიდალურ ცვალებადობას ჩვეულებრივი ზომიერი დღისათვის, როდესაც შენობის შიდა ტემპერატურის ცვალებადობის უგანზომილებო

ω/K კოეფიციენტი ერთის ტოლია, რომელიც შეესაბამება დროის მუდმივის დაახლოებით $1/K = 4$ სთ მნიშვნელობას. უკანასკნელი წირის ასაგებად დავუშვით, რომ ექსპონენციალური წევრი გაქრა.



ნახაზი 24. ტემპერატურის ცვალებადობა შიგნით და გარეთ გაუთბობელ შენობაში

მაგალითი 3. დაუშვათ, რომ მაგალით 2-ში განხილულ შენობაში დაყენებულია მარტივი თერმოსტატი, რომელიც გამოიყენება შენობის შიგნით არსებული ფაქტიური ტემპერატურის შესადარებლად სასურველ T_D ტემპერატურასთან. თუ ფაქტიური ტემპერატურა ნაკლებია სასურველ ტემპერატურაზე, მაშინ ღუმელი იწყებს შენობის გათბობას; სხვა შემთხვევაში ღუმელი გამორთულია. თუ ფაქტიური ტემპერატურა მაღალია სასურველ ტემპერატურაზე, მაშინ ჰაერის კონდიციონერი იწყებს შენობის გაგრილებას. სხვა შემთხვევაში კონდიციონერი გამორთულია. პრაქტიკაში არსებობს ზოგიერთი მკვედარი ზონა სასურველი ტემპერატურის მახლობლობაში, რომლებშიც ტემპერატურათა სხვაობა არ არის საკმარისი, რათა გააქტიურდეს თერმოსტატი, მაგრამ აქ ამას არ ვითვალისწინებთ. ვიპოვოთ $T(t)$ ტემპერატურა, თუ ცნობილია რომ სითბოს და სიგრილის ოდენობის მიწოდება ტემპერატურათა სხვაობის პროპორციულად ხდება ე.ი.

$$U(t) = K_U [T_D - T(t)],$$

სადაც K_U პროპორციულობის (დადებითი) კოეფიციენტი.

ამოხსნა. თუ პროპორციულობის მარეგულირებელ $U(t)$ ფუნქციას ჩავსვავთ (1) განტოლებაში, მაშინ შენობის ტემპერატურისათვის მივიღებთ

$$\frac{dT(t)}{dt} = K[M(t) - T(t)] + H(t) + K_U [T_D - T(t)]. \quad (9)$$

(9) განტოლების შედარება პირველი რიგის წრფივ (2) განტოლებასთან გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში P სიდიდე ტოლია $K + K_U$ და იძულების ფუნქცია $Q(t)$ შეიცავს სასურველ T_D ტემპერატურას ე. ი.

$$P = K + K_U,$$

$$Q(t) = KM(t) + H(t) + K_U T_D.$$

როდესაც დამატებითი გათბობის სიჩქარე H_0 მუდმივია და გარე ტემპერატურა M იცვლება სინუსოიდალური კანონით 24 საათიან პერიოდში იმავე ფორმით, როგორც ეს იყო მაგალით 2-ში, იძულების ფუნქციას ექნება სახე

$$Q(t) = K(M_0 - B \cos \omega t) + H_0 + K_U T_D.$$

$Q(t)$ ფუნქცია შეიცავს მუდმივ შესაკრებს და კოსინუს ფუნქციას, ისევე როგორც (6) ტოლობაში. ეს მსგავსება უფრო თვალსაჩინო გახდება შემდეგი ფორმით წარმოდგენის შემდეგ

$$Q(t) = K_1(B_2 - B_1 \cos \omega t), \quad (10)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}, & K_1 &= K + K_U, \\ B_2 &= \frac{K_U T_D + K M_0 + H_0}{K_1}, & B_1 &= \frac{BK}{K_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

P მუდმივის და (10) ტოლობით მოცემული იძულების $Q(t)$ ფუნქციის გამოსახულებები იგივეა რაც მაგალით 2-ში, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ მუდმივები K , B_0 და B შეცვლილია შესაბამისად K_1 , B_2 და B_1 მუდმივებით. აქედან გამომდინარე, (9) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი იქნება იგივე, რაც მაგალით 2-ში, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ შეიცვლება მუდმივები. ამრიგად

$$T(t) = B_2 - B_1 F_1(t) + C \exp(-K_1 t), \quad (12)$$

სადაც

$$F_1(t) = \frac{\cos \omega t + (\omega / K_1) \sin \omega t}{1 + (\omega / K_1)^2}.$$

C მუდმივი არჩეულია ისე, რომ $t = 0$ მომენტისათვის ტემპერატურა T გაუტოლდეს T_0 -ს. ამრიგად, $C = T_0 - B_2 + B_1 F_1(0)$.

დროის მუდმივი (9) განტოლებისათვის არის $1/P = 1/K_1$, სადაც $K_1 = K + K_U$. აქ $1/K_1$ სიდიდეს ეწოდება **დროის მუდმივი შენობისათვის გათბობით და ჰაერის კონდიცირებით**. ტიპიური გათბობის და გაგრილების სისტემებისათვის K_U

ნაკლებია 2-ზე. ტიპური შენობისათვის K მოთავსებულია $1/2$ და $1/4$ რიცხვებს შორის. აქედან გამომდინარე, K_1 -ის მნიშვნელობა დაახლოებით 2-ია და დროის მუდმივი შენობისათვის, რომელსაც გათბობა და გაგრილება გააჩნია, იქნება დაახლოებით $1/2$ სთ.

როცა გათბობა ან გაგრილება ჩაირთვება, მაშინ დაახლოებით 30 წთ-ია საჭირო რათა (12) ტოლობაში ექსპონენციალური წევრი გაქრეს. თუ უკუვაგდებთ ამ ექსპონენციალურ წევრს, მაშინ შენობის შიგნით საშუალო ტემპერატურა იქნება B_2 . რადგან H_0 მცირეა და K_1 საკმარისად დიდია ვიდრე K , ამიტომ (11)-დან გამომდინარეობს, რომ უხეში მიახლოებით B_2 სასურველი T_D ტემპერატურის ტოლია. სხვა სიტყვებით, გარკვეული პერიოდის შემდეგ შენობის შიგნით ტემპერატურა უხეში მიახლოებით იქნება T_D -ს ტოლი, მცირე სინუსოიდალური სიზუსტით. გარეთ საშუალო M_0 ტემპერატურას და შიგნით გათბობის H_0 სიდიდეს აქვს მხოლოდ მცირე ზემოქმედების ეფექტი. ამრიგად, ენერგიის დაზოგვის მიზნით, გათბობის ან გაგრილების სისტემები უნდა იყოს გამორთული ღამის განმავლობაში. როდესაც ის დილით ჩაირთვება, დაახლოებით 30 წთ დასჭირდება შენობის შიგნით სასურველი ტემპერატურის მისაღწევად. ეს დაკვირვებები გვაძლევს პასუხს გ) კითხვაზე შენობის შიგნით ტემპერატურის ცვლილებასთან მიმართებაში ზაფხულისა და ზამთრის პერიოდში, რომელიც ამ პუნქტის დასაწყისში დავსვით.

მაგალით 3-ში იმის დაშვება, რომ გათბობის ან გაგრილების სიდიდეს აქვს სახე $U(t) = K_U [T_D - T(t)]$ შეიძლება არ იყოს ყოველთვის მისაღები. აქ ჩვენ გამოვიყენეთ იგი დროის მუდმივის გამოყენების საილუსტრაციოდ. ზოგიერთ მკითხველს შეუძლია ჩაატაროს ექსპერიმენტი $U(t)$ -ს სხვა მოდელებისათვის, განსაკუთრებით მაშინ როდესაც მათ აქვთ შესაძლებლობა გამოიყენონ რიცხვითი მეთოდები, რომლებსაც ქვემოთ შევისწავლით.

კავშირი ტემპერატურის ფარენგეიტის (F°) და ცელსისუს (C°) სკალებს შორის:

$$F^\circ = \frac{9C^\circ}{5} + 32, \quad C^\circ = \frac{5(F^\circ - 32)}{9}.$$

სავარჯიშო 10

1. ოთახში, სადაც ტემპერატურა 21° -ია, 5 წთ-ის განმავლობაში ყავა ჭიქაში საწყისი 95° -დან გაცივდა 80° ტემპერატურამდე. ნიუტონის გაგრილების კანონის გამოყენებით განსაზღვრეთ როდის იქნება ყავის ტემპერატურა სასურველი 50° ?
2. ოთახში, სადაც ტემპერატურა ფარენგეიტის სკალით 70° -ია, 3 წთ-ის განმავლობაში ცივი ლუდი საწყისი 35° -დან გათბა 40° ტემპერატურამდე ფარენგეიტის სკალით. როგორ გათბება ლუდი, 20 წთ-ის განმავლობაში?
3. ოთახში, სადაც ტემპერატურა ფარენგეიტის სკალით 70° -ია, თეთრი ღვინო ჩაციებულია ყინულში, რომლის ტემპერატურაა 32° ფარენგეიტის სკალით. თუ ღვინოს გაგრილებას 60° -მდე სჭირდება 15 წთ, მაშინ რა დრო დასჭირდება მის გაგრილებას 56° -მდე ფარენგეიტის სკალით?
4. ღვინოს სარდაფიდან, სადაც ტემპერატურაა 10° , ამოიტანეს წითელი ღვინო ოთახში, სადაც ტემპერატურაა 23° . თუ 10 წთ სჭირდება ღვინოს გათბობას 15° -მდე, მაშინ როდის მიაღწევს ღვინოს ტემპერატურა 18° -ს?
5. ქ. ტამპაში დეკემბრის ცივი დღის შუადღისას ტემპერატურა იყო 16° . გამომძიებელი ტეილორი მივიდა დანაშაულის ადგილზე სერჟანტის მოსაძებნად, რომელიც ამ დროს გარდაცვლილის სხეულს ათვალიერებდა. სერჟანტმა თქვა, რომ არის რამდენიმე ექვმიტანილი, მაგრამ, თუ მათ ეცოდინებათ სიკვდილის ზუსტი დრო, მაშინ ექვმიტანილთა სია უფრო შემცირდებოდა. გამომძიებელმა ტეილორმა ამოიღო თერმომეტრი და გაუზომა გარდაცვლილს ტემპერატურა, რომელიც აღმოჩნდა 34.5° . შემდეგ იგი წავიდა სადილზე. შუადღით 1:00 სთ-ზე დაბრუნებისას მან ნახა, რომ გარდაცვლილის სხეულის ტემპერატურა 33.7° იყო. როდის მოხდა მკვლელობა? მითითება: სხეულის ნორმალური ტემპერატურაა 37° .
6. შაბათის წყნარ დილას, როდესაც შენობაში ხალხი მუშაობს, ღუმელი შენობის შიგნით ინარჩუნებს 21° ტემპერატურას. შუადღით ღუმელი გამოირთვება და ხალხი მიდის სახლში. ტემპერატურა გარეთ დღის დარჩენილ დროში მუდმივი 12° -ია. თუ შენობის დროის მუდმივი 3 სთ-ს ტოლია, მაშინ როდის მიაღწევს შენობის შიგნით ტემპერატურა 16° -ს? თუ რამდენიმე ფანჯარა დარჩება ღია და დროის მუდმივი დაიკლებს 2 სთ-მდე, მაშინ როდის მიაღწევს შენობის შიგნით ტემპერატურა 16° -ს?
7. შაბათის ცხელ დილას, ვიდრე ხალხი შენობაში მუშაობს, ჰაერის კონდიციონერი შენობის შიგნით ინარჩუნებს 24° ტემპერატურას. შუადღით

კონდიციონერი გამოირთობა და ხალხი სახლში მიდის. ტემპერატურა გარეთ დღის დარჩენილ დროში მუდმივი 35° -ია. თუ შენობის დროის მუდმივი 4 სთ-ს ტოლია, მაშინ რა იქნება ტემპერატურა შენობის შიგნით შუადღის 2:00 სთ-თვის? 6:00 სთ-თვის? როდის მიაღწევს ტემპერატურა შენობის შიგნით 27° -ს?

8. გათბობისა და გაგრილების არამქონე ავტოფარების დროის მუდმივია 2 სთ. ვთქვათ, ტემპერატურა გარეთ იცვლება სინუსოიდალური ტკანონით რომლის მინიმუმია ფარენგეიტის სკალით 50° ღამის 2:00 სთ-თვის და მაქსიმუმია 80° შუადღით 2:00 სთ-თვის. განსაზღვრეთ დრო, როდესაც შენობის ტემპერატურა მიაღწევს თავის უცირეს და უდიდეს ნიშნულს, თუ ექსპონენციალური წევრი უგულებელყოფილია.
9. სასაქონლო საწყობი შენდება ისე, რომ არ ექნება არც გათბობა და არც გაგრილება. შენობის თბოიზოლაციის ხარისხის მიხედვით შენობის დროის მუდმივი შეიძლება იცვლებოდეს 1-დან 5 სთ-მდე. იმის საილუსტრაციოდ, თუ როგორი გავლენა ექნება თბოიზოლაციას ტემპერატურაზე საწყობის შიგნით, დავუშვათ, რომ ტემპერატურა გარეთ იცვლება სინუსოიდალური კანონით, რომლის მინიმუმია 16° ღამის 2:00 სთ-ზე და მაქსიმუმია 32° დღის 2:00 სთ-თვის. ვთქვათ, ექსპონენციალური წევრი, რომელიც შეიცავს საწყის T_0 ტემპერატურას, უკუგდებულია. რა იქნება მინიმალური ტემპერატურა შენობის შიგნით, თუ დროის მუდმივი არის 1 სთ? თუ ის არის 5 სთ? რა იქნება მაქსიმალური ტემპერატურა შენობის შიგნით, თუ დროის მუდმივი არის 1 სთ? თუ ის არის 5 სთ?
10. ორშაბათს დილით ადრე ტემპერატურა სალექციო დარბაზში დაეცა 40° -მდე ფარენგეიტის სკალით. იგივე ტემპერატურა იყო შენობის გარეთ. დარაჯმა დილის 7:00 სთ-ზე ჩართო ღუმელი თერმოსტატით, რომელიც დაყენებულია 70° -ზე ფარენგეიტის სკალით. თუ შენობის დროის მუდმივია $1/K = 2$ სთ, ხოლო შენობისათვის თავის გათბობის სისტემებთან ერთად დროის მუდმივია $1/K_1 = 1/2$ სთ, მაშინ რა ტემპერატურა იქნება სალექციო დარბაზში დილის 8:00 სთ-ზე, თუ დავუშვებთ, რომ ტემპერატურა გარეთ მუდმივია? როდის მიაღწევს ტემპერატურა დარბაზის შიგნით 65° ფარენგეიტის სკალით?
11. ზაფხულის განმავლობაში მიკროავტობუსის შიგნით ტემპერატურა აღწევს 55° -ს, როცა გარეთ მუდმივი 35° -ია. როცა მძღოლი შედის მიკროავტობუსში, ჩართავს ჰაერის კონდიციონერს და თერმოსტატს აყენებს 16° ნიშნულზე. თუ მიკროავტობუსის დროის მუდმივია $1/K = 2$ სთ, ხოლო მიკროავტობუსისთვის თავის ჰაერის კონდიციონერის სისტემასთან ერთად დროის მუდმივია

$1/K_1 = 1/3$ სთ, მაშინ როდის მიაღწევს ჰაერის ტემპერატურა მიკროავტობუსში 27°-ს?

12. ორი მეგობარი სასაუბროდ და ყავის დასალევად დასხდნენ კაფეში. როცა ყავა მიართვეს, მოუთმენელმა მეგობარმა მაშინვე დაუმატა თავის ყავას ერთი ჩაის კოვზი ნაღები. მშვიდი მეგობარი დაელოდა 5 წუთის გასვლას და შემდეგ დაუმატა თავის ყავას ერთი ჩაის კოვზი ნაღები (ნაღები მუდმივ ტემპერატურულ რეჟიმს ინარჩუნებდა). ამის შემდეგ ორივე მეგობარმა დაიწყო თავიანთი ყავის დალევა. რომლის ყავა უფრო ცხელია? ვიგულისხმობთ, რომ ნაღები უფრო ცივია ვიდრე ჰაერი და გამოვიყენოთ ნიუტონის კანონი გაგრილების შესახებ.

13. ნიუტონის მექანიკა

მექანიკა შეისწავლის ობიექტების მოძრაობას და ამ ობიექტებზე მოქმედი ძალების ზეგავლენას. იგი არის საფუძველი ფიზიკური და საინჟინრო დარგების ზოგიერთი მიმართულებებისა. ნიუტონის ანუ კლასიკური მექანიკა ეხება ჩვეულებრივი ობიექტების მოძრაობას ანუ ისეთი ობიექტებისა, რომლებიც საკმარისად დიდია ატომთან შედარებით და ნელა მოძრაობენ სინათლის სიჩქარესთან შედარებით. ნიუტონის მექანიკის მოდელი შეიძლება დავაფუძნოთ ნიუტონის კანონებზე მოძრაობის შესახებ:

1. სხეული უძრავია ან წრფივად და თანაბრად მოძრაობს, თუ მასზე სხვა სხეულები არ მოქმედებს ან მათი მოქმედება გაწონასწორებულია.
2. ყველა ძალის ჯამი, რომელიც მოქმედებს სხეულზე ტოლია მასისა და აჩქარების ნამრავლის.
3. სხეულები ერთმანეთზე მოქმედებენ ძალებით, რომლებიც მიმართულია ერთი და იმავე წრფის გასწვრივ, მოდულით ტოლია, ხოლო მიმართულებით — საპირისპირო.

ორ ასწლეულზე მეტია რაც ექსპერიმენტალური შედეგები გვიჩვენებს, რომ ეს კანონები მეტისმეტად სასარგებლოა სხეულების მოძრაობის შესასწავლად ათვლის ინერციულ სისტემაში ანუ სისტემაში, რომელშიც, თუ სხეულზე ძალები არ მოქმედებენ, მაშინ იგი მოძრაობს თანაბარი სიჩქარით. ნიუტონის მეორე კანონი, რომელიც მიეკუთვნება მხოლოდ ინერციულ სისტემას, გვაძლევს შესაძლებლობას

ჩამოვყალიბოთ მოძრავი სხეულის მოძრაობის განტოლება. ნიუტონის მეორე კანონი შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგი განტოლებით

$$\frac{dp}{dt} = F(t, x, v),$$

სადაც $F(t, x, v)$ არის სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი დროის t მომენტისათვის, x განსაზღვრავს სხეულის მდებარეობას, v სხეულის სიჩქარეს, ხოლო $p(t)$ არის სხეულის იმპულსი დროის t მომენტისათვის. იმპულსი არის სხეულის მასისა და სიჩქარის ნამრავლი ე. ი. $p(t) = mv(t)$. ამიტომ ნიუტონის მეორე კანონი ასე ჩაიწერება

$$m \frac{dv}{dt} = ma = F(t, x, v), \quad (1)$$

სადაც $a = dv/dt$ სხეულის აჩქარებაა t მომენტისათვის.

ჩვეულებრივ (1) განტოლებაში სიჩქარის ნაცვლად $v = dx/dt$ გამოსახულების ჩასმა გვაძლევს მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას დამოკიდებული x ცვლადის მიმართ. ამ პარაგრაფში ჩვენ ყურადღებას გავამახვილებთ იმ შემთხვევაზე, როცა F ძალა არ არის დამოკიდებული x -ზე. ამ შემთხვევაში (1) განტოლებას განვიხილავთ, როგორც პირველი რიგის განტოლებას $v(t)$ -ს მიმართ

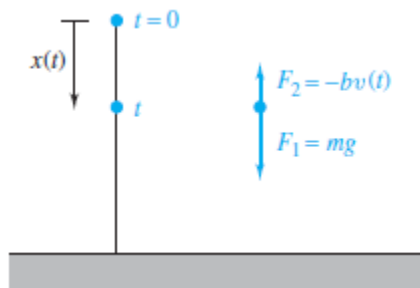
$$m \frac{dv}{dt} = F(t, v). \quad (2)$$

მექანიკის ამოცანებში, სხეულის მოძრაობის შესახებ ნიუტონის კანონების გამოყენებისას, სასარგებლო იქნება მოქმედების შემდეგი ზოგადი წესები:

- ა) განვსაზღვროთ შესასწავლ სხეულზე მოქმედი ყველა შესაბამისი ძალა. სასარგებლოა ავადოთ ობიექტის მარტივი დიაგრამა, რომელზედაც გამოსახული იქნება ეს ძალები;
- ბ) ავირჩიოთ სათანადო ღერძი ან კოორდინატთა სისტემა და წარმოვადგინოთ ობიექტის მოძრაობა და მასზე მოქმედი ძალები ამ სისტემაში. გვახსოვდეს, რომ ეს კოორდინატთა სისტემა უნდა იყოს ინერციული ათვლის სისტემა;
- გ) განვსაზღვროთ ობიექტის მოძრაობის განტოლება ნიუტონის მეორე კანონის გამოყენებით, რომელსაც აქვს (2) სახე.

მაგალითი 1. სიმძიმის ძალის მოქმედებით m მასის მქონე სხეული საწყისი v_0 სიჩქარით ვარდება დედამიწაზე. შევადგინოთ სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ დავუშვებთ, რომ მიზიდულობის ძალა მუდმივია და სხეულზე მოქმედი ჰაერის წინააღობის ძალა პროპორციულია სხეულის სიჩქარის.

ამოხსნა. სხეულზე მოქმედებს ორი ძალა: დედამიწის მიზიდულობის მუდმივი ძალა და ჰაერის წინაღობის ძალა, რომელიც სხეულის სიჩქარის პროპორციულია და მიმართულია სხეულის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. აქედან გამომდინარე, სხეულის მოძრაობის მიმართულება იქნება ვერტიკალური ღერძის გასწვრივ. ამ ღერძზე ავირჩიოთ სათავე, რომელიც შეესაბამება სხეულის საწყის მდებარეობას (საიდანაც სხეული იწყებს ვარდნას) და, ვთქვათ, $x(t)$ აღნიშნავს მანძილს, რომელიც სხეულმა გაიარა ვარდნისას t დროში (ნახ. 25)



ნახაზი 25. ვარდნილ სხეულზე მოქმედი ძალები.

სხეულზე ღერძის გასწვრივ მოქმედი ძალები შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად. მიზიდულობის ძალა $F_1 = mg$, სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა და ჰაერის წინაღობის ძალა $F_2 = -bv(t)$, სადაც b პროპორციულობის კოეფიციენტია ($b > 0$) და უარყოფითი ნიშანი ავიღეთ იმიტომ, რომ ჰაერის წინაღობა მოქმედებს სხეულის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. აქედან გამომდინარე, სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი იქნება

$$F = F_1 + F_2 = mg - bv(t). \quad (3)$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ ნიუტონის მეორე კანონს და (3) გამოსახულებას ჩავსვავთ (2)-ში, მივიღებთ

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv(t).$$

რადგან სხეულის საწყისი სიჩქარე იყო v_0 , ამიტომ ვარდნილი სხეულის სიჩქარის მოდელისათვის მივიღებთ ამოცანას საწყისი პირობით

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv(t), \quad v(0) = v_0, \quad (4)$$

სადაც g და b დადებითი მუდმივებია.

(4) მოდელში თუ გამოვიყენებთ განცალკევლადებიანი განტოლების ამოხსნის ან წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მეთოდს მივიღებთ

$$v(t) = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b} \right) e^{-bt/m}. \quad (5)$$

რადგან ჩვენ ავიღეთ $x=0$, როცა $t=0$, ამიტომ სხეულის მოძრაობის განტოლება შეიძლება განვსაზღვროთ $v = dx/dt$ ტოლობის ინტეგრებით. ამრიგად (5)-დან მივიღებთ

$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{mg}{b} t + \frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b} \right) e^{-bt/m} + C.$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში გავითვალისწინებთ, რომ $x=0$, როცა $t=0$, მივიღებთ

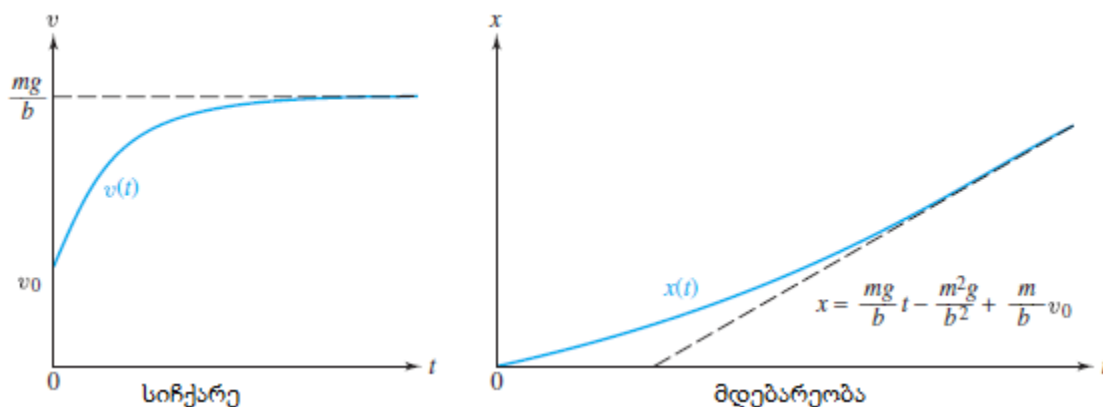
$$0 = -\frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b} \right) + C,$$

$$C = \frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b} \right).$$

საბოლოოდ სხეულის მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს

$$x(t) = \frac{mg}{b} t + \frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b} \right) (1 - e^{-bt/m}). \quad (6)$$

26-ე ნახაზზე მოცემულია სხეულის სიჩქარისა და მდებარეობის, როგორც t ცვლადის ფუნქციების, გრაფიკები.



ნახაზი 26. ვარდნილი სხეულის სიჩქარის და მდებარეობის გრაფიკები, როცა $v_0 < mg/b$.

შევნიშნოთ, რომ სიჩქარე $v(t)$ უახლოვდება ჰორიზონტალურ ასიმპტოტს $v = mg/b$, როცა $t \rightarrow +\infty$ და $x(t)$ მდებარეობა ასიმპტოტურად უახლოვდება წრფეს

$$x = \frac{mg}{b} t - \frac{m^2g}{b^2} + \frac{m}{b} v_0,$$

როცა $t \rightarrow +\infty$. სიჩქარის ჰორიზონტალური ასიმპტოტის mg/b სიდიდეს ეწოდება სხეულის **ზღვრული სიჩქარე**. ამასთან $v = mg/b = \text{constant}$ არის (4) განტოლების ამონახსნი. რადგან ორი ძალა გაწონასწორებულია ამიტომ ამას ეწოდება „წონასწორობის“ ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ ზღვრული სიჩქარე დამოკიდებულია სხეულის მასაზე, მაგრამ არა მის საწყის სიჩქარეზე. ნებისმიერი თავისუფლად ვარდნილი სხეულის სიჩქარე უახლოვდება ზღვრულ $v = mg / b$ მნიშვნელობას. უფრო მძიმე სხეულები, ხახუნის არსებობის შემთხვევაში უფრო სწრაფად ვარდებიან ვიდრე მსუბუქი, მაგრამ მოცემული სხეულისათვის ზღვრული სიჩქარე იგივეა, იმისგან დამოუკიდებლად, ვისროლეთ ის ზემოთ, ვისროლეთ ის ქვემოთ თუ იგი უბრალოდ ვარდება ნულოვანი საწყისი სიჩქარით.

ახლა, როდესაც გვაქვს ვარდნილი სხეულის მოძრაობის განტოლება, სხეულის სიჩქარის პროპორციული ჰაერის წინაღობის ძალით, შეგვიძლია, ვუპასუხოთ სხვადასხვა კითხვებს.

მაგალითი 2. მიწის ზედაპირიდან 500 მ-ის სიმაღლეზე ათავისუფლებენ 3 კგ მასის მქონე სხეულს და იგი იწყებს ვარდნას დედამიწაზე მიზიდულობის ძალის გავლენით. დავუშვათ, რომ მიზიდულობის ძალა მუდმივია, სიმძიმის ძალის აჩქარება $g = 9.81 \text{ მ/წმ}^2$ და სხეულზე მოქმედი ჰაერის წინაღობის ძალა პროპორციულია სხეულის სიჩქარის, პროპორციულობის $b = 3 \text{ ნ.წმ/მ კოეფიციენტი}$. განსაზღვრეთ როდის დაეცემა სხეული დედამიწაზე.

ამოხსნა. ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მაგალით 1-ში განხილული მოდელი, როცა $v_0 = 0$, $m = 3$, $b = 3$ და $g = 9.81$. ამ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლებიდან მივიღებთ

$$x(t) = \frac{(3)(9.81)}{3}t - \frac{(3)^2(9.81)}{3^2}(1 - e^{-3t/3}) = (9.81)t - (9.81)(1 - e^{-t}).$$

რადგან სხეული მიწაზე ვარდება 500 მ სიმაღლიდან, ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ როდის დაეცემა სხეული მიწაზე, თუ წინამდებარე განტოლებაში დავუშვებთ, რომ $x(t) = 500$ და მიღებულ განტოლებას ამოვხსნით t -ს მიმართ. გვექნება

$$500 = (9.81)t - 9.81 - (9.81)e^{-t}$$

ანუ

$$t + e^{-t} = \frac{509.81}{9.81} = 51.97;$$

აქ გამოთვლები შესრულებულია მეასედამდე სიზუსტით. სამწუხაროდ, ეს განტოლება არ შეგვიძლია ამოვხსნათ ცხადად t -ს მიმართ. რადგან e^{-t} იქნება ძალიან მცირე t -თან შედარებით, ამიტომ შეგვიძლია უკუვაგდოთ ეს წევრი და დავწეროთ, რომ $t = 51.97$.

მაგალითი 3. პარაშუტისტი, რომლის მასაა 75 კგ ხტება ვერტმფრენიდან, რომელიც მიწის ზედაპირიდან 4000 მ სიმაღლეზე იმყოფება. დავუშვათ, რომ დედამიწის მიზიდულობის ძალა, რომლის გავლენითაც პარაშუტისტი ვარდება დედამიწაზე,

მუდმივი სიდიდეა. ასევე დავუშვათ, რომ ჰაერის წინაღობის ძალა პროპორციულია პარაშუტისტის სიჩქარის, პროპორციულობის $b_1 = 15$ ნ.წმ/მ კოეფიციენტით, როცა პარაშუტი დახურულია, და პროპორციულობის $b_2 = 105$ ნ.წმ/მ კოეფიციენტით, როცა პარაშუტი გახსნილია. რამდენ წამში დაეშვება პარაშუტისტი დედამიწაზე, თუ იგი პარაშუტს გახსნის ვერტმფრენიდან გადმოხტომიდან 1 წთ-ის?

ამოხსნა. ჩვენ გვინტერესებს, როდის შეეხება პარაშუტისტი დედამიწას და არა სად შეეხება. ამრიგად, ჩვენ განვიხილავთ მისი დაშვების მხოლოდ ვერტიკალურ კომპონენტს. ამისათვის ჩვენ გვჭირდება გამოვიყენოთ ორი განტოლება: ერთი - პარაშუტის გახსნამდე მოძრაობის აღმწერი განტოლება და მეორე - პარაშუტის გახსნის შემდეგ მოძრაობის აღმწერი განტოლება. პარაშუტის გახსნამდე უნდა გამოვიყენოთ მოდელი, რომელიც მსგავსია მაგალით 1-ში გამოყენებული მოდელის, როცა $v_0 = 0$, $m = 75$ კგ, $b = b_1 = 15$ ნ.წმ/მ და $g = 9.81$ მ/წმ². თუ დავუშვებთ, რომ $x_1(t)$ არის მანძილი, რომელიც ვარდნისას გაიარა პარაშუტისტმა t წამში, მაშინ $v_1 = dx_1 / dt$ და (5) და (6) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$v_1(t) = \frac{(75)(9.81)}{15} (1 - e^{-(15/75)t}) = (49.05)(1 - e^{-0.2t})$$

და

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{(75)(9.81)}{15} t - \frac{(75)^2 (9.81)}{(15)^2} (1 - e^{-(15/75)t}) \\ &= 49.05t - 245.25(1 - e^{-0.2t}). \end{aligned}$$

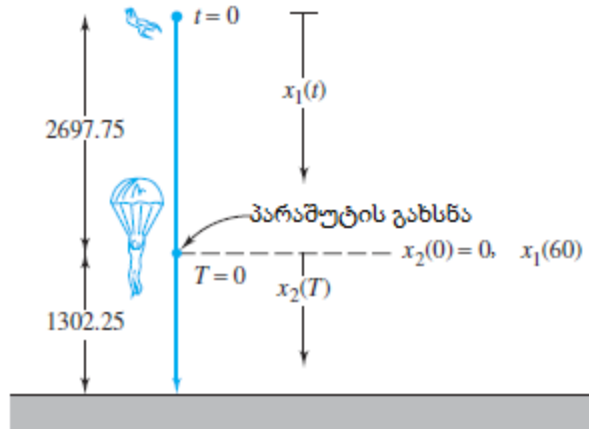
აქედან გამომდინარე, ერთი წუთის შემდეგ, როცა $t = 60$ წმ., პარაშუტისტის ვარდნის სიჩქარეა

$$v_1(60) = (49.05)(1 - e^{-0.2(60)}) = 49.05 \text{ მ/წმ},$$

და გავლილი აქვს მანძილი

$$x_1(60) = (49.05)(60) - 245.25(1 - e^{-0.2(60)}) = 2697.75 \text{ მ}.$$

ამის შემდეგ, როცა პარაშუტი გაიხსნება პარაშუტისტი იქნება $4000 - 2697.75 = 1302.25$ მ სიმაღლეზე დედამიწის ზედაპირიდან და ვარდნის საწყისი სიჩქარე ექნება 49.05 მ/წმ. პარაშუტის გახსნის შემდეგ მოძრაობის განტოლების განსაზღვრისათვის ვთქვათ $x_2(T)$ აღნიშნავს პარაშუტისტის მდებარეობას T წამის შემდეგ პარაშუტის გახსნიდან ($T = t - 60$). ავიღოთ $x_2(0) = 0$ (ნახ. 27).



ნახაზი 26. პარაშუტისტის ვარდნა

შემდეგ, თუ დავუშვებთ, რომ პარაშუტისტის საწყისი სიჩქარე პარაშუტის გახსნის შემდეგ იგივეა რაც პარაშუტისტის საბოლოო სიჩქარე, ვიდრე პარაშუტი გაიხსნებოდა, მაშინ გვექნება $x_2'(0) = x_1'(60) = 49.05$ მ/წმ. რადგან პარაშუტისტზე მოქმედი ძალა იგივეა რაც მაგალით 1-ში სხეულზე მოქმედი ძალები, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია კვლავ გამოვიყენოთ (5) და (6) განტოლებები. რადგან $v_0 = 49.05$, $m = 75$ კგ, $b = b_2 = 105$ ნ.წმ/მ და $g = 9.81$ მ/წმ², ამიტომ (6) ტოლობიდან გვექნება

$$x_2(T) = \frac{(75)(9.81)}{105}T + \frac{75}{105} \left[49.05 - \frac{(75)(9.81)}{105} \right] (1 - e^{-(105/75)T})$$

$$= 7.05T + 30.03(1 - e^{-1.4T}).$$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ, თუ როდის შეეხება პარაშუტისტი დედამიწას, ჩვენ უნდა დავუშვათ, რომ $x_2(T) = 1302.25$. ეს წარმოადგენს სიმაღლეს დედამიწის ზედაპირიდან, როდესაც პარაშუტი გაიხსნა. წინამდებარე ტოლებიდან მივიღებთ

$$7.05T + 30.03 - 30.03e^{-1.4T} = 1302.25$$

$$T - 4.28e^{-1.4T} - 181.49 = 0. \quad (7)$$

კვლავ არ შეგვიძლია ამოვხსნათ უკანასკნელი განტოლება T -ს მიმართ ცხადად. მიუხედავად ამისა, შევნიშნოთ, რომ $e^{-1.4T}$ არის ძალიან მცირე T -ს იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც ახლოა 181.49-თან. ამიტომ შეგვიძლია უგულვებელვყოთ ექსპონენციალური წევრი და ავიღოთ $T = 181.49$. მაშინ პარაშუტისტი დაეშვება დედამიწაზე 181.49 წამში პარაშუტის გახსნიდან ანუ 241.49 წამში ვერტმფრენიდან გადმოხტომის შემდეგ.

T -ს გამოთვლის დროს (7) განტოლებაში დავინახეთ, რომ ექსპონენციალური წევრი $e^{-1.4T}$ ძალიან მცირეა. შესაბამისად, თუ (5) განტოლებაში ექსპონენციალურ წევრს არ

მივაქცევთ ყურადღებას ვნახავთ, რომ პარაშუტისტის სიჩქარე დედამიწაზე დაშვების მომენტში იქნება

$$\frac{mg}{b_2} = \frac{(75)(9.81)}{105} = 7.01 \text{ მ/წმ},$$

რომელიც მისი ვარდნის ზღვრული სიჩქარის ტოლია, როცა პარაშუტი გახსნილია.

მაგალითი 4. ზოგიერთ შემთხვევებში სხეულზე მოქმედი წინაღობის ძალა პროპორციულია $|v|$ -ის ხარისხის, რომელიც განსხვავდება ერთისაგან. მაშინ როცა სიჩქარე დადებითია, ვარდნილი სხეულისათვის ნიუტონის მეორე კანონი ასე განზოგადდება

$$m \frac{dv}{dt} = mg - b v^r, \quad (8)$$

სადაც m და g შესაბამისად სხეულის მასა და სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, b ($b > 0$) და ხარისხის მაჩვენებელი r ექსპერიმენტით დადგენილი მუდმივებია. უფრო ზოგადად წინაღობის ძალა შეიძლება ასე შეიძლება ჩაიწეროს $-b|v|^r \text{sign}(v)$. ვიპოვოთ (8) განტოლების ამონახსნი, როცა $r = 2$.

ამოხსნა. (8) განტოლების დადებითი წონასწორული ამონახსნი (როცა ძალები გაწონასწორებულია ანუ განტოლების მარჯვენა მხარე ნულია) არის $v = v_0 = \sqrt{mg/b}$. აქედან $mg = bv_0$ და (8) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$v' = b(v_0^2 - v^2) / m.$$

რადგან ეს წარმოადგენს განცალკევებადგებად განტოლებას, ამიტომ იგი ასე გადავწეროთ

$$\frac{dv}{v_0^2 - v^2} = \frac{b}{m} dt.$$

თუ გამოვიყენებთ ინტეგრების ფორმულას

$$\int \frac{dv}{v_0^2 - v^2} = \frac{1}{2v_0} \ln \left| \frac{v_0 + v}{v_0 - v} \right| + C,$$

მაშინ მივიღებთ

$$\left| \frac{v_0 + v}{v_0 - v} \right| = C_2 e^{2v_0 bt/m},$$

საიდანაც გამარტივებით მივიღებთ

$$v = v_0 \frac{C_3 - e^{-2v_0 b t/m}}{C_3 + e^{-2v_0 b t/m}}.$$

აქ $C_3 = C_2 \operatorname{sign}[(v_0 + v)/(v_0 - v)]$ განისაზღვრა საწყისი პირობებით. ამრიგად, ვხედავთ, რომ v სიჩქარე კვლავ მიისწრაფვის ზღვრული v_0 სიჩქარისაკენ, როცა $t \rightarrow \infty$.

სავარჯიშო 11

ქვემოთ ამოცანებში ყველგან ვიგულისხმობთ, რომ მიზიდულობის ძალა მუდმივია და სიმძიმის ძალის აჩქარება $g = 9.81 \text{ მ/წმ}^2$ MKS მეტრულ სისტემაში და $g = 32 \text{ ფუტი/წმ}^2$ შეერთებული შტატების ჩვეულებრივ სისტემაში (U.S. Customary System).

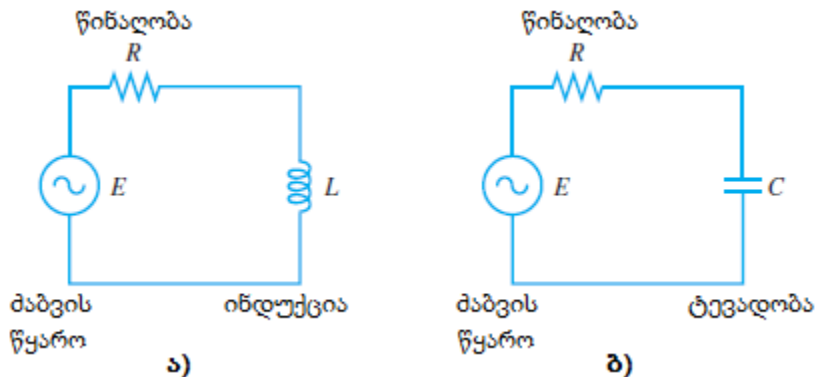
1. მიწის ზედაპირიდან 1000 მ-ის სიმაღლეზე ათავისუფლებენ 5 კგ მასის მქონე სხეულს და იგი იწყებს ვარდნას დედამიწაზე მიზიდულობის ძალის გავლენით. დავუშვათ, რომ სხეულზე მოქმედი ჰაერის წინააღობის ძალა პროპორციულია სხეულის სიჩქარის, პროპორციულობის $b = 50 \text{ ნ.წმ/მ}$ კოეფიციენტით. განსაზღვრეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება. როდის დაეცემა სხეული დედამიწაზე?
2. მიწის ზედაპირიდან 500 ფუტის სიმაღლეზე ათავისუფლებენ 400 გირვანქა მასის მქონე სხეულს და იგი იწყებს ვარდნას დედამიწაზე მიზიდულობის ძალის გავლენით. დავუშვათ, რომ სხეულზე მოქმედი ჰაერის წინააღობის ძალა არის $-10v$ გირვანქა, სადაც v ფუტი/წმ სხეულის სიჩქარეა. განსაზღვრეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება. როდის დაეცემა სხეული დედამიწაზე?
3. 5 კგ მასის მქონე სხეული საწყისი 50 მ/წმ სიჩქარით იწყებს ვარდნას დედამიწაზე მიზიდულობის ძალის გავლენით. დავუშვათ, რომ სხეულზე მოქმედი ჰაერის წინააღობის ძალა არის $-10v$ ნიუტონი, სადაც v მ/წმ სხეულის სიჩქარეა. განსაზღვრეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება. როდის დაეცემა სხეული დედამიწაზე, თუ იგი საწყის მომენტში დედამიწის ზედაპირიდან 1000 მ-ის სიმაღლეზე იმყოფებოდა.
4. 8 კგ მასის მქონე სხეული აისროლეს ზემოთ საწყისი 20 მ/წმ სიჩქარით და შემდეგ იგი იწყებს ვარდნას დედამიწაზე მიზიდულობის ძალის გავლენით. დავუშვათ, რომ სხეულზე მოქმედი ჰაერის წინააღობის ძალა არის $-16v$ ნიუტონი, სადაც v მ/წმ სხეულის სიჩქარეა. განსაზღვრეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება. როდის დაეცემა სხეული დედამიწაზე, თუ იგი საწყის მომენტში დედამიწის ზედაპირიდან 1000 მ-ის სიმაღლეზე იმყოფებოდა.

5. პარაშუტისტი, რომლის მასაა 75 კგ ხტება ვერტმფრენიდან, რომელიც მიწის ზედაპირიდან 2000 მ სიმაღლეზე იმყოფება. გადმოხტომის შემდეგ პარაშუტისტი დედამიწის მიზიდულობის ძალის გავლენით იწყებს ვარდნას დედამიწაზე. დავუშვათ, რომ ჰაერის წინაღობის ძალა პროპორციულია პარაშუტისტის სიჩქარისა, პროპორციულობის $b_1 = 30$ ნ.წმ/მ კოეფიციენტით, როცა პარაშუტი დახურულია, და პროპორციულობის $b_2 = 90$ ნ.წმ/მ კოეფიციენტით, როცა პარაშუტი გახსნილია. თუ ვერტმფრენიდან გადმოხტომის შემდეგ პარაშუტისტი არ გახსნის პარაშუტს, ვიდრე მისი სიჩქარე არ მიაღწევს 20 მ/წმ-ს, მაშინ რამდენ წამში დაეშვება იგი დედამიწაზე?
6. პარაშუტისტი, რომლის მასაა 100 კგ ხტება ვერტმფრენიდან, რომელიც მიწის ზედაპირიდან 3000 მ სიმაღლეზე იმყოფება. გადმოხტომის შემდეგ პარაშუტისტი დედამიწის მიზიდულობის ძალის გავლენით იწყებს ვარდნას დედამიწაზე. დავუშვათ, რომ ჰაერის წინაღობის ძალა პროპორციულია პარაშუტისტის სიჩქარისა, პროპორციულობის $b_3 = 20$ ნ.წმ/მ კოეფიციენტით, როცა პარაშუტი დახურულია, და პროპორციულობის $b_4 = 100$ ნ.წმ/მ კოეფიციენტით, როცა პარაშუტი გახსნილია. თუ ვერტმფრენიდან გადმოხტომის შემდეგ პარაშუტისტი გახსნის პარაშუტს 30 წამის გასვლის შემდეგ, მაშინ რამდენ წამში დაეშვება იგი დედამიწაზე? თუ ვერტმფრენიდან გადმოხტომის შემდეგ პარაშუტისტი არ გახსნის პარაშუტს 1 წუთის განმავლობაში, მაშინ რამდენ წამში დაეშვება იგი დედამიწაზე?
7. 100 კგ მასის მქონე სხეულს ნავიდან უშვებენ წყალში და იგი იწყებს ჩაძირვას. სიმძიმის ძალის გავლენით სხეული იძირება წყალში, მაგრამ ამავე დროს მასზე მოქმედებს ამომგდები ძალა, რომელიც სხეულის წონის $1/40$ ნაწილს შეადგენს (წონა = mg). განსაზღვრეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ წყალის წინაღობა წარმოშობს ძალას, რომელიც სხეულის სიჩქარის პროპორციულია, პროპორციულობის 10 ნ.წმ/მ კოეფიციენტით. რამდენი წამის შემდეგ იქნება სხეულის სიჩქარე 70 მ/წმ?
8. წყლის ზედაპირიდან 30 მ სიმაღლის პლატფორმიდან 2 კგ მასის მქონე სხეულს ათავისუფლებენ და იგი სიმძიმის ძალის გავლენით იწყებს ვარდნას. როცა სხეული სეეხება წყლის ზედაპირს, შემდეგ სიმძიმის ძალით იგი იწყებს ჩაძირვას წყალში, თუმცა მასზე ამავე დროს მოქმედებს ამომგდები ძალაც. ვთქვათ, რომ სიმძიმის ძალა მუდმივია, მოძრაობის რაოდენობა უცვლელია სხეულის წყალთან შეჯახებისას, ამომგდები ძალა სხეულის წონის $1/2$ ნაწილს შეადგენს (წონა = mg) და ჰაერის თუ წყლის წინაღობის ძალა პროპორციულია

სხეულის სიჩქარისა, შესაბამისად, პროპორციულობის $b_1 = 10$ ნ.წმ/მ კოეფიციენტით ჰაერში და $b_2 = 100$ ნ.წმ/მ კოეფიციენტით წყალში. განსაზღვრეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება. რა იქნება სხეულის სიჩქარე ვარდნის დაწყებიდან 1 წუთის შემდეგ?

14. ელექტრული წრედები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გამოყენებას მარტივ ელექტრულ წრედებში, რომლებიც შეიცავენ ძაბვის წყაროს (მაგალითად, ბატარეა, გენერატორი), წინაღობას, და ან ინდუქციურ კოჭას ან კონდენსატორს. ეს ე.წ. **RL (Resistor–Inductor circuit)** და **RC (Resistor–Capacitor circuit)** წრედები ნაჩვენებია 27-ე ნახაზზე. უფრო ზოგად წრედებს შემდგომში განვიხილავთ.



ნახაზი 27. ა) **RL** წრედი და **RC** წრედი.

ფიზიკური პრინციპები, რომლებიც არეგულირებენ ელექტრულ წრედებს, ჩამოყალიბებული იყო **კირხჰოფის** მიერ 1859 წელს. ეს პრინციპებია:

1. **კირხჰოფის დენის კანონი.** ნებისმიერ კვანძით წერტილებში შემავალი და გამავალი დენების ალგებრული ჯამი ნულის ტოლია;
2. **კირხჰოფის ძაბვის კანონი.** პოტენციალის მყისიერი ცვლილებების (ძაბვის ვარდნების) ალგებრული ჯამი ნებისმიერი ჩაკეტილი წრედისათვის უნდა იყოს ნულის ტოლი. ეს წესი ასეც ყალიბდება: ნებისმიერ ჩაკეტილ კონტურში ძაბვების ვარდნათა ჯამი ამ კონტურში ჩართული წყაროების ემძ-ების ალგებრული ჯამის ტოლია.

კირხჰოფის დენის კანონი გულისხმობს, რომ 27-ე ნახაზის თითოეული წრედის ყოველ ელემენტში გადის ერთი და იგივე დენი.

იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ კირჰოფის ძაბვის კანონი, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ ძაბვის ვარდნა წრედის თითოეულ ელემენტში. ძაბვის ამ ფორმულას ქვემოთ ამოვწერთ.

ა) ომის კანონის თანახმად, E_R ძაბვის ვარდნა წინაღობაში პროპორციულია წინაღობაში გამავალი I დენისა

$$E_R = RI .$$

პროპორციულობის R კოეფიციენტს ეწოდება **წინაღობა**.

ბ) ფარადეისა და ლენცის კანონების გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ E_L ძაბვის ვარდნა ინდუქციურ კოჭაში პროპორციულია დენის ცვლილების მყისიერი სიჩქარის

$$E_L = L \frac{dI}{dt} .$$

პროპორციულობის L კოეფიციენტს ეწოდება **ინდუქციურობა**.

გ) E_C ძაბვის ვარდნა კონდენსატორში პროპორციულია კონდენსატორის ელექტრული q მუხტისა

$$E_C = \frac{1}{C} q .$$

C მუდმივს ეწოდება **ტევადობა**.

ელექტრულ წრედებში გამოყენებული ზოგადი ერთეულები და სიმბოლოები მოცემულია შემდეგ ცხრილში.

სიდიდე	აღნიშვნა	ერთეული	სიმბოლო
ძაბვის წყარო	E	ძაბვა (V)	 გენერატორი
			 ბატარეა
წინაღობა	R	ომი (Ω)	
ინდუქციურობა	L	ჰენრი (H)	
ტევადობა	C	ფარადი (F)	
მუხტი	q	კულონი (C)	
დენი	I	ამპერი (A)	

იგულისხმება, რომ ძაბვის წყარო წრედს აწვდის ძაბვას ან პოტენციალურ ენერგიას. თუ $E(t)$ აღნიშნავს დროის t მომენტისათვის წრედში მიწოდებულ ძაბვას, მაშინ კირჰოფის ძაბვის კანონის გამოყენებით RL წრედისათვის 27 ა) ნახაზიდან, გვექნება

$$E_L + E_R = E(t) . \quad (1)$$

თუ ამ განტოლებაში ჩავსვავთ E_L და E_R გამოსახულებებს მივიღებთ

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t) . \quad (2)$$

შევნიშნოთ, რომ ეს განტოლება წრფივია, ამიტომ თუ მას გადავწერთ სტანდარტული ფორმით, მაშინ მაინტეგრებელ მამრავლს ექნება სახე

$$\mu(t) = e^{\int (R/L) dt} = e^{Rt/L},$$

რომლის გამოყენებით მივიღებთ (2) განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$I(t) = e^{-Rt/L} \left[\int e^{Rt/L} \frac{E(t)}{L} dt + K \right]. \quad (3)$$

RL წრედისათვის, როგორც წესი, მოცემულია საწყისი დენი $I(0)$, როგორც საწყისი პირობა (2) დიფერენციალური განტოლებისათვის.

მაგალითი 1. RL წრედს, რომელშიც გვაქვს 1Ω რეზისტორი (წინააღმდეგობის კოჭა) და $0.01 H$ ინდუქტორი, მიეწოდება ძაბვა $E(t) = \sin 100t V$. განსაზღვრეთ ძაბვა რეზისტორსა და ინდუქტორში და დენი, თუ ინდუქტორის საწყისი დენი ნულის ტოლია.

ამოხსნა. (3) ფორმულიდან, ინტეგრების ცხრილის გამოყენებით, (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-100t} \left[\int e^{100t} \frac{\sin 100t}{0.01} dt + K \right] = e^{-100t} \left[100 \frac{e^{100t} (100 \sin 100t - 100 \cos 100t)}{10000 + 10000} + K \right] \\ &= \frac{\sin 100t - \cos 100t}{2} + K e^{-100t} \end{aligned}$$

როცა $I(0) = 0$, მაშინ $-1/2 + K = 0$, საიდანაც $K = 1/2$, და დენისთვის საბოლოოდ მივიღებთ ფორმულას

$$I(t) = 0.5(\sin 100t - \cos 100t + e^{-100t}).$$

ძაბვები რეზისტორში და ინდუქტორში შესაბამისად იქნება

$$\begin{aligned} E_R(t) &= RI(t) = I(t), \\ E_L(t) &= L \frac{dI}{dt} = 0.5(\cos 100t + \sin 100t - e^{-100t}). \end{aligned}$$

ახლა დავუბრუნდეთ 27 ბ) ნახაზზე მოცემულ RC წრედს. კირხჰოფის ძაბვის კანონის გამოყენებით მივიღებთ

$$RI + q / C = E(t) .$$

რადგან კონდენსატორის დენი არის მისი მუხტის ცვლილების სიჩქარე $I = dq / dt$, ამიტომ გვექნება

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t) . \quad (4)$$

(4) წარმოადგენს RC წრედის ძირითად დიფერენციალურ განტოლებას. ამ განტოლების საწყისი პირობა იქნება კონდენსატორის საწყისი q მუხტი დროის $t = 0$ მომენტისათვის.

მაგალითი 2. ვთქვათ, C ფარადი ტევადობის კონდენსატორის საწყისი მუხტი არის Q კულონი. მუხტის შესაცვლელად გამოიყენება წყარო მუდმივი V ვოლტი ძაბვით და რეზისტორი R ომი წინააღობით. ვიპოვოთ კონდენსატორის მუხტი $t > 0$ მომენტისათვის.

ამოხსნა. რადგან $E(t) = V$ მუდმივია (4) განტოლებაში, ამიტომ მისი ზოგადი ამონახსნი მარტივად მიიღება. კერძოდ, მას ექნება სახე

$$q(t) = CV + Ke^{-t/RC} .$$

საწყისი პირობის გამოყენებით აქ შემავალი ნებისმიერი K მუდმივი ასე განისაზღვრება $Q = CV + K$ ანუ $K = Q - CV$. ამტომ საბოლოოდ გვექნება

$$q(t) = CV + (Q - CV)e^{-t/RC} .$$

ამრიგად, კონდენსატორის მუხტი ექსპონენციალურად იცვლება Q -დან CV -მდე როცა დრო იზრდება.

თუ მაგალით 2-ში ავიღებთ $V = 0$, დავინახავთ, რომ დროის მუდმივი ე. ი. დრო რომელიც საჭიროა კონდენსატორის მუხტის დაცემისათვის მისი საწყისი მნიშვნელობის $1/e$ ნაწილამდე, არის RC . ამრიგად, კონდენსატორი არის ენერგიის საცავი მოწყობილობა, რომლიდანაც ხდება ენერგიის გადინება. მიუხედავად გარემომცველი ჰაერის მაღალი ხვედრითი წინააღობისა, კონდენსატორი შეიძლება მაინც განიმუხტოს, კერძოდ, ნესტიან ამინდში. კონდენსატორები გამოიყენება მობილურ ტელეფონებში ბატარეის ელექტრული ენერგიის შესანახად, როდესაც ტელეფონი იმყოფება (მეტ-ნაკლებად) სიგნალის მოლოდინის რეჟიმში და შემდეგ ენერგიით უზრუნველყოფს ბატარეას სიგნალის გადაცემის რეჟიმში ყოფნისას .

RL წრედში ინდუქტორის დენის დროის მუდმივი მაგალით 1-დან შეიძლება განვსაზღვროთ. კერძოდ, იგი არის L/R . RL წრედის გამოყენების მაგალითია ელექტრული სანთელის მოქმედება შიდაწვის ძრავაში. თუ ძაბვის წყარო აწვდის არანულოვან დენს ინდუქტორს და წყარო მყისიერად ითიშება, მაშინ დენის მყისიერი ცვლილება იწვევს dI/dt სიდიდის უეცარ ზრდას და $E_L = LdI/dt$ ფორმულის შესაბამისად ინდუქტორი გამოიმუშავებს იმპულსურ ძაბვას, რომელიც საკმარისია ელექტრული ნაპერწკლის წარმოსაქმნელად სანთლის კონტაქტებს შორის, რაც იწვევს ბენზინის ნარევის აფეთქებას.

თუ ერთ ელექტრულ წრედში ერთდროულად გვექნება ინდუქტორიც და კონდენსატორიც, მაშინ ასეთი RLC წრედის ძირითადი დიფერენციალური განტოლება იქნება მეორე რიგის.

სავარჯიშო 12

1. RL წრედში, რომელშიც გვაქვს 5Ω რეზისტორი და $0.05 H$ ინდუქტორი, $t = 0$ მომენტისათვის მიედინება $1 A$ დენი. ამავე დროს, წრედს მიეწოდება ძაბვა $E(t) = \sin 100t V$. განსაზღვრეთ დენი და ძაბვა ინდუქტორში.
2. RC წრედს, რომელშიც გვაქვს 1Ω რეზისტორი და $0.000001 F$ კონდენსატორი, მიეწოდება $E(t) = \sin 100t V$ ძაბვა. განსაზღვრეთ ძაბვები და დენი რეზისტორსა და კონდენსატორში, თუ კონდენსატორის საწყისი ძაბვა ნულის ტოლია.
3. თუ RL წრედში წინაღობა ნულია (ნახაზი 27 ა), მაშინ აჩვენეთ, რომ $I(t)$ დენი პირდაპირპროპორციულია მოდებული $E(t)$ ძაბვიდან ინტეგრალისა. ანალოგიურად, აჩვენეთ, რომ თუ RC წრედში (ნახაზი 27 ბ) წინაღობა ნულია, მაშინ დენი პირდაპირპროპორციულია მოდებული ძაბვის წარმოებულია (საინჟინრო გამოყენებებში ხშირად აუცილებელია, გამოვიმუშაოთ ძაბვა ვიდრე დენი, რომელიც არის სხვა ძაბვის ინტეგრალი ან წარმოებული).

15. ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდი

მიუხედავად იმისა, რომ ადრე განხილული დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ანალიზური ტექნიკა სასარგებლო იყო სხვადასხვა მათემატიკური მოდელებისათვის, დიფერენციალური განტოლებების უმრავლესობა, რომლებიც გამოყენებებში გვხვდება, არ შეგვიძლია ამოვხსნათ არაცხადი ან ცხადი სახით. ეს განსაკუთრებით მართებულია მაღალი რიგის განტოლებებისთვის და განტოლებათა სისტემებისთვის, რომლებსაც მოგვიანებით შევისწავლით. ამ პარაგრაფში და შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მეთოდს, რომლის გამოყენებით მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის საწყისი პირობით ამოცანის ამონახსნის რიცხვით მიახლოებას. ჩვენი მიზანია ავაგოთ ალგორითმები, რომლებიც შეიძლება გამოვიყენოთ კალკულატორით ან კომპიუტერით სარგებლობისას. ეს ალგორითმები ბუნებრივად შეგვიძლია განვაზოგადოთ მაღალი რიგის განტოლებებისათვის. თითოეული მეთოდის მკაცრი მათემატიკური დაფუძნება დეტალურადაა აღწერილი რიცხვითი ანალიზის კურსებში.

განვიხილოთ ამოცანა საწყისი პირობით

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

დავუშვათ, რომ f და $\partial f / \partial y$ უწყვეტი ფუნქციებია $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ ოთკუთხედში, რომელიც შეიცავს (x_0, y_0) წერტილს. ამ შემთხვევაში თეორემა 1-ის ძალით, რომელიც ზემოთ ჩამოვაცალიბეთ, (1) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი $\phi(x)$ ამონახსნი რაიმე $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ინტერვალში, სადაც δ დადებითი რიცხვია. რადგან δ წინასწარ უცნობია, ამიტომ არ გვაქვს იმის გარანტია, რომ ამონახსნი იარსებებს მთელს (a, b) ინტერვალზე. თუმცა, როცა $\partial f / \partial y$ უწყვეტი და შემოსაზღვრულია ვერტიკალურ ზოლში

$$S = \{(x, y) : a < x < b, -\infty < y < \infty\},$$

მაშინ (1) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი მთელს (a, b) ინტერვალზე. რიცხვითი მეთოდების აღწერის დროს ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ეს უკანასკნელი მოთხოვნები f ფუნქციაზე სრულდება და რომ f ფუნქციას გააჩნია უფრო მაღალი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულებიც.

ჩვენ ადრე შევისწავლეთ მიმართულებათა ველის ცნება, რათა აგვეგო (1) ამოცანის ამონახსნის აპროქსიმაციის სქემა. ეს სქემა, რომელიც *ეილერის მეთოდის*

სახელწოდებით არის ცნობილი ერთერთი ძირითადი მეთოდია, ამიტომ აზრი აქვს ვიმსჯელოთ მის უპირატესობებზე, ნაკლზე ან მის შესაძლო გაუმჯობესებაზე. დავიწყეთ ეილერის იმ მეთოდის დაფუძნებით, რომელიც განსხვავდება ადრე განხილულისაგან.

ვთქვათ, $h > 0$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია (h -ს ეწოდება *ბიჯი*) და განვიხილოთ თანაბრად დაშორებული წერტილები

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

ჩვენი მიზანია, მივიღოთ (1) ამოცანის $\phi(x)$ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობები x_n წერტილებში, რომლებიც ეკუთვნიან (a, b) ინტერვალს. სახელდობრ, ჩვენ აღვწერთ მეთოდს, რომელიც მოგვცემს $y_0, y_1, y_2, \dots$ მნიშვნელობებს, რომლებიც $\phi(x)$ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობებია შესაბამისად $x_0, x_1, x_2, \dots$ წერტილებში ანუ

$$y_n \approx \phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ცხადია, პირველი „მიახლოება“ y_0 ზუსტი მნიშვნელობაა, რადგან $y_0 = \phi(x_0)$ მოცემულია საწყისი პირობით. ამრიგად, ჩვენ უნდა აღვწეროთ, თუ როგორ გამოვთვალოთ $y_1, y_2, \dots$

ეილერის მეთოდის ასაგებად დავიწყეთ (1) განტოლების ორივე მხარის ინტეგრებით x_n -დან x_{n+1} -მდე, მივიღებთ

$$\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi'(t) dt = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt,$$

სადაც y -ის ნაცვლად ჩავსვით $\phi(x)$. განვსაზღვროთ ამ ტოლობიდან $\phi(x_{n+1})$ მივიღებთ

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt. \quad (3)$$

ცხადია, თუ არ ვიცით $\phi(t)$, ჩვენ ვერ ვაინტეგრებთ $f(t, \phi(t))$ ფუნქციას. აქედან გამომდინარე, ჩვენ მაშინ მიახლოებით უნდა გამოვთვალოთ ინტეგრალი (3) ტოლობაში. დაუშვათ, უკვე ვიცით $\phi(x_n)$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა $y_n \approx \phi(x_n)$,

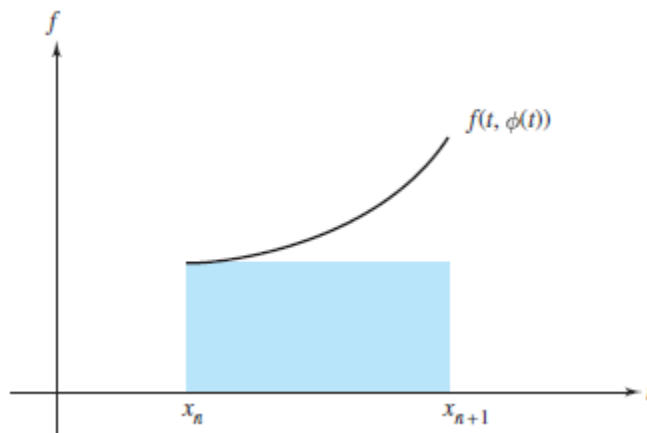
მაშინ $f(t, \phi(t))$ ფუნქციიდან ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობა მართკუთხედების წესით იქნება $[x_n, x_{n+1}]$ ფუძისა და $f(x_n, \phi(x_n))$ სიმაღლის (ნახ. 28) მქონე მართკუთხედის ფართობის ტოლი

$$\phi(x_{n+1}) \approx \phi(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f(x_n, \phi(x_n)).$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში $\phi(x_n)$ -ის ნაცვლად ჩავსვით y_n -ს და $x_{n+1} - x_n$ სხვაობის ნაცვლად h -ს, მივიღებთ რიცხვით სქემას

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

რომელსაც ეილერის მეთოდი ეწოდება.



ნახაზი 28. მართკუთხედით აპროქსიმაცია.

თუ (4) ტოლობაში ჩავსვათ $n=0$ -ს და გავიხსენებთ, რომ y_0 -ის მნიშვნელობა მოცემულია საწყისი პირობით, მაშინ გამოვითვლით $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. ასევე y_1 -ის გამოყენებით გამოვითვლით $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ და ა.შ.

როგორც ადრე ვნახეთ, თუ გვინდა ეილერის მეთოდის გამოყენებით ვიპოვოთ საწყისი პირობიანი ამოცანის ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა კონკრეტულ, ვთქვათ, $x=c$ წერტილში, მაშინ, პირველ რიგში, ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ შესაბამისი ბიჯის ზომა ისე, რომ შესრულდეს ტოლობა $x_0 + Nh = c$, რაიმე მთელი N რიცხვისთვის. მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ $N=1$ და $h=c-x_0$ იმისათვის, რომ მივიღეთ მიახლოებითი მნიშვნელობამდე ზუსტად ერთი ბიჯით

$$\phi(c) = \phi(x_0 + h) \approx y_1.$$

თუ ამის ნაცვლად გვინდა ავიღოთ მაგალითად, 10 ბიჯი ეილერის მეთოდში, მაშინ ავირჩევთ $h = (c - x_0) / 10$ და საბოლოოდ მივიღებთ

$$\phi(c) = \phi(x_0 + 10h) = \phi(x_{10}) \approx y_{10}.$$

ზოგადად, h -ის ზომის მიხედვით ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ $\phi(c)$ -ს სხვადასხვა მიახლოება. ალბათ, მართებულია, ვიფიქროთ, რომ როცა h მცირდება (ანუ N იზრდება), მაშინ ეილერის აპროქსიმაცია უახლოვდება $\phi(c)$ -ს ზუსტ მნიშვნელობას. მეორე მხრივ, როცა h მცირდება, მაშინ გამოთვლათა რაოდენობა (და ასევე გამოთვლის პროცესის ღირებულებაც) იზრდება და, აქედან გამომდინარე, მანქანური შეცდომაც რიცხვების დამრგვალების შედეგად იზრდება. ამრიგად, აპროქსიმაციის სქემებში ძალიან მნიშვნელოვანია, გავანალიზოთ, როგორ იცვლება ცდომილება h -ის ცვლილებასთან ერთად.

თუ ეილერის მეთოდს გამოვიყენებთ

$$y' = y, \quad y(0) = 1, \quad (5)$$

ამოცანის $\phi(x) = e^x$ ამონახსნის აპროქსიმაციისათვის $x=1$ წერტილში, მაშინ ჩვენ მივიღებთ $e = \phi(1)$ მუდმივის მიახლოებით მნიშვნელობას. აღმოჩნდა, რომ ეს აპროქსიმაცია მიიღებს მარტივ ფორმას, რომელიც გვაძლევს შესაძლებლობას მიახლოებითი გამოთვლისას ცდომილება შევადაროთ h ბიჯის ზომას. მართლაც, (5) თანაფარდობის მიხედვით $f(x, y) = y$ და (4) სქემის შესაბამისად გვექნება

$$y_{n+1} = y_n + hy_n = (1+h)y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

რადგან $y_0 = 1$, ამიტომ

$$\begin{aligned} y_1 &= (1+h)y_0 = 1+h, \\ y_2 &= (1+h)y_1 = (1+h)(1+h) = (1+h)^2, \\ y_3 &= (1+h)y_2 = (1+h)(1+h)^2 = (1+h)^3 \end{aligned}$$

და, ზოგადად,

$$y_n = (1+h)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

(5) ამოცანაში გვაქვს $x_0 = 0$, ამიტომ $x=1$ წერტილში აპროქსიმაციისათვის, ჩვენ უნდა დაუშვათ $nh=1$. ამრიგად h უნდა იყოს მთელი რიცხვის შებრუნებული $h=1/n$. თუ (6) განტოლებაში n -ის ნაცვლად ჩავსვათ $1/h$ -ს, დავინახავთ, e რიცხვის კარგად ნაცნობ აპროქსიმაციას $(1+h)^{1/h}$. ქვემოთ მოცემულ ცხრილში ამოწერილია ეს მიახლოებითი მნიშვნელობები $h=1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ ბიჯებისათვის, შესაბამისი $e - (1+h)^{1/h}$ ცდომილებებით.

$e = 2.71828 \dots$			
h	ეილერის აპროქსიმაცია $(1+h)^{1/h}$	ცდომილება $e - (1+h)^{1/h}$	ცდომილება/ h
1	2.00000	0.71828	0.71828
10^{-1}	2.59374	0.12454	1.24539
10^{-2}	2.70481	0.01347	1.34680
10^{-3}	2.71692	0.00136	1.35790
10^{-4}	2.71815	0.00014	1.35902

ამ ცხრილის მეორე და მესამე სვეტიდან ჩანს, რომ აპროქსიმაცია იზრდება დაახლოებით ერთი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით მძიმის შემდეგ, h -ის ყოველი 10-ჯერ შემცირების შემდეგ, ე.ი. ცდომილება უხეში შეფასებით პროპორციულია h -ის. ეს დამოკიდებულება შემდგომში დასტურდება ცხრილის მეოთხე სვეტის წევრებით. მართლაც, ანალიზის მეთოდების გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e - (1+h)^{1/h}}{h} = \frac{e}{2} \approx 1.35914. \quad (7)$$

განხილულის ანალოგიურია ზოგადი შემთხვევა: როცა (1) ამოცანის ამონახსნის აპროქსიმაცია ხდება ეილერის მეთოდის გამოყენებით, მაშინ ცდომილება უარეს შემთხვევაში არის მუდმივი გამრავლებული h ბიჯზე. უფრო მეტიც, (7)-ის მიხედვით ეს არის საუკეთესო, რაც შეიძლება ითქვას.

რიცხვით ანალიზს აქვს მოხერხებული აღნიშვნები რიცხვითი სქემების კრებადობის ყოფაქცევის აღსაწერად. ფიქსირებული x -თვის $y(x; h)$ -ით აღვნიშნოთ (1) ამოცანის $\phi(x)$ ამონახსნის აპროქსიმაცია, რომელიც აგებულია სქემით, რომლის ბიჯია h . ჩვენ ვიტყვით, რომ რიცხვითი სქემა კრებადია x წერტილში, თუ

$$\lim_{h \rightarrow 0} y(x; h) = \phi(x).$$

სხვა სიტყვებით, როცა ბიჯი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ კრებადი სქემის აპროქსიმაციები მიისწრაფვიან $\phi(x)$ ამონახსნის ზუსტი მნიშვნელობისაკენ. სიჩქარე, რომლითაც $y(x; h)$ მიისწრაფვის $\phi(x)$ -კენ, ხშირად გამოისახება h -ის შესაბამისი ხარისხით. თუ ცდომილება $\phi(x) - y(x; h)$ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როგორც მუდმივი გამრავლებული h^p -ზე, მაშინ დავწერთ

$$\phi(x) - y(x; h) = O(h^p)$$

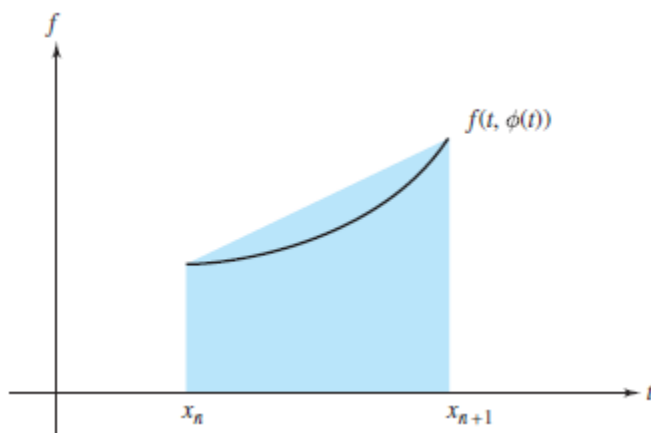
და ვიტყვით, რომ *მეთოდი არის p რიგის*. ცხადია, რაც უფრო მეტია p , მით უფრო სწრაფად კრებადია სქემა, როცა $h \rightarrow 0$.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ეილერის მეთოდის კრებადობის სიჩქარე არის $O(h)$; ე. ი. ეილერის მეთოდი არის $p=1$ რიგის. მართლაც, ზღვარი (7) ტოლობაში გვიჩვენებს, რომ (5) განტოლებისათვის ცდომილება უბეში მიახლოებით არის $1.36h$ მცირე h -თვის. ეს ნიშნავს, რომ ცდომილება იქნება, მაგალითად, 0.01 -ზე ნაკლები, როცა $h < 0.01/1.36$ ანუ დაგვჭირდება გამოთვლების $n = 1/h > 136$ საფეხური. ამრიგად, ეილერის მეთოდი ძალიან ნელა კრებადია პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით.

როგორ შეიძლება გავაუმჯობესოთ ეილერის მეთოდი? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად დავუბრუნდეთ (3) და (4) ფორმულების გამოყენებას და გავაანალიზოთ „ცდომილება“, რომელიც აპროქსიმაციის დროს წარმოიშვება. ამ პროცესში მნიშვნელოვანი მომენტი იყო

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt$$

ინტეგრალის აპროქსიმაცია მართკუთხედის წესის გამოყენებით (იხილეთ ნახაზი 28). ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის უფრო უკეთესი და უფრო ზუსტი მეთოდია ტრაპეციის მეთოდი, ამიტომ გამოვიყენოთ ტრაპეციის წესი (ნახაზი 29).



ნახაზი 29. ტრაპეციით აპროქსიმაცია.

ტრაპეციის ფართობის მიხედვით გვექნება

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt \approx \frac{h}{2} [f(x_n, \phi(x_n)) + f(x_{n+1}, \phi(x_{n+1}))],$$

რომელიც გვაძლევს შემდეგ რიცხვით სქემას

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

(8) განტოლებას ვუწოდოთ *ტრაპეციის სქემა*. ეს არის *არაცხადი მეთოდის* მაგალითი. ეილერის მეთოდისაგან განსხვავებით (8) გვაძლევს არაცხად ფორმულას y_{n+1} -ის მოსაძებნად, რადგან y_{n+1} გვხვდება f ფუნქციის არგუმენტად. დავუშვათ, ჩვენ უკვე გამოვთვალეთ y_n , მაშინ ფესვის მოძებნის რომელიმე მეთოდის, მაგალითად, ნიუტონის მეთოდის გამოყენებით გამოვთვლით y_{n+1} სიდიდეს. მიუხედავად იმ უხერხულობისა, რაც გამოწვეულია არაცხადი მეთოდით მუშაობის გამო, ტრაპეციის მეთოდს აქვს ორი უპირატესობა ეილერის მეთოდთან შედარებით. პირველი, ეს მეთოდი არის $p = 2$ რიგის ე. ი. კრებადია სიჩქარით, რომელიც პროპორციულია h^2 სიდიდის და მაშასადამე ეილერის მეთოდზე უფრო სწრაფია. მეორე, ტრაპეციის სქემას აქვს *მდგრადობის* სასურველი თვისება.

შეიძლება ტრაპეციის სქემა მოდიფიცირდეს ისეთნაირად, რომ მივიღოთ ცხადი მეთოდი? ერთი აზრი მდგომარეობს იმაში, რომ ჯერ გამოვთვალოთ y_{n+1} -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა y_{n+1}^* ეილერის მეთოდის გამოყენებით და შემდეგ გამოვიყენოთ (8) ფორმულა, რომლის მარჯვენა მხარეში y_{n+1} -ის ნაცვლად ჩასმულია y_{n+1}^* . ეს ორ საფეხურიანი პროცესი არის *პროგნოზის და კორექციის მეთოდის* (predictor-corrector method) მაგალითი. ამრიგად, ჩვენ ეილერის მეთოდის გამოყენებით წინასწარ განვსაზღვრავთ y_{n+1} -ს და შემდეგ ვიყენებთ (8) ფორმულას უფრო ზუსტი მიახლოების მისაღებად. ჩავსვათ (8)-ის მარჯვენა მხარეში $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, მივიღებთ

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

სადაც $x_{n+1} = x_n + h$. ეს ცხადი სქემა ცნობილია როგორც *ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდი*.

მაგალითი 1. ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდს გამოყენებით გამოვთვალოთ

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

ამოცანის $\phi(x) = e^x$ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა $x = 1$ წერტილში, ბიჯის შემდეგი მნიშვნელობებისათვის $h = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

ამოხსნა. საწყისი მნიშვნელობებია $x_0 = 0$ და $y_0 = 1$. რადგან $f(x, y) = y$, ამიტომ (9) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [y_n + (y_n + hy_n)] = y_n + hy_n + \frac{h^2}{2} y_n$$

ე.ი.

$$y_{n+1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) y_n. \quad (10)$$

რადგან $y_0 = 1$, მაშინ ინდუქციით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$y_n = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$x = 1$ წერტილში მიახლოებითი მნიშვნელობის მისაღებად უნდა ავიღოთ $1 = x_0 + nh = nh$, ამიტომ $n = 1/h$. აქედან გამომდინარე, $e = \phi(1)$ რიცხვის აპროქსიმაცია ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდით იქნება

$$\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h},$$

ხოლო შესაბამისი ცდომილებები იქნება

$$e - \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h}.$$

ქვემოთ მოტანილ ცხრილში გამოთვლილია აპროქსიმაცია h -ის მითითებული მნიშვნელობებისათვის და მასთან ერთად ამოწერილია შესაბამისი ცდომილებები

$e = 2.71828\dots$			
h	აპროქსიმაცია $\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h}$	ცდომილება ცდომილ/h^2	
1	2.50000	0.21828	0.21828
10^{-1}	2.71408	0.00420	0.42010
10^{-2}	2.71824	0.00004	0.44966
10^{-3}	2.71828	0.00000	0.45271

თუ ამ ცხრილს შევადარებთ ზემოთ მოცემულ ცხრილს, შევამჩნევთ, რომ ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდი გაცილებით სწრაფია ვიდრე ეილერის თავდაპირველი

მეთოდი. მართლაც, წინამდებარე ცხრილის მეორე და მესამე სვეტის რამდენიმე წევრის მიხედვით ჩანს, რომ აპროქსიმაციის სიზუსტე იზრდება ორი ათწილადი ნიშნით მძიმის შემდეგ h ბიჯის ყოველი 10-ჯერ შემცირების შემდეგ. სხვა სიტყვებით, ცდომილება დაახლოებით პროპორციულია h^2 -ის (იხილეთ ცხრილის ბოლო სვეტი). ცხრილის ბოლო ორი სტრიქონის წევრებს სიფრთხილით უნდა მოვეკიდოთ. მართლაც, როცა $h=10^{-3}$ და $h=10^{-4}$, რეალური ცდომილება იმდენად მცირეა, რომ კალკულატორი ნულამდე ამრგვალებს მძიმის შემდეგ ხუთ ათწილად ნიშნამდე. ბოლო სვეტის ფერადი წევრი შეიძლება იყოს არაზუსტი, მნიშვნელოვანი სიდიდეების დაკარგვის გამო კალკულატორის არითმეტიკაში.

როგორც მაგალითი 1 გვიჩვენებს, ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდი კრებადია $O(h^2)$ სიჩქარით და შეიძლება ზოგადად დავამტკიცოთ, რომ ეს მეთოდი არის $p=2$ რიგის.

სავარჯიშო 13

1. აჩვენეთ, რომ როცა ეილერის მეთოდი გამოიყენება შემდეგი ამოცანის ამონახსნის აპროქსიმაციისათვის საწყისი პირობით

$$y' = 5y, \quad y(0) = 1,$$

$x=1$ წერტილში, მაშინ აპროქსიმაცია h ბიჯით იქნება $(1+5h)^{1/h}$.

2. აჩვენეთ, რომ როცა ეილერის მეთოდი გამოიყენება შემდეგი ამოცანის ამონახსნის აპროქსიმაციისათვის საწყისი პირობით

$$y' = -\frac{1}{2}y, \quad y(0) = 3,$$

$x=2$ წერტილში, მაშინ აპროქსიმაცია h ბიჯით იქნება $3\left(1-\frac{h}{2}\right)^{2/h}$.

3. აჩვენეთ, რომ როცა (8) ფორმულით მოცემული ტრაპეციის სქემა გამოიყენება

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

ამოცანის $\phi(x) = e^x$ ამონახსნის აპროქსიმაციისათვის $x=1$ წერტილში, მაშინ გვექნება

$$y_{n+1} = \left(\frac{1+h/2}{1-h/2}\right)y_n, \quad n=0,1,2,\dots,$$

რომელსაც მივყევართ e მუდმივისათვის შემდეგ აპროქსიმაციამდე

$$\left(\frac{1+h/2}{1-h/2}\right)^{1/h}$$

გამოთვალეთ აპროქსიმაცია ბიჯის შემდეგი მნიშვნელობებისთვის $h=1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ და შედეგები შეადარეთ ზემოთ მოცემულ ცხრილებს.

4. მაგალით 1-ში ნაჩვენები იყო, რომ e რიცხვის აპროქსიმაცია h ბიჯით ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდის გამოყენებით არის

$$\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^{1/h}.$$

პირველად დაამტკიცეთ, რომ ცდომილება $r = e - \left(1 + h + h^2/2\right)^{1/h}$ უახლოვდება ნულს, როცა $h \rightarrow 0$. შემდეგ ლოპიტალის წესის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r}{h^2} = \frac{e}{6} \approx 0.45305.$$

შეადარეთ ეს მუდმივი უკანასკნელი ცხრილის ბოლო სვეტს.

5. აჩვენეთ, რომ როცა ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდი გამოიყენება შემდეგი ამოცანის ამონახსნის აპროქსიმაციისათვის საწყისი პირობით

$$y' = 4y, \quad y(0) = \frac{1}{3},$$

$x = 1/2$ წერტილში, მაშინ აპროქსიმაცია h ბიჯით იქნება $\frac{1}{3}(1 + 4h + 8h^2)^{1/(2h)}$.

16. მაღალი რიგის რიცხვითი მეთოდები:

ტეილორი და რუნგე-კუტა

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ მარტივი რიცხვითი პროცედურა, კერძოდ, ეილერის მეთოდი

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

ამოცანის $\phi(x)$ ამონახსნის რიცხვითი აპროქსიმაციისათვის. ეილერის მეთოდი მარტივია განსახორციელებლად, ვინაიდან მოიცავს $\phi(x)$ ამონახსნის მხოლოდ წრფივ აპროქსიმაციას. მაგრამ იგი არის $p=1$ რიგის მეთოდი და ნელა იკრიბება, ე.ი. გვაქვს $O(h)$ რიგის ცდომილება. ეილერის გაუმჯობესებული მეთოდი მხოლოდ $p=2$ რიგის მეთოდია. ახლა ჩვენ განვიხილავთ მეთოდებს, რომლებსაც აქვთ უფრო სწრაფი კრებადობა. ეს არის **ტეილორის მეთოდი**, რომელიც არის ეილერის პროცედურის ბუნებრივი განზოგადოება და **რუნგე-კუტას მეთოდი**, რომელიც უფრო პოპულარული სქემაა ამოცანის ამოსახსნელად საწყისი პირობით, რადგან უფრო სწრაფია და მარტივია დასაპროგრამებლად.

როგორც წინა პარაგრაფებში, აქაც დავუშვათ, რომ f და $\partial f / \partial y$ უწყვეტი და შემოსაზღვრული ფუნქციებია ვერტიკალურ ზოლში $\{(x, y) : a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ და რომ f -ს გააჩნია იმდენი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები, რამდენიც დაგვჭირდება მეთოდის ფორმულირების დროს.

ტეილორის მეთოდის გამოსაყვანად დავუშვათ, რომ $\phi_n(x)$ არის შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანის ზუსტი ამონახსნი

$$\phi'_n(x) = f(x, \phi_n), \quad \phi_n(x_n) = y_n. \quad (2)$$

თუ $\phi_n(x)$ ფუნქციას გავშლით ტეილორის ფორმულის მიხედვით x_n წერტილში მივიღებთ

$$\phi_n(x) = \phi_n(x_n) + h\phi'_n(x_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''_n(x_n) + \dots,$$

სადაც $h = x - x_n$. რადგან ϕ_n აკმაყოფილებს (2) პირობას, ამიტომ წინამდებარე მწკრივი ასე შეგვიძლია გადავწეროთ

$$\phi_n(x) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''_n(x_n) + \dots \quad (3)$$

შევნიშნოთ, რომ ეილერის მეთოდში რეკურენტული ფორმულა y_{n+1} -თვის მიიღება ტეილორის მწკრივის წაკვეთით h -ის მიმართ წრფივი წევრის შემდეგ. მეტი სიზუსტისათვის ჩვენ ვიყენებთ მეტ წევრებს ტეილორის მწკრივში. ეს მოითხოვს ამონახსნის მაღალი რიგის წარმოებულების გამოსახვას f ფუნქციის საშუალებით.

თუ y აკმაყოფილებს განტოლებას $y' = f(x, y)$, მაშინ ჩვენ გამოვთვლით y'' -ს შემდეგი სქემის მიხედვით

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)y' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)f(x, y) = f_2(x, y).$$

ანალოგიურად შეგვიძლია განვსაზღვროთ f_3 , f_4 და ა.შ., რომლების შეესაბამებინა $y'''(x)$, $y^{(4)}(x)$ და ა.შ.

თუ (3) მწკრივს წაკვეთავთ h^p მამრავლის შემცველი წევრის შემდეგ, მაშინ ზემოთ შემოტანილი აღნიშვნების საფუძველზე *ტეილორის p რიგის მეთოდისათვის* მივიღებთ შენდევ რეკურენტულ ფორმულებს

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad (5)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f_2(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^p}{p!} f_p(x_n, y_n), \quad (6)$$

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, $y_n \approx \phi(x_n)$, სადაც $\phi(x)$ არის (1) ამოცანის ამონახსნი. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ტეილორის p რიგის მეთოდს აქვს კრებადობის $O(h^p)$ რიგი.

მაგალითი 1. განსაზღვრეთ ტეილორის 2 რიგის მეთოდის რეკურენტული ფორმულა შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანისათვის

$$y' = \sin(xy), \quad y(0) = \pi. \quad (7)$$

ამოხსნა. ჩვენ უნდა გამოვითვალოთ $f_2(x, y)$ ზემოთ განსაზღვრული ფორმულით. რადგან $f(x, y) = \sin(xy)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვავთ (4)-ში, მივიღებთ

$$f_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) f(x, y)$$

$$= y \cos(xy) + x \cos(xy) \sin(xy) = y \cos(xy) + \frac{x}{2} \sin(2xy).$$

მაშინ რეკურენტული ფორმულები (5) და (6) მიიღებს სახეს

$$x_{n+1} = x_n + h,$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sin(x_n y_n) + \frac{h^2}{2!} \left[y_n \cos(x_n y_n) + \frac{x_n}{2} \sin(2x_n y_n) \right],$$

სადაც $x_0 = 0$ და $y_0 = \pi$ საწყისი სიდიდეები არიან.

ცხადია, ტეილორის მაღალი რიგის მეთოდის გამოყენება დაკავშირებულია პრაქტიკულ სიძნელეებთან მაღალი რიგის კერძო წარმოებულების გამოთვლისას f_p ფუნქციის შესადგენად. ერთი გზა ამ სიძნელეების ასაცილებლად არის *რუნგე-კუტას მეთოდის* გამოყენება.

შევნიშნოთ, რომ ტეილორის მეთოდს ზოგადად აქვს სახე

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n; h), \quad (8)$$

სადაც F -ის არჩევა დამოკიდებულია p -ზე, კერძოდ [შეადარეთ (6)], როცა

$$p = 1, \quad F = T_1(x, y; h) = f(x, y),$$

$$p = 2, \quad F = T_2(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) f(x, y) \right]. \quad (9)$$

რუნგე-კუტას მეორე რიგის მეთოდის არსი ია არის, რომ (8) ტოლობაში F წარმოიდგინება

$$F = K_2(x, y; h) = f(x + \alpha h, \beta h f(x, y)) \quad (10)$$

სახით, სადაც α და β მუდმივები აირჩევა იმ პირობით, რომ (8) აპროქსიმაციას ჰქონდეს კრებადობის $O(h^2)$ სიჩქარე. ამ მიდგომის უპირატესობა ის არის, რომ K_2 გამოითვლება $f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობების ორჯერ გამოთვლით და არა მისი წარმოებულების გამოთვლით.

იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ ამ მეთოდის კრებადობის $O(h^2)$ სიჩქარეში, შევადაროთ ეს ახალი სქემა ტეილორის მეორე რიგის მეთოდს და მოვითხოვოთ, რომ

$$T_2(x, y; h) - K_2(x, y; h) = O(h^2), \text{ როცა } h \rightarrow 0.$$

შევარჩიოთ α და β მუდმივები ისე, რომ T_2 და K_2 ფუნქციების ტეილორის მწკრივებად გაშლა ერთმანეთს დაემთხვეს h -ის პირველ რიგამდე ჩათვლით. თუ ფიქსირებული (x, y) -თვის, (10) ფორმულით მოცემულ $K_2 = K_2(h)$ ფუნქციას გავშლით $h = 0$ წერტილის მახლობლობაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} K_2(h) &= K_2(0) + \frac{dK_2}{dh}(0)h + O(h^2) \\ &= f(x, y) + \left[\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) f(x, y) \right] h + O(h^2), \end{aligned} \quad (11)$$

სადაც კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება dK_2/dh წარმოებულისთვის $h = 0$ წერტილში, მიიღება რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად. თუ შევადარებთ (11) ტოლობას (9)-ს დავინახავთ, რომ T_2 და K_2 ფუნქციების წევრები ემთხვევა ერთმანეთს h -ის პირველ რიგამდე ჩათვლით, როცა $\alpha = \beta = 1/2$. ამრიგად

$$K_2(x, y; h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right).$$

რუნგე-კუტას მეთოდს, რომელიც ჩვენ ახლა გამოვიყვანეთ, ეწოდება **შუაწერტილის მეთოდი** და მის რეკურენტულ ფორმულებს აქვს სახე

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad (12)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right). \quad (13)$$

შუაწერტილის მეთოდს, აგების მიხედვით, ცხადია, კრებადობის იგივე სიჩქარე აქვს, რაც ტეილორის მეორე რიგის მეთოდს ე.ი. $O(h^2)$. იგივე სიჩქარე აქვს ეილერის გაუმჯობესებულ მეთოდს.

ანალოგიურად შეიძლება ავაგოთ ტეილორის მეოთხე რიგის მეთოდი და რუნგე-კუტას **კლასიკური მეოთხე რიგის მეთოდი**. ამ უკანასკნელის რეკურენტულ ფორმულებს აქვს სახე

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h, \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\end{aligned}\tag{14}$$

სადაც

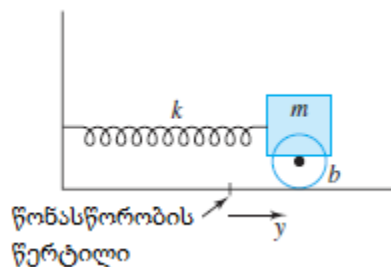
$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n), \\k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \\k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3).\end{aligned}$$

რუნგე-კუტას კლასიკური მეოთხე რიგის მეთოდი ერთ-ერთი ყველაზე პოპულარული მეთოდია, რადგან მისი კრებადობის სიჩქარა $O(h^4)$ და მარტივია დასაპროგრამებლად. როგორც წესი, ეს მეთოდი გვაძლევს ძალიან კარგ მიახლოებას მაშინაც კი, როდესაც იტერაციათა რიცხვი მცირეა. მეორე მხრივ, როცა იტერაციათა რიცხვი იზრდება, მაშინ გამოთვლების პროცესში შესაძლებელია სხვადასხვა სახის ცდომებებილებები წარმოიშვას.

17. მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება.

შესავალი

განვიხილოთ ზამბარა, რომლის ერთ ბოლოზე მოდებულია m მასის მქონე სხეული და ჩამაგრებულია მეორე ბოლოთი, როგორც ეს 30-ე ნახაზზეა ნაჩვენები.



ნახაზი 30. ზამბარის მიღვეადი რხევა

გამოვიყვანოთ დიფერენციალური განტოლება, რომელიც აღწერს სხეულის მოძრაობას, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ სხეულზე მოქმედებს ზამბარის დრეკადობის ძალა, მოძრაობის ჩამხშობი ხახუნის ძალა და შესაძლო გარეგანი ფაქტორები.

ნიუტონის მეორე კანონი - ძალა ტოლია მასისა და აჩქარების ნამრავლის ($F = ma$) - წარმოადგენს ისეთ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში. იგი არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, რადგან აჩქარება არის გავლილი მანძილის (y) მეორე რიგის წარმოებული დროით ($a = d^2y / dt^2$).

ზამბარის რხევის ამოცანაში ნიუტონის მეორე კანონის გამოყენებით მიღებული შედეგები შეგვიძლია გამოვიყენოთ უფრო ზოგადი სახის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის საფუძვლიანი შესწავლისათვის.

დავიწყოთ 30-ე ნახაზზე გამოსახული მოწყობილობის შესწავლით. როცა ზამბარა არ არის დაჭიმული, მაშინ სისტემა წონასწორობაშია. m მასის მქონე სხეულის კოორდინატი y განვსაზღვროთ მისი გადაადგილებით წონასწორობის მდებარეობიდან. როცა m მასა გადაადგილდება წონასწორობის მდგომარეობიდან, მაშინ ზამბარა დაჭიმულია ან შეკუმშული და იძაბება, რათა შეეწინააღმდეგოს

გადაადგილებას. ზამბარების უმეტესობისათვის ეს ძალა პირდაპირ პროპორციულია y გადაადგილებისა და მოიცემა ფორმულით

$$F_1 = -k y, \quad (1)$$

სადაც დადებითი k მუდმივი ცნობილია **ზამბარის სიხისტის** სახელწოდებით, ხოლო ნიშანი მინუსი მიუთითებს ძალის გადაადგილების საწინააღმდეგოდ მოქმედების ბუნებაზე. (1) განტოლება ზოგადად ცნობილია **ჰუკის კანონის** სახელწოდებით და მართებულია მხოლოდ საკმარისად მცირე გადაადგილებებისათვის. თუ ზამბარა შეკუმშულია ისე ძლიერ, რომ ზამბარის ხვიები ერთმანეთს ედებინ, მაშინ ზამბარის წინააღმდეგობის ძალა ცხადია უფრო მძლავრი იქნება.

პრაქტიკულად ყველა მექანიკური სისტემა განიცდის აგრეთვე ხახუნს და რხევითი მოძრაობისათვის ხახუნის ძალა ჩვეულებრივ მოდელირდება სიჩქარის პროპორციული წევრის სახით

$$F_2 = -b \frac{dy}{dt} = -by', \quad (2)$$

სადაც $b \geq 0$ არის **ჩახშობის კოეფიციენტი** და მინუს ნიშანს აქვს იგივე მნიშვნელობა რაც (1) განტოლებაში.

სხვა ძალები, რომლებიც ჩვეულებრივ კიდევ შეიძლება მოქმედებდნენ სხეულზე, განიხილება როგორც სისტემაზე მოქმედი **გარეგანი** ძალები. გარეგანი ძალები შეიძლება იყოს გრავიტაციული, ელექტრული ან მაგნიტური. ზოგადად, ყველაზე მნიშვნელოვანი გარეგანი ძალები გადაეცემა სხეულს სისტემის საყრდენი ბაზისის შერყევით. თუ ყველა გარეგან ძალას გავაერთიანებთ ერთ ცნობილ $F_3(t)$ ფუნქციაში, მაშინ ნიუტონის მეორე კანონის ძალით ამ სისტემის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახე

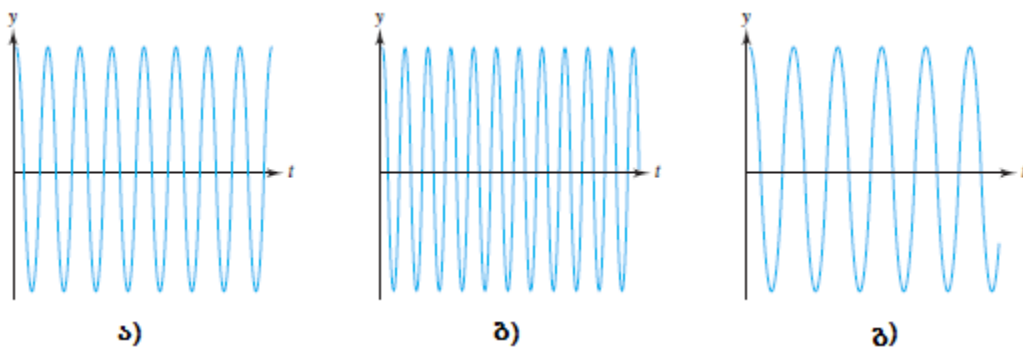
$$my'' = -ky - by' + F_3(t)$$

ანუ

$$my'' + by' + ky = F_3(t). \quad (3)$$

როგორი შეიძლება იყოს სხეულის მოძრაობა ზემოთ განხილულ მაგალითში? ჩვენი ყოველდღიური გამოცდილება გვარწმუნებს, რომ როდესაც ხახუნი ($b = 0$) არ გავქვს ან სხეულზე არ მოქმედებს დამატებითი ძალები, მაშინ სხეულის მოძრაობა იქნებოდა მუდმივი რხევა, როგორც ეს 31-ე ნახაზზეა აღნიშნული. ეს გრაფიკები

მოგვაგონებს სინუსოიდალურ ფუნქციებს, რომელთა ამპლიტუდა დამოკიდებულია საწყის გადაადგილებაზე და სიჩქარეზე. რხევის სიხშირე იზრდება ხისტი ზამბარებისთვის, მაგრამ იკლებს უფრო დიდი მასის სხეულებისათვის. მაგალითი 1 მარტივი გამოთვლებით ადასტურებს ჩვენს ინტუიციურ ხედვას.



ნახაზი 31. ა) სინუსოიდალური რხევა; ბ) ხისტი ზამბარა; გ) დიდი მასა.

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ასეთი ამონახსნების მოძებნის გზებს.

მაგალითი 1. შევამოწმოთ, რომ თუ $b=0$ და $F_3(t)=0$, მაშინ (3) განტოლების ამონახსნს ექნება $y(t)=\cos \omega t$ სახე და რომ კუთხური სიხშირე ω იზრდება k -ს ზრდასთან ერთად და მცირდება m -ის ზრდასთან ერთად.

ამოხსნა. ამ მონაცემებით (3) განტოლება მიიღებს სახეს

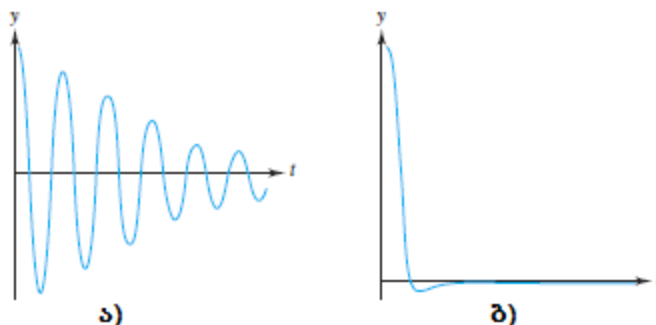
$$my'' + ky = 0. \quad (4)$$

$y(t)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს აქვს სახე $y(t)=-\omega^2 \cos \omega t$. თუ მას ჩავსვავთ (4) განტოლებაში, მივიღებთ

$$my'' + ky = -m\omega^2 \cos \omega t + k \cos \omega t,$$

რომელიც ნულის ტოლი იქნება თუ $\omega = \sqrt{k/m}$. აქედან ცხადია, რომ ω იზრდება k პარამეტრის ზრდასთან ერთად და მცირდება m მასის ზრდასთან ერთად.

როდესაც ადგილი აქვს მოძრაობის ჩახშობას, მაშინ რხევა ქრება და მოძრაობა გამოისახება წირით, რომელიც 32-ე ნახაზზეა მოცემული.



ნახაზი 32. ა) სუსტი ჩახშობა; ბ) ძლიერი ჩახშობა.

32 ა) ნახაზზე გრაფიკი გვიჩვენებს ქრობად რხევას: სიხშირე შენელებულია, ხოლო ამპლიტუდა ექსპონენციალურად კლებულობს დროითი ცვლადის მიმართ. 32 ბ) ნახაზზე ჩახშობა იმდენმად ძლიერია, რომ სისტემის რხევა საერთოდ არ ხდება. მოწყობილობები, რომლებიც დაუშვან ირხევიან კამერტონის ან კრისტალური გენერატორების მსგავსად, მუშაობენ 32 ა) ნახაზის მსგავსად და ჩახშობის ეფექტი ჩვეულებრივ განიხილება როგორც მექანიზმის არასასურველი ნაკლი. მეორე მხრივ, კარგი ავტომობილის ამორტიზაციის სისტემა მუშაობს 32 ბ) ნახაზის მსგავსად და გამოიყენება რხევის ჩასახშობად.

ქვემოთ, მაგალით 2-ში ჩახშობის კოეფიციენტი შედარებით ნაკლებია ($b=6$) და მისი ამონახსნი მიეკუთვნება სუსტი ჩახშობის შემთხვევას, რომელიც გამოსახულია 32 ა) ნახაზზე. მაგალით 3-ში ჩახშობის კოეფიციენტი შედარებით ძლიერია ($b=10$) და მისი ამონახსნი განეკუთვნება ძლიერი ჩახშობის შემთხვევას, რომელიც გამოსახულია 32 ბ) ნახაზზე.

მაგალითი 2. შევამოწმოთ, რომ ექსპონენციალურად ქრობადი სინუსოიდა $y(t) = e^{-3t} \cos 4t$ არის (3) განტოლების ამონახსნი, თუ $F_3 = 0$, $m=1$, $k=25$ და $b=6$.

ამოხსნა. მართლაც, y -ის წარმოებულები იქნება

$$\begin{aligned} y'(t) &= -3e^{-3t} \cos 4t - 4e^{-3t} \sin 4t, \\ y''(t) &= 9e^{-3t} \cos 4t + 12e^{-3t} \sin 4t + 12e^{-3t} \sin 4t - 16e^{-3t} \cos 4t \\ &= -7e^{-3t} \cos 4t + 24e^{-3t} \sin 4t. \end{aligned}$$

მათი (3) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

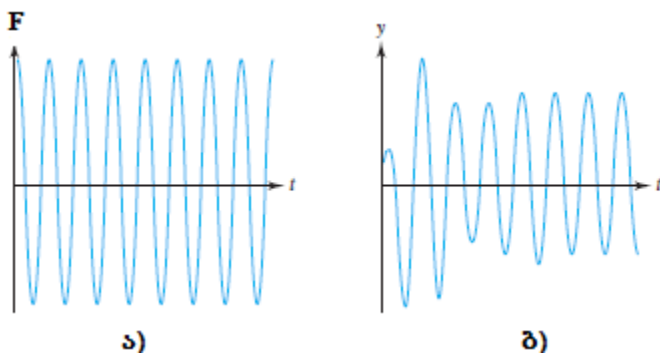
$$\begin{aligned} my'' + by' + ky &= y'' + 6y' + 25y = -7e^{-3t} \cos 4t + 24e^{-3t} \sin 4t + \\ &+ 6(-3e^{-3t} \cos 4t - 4e^{-3t} \sin 4t) + 25e^{-3t} \cos 4t = 0. \end{aligned}$$

მაგალითი 3. შევამოწმოთ, რომ ექსპონენციალური ფუნქცია $y(t) = e^{-5t}$ არის (3) განტოლების ამონახსნი, თუ $F_3 = 0$, $m = 1$, $k = 25$ და $b = 10$.

ამოხსნა. მართლაც, y -ის წარმოებულები იქნება $y'(t) = -5e^{-5t}$, $y''(t) = 25e^{-5t}$ და მათი ჩასმა (3) განტოლებაში მოგვცემს

$$my'' + by' + ky = y'' + 10y' + 25y = 25e^{-5t} + 10(-5e^{-5t}) + 25e^{-5t} = 0.$$

ახლა, ვთქვათ, ზამზარა მოდის მოძრაობაში გარეგანი სინუსოიდალური ძალით, რომლის კუთხური სიხშირეა ω . ჩვენი გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ მექანიზმის საწყისი რეაქციის მიუხედავად, რომელიც შეიძლება იყოს უწყესრიგო, იგი ბოლოს და ბოლოს სინქრონიზაციაში მოვა მამოძრავებელ გარეგან ძალასთან და გააგრძელებს რხევას იმავე სიხშირით, როგორც ეს 33-ე ნახაზზეა გამოსახული.



ნახაზი 33. ა) მამოძრავებელი ძალა; ბ) რეაქცია.

რხევითი სისტემების ტიპური მაგალითები, რომლებიც სინქრონიზაციაში მოდიან მამოძრავებელ ძალასთან, არიან ხმის აკუსტიკური სისტემები, ელექტრული სქემები, ოკეანის მიმოქცევა მთვარის პერიოდული მიზიდულობის შედეგად და სხვა. სისტემები შეიძლება იყოს მეტისმეტად მგრძნობიარე ზოგიერთი კონკრეტული სიხშირისათვის. მაგალითად, ზუსტად აწყობილმა მუსიკალურმა ნოტებმა შეიძლება დაამტვრიოს პატარა კრისტალები, ქარით გამოწვეულმა რხევამ შეიძლება დაანგრის ხიდი და ა.შ. ეს არის „რეზონანსის“ მოვლენები ამ შემთხვევაში რხევას გააჩნია მაქსიმალური ამპლიტუდა და იგი შეიძლება დამანგრეველი იყოს, ამიტომ მშენებელი ინჟინრები ფრთხილად უნდა იყვნენ, რათა მათ მიერ აშენებული ნაგებობები გარანტირებულად დაცული იყოს ყოველნაირი რეზონანსული მოქმედებებისაგან. მეორე მხრივ, რადიო ინჟინრებს სურთ, რომ მათი მიმღებები რეზონანსში მოვიდეს რადიომაუწყებლის სასურველ არხთან.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\sin \Omega t$ ძალით გამოწვეული ზამზარის სინქრონიზებული რხევა, როცა $m = 1$, $b = 1$, $k = 25$.

ამოხსნა. ვეძებოთ

$$y'' + y' + 25y = \sin \Omega t \quad (5)$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ისეთი სახით, რომელიც წრმოიდგინება სინუსოიდით და სინქრონიზებული იქნება $\sin \Omega t$ -თან. ასეთ ამონახსნს ექნება სახე $y(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$. რადგან

$$\begin{aligned} y'(t) &= -\Omega A \sin \Omega t + \Omega B \cos \Omega t, \\ y''(t) &= -\Omega^2 A \cos \Omega t - \Omega^2 B \sin \Omega t, \end{aligned}$$

ამიტომ (5) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sin \Omega t = y'' + y' + 25y &= -\Omega^2 A \cos \Omega t - \Omega^2 B \sin \Omega t + [-\Omega A \sin \Omega t + \Omega B \cos \Omega t] \\ &\quad + 25[A \cos \Omega t + B \sin \Omega t] \\ &= [-\Omega^2 B - \Omega A + 25B] \sin \Omega t + [-\Omega^2 A + \Omega B + 25A] \cos \Omega t, \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} -\Omega A + (-\Omega^2 + 25)B &= 1, \\ (-\Omega^2 + 25)A + \Omega B &= 0. \end{aligned}$$

საიდანაც ვიპოვით

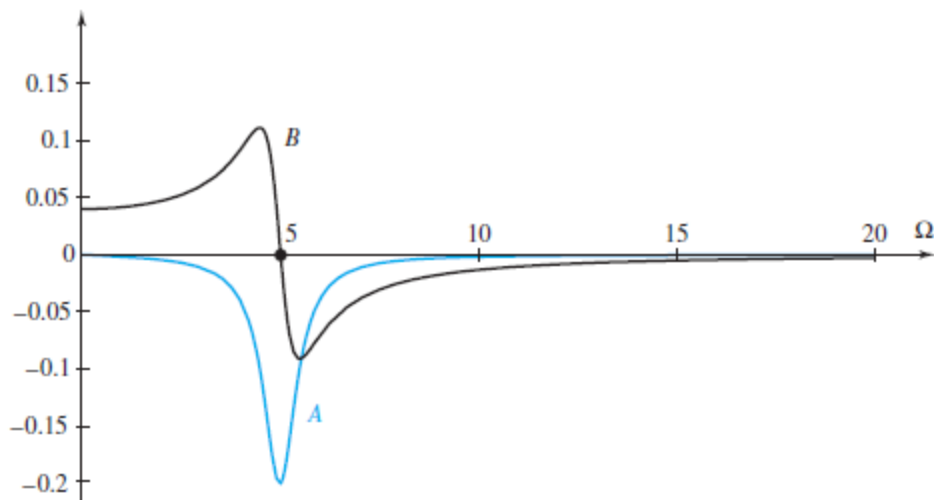
$$A = \frac{-\Omega}{\Omega^2 + (\Omega^2 - 25)^2}, \quad B = \frac{-\Omega^2 + 25}{\Omega^2 + (\Omega^2 - 25)^2}.$$

34-ე ნახაზზე წარმოდგენილია A და B სიდიდეების, როგორც Ω სიხშირის ფუნქციების, გრაფიკები. ცხადია, რეზონანსს ადგილი შეიძლება ჰქონდეს, როცა $\Omega \approx 5$

ამ პარაგრაფში ჩვენ უმეტესად საქმე გვექნება შემდეგი სახის დიფერენციალურ განტოლებასთან

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad (6)$$

სადაც $y(t)$ [ან $y(x)$, ან $x(t)$ და ა. შ.] არის საძიებელი ფუნქცია; a , b და c მოცემული მუდმივებია, ხოლო $f(t)$ [ან $f(x)$] ცნობილი ფუნქციაა. (6) განტოლებას ეწოდება წრფივი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით. შვენ შევძლებთ ასეთი განტოლების ზუსტი ამონახსნის მოძებნას კონკრეტული სახით და თეორიული ხასიათის თვისებების დადგენას.



ნახაზი 34. ამპლიტუდების რხევა რეზონანსის მახლობლობაში.

სავარჯიშო 14

- შეამოწმეთ, რომ თუ $b = 0$ და $F_3(t) = 0$, მაშინ (3) განტოლების ამონახსნს ექნება სახე $y(t) = \cos \omega t$, სადაც $\omega = \sqrt{k/m}$.
- თუ $F_3(t) = 0$, მაშინ (3) განტოლება მიიღებს სახეს $my'' + by' + ky = 0$. ამ განტოლებისათვის შეამოწმეთ, რომ:
 - თუ $y(t)$ არის ამონახსენი, მაშინ $cy(t)$ აგრეთვე იქნება ამონახსენი ნებისმიერი c მუდმივისათვის;
 - თუ $y_1(t)$ და $y_2(t)$ არიან ამონახსნები, მაშინ მათი ჯამი $y_1(t) + y_2(t)$ აგრეთვე იქნება ამონახსენი.
- აჩვენეთ, რომ თუ $F_3(t) = 0$, $m = 1$, $k = 9$, $b = 6$, მაშინ (3) განტოლებას აქვს „არსებითად ქრობადი“ ამონახსნები $y_1(t) = e^{-3t}$ და $y_2(t) = te^{-3t}$. რა იქნება ამ ამონახსნების ზღვარი, როცა $t \rightarrow \infty$?
- შეამოწმეთ, რომ $y(t) = \sin 3t + 2 \cos 3t$ არის შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანის ამონახსნი

$$2y'' + 18y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

იპოვეთ $|y(t)|$ ფუნქციის მაქსიმუმი $(-\infty, +\infty)$ შუალედში.

- შეამოწმეთ, რომ ექსპონენციალურად ქრობადი სინუსოიდა $y(t) = e^{-3t} \sin(\sqrt{3}t)$ არის (3) განტოლების ამონახსნი, თუ $F_3(t) = 0$, $m = 1$, $b = 6$ და $k = 12$. რა იქნება ამ ამონახსნის ზღვარი, როცა $t \rightarrow \infty$?

6. ზამბარაზე, რომლისთვისაც $m = 1$, $b = 0$, $k = 4$ და საწყის მომენტში იმყოფება უძრავად, ე.ი. $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, მოქმედებს გარეგანი ძალა $F_3(t) = 2 \cos 2t$. შეამოწმეთ, რომ $y(t) = \frac{1}{2}t \sin 2t$ გვაძლევს ზამბარის მოძრაობის განტოლებას. რა დაემართება ზამბარას, როცა t უფრო და უფრო იზრდება.

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების $A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$ სახის სინქრონიზებული ამონახსნები. მაგალითი 4-ში გამოყენებული მეთოდის მიხედვით მოძებნეთ A და B კოეფიციენტები.

7. $y'' + y' + 4y = 5 \sin 3t$, $\Omega = 3$;
 8. $y'' + y' + 5y = -50 \sin 5t$, $\Omega = 5$;
 9. $y'' + y' + 4y = 6 \cos 2t + 8 \sin 2t$, $\Omega = 2$.

18. წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება. ზოგადი ამონახსნი

მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

შესწავლა დავიწყოთ სპეციალური შემთხვევით, როცა $f(t) = 0$,

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2)$$

ეს შემთხვევა წარმოიშვება მაშინ, როცა ვიხილავთ ზამბარის თავისუფალ რხევას ე. ი. გარე ძალების მოქმედების გარეშე. (2) განტოლებას ეწოდება (1) განტოლების შესაბამისი **ერთგვაროვანი განტოლება**.

(2) განტოლების ფორმიდან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მის ამონახსნს გააჩნია ის თვისება, რომ მისი მეორე რიგის წარმოებული გამოისახება პირველი რიგის წარმოებულისა და ამვე ფუნქციის წრფივი კომბინაციით. ეს გვაფიქრებინებს, რომ ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $y = e^{rt}$ სახით, რადგან e^{rt} -ის წარმოებული არის მუდმივი გამრავლებული e^{rt} -ზე. თუ $y = e^{rt}$ -ს ჩავსვავთ (2), მივიღებთ

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0,$$

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

რადგან e^{rt} არასდროს არის ნული, ამიტომ მასზე გაყოფით მივიღებთ

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (3)$$

შესაბამისად, $y = e^{rt}$ იქნება (2) განტოლების ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა r დააკმაყოფილებს (3) განტოლებას. (3) განტოლებას ეწოდება (2) განტოლების შესაბამისი **დამხმარე განტოლება** ან კიდევ **მახასიათებელი განტოლება**.

მახასიათებელი განტოლება კვადრატული განტოლებაა და მისი ფესვებია

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{და} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

როცა დისკრიმინანტი $b^2 - 4ac$ დადებითია, მაშინ ფესვები r_1 და r_2 ნამდვილი და ერთმანეთისგან განსხვავებულია. თუ $b^2 - 4ac = 0$, მაშინ ფესვები ნამდვილი და ერთმანეთის ტოლია. როცა $b^2 - 4ac < 0$, მაშინ ფესვები ურთიერთშუღღებული კომპლექსური რიცხვებია.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$y'' + 5y' - 6y = 0 \tag{4}$$

განტოლების ორი ამონახსენი.

ამოხსნა. (4) -ის შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$r^2 + 5r - 6 = (r - 1)(r + 6) = 0,$$

რომლის ფესვებია $r_1 = 1$ და $r_2 = -6$. ამრიგად (4) -ის ამონახსნებია e^t და e^{-6t} .

შევნიშნოთ, რომ იგივეურად ნულის ტოლი ფუნქცია $y(t) \equiv 0$ ყოველთვის არის (2) განტოლების ამონახსნი. შემდეგში, როცა ჩვენ გვაქვს (2) განტოლების ორი ამონახსენი $y_1(t)$ და $y_2(t)$, როგორც სავარჯიშო 15-ის მაგალით 1-ში, შეგვიძლია ავაგოთ ამონახსნების უსასრულო რაოდენობა შემდეგი წრფივი კომბინაციით

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \tag{5}$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ეს უშუალოდ შეგვიძლია შევამოწმოთ (2) განტოლებაში ჩასმით

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + b(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= a(c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + b(c_1 y_1' + c_2 y_2') + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2 (ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0 + 0. \end{aligned}$$

(5) წრფივ კომბინაციაში მონაწილე ორი „თავისუფლების ხარისხი“, c_1 და c_2 მუდმივები, შეიძლება განისაზღვროს დამატებითი პირობებით. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისგან განსხვავებით, სადაც ერთი ნებისმიერი მუდმივი

გვექონდა, რომელიც ერთი საწყისი პირობით განისაზღვრებოდა, აქ გვაქვს ორი ნებისმიერი მუდმივი და, შესაბამისად, გვეჭირდება ორი საწყისი პირობა. როგორც ზამბარის რხევის ამოცანაში ვნახეთ, მოძრაობის ზუსტად აღწერისათვის უნდა ვიცოდეთ არა მარტი მოქმედი ძალები, არამედ სხეულის საწყისი პოზიცია $y(0)$ და მისი საწყისი სიჩქარე $y'(0)$. თუ როგორ ისმის ამოცანა საწყისი პირობით მეორე რიგის განტოლებისათვის, ამას ვნახავთ შემდეგ მაგალითში.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ ამოცანა საწყისი პირობით

$$y'' + 2y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1. \quad (6)$$

ამოხსნა. პირველ რიგში მოვძებნოთ ორი ამონახსნი ისევე, როგორც წინა მაგალითში. შემდეგ შევარჩიოთ c_1 და c_2 მუდმივები (5) ტოლობაში ისე, რომ მან დააკმაყოფილოს საწყისი პირობები. მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$r^2 + 2r - 1 = 0.$$

მისი ამონახსნით მივიღებთ $r_1 = -1 + \sqrt{2}$ და $r_2 = -1 - \sqrt{2}$. შესაბამისად, მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას ექნება შემდეგი ამონახსნი

$$y(t) = c_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + c_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}. \quad (7)$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ ისეთი კერძო ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს, პირველ რიგში უნდა მოვძებნოთ (7) ფუნქციის წარმოებული და შემდეგ დავაკმაყოფილოთ (6) საწყისი პირობები, რაც გვადლევს

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0,$$

$$y'(0) = (-1 + \sqrt{2})c_1 e^0 + (-1 - \sqrt{2})c_2 e^0 = -1.$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ $c_1 = -\sqrt{2}/4$ და $c_2 = \sqrt{2}/4$. ამრიგად,

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{(-1+\sqrt{2})t} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{(-1-\sqrt{2})t}$$

არის სასურველი ამონახსნი.

ორპარამეტრიანი (5) ამონახსნის შესახებ უფრო ღრმა წარმოდგენის მისაღებად ჩვენ უნდა შევისწავლოთ მეორე რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგიერთი თვისება. პირველ ყოვლისა, ეს არის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა (2) განტოლებისათვის. ეს გარკვეულწილად ჰგავს შესაბამის თეორემას პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის, კერძოდ, თეორემა 1-ს, იმ განსხვავებით, რომ მეორე რიგის განტოლებისათვის დამახასიათებელია ორი საწყისი პირობა. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ (2) განტოლება, სადაც სიმარტივისათვის $b = 0$, $c = 0$. მაშინ $y'' = 0$ და პირდაპირ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $y(t)$ ამონახსნის გრაფიკი არის წრფე და იგი იქნება ცალსახად განსაზღვრული, თუ ვიცით ერთი წერტილი ამ წრფეზე

$$y(t_0) = Y_0, \quad (8)$$

და მისი საკუთხო კოეფიციენტი

$$y'(t_0) = Y_1. \quad (9)$$

ამრიგად, თეორემა 1 უფრო ზოგადი (2) განტოლებისათვის მდგომარეობს იმაში, რომ (8) და (9) პირობები საკმარისია (2) განტოლების ერთადერთი ამონახსნის განსაზღვრისათვის.

თეორემა 1. ნებისმიერი ნამდვილი $a \neq 0, b, c, t_0, Y_0$ და Y_1 რიცხვებისათვის არსებობს ერთადერთი ამონახსნი შემდეგი საწყის პირობებიანი ამოცანისა

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(t_0) = Y_0, \quad y'(t_0) = Y_1 \quad (10)$$

ამონახსნი განსაზღვრულია ნებისმიერი t -თვის $(-\infty, \infty)$ ინტერვალდან.

კერძოდ, შევნიშნოთ, რომ თუ $y(t)$ ამონახსნი და მისი წარმოებული ერთდროულად ქრება t_0 წერტილში (ე.ი. $Y_0 = Y_1 = 0$), მაშინ $y(t)$ უნდა იყოს იგივეურად ნულის ტოლი ამონახსნი.

ამ პარაგრაფში და შემდგომ ჩვენ ავაგებთ (10) განტოლების ზუსტ ამონახსნებს, ამიტომ კითხვა ამონახსნის არსებობის შესახებ რეალურად არ დგას. თუმცა, მეტისმეტად სასარგებლოა იმის ცოდნა, რომ ამონახსნი ერთადერთია.

ახლა გვინდა გამოვიყენოთ ეს თეორემა, რათა ვაჩვენოთ, რომ, თუ ცნობილია (2) განტოლების ორი ამონახსნი $y_1(t)$ და $y_2(t)$, ყოველთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ c_1 და c_2 მუდმივები ისე, რომ $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ კომბინაციამ დააკმაყოფილოს (10) საწყისი პირობები და, მაშასადამე, თეორემა 1-ის ძალით იგი იქნება ერთადერთი ამონახსნი. მაგრამ ჩვენ გვჭირდება ცოტა მეტი სიზუსტე. თუ მაგალითად, $y_2(t)$ იგივეურად ნულის ტოლი ამონახსნია, მაშინ $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 y_1(t)$ დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ მუდმივზე და შეუძლებელია დააკმაყოფილოს ორი საწყისი პირობა. შემდეგ, თუ $y_2(t)$ არის მუდმივი გამრავლებული $y_1(t)$ -ზე, ვთქვათ $y_2(t) = k y_1(t)$, მაშინ $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = (c_1 + c_2 k) y_1(t) = C y_1(t)$ და კვლავ გვექნება ერთი მუდმივი. ამ პრობლემის გასაანალიზებლად გვჭირდება წრფივად დამოუკიდებლობის ცნება.

განსაზღვრა 1. $y_1(t)$ და $y_2(t)$ ფუნქციებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი I ინტერვალზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არცერთი მათგანი არ მიიღება მეორისაგან მუდმივზე გადამრავლებით მთელს I ინტერვალზე.

ვიტყვი, რომ $y_1(t)$ და $y_2(t)$ ფუნქციები წრფივად დამოკიდებული I ინტერვალზე, თუ ერთი მათგანი ტოლია მუდმივი გამრავლებული მეორეზე მთელს I ინტერვალზე.

თეორემა 2. თუ $y_1(t)$ და $y_2(t)$ არიან (2) განტოლების ნებისმიერი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ერთადერთი c_1 და c_2 მუდმივები ისე, რომ $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ კომბინაციამ დააკმაყოფილოს საწყის პირობებიანი (10) ამოცანა $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე.

სანამ თეორემა 2-ს დავამტკიცებთ, დავადგინოთ შემდეგი დამხმარე ლემა.

ლემა 1. ნებისმიერი ნამდვილი $a \neq 0$, b და c რიცხვებისათვის, თუ $y_1(t)$ და $y_2(t)$ არის (2) განტოლების ნებისმიერი ორი ამონახსნი $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე და ტოლობას

$$y_1(\tau)y_2'(\tau) - y_1'(\tau)y_2(\tau) = 0 \quad (11)$$

ადგილი აქვს ნებისმიერი τ -თვის, მაშინ y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელია $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე. (11) ტოლობის მარცხენა მხარეში მოცემულ გამოსახულებას ეწოდება y_1 და y_2 ფუნქციების შესაბამისი ვრონსკიანი τ წერტილში.

დამტკიცება (ლემა 1). *I შემთხვევა.* თუ $y_1(\tau) \neq 0$, მაშინ დავუშვათ $k = y_2(\tau)/y_1(\tau)$ და განვიხილოთ (2) განტოლების ამონახსნი $y(t) = k y_1(t)$. იგი აკმაყოფილებს იმავე „საწყის პირობებს“ $t = \tau$ წერტილში, რასაც $y_2(t)$:

$$y(\tau) = \frac{y_2(\tau)}{y_1(\tau)} y_1(\tau) = y_2(\tau); \quad y'(\tau) = \frac{y_2(\tau)}{y_1(\tau)} y_1'(\tau) = y_2'(\tau),$$

სადაც ბოლო ტოლობა გამომდინარეობს (11)-დან. ამიტომ ერთადერთობის ძალით $y_2(t)$ უნდა იყოს იგივე ფუნქცია, რაც $k y_1(t)$ ფუნქცია $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე.

II შემთხვევა. თუ $y_1(\tau) = 0$, მაგრამ $y_1'(\tau) \neq 0$, მაშინ (11) ტოლობიდან $y_2(\tau) = 0$. ვთქვათ, $k = y_2'(\tau)/y_1'(\tau)$. მაშინ (2) განტოლების ამონახსენი $y(t) = k y_1(t)$ კვლავ აკმაყოფილებს იმავე „საწყის პირობებს“ $t = \tau$ წერტილში, რასაც $y_2(t)$:

$$y(\tau) = \frac{y_2'(\tau)}{y_1'(\tau)} y_1(\tau) = 0 = y_2(\tau), \quad y'(\tau) = \frac{y_2'(\tau)}{y_1'(\tau)} y_1'(\tau) = 0 = y_2'(\tau).$$

მაშინ, კვლავ, ერთადერთობის თეორემის ძალით $y_2(t) = k y_1(t)$ მთელს $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე.

III შემთხვევა. $y_1(\tau) = y_1'(\tau) = 0$, მაშინ $y_1(t)$ არის (2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს $y_1(\tau) = y_1'(\tau) = 0$; მაგრამ $y(t) \equiv 0$ არის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი ნულოვანი საწყისი პირობით. ამიტომ $y_1(t) \equiv 0$, და, ცხადია, $y_1(t) = 0 \cdot y_2(t)$.

დამტკიცება (თეორემა 2). ჩვენ უკვე ვიცით, რომ $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ არის (2) განტოლების ამონახსნი და უნდა ვაჩვენოთ, რომ ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ c_1 და c_2 მუდმივები ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$y(t_0) = c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = Y_0,$$

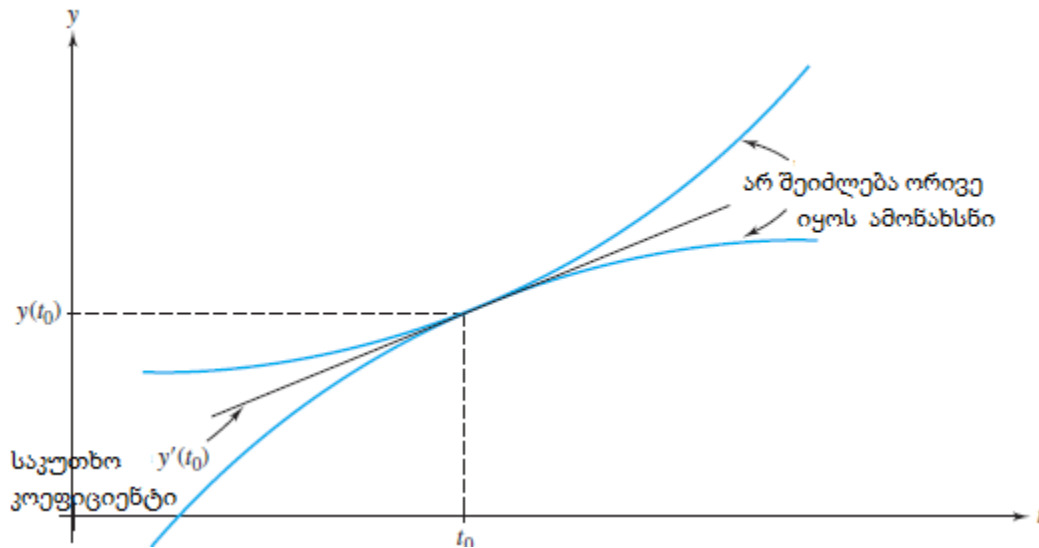
$$y'(t_0) = c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = Y_1.$$

ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ ამ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$c_1 = \frac{Y_0 y_2'(t_0) - Y_1 y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)} \quad \text{და} \quad c_2 = \frac{Y_1 y_1(t_0) - Y_0 y_1'(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)},$$

ვინაიდან სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, რაც თავის მხრივ გამომდინარეობს y_1 და y_2 ფუნქციების წრფივად დამოუკიდებლობიდან და ლემა 1-დან.

ახლა ჩვენ ნამდვილად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ თუ y_1 და y_2 ფუნქციები (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე, მაშინ (5) არის ზოგადი ამონახსნი, რადგან (2) განტოლების ნებისმიერი $y_g(t)$ ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ (5) სახით. მართლაც, შევარჩიოთ c_1 და c_2 მუდმივები ისე, რომ ფუნქცია $c_1 y_1 + c_2 y_2$ და მისი წარმოებული შესაბამისად დაემთხვეს $y_g(t)$ ფუნქციის და მისი წარმოებულის მნიშვნელობას ნებისმიერ წერტილში; მაშინ ერთადერთობის თეორემის თანახმად $c_1 y_1 + c_2 y_2$ და $y_g(t)$ იქნებიან ერთიდაიგივე ფუნქციები $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე (ნახ. 35).



ნახაზი 35. $y(t_0)$ და $y'(t_0)$ განსაზღვრავს ერთი და იმავე ამონახსნს.

როგორ ვიპოვოთ (2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი? ჩვენ უკვე ვიცით პასუხი, როცა მახასიათებელ (3) განტოლებას აქვს ნამდვილი და განსხვავებული ფესვები, რადგან, ცხადია, $y_1(t) = e^{r_1 t}$ არ არის მუდმივი გამრავლებული $y_2(t) = e^{r_2 t}$, თუ $r_1 \neq r_2$ ანუ $y_1(t)$ და $y_2(t)$ არიან წრფივად დამოუკიდებელი.

განსხვავებული ნამდვილი ფესვები

თუ მახასიათებელ (3) განტოლებას აქვს განსხვავებული r_1 და r_2 ფესვები, მაშინ $y_1(t) = e^{r_1 t}$ და $y_2(t) = e^{r_2 t}$ არიან (2) განტოლების ამონახსნები და $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ იქნება ზოგადი ამონახსნი.

როცა მახასიათებელ განტოლებას აქვს ტოლი ფესვები, მაშინ ჩვენ ვიღებთ მხოლოდ ერთ არატრივიალურ ამონახსნს $y_1(t) = e^{r_1 t}$. რომ დავაკმაყოფილოთ ორი საწყისი პირობა $y(t_0)$ და $y'(t_0)$, ჩვენ დაგვჭირდება მეორე წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. შემდეგი წესი არის მეორე ამონახსნის მოძებნის ხერხი.

ტოლი ფესვები

თუ მახასიათებელ (3) განტოლებას აქვს ტოლი ფესვები $r_1 = r_2 = r$, მაშინ $y_1(t) = e^{r t}$ და $y_2(t) = t e^{r t}$ ფუნქციები (2) განტოლების ამონახსნებია და $y(t) = c_1 e^{r t} + c_2 t e^{r t}$ იქნება ზოგადი ამონახსნი.

ამის დამტკიცებამდე განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ შემდეგი ამოცანის ამონახსნი საწყისი პირობით

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3. \quad (12)$$

ამოხსნა. მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0.$$

რადგან $r = -2$ არის ჯერადი ფესვი წესი გვეუბნება, რომ (12)-ს აქვს ამონახსნები $y_1(t) = e^{-2t}$ და $y_2(t) = t e^{-2t}$. შევამოწმოთ, რომ $y_2(t)$ ნამდვილად არის ამონახსნი:

$$y_2(t) = t e^{-2t},$$

$$y_2'(t) = e^{-2t} - 2t e^{-2t},$$

$$y_2''(t) = -2e^{-2t} - 2e^{-2t} + 4t e^{-2t} = -4e^{-2t} + 4t e^{-2t},$$

$$y'' + 4y' + 4y = -4e^{-2t} + 4t e^{-2t} + 4(e^{-2t} - 2t e^{-2t}) + 4t e^{-2t} = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ e^{-2t} და $t e^{-2t}$ არიან წრფივად დამოუკიდებელი, რადგან არცერთი არ მიიღება მეორისაგან მუდმივზე გადამრავლებით $(-\infty, \infty)$ ინტერვალზე. დაბოლოს ჩავსვათ $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$ ზოგადი ამონახსნი საწყისი პირობაში

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = 1,$$

$$y'(0) = -2c_1 e^0 + c_2 e^0 - 2c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = 3.$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ $c_1 = 1$, $c_2 = 5$. ამრიგად, ზოგად ამონახსნს ექნება სახე $y(t) = e^{-2t} + 5t e^{-2t}$.

რატომ არის $y_2(t) = t e^{r t}$ (2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, როცა r ჯერადი ფესვია? ამის შესამოწმებლად ჩავსვათ y_2 ფუნქცია (2) დიფერენციალურ განტოლებაში:

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= te^{rt}, \\
y_2'(t) &= e^{rt} + rte^{rt}, \\
y_2''(t) &= re^{rt} + re^{rt} + r^2 te^{rt} = 2re^{rt} + r^2 te^{rt}, \\
ay_2'' + by_2' + cy_2 &= [2ar + b]e^{rt} + [ar^2 + br + c]te^{rt}.
\end{aligned}$$

ახლა გავითვალისწინოთ, რომ r არის მახასიათებელი (3) განტოლების ფესვი, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეში მეორე შესაკრების კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება ნულის ტოლი იქნება და, რადგან r ამავე დროს ჯერადი ფესვია, ამიტომ პირველი შესაკრების კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებაც ნული იქნება აგრეთვე, რადგანაც

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a}. \quad (13)$$

ამიტომ $2ar + b = 0$ და y_2 ნამდვილად არის (2) განტოლების ამონახსნი.

მეთოდი, რომელიც გამოვიყენეთ მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად, შეგვიძლია გამოვიყენოთ აგრეთვე ნებისმიერი რიგის წრფივი მუდმივ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ შემდეგი განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = 0. \quad (14)$$

ამოხსნა. თუ განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით $y(t) = e^{rt}$, მაშინ როგორც მეორე რიგის განტოლებაში, აქაც r -ის მოსაძებნად მივიღებთ მახასიათებელ განტოლებას

$$r^3 + 3r^2 - r - 3 = 0 \quad (15)$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ $r = 1$ არის (15) განტოლების ფესვი. ამიტომ, თუ (15)-ის მარცხენა მხარეს გავყოფთ $r - 1$ სხვაობაზე პოლინომის პოლინომზე გაყოფის წესით, მაშინ მარცხენა მხარე ასე დაიშლება მამრავლებად

$$(r - 1)(r^2 + 4r + 3) = (r - 1)(r + 1)(r + 3) = 0.$$

აქედან გამომდინარე, მახასიათებელი განტოლების ფესვები იქნება 1, -1 და -3 და შესაბამისად (14) განტოლების ამონახსნები იქნება e^t , e^{-t} , e^{-3t} . ეს ამონახსნები არიან

წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციები (დაამატოცეთ!) და, შესაბამისად, (14)
განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t}$.

სავარჯიშო 15

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები.

1. $y'' + 6y' + 9y = 0$
2. $2y'' + 7y' - 4y = 0$
3. $y'' - y' - 2y = 0$
4. $y'' + 5y' + 6y = 0$
5. $y'' - 5y' + 6y = 0$
6. $y'' + 8y' + 16y = 0$
7. $6y'' + y' - 2y = 0$
8. $z'' + z' - z = 0$
9. $4y'' - 4y' + y = 0$
10. $y'' - y' - 11y = 0$
11. $4w'' + 20w' + 25w = 0$
12. $3y'' + 11y' - 7y = 0$

ამოხსენით შემდეგი ამოცანები საწყისი პირობით

13. $y'' + 2y' - 8y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -12$
14. $y'' + y' = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
15. $y'' - 4y' - 5y = 0$; $y(-1) = 3$, $y'(-1) = 9$
16. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/3$
17. $z'' - 2z' - 2z = 0$; $z(0) = 0$, $z'(0) = 3$
18. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 25/3$
19. $y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$
20. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$

21. **სასაზღვრო ამოცანა.** როცა დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მნიშვნელობები მოცემულია ორ განსხვავებულ წერტილში, მაშინ ამ პირობებს უწოდებენ **სასაზღვრო პირობებს**. (საწყისი პირობებისაგან განსხვავებით, როცა ფუნქციის და მისი წარმოებულის მნიშვნელობები მოცემულია ერთი და იმავე წერტილში). ამ სავარჯიშოს მიზანია, აჩვენოთ, რომ სასაზღვრო ამოცანებისათვის არ გვაქვს არსებობის და ერთადერთობის თეორემა, რომელიც იქნება თეორემა 1-ის ანალოგიური. ცნობილია, რომ

$$y'' + y = 0 \quad (17)$$

განტოლების ნებისმიერ ამონახსნს აქვს სახე $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, სადაც c_1 და c_2

ნებისმიერი მუდმივებია. აჩვენეთ, რომ:

ა) არსებობს (17) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს $y(0) = 2$ და $y(\pi/2) = 0$;

ბ) არ არსებობს (17) განტოლების ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს $y(0) = 2$ და $y(\pi) = 0$;

გ) არსებობს (17) განტოლების უსასრულო რაოდენობა ამონახსნები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს $y(0) = 2$ და $y(\pi) = -2$.

შემდეგ მაგალითებში გამოიყენეთ განმარტება 1 და დაადგინეთ, არიან თუ არა y_1 და y_2 ფუნქციები წრფივად დამოკიდებული $(0,1)$ ინტერვალზე.

22. $y_1(t) = \cos t \sin t$, $y_2(t) = \sin 2t$.

23. $y_1(t) = e^{3t}$, $y_2(t) = e^{-4t}$.

24. $y_1(t) = te^{2t}$, $y_2(t) = e^{2t}$.

25. $y_1(t) = t^2 \cos(\ln t)$, $y_2(t) = t^2 \sin(\ln t)$.

26. $y_1(t) = \tan^2 t - \sec^2 t$, $y_2(t) \equiv 3$.

27. $y_1(t) \equiv 0$, $y_2(t) = e^t$.

19. მახასიათებელი განტოლება კომპლექსური ფესვებით

განვიხილოთ მეორე რიგის $y'' + y = 0$ დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც სხვანაირად *მარტივ ჰარმონიულ განტოლებას* უწოდებენ, რადგან იგი დაკავშირებულია მუსიკალური ტონის რხევასთან. ამ განტოლების ამონახსნებია $y_1(t) = \cos t$ და $y_2(t) = \sin t$. შევნიშნოთ, რომ შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას $r^2 + 1 = 0$ გააჩნია წარმოსახვითი ფესვები $r = \pm i$, სადაც i აღნიშნავს წარმოსახვით ერთეულს $i = \sqrt{-1}$. წინა პარაგრაფში მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი წარმოვადგინეთ ექსპონენციალური ფუნქციებით. ამის შესაბამისად ჩანს, რომ კომპლექსური ფესვების შემთხვევაში ამონახსნები უნდა ჩაგვეწერა შემდეგი სახით e^{it} და e^{-it} , რომლებიც რამენაირად უნდა იყვნენ დაკავშირებული $\cos t$ და $\sin t$ ფუნქციებთან, ვინაიდან წინასწარ ვიცით, რომ ეს უკანასკნელი ფუნქციები მოცემული განტოლების ამონახსნებს წარმოადგენენ. ეს კავშირი დასტურდება ეილერის ფორმულით, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

როცა $b^2 - 4ac < 0$, მაშინ მახასიათებელი

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (1)$$

განტოლების ფესვები, რომელიც შეესაბამება ერთგვაროვან

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

დიფერენციალურ განტოლებას, არიან კომპლექსურად შეუღლებული რიცხვები

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{და} \quad r_2 = \alpha - i\beta,$$

სადაც α და β ნამდვილი რიცხვებია

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{და} \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3)$$

როგორც წინა პარაგრაფებში, აქაც გვინდა ვაჩვენოთ, რომ $e^{r_1 t}$ და $e^{r_2 t}$ არიან (2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები. ეს ნამდვილად ასეა, მაგრამ ვიდრე გავაგრძელებდეთ მსჯელობას, განვიხილოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი საკითხი. მაგალითად, თუ $r_1 = \alpha + i\beta$ კომპლექსური რიცხვია, მაშინ როგორ გავიგოთ $e^{(\alpha+i\beta)t}$? თუ დაუშვებთ, რომ ხარისხის მაჩვენებელზე მოქმედების წესები მართებულია კომპლექსური რიცხვებისთვისაც, მაშინ

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} \quad (4)$$

და ჩვენ დაგვჭირდება მხოლოდ $e^{i\beta t}$ -ს განმარტება.

ამისათვის დავუშვათ, რომ მაკლორენის მწკრივი e^z ფუნქციისათვის, კომპლექსური z რიცხვის შემთხვევაში იგივეა რაც ნამდვილი რიცხვისათვის. გავითვალისწინოთ, რომ $i^2 = -1$, მაშინ ნამდვილი θ -თვის გვექნება

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right). \end{aligned}$$

ახლა თუ გავიხსენებთ მაკლორენის მწკრივებს

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots, \\ \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

დავინახავთ, რომ

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (5)$$

რომელსაც **ეილერის ფორმულა** ეწოდება.

ეილერის ფორმულის გამოყენებით (4) ასე გადაიწერება

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad (6)$$

რომელიც კომპლექსურ $e^{(\alpha+i\beta)t}$ ფუნქციას წარმოადგენს ნამდვილი ფუნქციების საშუალებით. მას შემდეგ რაც განვმარტეთ $e^{(\alpha+i\beta)t}$, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{d}{dt}e^{(\alpha+i\beta)t} = (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t} \quad (7)$$

და (3) ტოლობების გათვალისწინებით დავადგინოთ, რომ კომპლექსური $e^{(\alpha+i\beta)t}$ ფუნქცია ნამდვილად წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს. ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ $e^{(\alpha-i\beta)t}$ ფუნქციისათვის და საბოლოოდ ზოგადი ამონახსნი დავწეროთ შემდეგი სახით

$$y(t) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} = c_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + c_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t). \quad (8)$$

მაგალითი 1 გვიჩვენებს, რომ, ზოგადად, c_1 და c_2 მუდმივები, რომლებიც (8) ტოლობაში მონაწილეობენ, კომპლექსური რიცხვებია.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანა საწყისი პირობით (8) ფორმულის გამოყენებით

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლება იქნება $r^2 + 2r + 2 = 0$, რომლის ფესვებია

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i.$$

რადგან $\alpha = 1$ და $\beta = 1$, ამიტომ ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$y(t) = c_1 e^{-t} (\cos t + i \sin t) + c_2 e^{-t} (\cos t - i \sin t).$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით გვქვია

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 e^0 (\cos 0 + i \sin 0) + c_2 e^0 (\cos 0 - i \sin 0) = c_1 + c_2 = 0, \\ y'(0) &= -c_1 e^0 (\cos 0 + i \sin 0) + c_1 e^0 (-\sin 0 + i \cos 0) \\ &\quad - c_2 e^0 (\cos 0 - i \sin 0) + c_2 e^0 (-\sin 0 - i \cos 0) \\ &= (-1+i)c_1 + (-1-i)c_2 = 2. \end{aligned}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ $c_1 = -i$ და $c_2 = i$, ამიტომ

$$y(t) = -ie^{-t} (\cos t + i \sin t) + ie^{-t} (\cos t - i \sin t) = 2e^{-t} \sin t.$$

ამ მაგალითის პასუხის ბოლო სახე გვაფიქრებინებს, რომ ჩვენ უნდა ვეძებოთ (2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ნამდვილი ფუნქციების ალტერნატიული წყვილის სახით, რომელთა მოძებნა არ იქნება დაკავშირებული კომპლექსური რიცხვების არითმეტიკასთან. ამისათვის დაგვჭირდება ერთი ზოგადი დებულება.

ზოგადად, თუ $z(t)$ ნამდვილი t ცვლადის კომპლექსური ფუნქციაა, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ $z(t) = u(t) + iv(t)$, სადაც $u(t)$ და $v(t)$ ნამდვილი ფუნქციებია. $z(t)$ ფუნქციის წარმოებულები ასე გამოითვლება

$$\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2} + i \frac{d^2v}{dt^2}.$$

შემდეგი ლემის დახმარებით ჩეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ კომპლექსური ამონახსნი $e^{(\alpha+i\beta)t}$ გვაძლევს ორ წრფივად დამოუკიდებელ ნამდვილ ამონახსნს.

ლემა 2. ვთქვათ $z(t) = u(t) + iv(t)$ არის (2) განტოლების ამონახსნი, რომელშიც a , b და c კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ნამდვილი ნაწილი $u(t)$ და წარმოსახვითი ნაწილი $v(t)$ აგრეთვე იქნება (2) განტოლების ამონახსნი.

დამტკიცება. დაშვების თანახმად $az'' + bz' + cz = 0$ და რადგან

$$\begin{aligned} a(u'' + iv'') + b(u' + iv') + c(u + iv) &= 0, \\ (au'' + bu' + cu) + i(av'' + bv' + cv) &= 0. \end{aligned}$$

მაგრამ კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ნულის ტოლია ე. ი. ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობებს

$$au'' + bu' + cu = 0 \quad \text{და} \quad av'' + bv' + cv = 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $u(t)$ და $v(t)$ აგრეთვე (2) განტოლების ამონახსნებია.

თუ ლემა 2-ს გამოვიყენებთ, $e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$ ამონახსნისათვის დავადგენთ შემდეგს.

შეუღლებული კომპლექსური ფესვები	
თუ მახასიათებელ განტოლებას აქვს კომპლექსური შეუღლებული ფესვები $\alpha \pm i\beta$, მაშინ (2) განტოლების ორი წრფივად დამოუკიდებელი ნამდვილი ამონახსნი იქნება	
$e^{\alpha t} \cos \beta t$ და $e^{\alpha t} \sin \beta t$	
და, შესაბამისად, ზოგადი ამონახსნი იქნება	
$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t,$	
(9)	
სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.	

წინამდებარე განხილვისას ჩვენა არ გავამახვილეთ ყურადღება რამდენიმე მნიშვნელოვან საკითხზე, რომელიც ეხება კომპლექსურ რიცხვებს და კომპლექსურ ფუნქციებს. კერძოდ, საჭიროა შემდგომი ანალიზი, რათა შევამოწმოთ კომპლექსურ ხარისებზე მოქმედების წესები და ეილერის ფორმულის მართებულობა, და რომ e^{rt} ფუნქციის წარმოებული არის re^{rt} , როცა r კომპლექსური რიცხვია. [თუ ზემოთ

გაკეთებული დასკვნები მიგაჩნიათ არადამაჯერებლად, შეგიძლიათ უშუალო შეამოწმოთ, რომ (9) ნამდვილად წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს.]

თქვენ შეიძლება ასევე გაკვირვებული დარჩეთ იმით, თუ რა მოხდებოდა თუ ჩვენ ავიღებდით $e^{(\alpha-i\beta)t}$ ფუნქციას $e^{(\alpha+i\beta)t}$ ფუნქციის ნაცვლად. ეს თქვენ შეგიძლიათ განიხილოთ, როგორც სავარჯიშო და დაადგინოთ, რომ $e^{(\alpha-i\beta)t}$ ფუნქცია აგრეთვე მოგვცემს იმავე (9) ზოგად ამონახსნს. მართლაც, ამ ორი კომპლექსური ამონახსნის ჯამის ნახევარი გვაძლევს პირველ ნამდვილ ამონახსნს და მათი სხვაობის შეფარდება $2i$ -თან გვაძლევს მეორე ნამდვილ ამონახსნს.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ შემდეგი განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y'' + 2y' + 4y = 0. \quad (10)$$

ამოხსნა. მახასიათებელი განტოლება იქნება $r^2 + 2r + 4 = 0$, რომლის ფესვებია

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

რადგან $\alpha = -1$ და $\beta = \sqrt{3}$, ამიტომ (10)-ის ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{3}t).$$

როცა მახასიათებელ განტოლებას აქვს კომპლექსური შეუღლებული ფესვები, მაშინ ნამდვილი ამონახსნები ირხევიან უარყოფით და დადებით მნიშვნელობებს შორის. ასეთი სახის ყოფაქცევა შეინიშნებოდა ზამბარის რხევის ამოცანაში.

მაგალითი 3. ადრე ჩვენ განვიხილეთ ზამბარის რხევის მექანიკა და დავინახეთ, როგორ გამოიყენება ნიუტონის მეორე კანონი m მასის მქონე სხეულის $y(t)$ გადაადგილების მიმართ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების

$$my''(t) + by'(t) + ky(t) = 0, \quad (11)$$

მისაღებად, სადაც წევრები შემდეგ ფიზიკურ აზრს ატარებენ

$$[\text{ინერცია}] y'' + [\text{ჩახშობა}] y' + [\text{სიხისტე}] y = 0.$$

განვსაზღვროთ ზამბარის მოძრაობის განტოლება, როცა $m = 36$ კგ, $b = 12$ კგ/წმ (რომელიც ეკვივალენტურია 12 ნ.წმ/მ), $k = 37$ კგ/წმ², $y(0) = 0.7$ მ და $y'(0) = 0.1$ მ/წმ. მოვძებნოთ აგრეთვე გადაადგილება 10 წმ-ის შემდეგ ანუ $y(10)$.

ამოხსნა. მოძრაობის განტოლება $y(t)$ უნდა მოიძებნოს შემდეგი საწყის პირობებიანი ამოცანის ამოხსნით

$$36y''(t) + 12y'(t) + 37y(t) = 0, \quad y(0) = 0.7, \quad y'(0) = 0.1 \quad (12)$$

(12)-ის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე $36r^2 + 12r + 37 = 0$, რომლის ფესვებია

$$r = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(36)(37)}}{72} = \frac{-12 \pm 12\sqrt{1-37}}{72} = -\frac{1}{6} \pm i.$$

რადგან $\alpha = -1/6$ და $\beta = 1$, ამიტომ გადაადგილება $y(t)$ ასე გამოისახება

$$y(t) = c_1 e^{-t/6} \cos t + c_2 e^{-t/6} \sin t. \quad (13)$$

c_1 და c_2 მუდმივები შეგვიძლია ვიპოვოთ საწყისი პირობებით. (13)-ის გაწარმოებით მივიღებთ

$$y'(t) = \left(-\frac{c_1}{6} + c_2\right) e^{-t/6} \cos t + \left(-c_1 - \frac{c_2}{6}\right) e^{-t/6} \sin t.$$

თუ $y(t)$ და $y'(t)$ მნიშვნელობებს გავითვალისწინებთ საწყის პირობებში, მივიღებთ

$$c_1 = 0.7,$$

$$-\frac{c_1}{6} + c_2 = 0.1.$$

ამ სისტემის ამოხსნა გავაძლევს: $c_1 = 0.7$, $c_2 = 1.3/6$. მუდმივების ამ მნიშვნელობებისათვის მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს

$$y(t) = 0.7 e^{-t/6} \cos t + \frac{1.3}{6} e^{-t/6} \sin t$$

და

$$y(10) = 0.7 e^{-5/3} \cos 10 + \frac{1.3}{6} e^{-5/3} \sin 10 \approx -0.13 \text{ მ.}$$

მაგალითი 3-დან დავინახეთ, რომ ნებისმიერი მეორე რიგის მუდმივ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება $a y'' + b y' + c y = 0$ შეიძლება ინტერპრეტირებული იქნეს როგორც ზამზარის რხევის განტოლება, რომელზედაც მიმაგრებულია a მასის მქონე სხეული, ჩახშობის b კოეფიციენტით და ზამზარის c სიხისტით, თუ რა თქმა უნდა ამ მუდმივებს ფიზიკური აზრი აქვთ ე.ი. თუ a დადებითია, ხოლო b და c არაუარყოფითი. ასეთ შემთხვევაში, როგორც ამას ფიზიკურ მოსაზრებებზე დაყრდნობით მე-17 პარაგრაფში განხილვისას ველოდებოდით, ადგილი უნდა ჰქონდეს მიღევად რხევას. ეს ჩანს ამონახსნის (9) სახიდანაც. როცა $c = k$ და $a = m$, მაშინ ექსპონენციალური ქრობის რიგია $\alpha = -b / (2m)$ და კუთხური სიხშირე $\beta = \sqrt{4mk - b^2} / (2a)$, (3) განტოლების მიხედვით.

ცოტა საკვირველია, როცა $y'' + 4y' + 4y = 0$ განტოლების ამონახსნი არ განიცდის რხევას. ამ განტოლების ამონახსნი ადრე ვაჩვენეთ, რომ არის $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$. ამას მარტივი ფიზიკური აზრი აქვს, რადგან როცა ჩახშობის კოეფიციენტი ძალიან მაღალია, მაშინ ხახუნის სხეულს აარიდებს რხევას.

რხევის სიხშირის $\beta = \sqrt{4mk - b^2} / (2a)$ ფორმულიდან შეგვიძლია დავინახოთ, რომ რხევას მაშინ არ ექნება ადგილი, როცა $b > \sqrt{4mk}$.

მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, რომ $ay'' + by' + cy = 0$ სახის განტოლებებს შორის ზამბარის რხევის განტოლების ანალოგს წარმოადგენს ის განტოლება, რომელსაც b და c კოეფიციენტები უარყოფითი აქვს.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება

$$36y'' - 12y' + 37y = 0 \quad (14)$$

და გავანალიზოთ შედეგი.

ამოხსნა. (14) განტოლება არის მაგალითი 3-ის (12) განტოლების მცირეოდენი სახეცვლილება. მახასიათებელი $36r^2 - 12r + 37 = 0$ განტოლების ფესვებია $r = +\frac{1}{6} \pm i$.

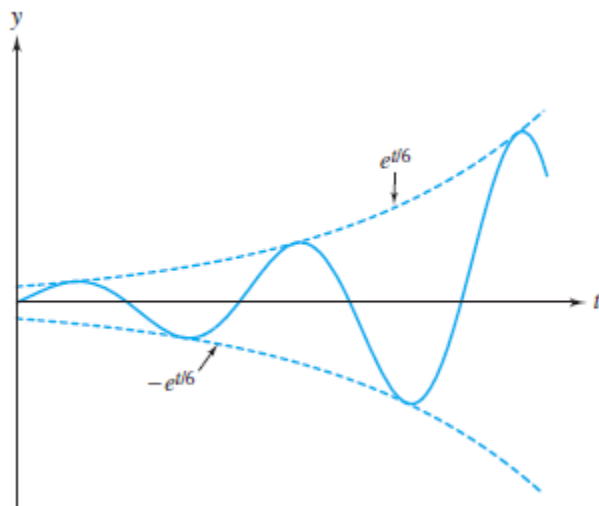
ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y(t) = c_1 e^{+t/6} \cos t + c_2 e^{+t/6} \sin t. \quad (15)$$

თუ (14) განტოლებას შევადარებთ ზამბარის რხევის მოდელს

$$[\text{ინერცია}] y'' + [\text{ჩახშობა}] y' + [\text{სიხისტე}] y = 0, \quad (16)$$

მაშინ შენიშნოთ, რომ ჩახშობის უარყოფითი $b = -12$ კოეფიციენტი წარმოშობს ხახუნის ძალას $F_2 = -by'$, რომელიც სისტემას ანიჭებს ენერგიას - დასუსტების ნაცვლად. ენერგიის ზრდა დროში შემდეგში უნდა გამოიხატოს რხევის ამპლიტუდის ზრდაში, როგორც ამას (15) ფორმულა გვიჩვენებს (ნახ. 36).



ნახაზი 36. მაგალითი 4-ის ამონახსნის გრაფიკი.

მაგალითი 5. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' + 5y' - 6y = 0 \quad (17)$$

და გავანალიზოთ შედეგი.

ამოხსნა. თუ მოცემულ განტოლებას შევადარებთ (16), მაშინ დავინახავთ, რომ გვაქვს ზამბარა უარყოფითი სიხისტით $k = -6$. რას ნიშნავს ეს? როცა სხეული გადაადგილდება ზამბარის წონასწორობის წერტილიდან, მაშინ ზამბარა უკუაგდება სხეულს $F_1 = -k y$ ძალით, რომელიც უფრო ძლიერდება, როცა გადაადგილება იზრდება. ცხადია, ზამბარა ცდილობს გაისროლოს სხეული (პლუს, მინუს) უსასრულობაში, ამიტომ ყველა ამონახსნი $y(t)$ მიისწრაფვის $\pm\infty$ -კენ, როცა $t \rightarrow \infty$ (გარდა წონასწორული ამონახსნისა $y(t) \equiv 0$)

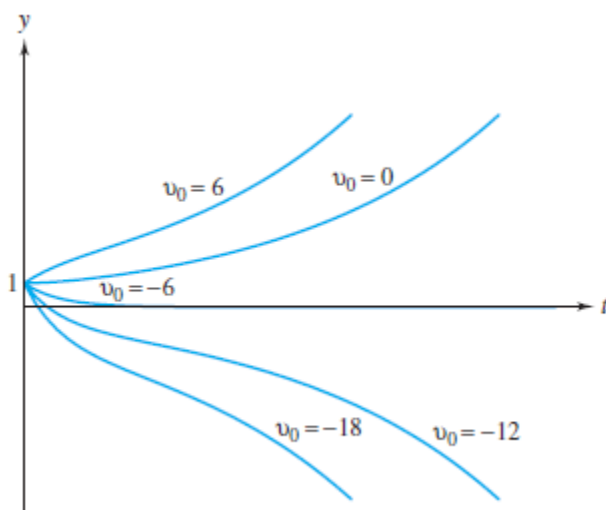
მართლაც, მე-18 პარაგრაფის მაგალით 1-ში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ (17) განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-6t}. \quad (18)$$

თუ საცდელად ავიღებთ $y(t)$ ამონახსნს, რომელიც იწყება ერთეული გადაადგილებით $y(0) = 1$ და საწყისი $y'(0) = v_0$ სიჩქარით, მაშინ

$$y(t) = \frac{6 + v_0}{7} e^t + \frac{1 - v_0}{7} e^{-6t} \quad (19)$$

ამონახსნის გრაფიკის აგებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყველა ამონახსნი განშლადია გარდა ერთისა, როცა $v_0 = -6$ (ნახ. 37).



ნახაზი 37. მაგალითი 5-ის ამონახსნის გრაფიკი.

რა არის ამ იზოლირებული ამონახსნის ფიზიკური აზრი? ცხადია, თუ სხეულს მინიჭებული აქვს საწყისი სიჩქარე -6 , რომელიც მიმართულია შიგნით, მაშინ მას აქვს საკმარისი ენერგია, რათა დაძლიოს ზამბარის ეფექტი უკუაგდოს სხეული $+\infty$ -

ში, მაგრამ არასაკმარისი ენერგია, რათა გადაკვეთოს წონასწორობის წერტილი. ამიტომ ის ასიმპტოტურად უახლოვდება წონასწორობის $y = 0$ მდგომარეობას.

სავარჯიშო 16

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' + 9y = 0$
3. $y'' - 10y' + 26y = 0$
4. $z'' - 6z' + 10z = 0$
5. $y'' - 4y' + 7y = 0$
6. $w'' + 4w' + 6w = 0$
7. $4y'' + 4y' + 6y = 0$
8. $4y'' - 4y' + 26y = 0$

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები

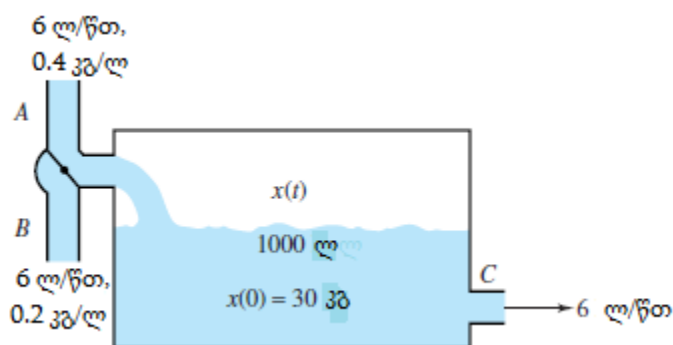
9. $y'' + 4y' + 8y = 0$
10. $y'' - 8y' + 7y = 0$
11. $z'' + 10z' + 25z = 0$
12. $u'' + 7u = 0$
13. $y'' + 2y' + 5y = 0$
14. $y'' - 2y' + 26y = 0$
15. $y'' + 10y' + 41y = 0$
16. $y'' - 3y' - 11y = 0$
17. $y'' - y' + 7y = 0$
18. $2y'' + 13y' - 7y = 0$
19. $y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$
20. $y''' - y'' + 2y = 0$

ამოხსენით შემდეგი ამოცანები საწყისი პირობებით

21. $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
22. $y'' + 2y' + 17y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
23. $w'' - 4w' + 2w = 0$; $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$
24. $y'' + 9y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
25. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(\pi) = e^\pi$, $y'(\pi) = 0$
26. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$
27. $y''' - 4y'' + 7y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
 $y''(0) = 0$

20. ლაპლასის გარდაქმნა. შესავალი

38-ე ნახაზზე გამოსახულია სითხეთა შერევის ამოცანის მოდელი, როდესაც ავზში შემავალი ნაკადების მიწოდება რეგულირდება სარქველით. $t=0$ მომენტისათვის A სარქველი ღიაა და ავზს მიეწოდება 6 ლ/წთ მარილწყალი, რომელიც შეიცავს 0.4 კგ მარილს ერთ ლიტრზე. $t=10$ წთ-თვის A სარქველი იხურება და იღება B , რის შედეგად ავზს მიეწოდება 6 ლ/წთ მარილწყალი 0.2 კგ/ლ კონცენტრაციით. დასაწყისში ავზში არის 1000 ლ მარილწყალი, რომელიც შეიცავს 30 კგ მარილს. გამოსასვლელი C სარქველით გამოედინება 6 ლ/წთ ხსნარი, რაც უზრუნველყოფს ავზში სითხის მუდმივ მოცულობას. განვსაზღვროთ მარილის რაოდენობა ავზში დროის ნებისმიერი $t > 0$ მომენტისათვის, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ავზში სითხეები კარგად ერევა ერთმანეთში.



ნახაზი 38. სითხის შერევა ავზში A სარქველით.

ამ ამოცანის მარტივი ვარიანტი ჩვენ ადრე განვიხილეთ. დავუშვათ, რომ $x(t)$ არის ავზში მარილის რაოდენობა (კილოგრამებში) დროის t მომენტისათვის. მაშინ ცხადია, კონცენტრაცია იქნება $x(t)/1000$ კილოგრამი ლიტრში. ავზში ერთდროულად ხდება მარილის რაოდენობის კლება შემდეგი სიდიდით

$$(6 \text{ ლ/წთ}) \times (x(t)/1000 \text{ კგ/ლ}) = 3x(t)/500 \text{ კგ/წთ},$$

რომელიც მიჰყვება გამომდინარე ნაკადს C გამოსასვლელი სარქველიდან 6 ლ/წთ სიჩქარით. მეორე მხრივ, ავზში მყოფ სითხეს A და B სარქველებიდან შემავალი ნაკადით ყოველ წუთში ემატება $g(t)$ რაოდენობის მარილი, სადაც

$$g(t) = 0.4 \text{ კგ/ლ} \times 6 \text{ ლ/წთ} = 2.4 \text{ კგ/წთ}, \quad 0 < t < 10 \text{ (A სარქველი)},$$

$$g(t) = 0.2 \text{ კგ/ლ} \times 6 \text{ ლ/წთ} = 1.2 \text{ კგ/წთ}, \quad t > 10 \text{ (B სარქველი)}, \quad (1)$$

ამრიგად, მარილის $x(t)$ რაოდენობა იცვლება სიჩქარით

$$\frac{d}{dt} x(t) = g(t) - \frac{3x(t)}{500}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{500}x = g(t). \quad (2)$$

საწყისი პირობაა

$$x(0) = 30. \quad (3)$$

ამ საწყის პირობიანი ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ჩვენთვის ცნობილი ტექნიკა. ამისათვის გავყოთ დროის $(0, \infty)$ ინტერვალი ორ ქვეინტერვალად $(0, 10)$ და $(10, \infty)$. ამ ქვეინტერვალებზე არაერთგვაროვანი წევრი $g(t)$ არის მუდმივი და ამ ქვეინტერვალებზე (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნის მისაღებად შეიძლება გამოვიყენოთ განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდი, რომელსაც შეიცავს შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი. (3) საწყისი პირობით შევარჩევთ ნებისმიერ მუდმივს $0 < t < 10$ შუალედისათვის და შემდეგ ჩვენ დაგვჭირდება გამოვთვალოთ $x(10)$, რათა მისი გამოყენებით დავაფიქსიროთ ნებისმიერი მუდმივი ზოგად ამონახსნში $t > 10$ ინტერვალისათვის.

ჩვენი მიზანია მოვახდინოთ ასეთი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ახალი მეთოდის ილუსტრირება ლაპლასისი გარდაქმნის საშუალებით. როგორც შემდეგ დავინახავთ ეს მეთოდი გამოირჩევა გარკვეული უპირატესობით ჩვენს მიერ ადრე განხილული მეთოდებთან შედარებით. ერთი, რაც თვალსაჩინოა, ეს მეთოდი უფრო მოხერხებულია საწყის პირობიანი ამოცანების ამოსახსნელად წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის, როდესაც მარჯვენა მხარე განიცდის ნახტომისებურ წყვეტას.

$[0, \infty)$ ინტერვალზე მოცემული $f(t)$ ფუნქციის **ლაპლასის გარდაქმნა** ასე განისაზღვრება

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (4)$$

ამრიგად, ჩვენ $f(t)$ გადავამრავლებთ e^{-st} მამრავლზე და ვაინტეგრეთ t ცვლადით 0-დან ∞ -მდე. ამ გარდაქმნას t ცვლადის ფუნქცია გადაყავს s ცვლადის ფუნქციაში.

შემდგომში ჩვენ უფრო დეტალურად შევისწავლით ამ გარდაქმნის თვისებებს, მაგრამ ახლა უბრალოდ მივუთითოთ მის მთავარ უპირატესობაზე.

ლაპლასის გარდაქმნა წრფივ მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებას t არეში ცვლის უფრო მარტივი ალგებრული განტოლებით s არეში. კერძოდ, თუ $X(s)$ არის $x(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა, მაშინ $x'(t)$ -ს ლაპლასის გარდაქმნა იქნება $sX(s) - x(0)$. მაშასადამე, (2) დიფერენციალური განტოლება და (3) საწყისი პირობა t არედან მარტივად გარდაიქმნება შემდეგ თანაფარდობაში s არეში

$$\begin{array}{cc} t\text{-არე} & s\text{-არე} \\ x'(t) + \frac{3}{500}x(t) = g(t), & x(0) = 30; \quad sX(s) - 30 + \frac{3}{500}X(s) = G(s), \end{array} \quad (5)$$

სადაც $G(s)$ არის $g(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა. მივაქციოთ ყურადღება, რომ აქ ჩვენ ვიგულისხმეთ გარდაქმნის წრფივობის ზოგიერთი თვისება, როგორცაა მაგალითად, ჯამის და მუდმივ მამრავლზე ნამრავლის გარდაქმნა. ჩვენ შეგვიძლია s არეში ვიპოვოთ $X(s)$ ყოველგვარი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის გარეშე. გვექნება

$$X(s) = \frac{30}{s + 3/500} + \frac{G(s)}{s + 3/500}. \quad (6)$$

ამ მეთოდისათვის კარგი იქნება, თუ მარტივად გადავალთ t არედან s არეში და პირიქით. მართლაც, გვაქვს ცხრილები და თეორემები, რომლებიც ამ გადასვლის საშუალებას გვაძლევს. ჩვენ ვნახავთ, მაგალითად, რომ $g(t)$ -ს გარდაქმნა, მიუხედავად მისი არასასურველი წყვეტილი ხასიათისა (1) განტოლებაში, მოიცემა მხოლოდ ერთი ფორმულით

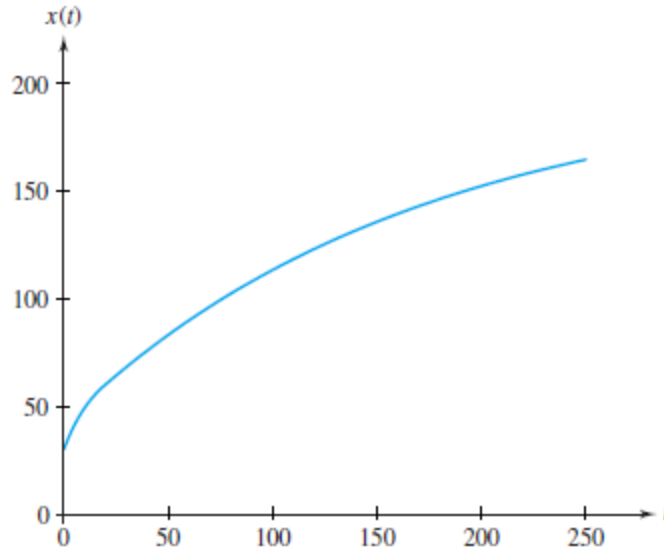
$$G(s) = \frac{2.4}{s} - \frac{1.2}{s} e^{-10s},$$

და $x(t)$ -ის შესაბამისი გარდაქმნა იქნება

$$X(s) = \frac{30}{s + 3/500} + \frac{2.4}{s(s + 3/500)} - \frac{1.2e^{-10s}}{s(s + 3/500)}.$$

კვლავ ცხრილისა და მცირედი თეორიის გამოყენებით შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ

$$x(t) = 400 - 370e^{-3t/500} - 200 \cdot \begin{cases} 0, & t \leq 10, \\ [1 - e^{-3(t-10)/500}], & t \geq 10. \end{cases} \quad (7)$$



ნახაზი 39. ავზში შერევის ამოცანის ამონახსნი.

შევნიშნოთ, რომ (7) ტოლობის მიღება მოხერხდა სამიხედილი ფუნქციის წარმოებულის მოძებნის, შუალედის დაყოფის და ნებისმიერი მუდმივის საწყისი პირობით შერჩევის გარეშე. ლაპლასის გარდაქმნა ყველა ამ ოპერაციას ცვლის ალგებრული ოპერაციებით: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა და, ცხადია, ცხრილის გონიერი გამოყენებით. 39-ე ნახაზი გამოსახავს გარდაქმნის მეთოდის უპირატესობას.

სამწუხაროდ ლაპლასის მეთოდი ნაკლებ სასარგებლოა ცვლადკოეფიციენტებიანი განტოლებებისათვის და არაწრფივი განტოლებებისათვის, ასევე უნდა ღინიშნოს, რომ ხანდახან შებრუნებული გარდაქმნის მოძებნა დაკავშირებულია დიდ სირთულეებთან. მაგრამ იგი იდეალურია მრავალი ამოცანებისათვის, რომლებიც გამოყენებებში გვხვდება.

21. ლაპლასის გარდაქმნის განსაზღვრა

ადრე ჩვენ ვისწავლეთ დიფერენციალური ოპერატორები. ეს ოპერატორები მოქმედებენ ფუნქციაზე და გაწარმოებით გარდაქმნიან სხვა ფუნქციაში. ლაპლასის გარდაქმნა, რომელიც არის ინტეგრალური ოპერატორი, წარმოადგენს სხვა ტიპის ოპერატორს.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ, $[0, \infty)$ ინტერვალზე მოცემულია $f(t)$ ფუნქცია. $f(t)$ ფუნქციის **ლაპლასის გარდაქმნა** განისაზღვრება ინტეგრალით

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1)$$

$F(s)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა s -ის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც არსებობს (1) ინტეგრალი. f ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა ასე აღინიშნება $\mathcal{L}\{f\}$.

შევნიშნოთ, რომ (1) ფორმულაში გვაქვს არასაკუთრივი ინტეგრალი. უფრო ზუსტად

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} f(t) dt$$

როცა ზღვარი არსებობს.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ მუდმივი $f(t) = 1, \quad t \geq 0$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა.

ამოხსნა. ლაპლასის გარდაქმნის განსაზღვრის თანახმად გვქვია

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \, dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} \, dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_{t=0}^{t=N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sN}}{s} \right]. \end{aligned}$$

რადგან $e^{-sN} \rightarrow 0$, როცა $s > 0$ ფიქსირებული რიცხვია, და $N \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$F(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{როცა } s > 0.$$

როცა $s \leq 0$, მაშინ ინტეგრალი $\int_0^{\infty} e^{-st} dt$ განშლადია. აქედან გამომდინარე, $F(s) = 1/s$ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება ყველა $s > 0$ რიცხვი.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(t) = e^{at}$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა, როცა a მუდმივია.

ამოხსნა. ლაპლასის გარდაქმნის განსაზღვრის თანახმად გვქვია

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-(s-a)t} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a} \right|_0^N \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s-a} - \frac{e^{-(s-a)N}}{s-a} \right] \\
&= \frac{1}{s-a}, \text{ როცა } s > a.
\end{aligned}$$

თუ $s \leq a$, მაშინ ინტეგრალი კვლავ განშლადია და $F(s)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება ყველა $s > a$.

მაგალითი 2-ის მიხედვით უნდა აღინიშნოს, რომ მუდმივი $f(t) = 1 = e^{0t}$ ფუნქციის გარდაქმნა არის $1/(s-0)$, რაც შესაბამისობაშია მაგალითი 1-ის შედეგთან.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\mathcal{L}\{\sin bt\}$, სადაც b მუდმივია.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin bt dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} \sin bt dt.$$

ინტეგრალების ცხრილის მიხედვით, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + b^2} (-s \sin bt - b \cos bt) \right]_0^N \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{b}{s^2 + b^2} - \frac{e^{-sN}}{s^2 + b^2} (s \sin bN + b \cos bN) \right] \\
&= \frac{b}{s^2 + b^2}, \text{ როცა } s > 0
\end{aligned}$$

(რადგან ასეთი s -თვის გვექნება $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} (s \sin bN + b \cos bN) = 0$).

მაგალითი 4. ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 5, \\ 0, & 5 < t < 10, \\ e^{4t}, & 10 < t. \end{cases}$$

ამოხსნა. რადგან $f(t)$ განსაზღვრულია სხვადასხვა ფორმულით სხვადასხვა ინტერვალში, ამიტომ (1) ფორმულაში დავანაწილოთ საინტეგრაციო არე სამ ინტერვალად. მივიღებთ

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^5 e^{-st} \cdot 2 dt + \int_5^{10} e^{-st} \cdot 0 dt + \int_{10}^{\infty} e^{-st} e^{4t} dt \\ &= 2 \int_0^5 e^{-st} dt + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{10}^N e^{-(s-4)t} dt \\ &= \frac{2}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} + \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-10(s-4)}}{s-4} - \frac{e^{-(s-4)N}}{s-4} \right] \\ &= \frac{2}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} + \frac{e^{-10(s-4)}}{s-4}, \text{ როცა } s > 4. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ ამ მაგალითში $f(t)$ ფუნქციას აქვს ნახტომის ტიპის წყვეტა $t=5$ და $t=10$ წერტილებში. ეს მნიშვნელობები აისახება ექსპონენციალურ წევრებში e^{-5s} და e^{-10s} , რომლებიც მონაწილეობენ $F(s)$ ფუნქციის გამოსახულებაში. ამ კავშირს უფრო ზუსტად შემდგომში დაუბრუნდებით, როცა განვიხილავთ ერთეულოვან საფეხურა ფუნქციას.

წრფივობა ლაპლასის გარდაქმნის ერთერთი მნიშვნელოვანი თვისებაა მისი წრფივობა.

თეორემა 1. ვთქვათ, არსებობს f , f_1 და f_2 ფუნქციების ლაპლასის გარდაქმნები, როცა $s > \alpha$ და c რაიმე მუდმივია. მაშინ, როცა $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{L}\{cf\} = c\mathcal{L}\{f\}. \quad (3)$$

დამტკიცება. ინტეგრების წრფივობის თვისების გამოყენებით, როცა $s > \alpha$, გვექნება

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1 + f_2\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}[f_1(t) + f_2(t)]dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}f_1(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-st}f_2(t)dt \\ &= \mathcal{L}\{f_1\}(s) + \mathcal{L}\{f_2\}(s) .\end{aligned}$$

ამრიგად, (2) პირობა მართებულია. ანალოგიურად ვნახავთ, რომ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{cf\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}[cf(t)]dt = c \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \\ &= c\mathcal{L}\{f\}(s) .\end{aligned}$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ $\mathcal{L}\{11 + 5e^{4t} - 6 \sin 2t\}$.

ამოხსნა. წრფივობიდან გამომდინარე, ვიცით, რომ ჯამის გარდაქმნა გარდაქმნათა ჯამის ტოლია. ამიტომ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{11 + 5e^{4t} - 6 \sin 2t\} &= \mathcal{L}\{11\} + \mathcal{L}\{5e^{4t}\} + \mathcal{L}\{-6 \sin 2t\} \\ &= 11\mathcal{L}\{1\} + 5\mathcal{L}\{e^{4t}\} - 6\mathcal{L}\{\sin 2t\} .\end{aligned}$$

მაგალითი 1, 2 და 3-ში ჩვენ დავადგინეთ, რომ

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} , \quad \mathcal{L}\{e^{4t}\}(s) = \frac{1}{s - 4} , \quad \mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) = \frac{2}{s^2 + 2^2} .$$

ამ შედეგების გამოყენებით ვიპოვიტ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{11 + 5e^{4t} - 6 \sin 2t\}(s) &= 11\left(\frac{1}{s}\right) + 5\left(\frac{1}{s - 4}\right) - 6\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right) \\ &= \frac{11}{s} + \frac{5}{s - 4} - \frac{12}{s^2 + 4} .\end{aligned}$$

რადგან $\mathcal{L}\{1\}$, $\mathcal{L}\{e^{4t}\}$ და $\mathcal{L}\{\sin 2t\}$ განსაზღვრულია, როცა $s > 4$, ამიტომ იმავე ინტერვალში განსაზღვრული იქნება $\mathcal{L}\{11 + 5e^{4t} - 6 \sin 2t\}$ გარდაქმნაც.

გარდაქმნის არსებობა. არსებობენ ფუნქციები, რომელთათვის (1) არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია ყოველი s -თვის. მაგალითად, ასე ხდება $f(t) = 1/t$ ფუნქციისათვის, რომელიც სწრაფად იზრდება ნულის მახლობლობაში. ამის მსგავსად, არ არსებობს $f(t) = e^{t^2}$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა, რადგან იგი ძალიან

სწრაფად იზრდება, როცა $t \rightarrow \infty$. საბედნიეროდ, ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთათვის არსებობს ლაპლასის გარდაქმნა, შეიცავს მრავალ ფუნქციას, რომლებიც გამოყენებით ამოცანებში დიფერენციალურ განტოლებებში მონაწილეობენ. ჩვენ ახლა განვიხილავთ ფუნქციათა გარკვეულ თვისებებს, რომელთა შესრულებაც უზრუნველყოფს ლაპლასის გარდაქმნის არსებობას.

ვითქვით, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ $f(t)$ ფუნქციას გააჩნია ნახტომის ტიპის წყვეტა $t_0 \in (a, b)$ წერტილში, თუ $f(t)$ წყვეტილია t_0 წერტილში, მაგრამ სასრული ცალმხრივი ზღვრები

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) \quad \text{და} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t)$$

არსებობს. თუ წყვეტას ადგილი აქვს სეგმენტის ბოლო $t_0 = a$ (ან b) წერტილზე, მაშინ ნახტომის ტიპის წყვეტას ადგილი აქვს, როცა არსებობს $f(t)$ ფუნქციის ცალმხრივი სასრული ზღვარი, როცა $t \rightarrow a +$ ($t \rightarrow b -$). ახლა შეგვიძლია განვსაზღვროთ უბანუბან უწყვეტობა.

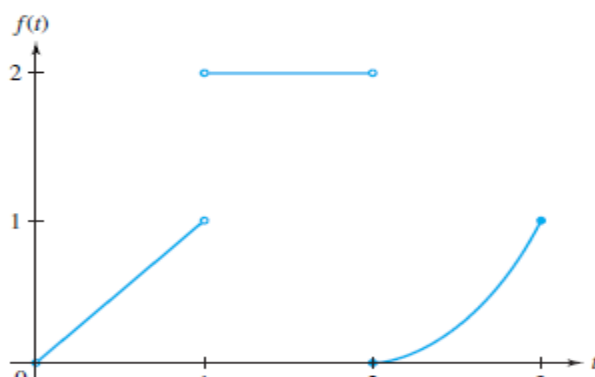
განსაზღვრება 2. ვითქვით, რომ $f(t)$ ფუნქცია *უბან-უბან უწყვეტია სასრულ* $[a, b]$ *ინტერვალზე*, თუ $f(t)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში გარდა შესაძლებელი სასრული რაოდენობა წერტილებისა, სადაც $f(t)$ ფუნქციას გააჩნია ნახტომის ტიპის წყვეტა.

ვითქვით, რომ $f(t)$ ფუნქცია *უბან-უბან უწყვეტია* $[0, \infty)$ *ინტერვალზე*, თუ $f(t)$ უბან-უბან უწყვეტია $[0, N]$ ინტერვალზე ნებისმიერი $N > 0$ რიცხვისათვის.

მაგალითი 6. ვაჩვენოთ, რომ

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 2, & 1 < t < 2, \\ (t-2)^2, & 2 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

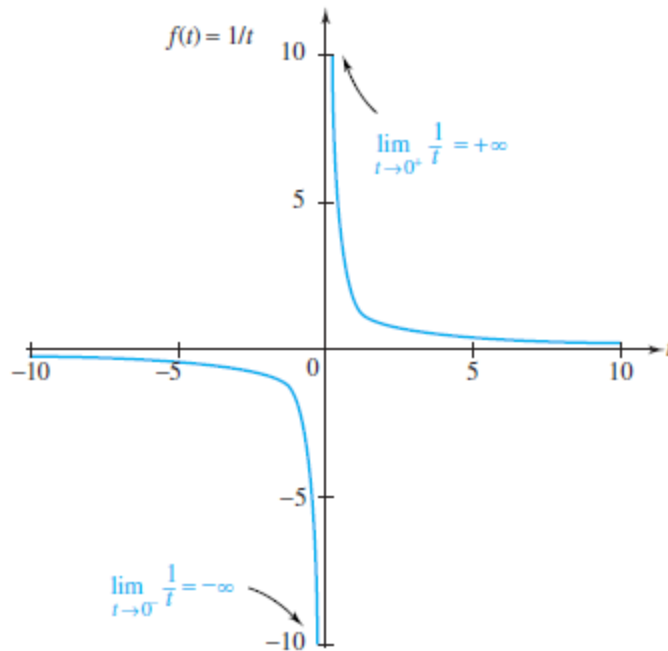
ფუნქცია, რომლის გრაფიკი მოცემულია მე-40 ნახაზზე არის უბან-უბან უწყვეტი ფუნქცია $[0, 3]$ ინტერვალზე.



ნახაზი 40. $f(t)$ ფუნქციის გრაფიკი მაგალითი 6-ში.

ამოხსნა. $f(t)$ ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს, რომ იგი არის უწყვეტი $(0,1)$, $(1,2)$ და $(2,3]$ ინტერვალებზე. გარდა ამისა, წყვეტის $t=0$, 1 და 2 წერტილებში აქვს ნახტომის ტიპის წყვეტა, რადგან ცალმხრივი ზღვრები სასრული რიცხვებია. კერძოდ, $t=1$ წერტილში მარცხენა ცალმხრივი ზღვარი ერთის ტოლია, ხოლო მარჯვენა ცალმხრივი ზღვარი კი ორის ტოლია. მაშასადამე, $f(t)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტია $[0,3]$ ინტერვალზე.

შევნიშნოთ, რომ $f(t)$ ფუნქცია მაგალით 4-ში უბან-უბან უწყვეტია $[0,\infty)$ ინტერვალზე, რადგან ის უბან-უბან უწყვეტია $[0,N]$ სახის ყოველ სასრულ ინტერვალზე, სადაც $N > 0$. პირიქით, $f(t) = 1/t$ ფუნქცია არ არის უბან-უბან უწყვეტი ნებისმიერ ინტერვალში, რომელიც შეიცავს კოორდინატთა სათავეს, რადგან მას სათავეში აქვს უსასრულო ნახტომი (ნახ. 41)



ნახაზი 41. უსასრულო ნახტომი სათავეში.

სასრულ ინტერვალზე მოცემული უბან-უბან უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ ინტერვალზე. თუმცა, უბან-უბან უწყვეტობა $[0, \infty)$ ინტერვალზე არ არის საკმარისი პირობა არასაკუთრივი ინტეგრალის არსებობისთვის $[0, \infty)$ ინტერვალზე. აგრეთვე უნდა გავითვალისწინოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ზრდადობის რიგი საკმარისად დიდი t -თვის. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ლაპლასის გარდაქმნა უბანუბან უწყვეტი ფუნქციიდან არსებობს, თუ იგი არ იზრდება ექსპონენციალურ ფუნქციაზე უფრო სწრაფად.

განსაზღვრება 3. ვიტყვი, რომ $f(t)$ არის α რიგის ექსპონენციალური ფუნქცია, თუ არსებობს ისეთი დადებითი T და M მუდმივები, რომ

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \text{ ნებისმიერი } t \geq T \text{-თვის} \quad (4)$$

მაგალითად, $f(t) = e^{5t} \sin 2t$ არის $\alpha = 5$ რიგის რადგან

$$|e^{5t} \sin 2t| \leq e^{5t}$$

და (4) ტოლობას ადგილი აქვს $M = 1$ და ნებისმიერი დადებითი T -თვის.

ჩვენ გამოვიყენებთ ფრაზას „ $f(t)$ არის ექსპონენციალური რიგის“ იმის აღსანიშნავად, რომ α -ს რაიმე მნიშვნელობისათვის $f(t)$ აკმაყოფილებს

განსაზღვრება 3-ის პირობებს ე. ი. $|f(t)|$ შემოსაზღვრულია $Me^{\alpha t}$ სახის ფუნქციით. e^{t^2} არ არის ექსპონენციალური რიგის. ეს რომ შევამოწმოთ, შევნიშნოთ, რომ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t(t-\alpha)} = +\infty$$

ნებისმიერი α -თვის. შესაბამისად, e^{t^2} იზრდება უფრო სწრაფად ვიდრე $e^{\alpha t}$ ფუნქცია α -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ფუნქციები, რომლებიც გვხვდება მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის დროს (პოლინომი, პოლინომების შეფარდება, ექსპონენციალური ფუნქცია, სინუსი და კოსინუსი), ექსპონენციალური რიგის უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებია. როგორც ახლა ვაჩვენებთ, ასეთი ფუნქციების ლაპლასის გარდაქმნა არსებობს s -ის საკმარისად დიდი მნიშვნელობებისათვის.

თეორემა 2. თუ $f(t)$ არის α რიგის ექსპონენციალური და უბან-უბან უწყვეტი ფუნქცია $[0, \infty)$ ინტერვალზე, მაშინ არსებობს $\mathcal{L}\{f\}(s)$, ნებისმიერი $s > \alpha$ -თვის.

დამტკიცება. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

კრებადია $s > \alpha$ -თვის. ინტეგრალი დავშალოთ ორ ინტეგრალად

$$\int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)dt, \quad (5)$$

სადაც T არჩეულია ისე, რომ შესრულდეს (4) უტოლობა. პირველი ინტეგრალი (5)-ში არსებობს, რადგან $f(t)$ და $e^{-st}f(t)$ უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებია $[0, T]$ ინტერვალზე ნებისმიერი ფიქსირებული s -თვის. იმისათვის, რომ დავადგინოთ (5) ის მეორე შესაკრების კრებადობა, გამოვიყენოთ არასაკუთრივი ინტეგრალების შედარების წესი.

რადგან $f(t)$ არის α რიგის ექსპონენციალური ფუნქცია, $t \geq T$ -თვის გვექნება

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

და რადგან

$$\left| e^{-st} f(t) \right| = e^{-st} |f(t)| \leq M e^{-(s-\alpha)t},$$

ნებისმიერი $t \geq T$ -თვის, ამიტომ, როცა $s > \alpha$, გვექნება

$$\int_T^\infty M e^{-(s-\alpha)t} dt = M \int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{M e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha} < \infty.$$

რადგან $|e^{-st} f(t)| \leq M e^{-(s-\alpha)t}$, როცა $t \geq T$ და არასაკუთრივი ინტეგრალი მაჟორანტი $M e^{-(s-\alpha)t}$ ფუნქციიდან კრებადია, როცა $s > \alpha$, ამიტომ, შედარების წესის თანახმად, კრებადი იქნება ინტეგრალი

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$$

როცა $s > \alpha$. დაბოლოს, რადგან (5)-ში ორივე ინტეგრალი კრებადია, ამიტომ არსებობს ლაპლასის გარდაქმნა.

ქვემოთ ცხრილში მოცემულია ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციების ლაპლასის გარდაქმნა. ეს ცხრილი ბევრჯერ დაგვეხმარება წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისას. იგი უშუალოდ შეგვიძლია შევამოწმოთ ლაპლასის გარდაქმნის განსაზღვრების გამოყენებით.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^n, \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
$e^{at} t^n, \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$

სავარჯიშო 17

განსაზღვრება 1-ის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ფუნქციების ლაპლასის გარდაქმნები

1. t

2. t^2

3. e^{6t}

4. te^{3t}

5. $\cos 2t$

6. $\cos bt$

7. $e^{2t} \cos 3t$

8. $e^{-t} \sin 2t$

9. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2, \\ t, & 2 < t \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 < t < 1, \\ 0, & 1 < t \end{cases}$

11. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi, \\ 0, & \pi < t \end{cases}$

12. $f(t) = \begin{cases} e^{2t}, & 0 < t < 3, \\ 1, & 3 < t \end{cases}$

ლაპლასის გარდაქმნის წრივობის თვისების გამოყენებით და ცხრილის დახმარებით გამოთვალეთ შემდეგი გარდაქმნები

13. $\mathcal{L}\{6e^{-3t} - t^2 + 2t - 8\}$

14. $\mathcal{L}\{5 - e^{2t} + 6t^2\}$

15. $\mathcal{L}\{t^3 - te^t + e^{4t} \cos t\}$

16. $\mathcal{L}\{t^2 - 3t - 2e^{-t} \sin 3t\}$

17. $\mathcal{L}\{e^{3t} \sin 6t - t^3 + e^t\}$

18. $\mathcal{L}\{t^4 - t^2 - t + \sin \sqrt{2}t\}$

19. $\mathcal{L}\{t^4 e^{5t} - e^t \cos \sqrt{7}t\}$

20. $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos \sqrt{3}t - t^2 e^{-2t}\}$

დაადგინეთ არის თუ არა შემდეგი ფუნქციები უწყვეტი, უბან-უბან უწყვეტი ან არცერთი $[0,10]$ ინტერვალზე და ააგეთ გრაფიკი

$$21. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ (t-2)^2, & 1 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$22. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2, \\ t, & 2 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

$$23. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ t-1, & 1 < t < 3, \\ t^2-4, & 3 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$24. f(t) = \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 4}$$

$$25. f(t) = \frac{t^2 - t - 20}{t^2 + 7t + 10}$$

$$26. f(t) = \frac{t}{t^2 - 1}$$

$$27. f(t) = \begin{cases} 1/t, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2, \\ 1-t, & 2 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$28. f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

შედეგი ფუნქციებიდან რომელია ექსპონენციალური რიგის?

ა) $t^3 \sin t$

ბ) e^{t^3}

გ) $\cosh(t^2)$

დ) $\sin(t^2) + t^4 e^{6t}$

ე) $\exp\{t^2/(t+1)\}$

ვ) $100e^{49t}$

ზ) $t \ln t$

თ) $\frac{1}{t^2 + 1}$

ი) $3 - e^{t^2} + \cos 4t$

კ) $\sin(e^{t^2}) + e^{\sin t}$

22. ლაპლასის გარდაქმნის თვისებები

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვსაზღვრეთ $f(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა

$$\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt .$$

ამ განმარტების გამოყენებით ლაპლასის გარდაქმნის ცხადი გამოსახულების მიღება მოითხოვს არასაკუთრივი ინტეგრალის შეფასებას, რომელიც ხშირად ხანგრძლივი შრომატევადი საქმეა. ჩვენ უკვე ვნახეთ, როგორ შეიძლება დაგვეხმაროს გარდაქმნის წრფივობა ამ საქმისაგან თავის დასაღწევად. ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ლაპლასის გარდაქმნის კიდევ რამდენიმე თვისებას, რომლებიც გაგვიმარტივებს გამოთვლებს. ეს ახალი თვისებები შესაძლებლობას მოგვცემს, გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა საწყის პირობიანი ამოცანის ამოსახსნელად.

ძვრა s -ის მიმართ	
თეორემა 3. თუ არსებობს ლაპლასის გარდაქმნა $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, როცა $s > \alpha$, მაშინ	
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s - a)$	(1)
როცა $s > \alpha + a$.	

დამტკიცება. მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \\ &= F(s - a) . \end{aligned}$$

თეორემა 3 გვიჩვენებს $f(t)$ ფუნქციის e^{at} მამრავლზე გადამრავლების შედეგად მიღებული ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნას.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $e^{at} \sin bt$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა.

ამოხსნა. ჩვენ წინა პარაგრაფის მაგალით 3-ში ვნახეთ, რომ

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} .$$

ამრიგად, თეორემა 3-ის საფუძველზე გვექნება

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\}(s) = F(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} .$$

წარმოებული ლაპლასის გარდაქმნა

თეორემა 4. ვთქვათ, $f(t)$ უწყვეტია $[0, \infty)$ ინტერვალზე, $f'(t)$ უბანუბან უწყვეტია $[0, \infty)$ ინტერვალზე და ორივე α რიგის ექსპონენციალური ფუნქციაა. მაშინ, როცა $s > \alpha$

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) . \quad (2)$$

დამტკიცება. რადგან არსებობს $\mathcal{L}\{f'\}$, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა [როცა $u = e^{-st}$ და $dv = f'(t)dt$]. მივიღებთ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} f'(t) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{-st} f(t) \Big|_0^N + s \int_0^N e^{-st} f(t) dt \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N) - f(0) + s \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} f(t) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N) - f(0) + s\mathcal{L}\{f\}(s) . \end{aligned} \quad (3)$$

$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N)$ ზღვრის გამოსათვლელად შევნიშნოთ, რომ $f(t)$ არის α რიგის ექსპონენციალური ფუნქცია. ამიტომ არსებობს ისეთი M მუდმივი, რომ საკმარისად დიდი N -თვის

$$|e^{-sN} f(N)| \leq e^{-sN} M e^{\alpha N} = M e^{-(s-\alpha)N} .$$

რადგან $s > \alpha$

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} |e^{-sN} f(N)| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} M e^{-(s-\alpha)N} = 0 ,$$

ამიტომ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N) = 0 ,$$

როცა $s > \alpha$. მაშინ (3) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) .$$

ინდუქციის გამოყენებით შეიძლება გავავრცელოთ ეს თეორემა $f(t)$ ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულებისათვის. მაგალითად,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''\}(s) &= s\mathcal{L}\{f'\}(s) - f'(0) \\ &= s[s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)] - f'(0) , \end{aligned}$$

რომელიც ასე გამარტივდება

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0) .$$

ზოგადად, მივიღებთ შემდეგ შედეგს.

მაღალი რიგის წარმოებულების ლაპლასის გარდაქმნა	
თეორემა 5. ვთქვათ $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[0, \infty)$ ინტერვალზე და ყველა α რიგის ექსპონენციალური ფუნქციებია. მაშინ, როცა $s > \alpha$	
$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) .$	(4)

უკანასკნელი ორი თეორემა ნათელს ჰფენს იმ გარემოებას, თუ რატომ არის ასე სასარგებლო ლაპლასის გარდაქმნა საწყის პირობიანი ამოცანის ამოსახსნელად. კერძოდ, ამ თეორემების თანახმად, ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია „ t ცვლადით გაწარმოება“ შევცვალოთ „ s -ზე გადამრავლებით“ და ამის საშუალებით დიფერენციალური განტოლება გარდავქმნათ ალგებრულ განტოლებად. **მაგალითი 2.** თეორემა 4-ის გამოყენებით და ცნობილი

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} ,$$

ფორმულით განსაზღვრეთ $\mathcal{L}\{\cos bt\}$.

ამოხსნა. ვთქვათ $f(t) = \sin bt$, მაშინ $f(0) = 0$ და $f'(t) = b \cos bt$. (2) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) , \\ \mathcal{L}\{b \cos bt\}(s) &= s\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) - 0 , \\ b\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) &= \frac{sb}{s^2 + b^2} . \end{aligned}$$

b -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) = \frac{s}{s^2 + b^2} .$$

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ შემდეგი იგივეობა უწყვეტი $f(t)$ ფუნქციისათვის (იმ დაშვებით, რომ გარდაქმნა არსებობს)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) . \quad (5)$$

გამოვიყენოთ ეს ფორმულა მაგალით 2-ის ამონახსნის შესამოწმებლად.

ამოხსნა. განვსაზღვროთ $g(t)$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$g(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau .$$

შევნიშნოთ, რომ $g(0)=0$ და $g'(t)=f(t)$. ამრიგად, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 4-ს $g(t)$ ფუნქციისათვის, მაშინ (2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) - 0 ,$$

რომელიც ეკვივალენტურია (5)-ის.

რადგან

$$\sin bt = \int_0^t b \cos b\tau d\tau ,$$

(5) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{b \cos bt\}(s) = \frac{b}{s}\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) .$$

ეს იგივეობა ნამდვილად ადასტურებს მაგალით 2-ის შედეგს.

ლაპლასის გარდაქმნასთან დაკავშირებით სხვა კითხვებიც ისმის. მაგალითად, თუ $F(s)$ არის $f(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა, მაშინ $F'(s)$ არის თუ არა t ცვლადის რაიმე ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა? პასუხი დადებითია:

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) .$$

მართლაც, მართებულია შემდეგი ზოგადი მტკიცებულება.

ლაპლასის გარდაქმნის წარმოებული
თეორემა 6. ვთქვათ, $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ და დავუშვათ, რომ $f(t)$ უბან-უბან უწყვეტი, α რიგის ექსპონენციალური ფუნქციაა $[0, \infty)$ ინტერვალზე. თუ $s > \alpha$, მაშინ $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s) . \quad (6)$

დამტკიცება. განვიხილოთ იგივეობა

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt .$$

რადგან $f(t)$ -ზე მოთხოვნილ პირობებში ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ დიფერენციალური აღრიცხვის გაწარმოების ლაიბნიცის წესი და პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის გაწარმოების თეორემა (გაწარმოების ოპერაცია შეგვიძლია შევიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის შიგნით) ამიტომ მივიღებთ

$$\begin{aligned}\frac{dF}{ds}(s) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds}(e^{-st})f(t)dt \\ &= -\int_0^{\infty} e^{-st}tf(t)dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) .\end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = (-1)\frac{dF}{ds}(s) .$$

ზოგადი წესი შეგვიძლია დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით n -ის მიმართ.

ამ თეორემის შედეგი არის ის, რომ თუ $f(t)$ არის უბან-უბან უწყვეტი და α რიგის ექსპონენციალური ფუნქცია, მაშინ მის $F(s)$ გარდაქმნას აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებულის.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\mathcal{L}\{t \sin bt\}$.

ამოხსნა. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ

$$\mathcal{L}\{\sin bt\}(s) = F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} .$$

$F(s)$ -ის დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{-2bs}{(s^2 + b^2)^2} .$$

აქედან გამომდინარე, (6) ფორმულის გამოყენებით საბოლოოდ გვექნება

$$\mathcal{L}\{t \sin bt\}(s) = -\frac{dF}{ds}(s) = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2} .$$

ლაპლასის გარდაქმნის ძირითადი თვისებები, რაც აქამდე დავადგინეთ, თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში.

ლაპლასის გარდაქმნის ძირითადი თვისებები

$$\mathcal{L}\{f + g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\} .$$

$$\mathcal{L}\{cf\} = c\mathcal{L}\{f\}, \text{ ნებისმიერი } c \text{ მუდმივისათვის}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s - a) .$$

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) .$$

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0) .$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) .$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (\mathcal{L}\{f\}(s)) .$$

სავარჯიშო 18

ლაპლასის გარდაქმნის თვისებებისა და ცხრილების გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლაპლასის გარდაქმნები

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $t^2 + e^t \sin 2t$ | 2. $3t^2 - e^{2t}$ |
| 3. $e^{-t} \cos 3t + e^{6t} - 1$ | 4. $3t^4 - 2t^2 + 1$ |
| 5. $2t^2 e^{-t} - t + \cos 4t$ | 6. $e^{-2t} \sin 2t + e^{3t} t^2$ |
| 7. $(t - 1)^4$ | 8. $(1 + e^{-t})^2$ |
| 9. $e^{-t} t \sin 2t$ | 10. $te^{2t} \cos 5t$ |
| 11. $\cosh bt$ | 12. $\sin 3t \cos 3t$ |
| 13. $\sin^2 t$ | 14. $e^{7t} \sin^2 t$ |
| 15. $\cos^3 t$ | 16. $t \sin^2 t$ |
| 17. $\sin 2t \sin 5t$ | 18. $\cos nt \cos mt$,
$m \neq n$ |
| 19. $\cos nt \sin mt$,
$m \neq n$ | 20. $t \sin 2t \sin 5t$ |

21. ცნობილია, რომ

$$\mathcal{L}\{\cos bt\}(s) = s/(s^2 + b^2),$$

გამოიყენეთ ძვრის თეორემა და გამოთვალეთ

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\}.$$

22. დაიწყეთ გარდაქმნით

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = 1/s,$$

გამოიყენეთ ფორმულა (6) ლაპლასის გარდაქმნის წარმოებულის შესახებ, რათა აჩვენოთ, რომ

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = 1/s^2, \quad \mathcal{L}\{t^2\}(s) = 2!/s^3,$$

და ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = n!/s^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

23. აჩვენეთ ორი გზით, რომ

$$\mathcal{L}\{e^{at} t^n\}(s) = n!/(s - a)^{n+1}.$$

ა) გამოიყენეთ ძვრის თეორემა $F(s)$ გარდაქმნისათვის;

ბ) გამოიყენეთ ლაპლასის წარმოებულის გამოთვლის (6) ფორმულა.

24. (6) ფორმულის დახმარებით გამოთვალეთ:

$$\text{ა) } \mathcal{L}\{t \cos bt\} \quad \text{ბ) } \mathcal{L}\{t^2 \cos bt\}.$$

23. ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა

21-ე პარაგრაფში ჩვენ განვმარტეთ ლაპლასის გარდაქმნა, როგორც ინტეგრალური ოპერატორი, რომელიც $f(t)$ ფუნქციას ასახავს $F(s)$ ფუნქციაში. ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ $f(t)$ ფუნქციის მოძებნის ამოცანას, როცა ცნობილია $F(s)$ ფუნქცია. ამრიგად, ჩვენ ვეძებთ ლაპლასის გარდაქმნის *შებრუნებულ ასახვას*.

იმის სანახავად, თუ რამდენად სასარგებლოა შებრუნებული ასახვა, განვიხილოთ შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანა:

$$y'' - y = -t ; \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1 . \quad (1)$$

თუ (1) განტოლების ორივე მხარის გარდაქმნას მოვახდენთ და გამოვიყენებთ გარდაქმნის წრფივობის თვისებას, მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) - Y(s) = -\frac{1}{s^2} ,$$

სადაც

$$Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s).$$

რადგან ვიცით $y(t)$ ამონახსნის საწყისი პირობა, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემა 5 მაღალი რიგის წარმოებულების ლაპლასის გარდაქმნის შესახებ

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - 1 .$$

თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვავთ წინა განტოლებაში, მივიღებთ

$$s^2 Y(s) - 1 - Y(s) = -\frac{1}{s^2} .$$

ამოვხსნათ ეს ალგებრულ განტოლება $Y(s)$ -ის მიმართ:

$$Y(s) = \frac{1 - \left(\frac{1}{s^2}\right)}{s^2 - 1} = \frac{s^2 - 1}{s^2(s^2 - 1)} = \frac{1}{s^2} .$$

გავიხსენოთ, რომ $\mathcal{L}\{t\}(s) = 1/s^2$, და $Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s)$. მაშინ მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = 1/s^2 = \mathcal{L}\{t\}(s) .$$

ამიტომ მართებული იქნება, დავასკვნათ, რომ $y(t) = t$ არის (1) ამოცანის ამონახსნი, რაც მარტივად შეგვიძლია შევამოწმოთ.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ ჩატარებულ გარდაქმნებში გადამწყვეტი ნაბიჯი იყო $y(t)$ ამონახსნის განსაზღვრა მისი ლაპლასის $Y(s) = 1/s^2$ გარდაქმნიდან. როგორც აღვნიშნეთ $y(t) = t$ არის ასეთი ფუნქცია, მაგრამ ეს არ არის ერთადერთი ფუნქცია, რომლის ლაპლასის გარდაქმნა არის $1/s^2$. მაგალითად,

$$g(t) := \begin{cases} t, & t \neq 6, \\ 0, & t = 6 \end{cases}$$

ფუნქციის გარდაქმნა აგრეთვე არის $1/s^2$. ეს ხდება იმიტომ, რომ გარდაქმნა არის ინტეგრალი და ინტეგრალები არ არიან დამოკიდებული ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ცვლილებაზე ერთ იზოლირებულ წერტილში. მნიშვნელოვანი განსხვავება $y(t)$ და $g(t)$ ფუნქციებს შორის, რაც უფრო მეტად გვაინტერესებს, არის ის, რომ $y(t)$ უწყვეტია $[0, \infty)$ ინტერვალზე, მაშინ, როცა $g(t)$ წყვეტილია. ბუნებრივია, ჩვენ ვამჯობინებთ მუშაობას უწყვეტ ფუნქციებთან, რადგან დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი უწყვეტია.

ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა
განსაზღვრება 4. თუ მოცემულია $F(s)$ ფუნქცია და არსებობს $[0, \infty)$ ინტერვალზე უწყვეტი $f(t)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $\mathcal{L}\{f\} = F \quad (2)$ პირობას, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ $f(t)$ არის $F(s)$ ფუნქციის ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა და ასე აღვნიშნავთ $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}.$

იმ შემთხვევაში, როცა ყოველი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (2) პირობას არის წყვეტილი (და აქედან გამომდინარე არ არის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი) შეიძლება ამოვირჩიოთ ერთი მათგანი, რომელიც იქნება შებრუნებული გარდაქმნა. მათ შორის განსხვავებას არ ექნება რაიმე ფიზიკური მნიშვნელობა. [მართლაც, ორ უბანუბან უწყვეტ ფუნქციათა შორის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2) განტოლებას, განსხვავება შეიძლება იყოს მხოლოდ მათ წყვეტის წერტილებში].

ლაპლასის გარდაქმნების ცხრილი დიდად სასარგებლო იქნება მოცემული $F(s)$ ფუნქციის მიხედვით ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნის მოსაძებნად.

მაგალითი 1. განვსაზღვროთ შემდეგი ფუნქციების ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნები:

$$\text{ა) } F(s) = \frac{2}{s^3}; \quad \text{ბ) } F(s) = \frac{3}{s^2 + 9}; \quad \text{გ) } F(s) = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 5}.$$

ამოხსნა. ლაპლასის გარდაქმნების ცხრილის მიხედვით გვექნება

$$\text{ა) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) = t^2$$

$$\text{ბ) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}(t) = \sin 3t$$

$$\text{გ) } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t) = e^t \cos 2t$$

გ) მაგალითში ჩვენ გამოვიყენეთ კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფის ფორმულა, რათა გვესარგებლა ცხრილის ფორმულით.

პრაქტიკაში ყოველთვის არ შეგვხვდება $F(s)$ გარდაქმნა მოცემული იმ სახით, რომელიც ზუსტად დამთხვევა ლაპლასის გარდაქმნების ცხრილის მეორე სვეტში მოცემულ ფუნქციებს. იმისათვის, რომ შევძლოთ უფრო რთული სახით მოცემული $F(s)$ ფუნქციის შესაბამისი შებრუნებული გარდაქმნის მოძებნა, უნდა გამოვიყენოთ შებრუნებული გარდაქმნის თვისებები ისევე, როგორც ეს გავაკეთეთ ლაპლასის გარდაქმნისათვის. ერთი ასეთი თვისებაა შებრუნებული გარდაქმნის წრფივობა, რაც ინერციით მოყვება ლაპლასის გარდაქმნიდან.

ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნის წრფივობა	
თეორემა 7. დავუშვათ, რომ არსებობს	
$\mathcal{L}^{-1}\{F\}, \mathcal{L}^{-1}\{F_1\}$ და $\mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$,	
რომლებიც უწყვეტია $[0, \infty)$ ინტერვალზე და, ვთქვათ, c ნებისმიერი მუდმივია. მაშინ	
$\mathcal{L}^{-1}\{F_1 + F_2\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2\} ,$	(3)
$\mathcal{L}^{-1}\{cF\} = c\mathcal{L}^{-1}\{F\} .$	(4)

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ წრფივობის თვისება

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2(s^2+4s+5)}\right\} \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} - 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} . \end{aligned}$$

ცხრილის გამოყენებით მივიღებთ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\}(t) = e^{6t} \quad \text{და} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}(t) = \cos 3t .$$

ეს გვაძლევს პირველ ორ წევრს. მესამე

$$\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+4s+5)\}$$

წევრის გამოსათვლელად მნიშვნელში გამოვყოთ სრული კვადრატი $s^2+4s+5 = (s+2)^2+1$. მაშინ ცხრილის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right\}(t) = e^{-2t} \sin t .$$

ამრიგად,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}(t) = 5e^{6t} - 6 \cos 3t + \frac{3e^{-2t}}{2} \sin t .$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\}.$$

ამოხსნა. მნიშვნელის $(s+2)^4$ სახის მიხედვით შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ საქმე გვაქვს ფორმულასთან

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\}(t) = e^{at} t^n .$$

ფორმულაში ჩვენი მაგალითის მიხედვით გვექნება $a=2$ და $n=3$, ამიტომ

$$\mathcal{L}^{-1}\{6/(s+2)^4\}(t) = e^{-2t} t^3.$$

წრფივობის თვისების თანახმად გვექნება

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\}(t) = \frac{5}{6} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{(s+2)^4}\right\}(t) = \frac{5}{6} e^{-2t} t^3 .$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\} .$$

ამოხსნა. მნიშვნელში სრული კვადრატის გამოყოფით მივიღებთ

$$s^2+2s+10 = s^2+2s+1+9 = (s+1)^2+3^2 .$$

მაშინ $F(s)$ -ის სახე გვაფიქრებინებს, რომ უნდა გამოვიყენოთ ერთი-ერთი ან ორივე შემდეგი ფორმულებიდან

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at} \cos bt ,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at} \sin bt .$$

ამ შემთხვევაში $a = -1$ და $b = 3$. შემდეგი ნაბიჯია დავშალოთ წილადი

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10} = A \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + B \frac{3}{(s+1)^2+3^2} , \quad (5)$$

სადაც A და B საძიებელი მუდმივებია. გადავამრავლოთ (5) თანაფარდობის ორივე მხარე $s^2+2s+10$ მამრავლზე, მივიღებთ

$$3s+2 = A(s+1) + 3B = As + (A+3B) ,$$

რომელიც არის s -ის მიმართ ორი პოლინომის იგივე ტოლობა. მსგავსი წევრების კოეფიციენტების გატოლება მოგვცემს

$$A = 3 , \quad A + 3B = 2 ,$$

ამიტომ $A=3$ და $B=-1/3$. საბოლოოდ (5)-დან წრფივობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}(t) &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t) \\ &= 3e^{-t} \cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t} \sin 3t . \end{aligned}$$

თუ მოცემული გვაქვს ლაპლასის გარდაქმნა ორი სახით

$$F_1(s) = \frac{7s^2+10s-1}{s^3+3s^2-s-3}$$

და

$$F_2(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+3} ,$$

რომელ სახეს ავირჩევდით შებრუნებული გარდაქმნის მოსაძებნად? ეჭვი არ არის $F_2(s)$ უფრო მარტივია. რეალურად ეს ორი $F_1(s)$ და $F_2(s)$ ფუნქცია იგივეურად ერთმანეთის ტოლია. ეს უშუალოდ შეგვიძლია შევამოწმოთ $F_2(s)$ ფუნქციაში უმარტივესი წილადების შეკრებით. ამრიგად, თუ ჩვენ გვინდა გამოვთვალოთ ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა რაციონალური ფუნქციიდან, როგორც მაგალითად, $F_1(s)$ -ია, პირველ რიგში იგი უნდა გამოვსახოთ ისე, როგორც ეს $F_2(s)$ -შია გაკეთებული ანუ დავშალოთ მარტივ რაციონალურ წილადებად. ეს მეთოდი ცნობილია *კერძო წილადების მეთოდის* სახელწოდებით.

მოკლედ მიმოვიხილოთ ეს მეთოდი. კალკულუსიდან გავიხსენოთ, რომ $P(s)/Q(s)$ სახის რაციონალური ფუნქცია, სადაც $P(s)$ და $Q(s)$ პოლინომებია, ამასთან P -ს ხარისხი უფრო დაბალია ვიდრე Q -სი, იშლება კერძო წილადების ჯამის სახით, რომელთა ფორმა გამოკიდებულია $Q(s)$ პოლინომის უმარტივეს მამრავლებად დაშლის ფორმაზე. ვუშვებთ, რომ პოლინომების კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია. განვიხილოთ $Q(s)$ პოლინომის ნამდვილკოეფიციენტებიან მამრავლებად დაშლის სამი შემთხვევა:

1. განსხვავებული წრფივი მამრავლები;
2. განმეორებითი წრფივი მამრავლები;
3. კვადრატული მამრავლები;

განვიხილოთ თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე.

1. განსხვავებული წრფივი მამრავლები

თუ $Q(s)$ შეიძლება დაიშალოს განსხვავებულ წრფივ მამრავლებად

$$Q(s) = (s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n),$$

სადაც ყველა r_i ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ კერძო წილადებად გაშლას აქვს სახე

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n},$$

სადაც A_i საძიებელი ნამდვილი რიცხვებია. არსებობს ამ მუდმივების მოძებნის სხვადასხვა ხერხი. ასეთ ორ მეთოდს განვიხილავთ შემდეგ მაგალითში.

მაგალითი 5. განვსაზღვროთ

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}, \text{ სადაც } F(s) = \frac{7s - 1}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)}.$$

ამოხსნა. დავიწყოთ $F(s)$ ფუნქციის დაშლით კერძო წილადებად. მნიშვნელი შეიცავს სამ განსხვავებულ წრფივ მამრავლს, ამიტომ გაშლას ექნება სახე

$$\frac{7s - 1}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s - 3}, \quad (6)$$

სადაც A , B და C საძიებელი მუდმივებია.

ერთი უნივერსალური ხერხი, რომელის გამოიყენებაც შეიძლება კერძო წილადებად გაშლის ყველა შემთხვევაში, არის შემდეგი: რაციონალური ფუნქციის ფორმალური გაშლა საძიებელი მუდმივების შემცველ ელემენტარულ წილადებად (ჩვენს შემთხვევაში ტოლობა (6)) წევრ-წევრად გადავამრავლოთ რაციონალური ფუნქციის მნიშვნელზე; ამის შედეგად მივიღებთ ორი პოლინომის ტოლობას. მსგავსი წევრების

კოეფიციენტების ერთმანეთთან გატოლებით ვღებულობთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნითაც ვპოულობთ საძიებელ მუდმივებს.

ჩვენს მაგალითში, გადავამრავლოთ (6) განტოლების ორივე მხარე $(s+1)(s+2)(s-3)$ გამოსახულებაზე, მივიღებთ

$$7s - 1 = A(s+2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s+2) , \quad (7)$$

რომელიც დაიყვანება მრავალწევრთა შემდეგ ტოლობაზე:

$$7s - 1 = (A + B + C)s^2 + (-A - 2B + 3C)s + (-6A - 3B + 2C) .$$

თუ გავუტოლებთ მსგავსი წევრების კოეფიციენტებს, მივიღებთ სისტემას

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 , \\ -A - 2B + 3C &= 7 , \\ -6A - 3B + 2C &= -1 . \end{aligned}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $A=2$, $B=-3$ და $C=1$. ამიტომ

$$\frac{7s - 1}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s-3} . \quad (8)$$

A , B და C მუდმივების მოძებნის ალტერნატიული მეთოდი (7) განტოლებიდან გულისხმობს s -ის სამი მნიშვნელობის შერჩევას და ჩასმას (7) განტოლებაში, რათა მივიღოთ სამი წრფივი განტოლება სამი უცნობით. თუ ჩვენ კარგად შევარჩევთ s -ის სამ მნიშვნელობას, მაშინ მივიღებთ მარტივ სისტემას ამოსახსნელად. ამ კონკრეტულ შემთხვევაში მართლაც არსებითად გამარტივდება (7) განტოლება, თუ ავირჩევთ $s=-1$, -2 , 3 . ჩავსვათ $s=-1$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} -7 - 1 &= A(1)(-4) + B(0) + C(0) , \\ -8 &= -4A . \end{aligned}$$

აქედან $A=2$. შემდეგ, თუ დავუშვებთ $s=-2$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} -14 - 1 &= A(0) + B(-1)(-5) + C(0) , \\ -15 &= 5B , \end{aligned}$$

ამიტომ $B=-3$. დაბოლოს, თუ დავუშვებთ $s=3$, ანალოგიურად მივიღებთ $C=1$. როცა განსხვავებული მამრავლების შემთხვევა გვაქვს, მაშინ ძალიან მარტივია ამ ალტერნატიული მეთოდის გამოყენება.

მას შემდეგ, რაც დავშალეთ რაციონალური წილადი კერძო წილადებად (8) სახით, გამოვიყენებთ შებრუნებული გარდაქმნის წრფივობას და ცხრილის დახმარებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s-3}\right\}(t) \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t) - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) \\
&\quad + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}(t) \\
&= 2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{3t} .
\end{aligned}$$

2. განმეორებითი წრფივი მამრავლები

ვთქვათ $s-r$ არის $Q(s)$ პოლინომის მამრავლი და დავუშვათ $(s-r)^m$ არის $s-r$ -ის უმაღლესი ხარისხი, რომელიც ყოფს $Q(s)$ პოლინომს. მაშინ $P(s)/Q(s)$ წილადის კერძო წილადებად გაშლაში $(s-r)^m$ მამრავლის შესაბამისი გამოსახულება იქნება შემდეგი ჯამი

$$\frac{A_1}{s-r} + \frac{A_2}{(s-r)^2} + \dots + \frac{A_m}{(s-r)^m} ,$$

სადაც A_i ნამდვილი რიცხვებია.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\} .$$

ამოხსნა. რადგან $s-1$ არის განმეორებითი წრფივი მამრავლი ორის ტოლი ჯერადობით და $s+3$ არის განსხვავებული წრფივი მამრავლი, ამიტომ კერძო წილადებად დაშლას ექნება სახე

$$\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3} .$$

თუ ორივე მხარეს გადავამრავლებთ $(s-1)^2(s+3)$ გამოსახულებაზე მივიღებთ

$$s^2+9s+2 = A(s-1)(s+3) + B(s+3) + C(s-1)^2 . \quad (9)$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ როცა ჩვენ დაუშვებთ $s=1$ (ან $s=-3$) ორი წევრი (9)-ის მარჯვენა მხარეში ქრება და გვრჩება წრფივი განტოლება, რომელიც შეგვიძლია ამოვხსნათ B -ს მიმართ (ან C -ს მიმართ). თუ (9)-ში ჩავსვათ $s=1$, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
1+9+2 &= A(0) + 4B + C(0) , \\
12 &= 4B ,
\end{aligned}$$

საიდანაც $B = 3$. ანალოგიურად, თუ (9)-ში ჩავსვავთ $s = -3$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} 9 - 27 + 2 &= A(0) + B(0) + 16C \\ -16 &= 16C . \end{aligned}$$

ამრიგად, $C = -1$. დაბოლოს, რომ ვიპოვოთ A , ავიღოთ s -ის რაიმე მნიშვნელობა, ვთქვათ, $s = 0$. რადგან $B = 3$, $C = -1$, მაშინ თუ (9)-ში ჩავსვავთ $s = 0$, მივიღებთ

$$2 = -3A + 3B + C = -3A + 9 - 1$$

ამიტომ $A = 2$. ამრიგად,

$$\frac{s^2 + 9s + 2}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} - \frac{1}{s+3} . \quad (10)$$

ასევე შეგვეძლო გაგვესაზღვრა A , B და C მუდმივები, თუ (9) ტოლობას გადავწერდით შემდეგი სახით

$$s^2 + 9s + 2 = (A + C)s^2 + (2A + B - 2C)s + (-3A + 3B + C) .$$

შემდეგ გავუტოლებდით მსგავსი წევრების შესაბამის კოეფიციენტებს და ამოვხსნიდით მიღებულ სისტემას, რაც, ბუნებრივია, კვლავ გვადლევს $A = 2$, $B = 3$ და $C = -1$.

ახლა მოვძებნოთ მოცემული რაციონალური ფუნქციის ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა (10) გაშლის მიხედვით. გვექნება

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 9s + 2}{(s-1)^2(s+3)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} - \frac{1}{s+3}\right\}(t) \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t) + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}(t) \\ &\quad - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t) \\ &= 2e^t + 3te^t - e^{-3t} . \end{aligned}$$

3. კვადრატული მამრავლი

ვთქვათ $(s-\alpha)^2 + \beta^2$ არის $Q(s)$ პოლინომის კვადრატული მამრავლი, რომელიც არ დაიყვანება წრფივ მამრავლებზე ნამდვილი კოეფიციენტებით. დავუშვათ, m არის უმაღლესი ხარისხის მაჩვენებელი $(s-\alpha)^2 + \beta^2$ მამრავლისა, რომელიც არის $Q(s)$ -ის გამყოფი. მაშინ $[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^m$ მამრავლის შესაბამისი გამოსახულება კერძო წილადებად გაშლაში იქნება შემდეგი ჯამი

$$\frac{C_1s + D_1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{C_2s + D_2}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2} + \cdots + \frac{C_ms + D_m}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^m} .$$

როგორც მაგალით 4-ში ვნახეთ, უფრო ხელსაყრელია $C_i s + D_i$ გამოვსხოთ $A_i(s - \alpha) + \beta B_i$ სახით ლაპლასის გარდაქმნის ფორმიდან გამომდინარე. ამიტომ წინამდებარე გაშლა კერძო წილადებად გადავწეროთ ეკვივალენტური სახით

$$\frac{A_1(s - \alpha) + \beta B_1}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{A_2(s - \alpha) + \beta B_2}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^2} + \dots + \frac{A_m(s - \alpha) + \beta B_m}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^m}.$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} \right\}.$$

ამოხსნა. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ კვარდატული მამრავლი $s^2 - 2s + 5$ არ იშლება წრფივ ნამდვილ მამრავლებად (დისკრიმინანტი უარყოფითია). ამიტომ იგი გადავწეროთ იგი $(s - \alpha)^2 + \beta^2$ სახით სრული კვადრატის გამოყოფით

$$s^2 - 2s + 5 = (s - 1)^2 + 2^2.$$

რადგან $s^2 - 2s + 5$ და $s + 1$ მამრავლები არ მეორდებიან, ამიტომ კერძო წილადებად გაშლას ექნება სახე

$$\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} = \frac{A(s - 1) + 2B}{(s - 1)^2 + 2^2} + \frac{C}{s + 1}.$$

როცა ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავამრავლებთ საერთო მნიშვნელზე, მივიღებთ

$$2s^2 + 10s = [A(s - 1) + 2B](s + 1) + C(s^2 - 2s + 5). \quad (11)$$

ჩავსვათ (11) განტოლებაში $s = -1, 1, 0$. $s = -1$ -თვის გვექნება

$$\begin{aligned} 2 - 10 &= [A(-2) + 2B](0) + C(8), \\ -8 &= 8C, \end{aligned}$$

საიდანაც $C = -1$. როცა $s = 1$, მაშინ (11)-დან მივიღებთ

$$2 + 10 = [A(0) + 2B](2) + C(4),$$

საიდანაც $B = 4$. საბოლოოდ, თუ დაუშვებთ $s = 0$, (11)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} 0 &= [A(-1) + 2B](1) + C(5), \\ 0 &= -A + 8 - 5, \\ A &= 3. \end{aligned}$$

რადგან $A = 3$, $B = 4$, $C = -1$, ამიტომ

$$\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} = \frac{3(s - 1) + 2(4)}{(s - 1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s + 1}.$$

მოცემული რაციონალური ფუნქციის კერძო წილადებად გაშლის შემდეგ, ჩვენ შეგვიძლია პირდაპირ გამოვთვალოთ ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s - 1) + 2(4)}{(s - 1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s + 1}\right\}(t) \\
&= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 2^2}\right\}(t) \\
&\quad + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s - 1)^2 + 2^2}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\}(t) \\
&= 3e^t \cos 2t + 4e^t \sin 2t - e^{-t} .
\end{aligned}$$

სავარჯიშო 19

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნები

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\frac{6}{(s - 1)^4}$ | 2. $\frac{2}{s^2 + 4}$ |
| 3. $\frac{s + 1}{s^2 + 2s + 10}$ | 4. $\frac{4}{s^2 + 9}$ |
| 5. $\frac{1}{s^2 + 4s + 8}$ | 6. $\frac{3}{(2s + 5)^3}$ |
| 7. $\frac{2s + 16}{s^2 + 4s + 13}$ | 8. $\frac{1}{s^5}$ |
| 9. $\frac{3s - 15}{2s^2 - 4s + 10}$ | 10. $\frac{s - 1}{2s^2 + s + 6}$ |

გაშალეთ კერძო წილადებად შემდეგი რაციონალური ფუნქციები

- | | |
|--|---|
| 11. $\frac{s^2 - 26s - 47}{(s - 1)(s + 2)(s + 5)}$ | 12. $\frac{-s - 7}{(s + 1)(s - 2)}$ |
| 13. $\frac{-2s^2 - 3s - 2}{s(s + 1)^2}$ | |
| 14. $\frac{-8s^2 - 5s + 9}{(s + 1)(s^2 - 3s + 2)}$ | |
| 15. $\frac{8s - 2s^2 - 14}{(s + 1)(s^2 - 2s + 5)}$ | 16. $\frac{-5s - 36}{(s + 2)(s^2 + 9)}$ |
| 17. $\frac{3s + 5}{s(s^2 + s - 6)}$ | 18. $\frac{3s^2 + 5s + 3}{s^4 + s^3}$ |
| 19. $\frac{1}{(s - 3)(s^2 + 2s + 2)}$ | 20. $\frac{s}{(s - 1)(s^2 - 1)}$ |

იპოვეთ შებრუნებული გარდაქმნები $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$

$$21. F(s) = \frac{6s^2 - 13s + 2}{s(s-1)(s-6)}$$

$$22. F(s) = \frac{s+11}{(s-1)(s+3)}$$

$$23. F(s) = \frac{5s^2 + 34s + 53}{(s+3)^2(s+1)}$$

$$24. F(s) = \frac{7s^2 - 41s + 84}{(s-1)(s^2 - 4s + 13)}$$

$$25. F(s) = \frac{7s^2 + 23s + 30}{(s-2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$27. s^2F(s) - 4F(s) = \frac{5}{s+1}$$

$$28. s^2F(s) + sF(s) - 6F(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 + s}$$

$$29. sF(s) + 2F(s) = \frac{10s^2 + 12s + 14}{s^2 - 2s + 2}$$

$$30. sF(s) - F(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 2s + 1}$$

31. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლაპლასის გარდაქმნა:

$$ა) f_1(t) = \begin{cases} 0, & t = 2, \\ t, & t \neq 2. \end{cases}$$

$$ბ) f_2(t) = \begin{cases} 5, & t = 1, \\ 2, & t = 6, \\ t, & t \neq 1, 6. \end{cases}$$

$$გ) f_3(t) = t.$$

ამ ფუნქციებიდან რომელი წარმოადგენს $1/s^2$ ფუნქციის ლაპლასის შებრუნებულ გარდაქმნას?

24. საწყის პირობიანი ამოცანების ამოხსნა

ჩვენი მიზანია, ვნახოთ, თუ როგორ გამოიყენება ლაპლასის გარდაქმნა საწყის პირობიანი მოცანის ამოსახსნელად წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის. გავიხსენოთ, რომ ჩვენ უკვე შევისწავლეთ ასეთი ამოცანების ამოხსნის გზები წინა პარაგრაფებში. ადრინდელი მეთოდები ითვალისწინებდა ჯერ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოძებნას და შემდგომ საწყისი პირობების გათვალისწინებით სასურველი ამონახსნის შერჩევას. როგორც შემდგომში ვნახავთ, ლაპლასის მეთოდით ამოცანის ამოხსნა საწყისი პირობით შეიძლება ზოგადი ამონახსნის მოძებნის გარეშე.

უნდა აღინიშნოს აგრეთვე გარდაქმნის მეთოდის სხვა უპირატესობები. მაგალითად, მეთოდი მარტივად შეიძლება გამოვიყენოთ განტოლებებისთვის, რომლებიც შეიცავენ ნახტომის ტიპი წყვეტის მქონე ფუნქციებს, როგორც ეს ადრე ვნახეთ. შემდეგ, მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგიერთი წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის ცვლადი კოეფიციენტებით, ინტეგრალური განტოლებების სპეციალური კლასისათვის, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის და კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის.

ლაპლასის გარდაქმნის მეთოდი
ამოცანის ამოხსნა საწყისი პირობით: ა) მოვახდინოთ განტოლების ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნა; ბ) გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნის თვისებები და საწყისი პირობები, რათა მივიღოთ განტოლება ამონახსნის ლაპლასის გარდაქმნის მიმართ და ამოვხსნათ ეს განტოლება ამ გარდაქმნის მიმართ; გ) ვიპოვოთ ამონახსნის ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა ცხრილის გამოყენებით ან შესაბამისი მეთოდით (როგორიცაა კერძო წილადები) ცხრილთან ერთად.

ა) საფეხურზე ჩვენ ვუშვებთ, რომ ამონახსნი უბან-უბან უწყვეტია $[0, \infty)$ ინტერვალზე და აქვს ექსპონენციალური რიგი. მას შემდეგ, რაც ვიპოვოთ ლაპლასის შებრუნებულ გარდაქმნას გ) საფეხურზე, შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ ჩვენი დაშვება კმაყოფილდება.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ საწყის პირობიანი ამოცანა

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12. \quad (1)$$

ამოხსნა. დიფერენციალური განტოლება (1)-ში არის t ცვლადის ორი ფუნქციის იგივე ტოლობა. ამიტომ ტოლობა მართებული იქნება ორივე ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნებს შორისაც

$$\mathcal{L}\{y'' - 2y' + 5y\} = \mathcal{L}\{-8e^{-t}\}.$$

თუ გამოვიყენებთ გარდაქმნის წრფივობას და მაჩვენებლიანი ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნის გამოსათვლელ ფორმულას, მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'\}(s) + 5\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{-8}{s+1}. \quad (2)$$

ვთქვათ,

$$Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s).$$

მაშინ მაღალი რიგის წარმოებულის ლაპლასის გარდაქმნისა და (1)-ში მოცემული საწყისი პირობების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'\}(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 2, \\ \mathcal{L}\{y''\}(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2s - 12. \end{aligned}$$

თუ (2)-ში ჩავსვავთ ამ გამოსახულებებს და ამოვხსნით $Y(s)$ -ის მიმართ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} [s^2Y(s) - 2s - 12] - 2[sY(s) - 2] + 5Y(s) &= \frac{-8}{s+1} \\ (s^2 - 2s + 5)Y(s) &= 2s + 8 - \frac{8}{s+1} \\ (s^2 - 2s + 5)Y(s) &= \frac{2s^2 + 10s}{s+1} \\ Y(s) &= \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}. \end{aligned}$$

დაგვრჩა, გამოვთვალოთ რაციონალური $Y(s)$ ფუნქციის ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა. ეს უკვე წინა პარაგრაფში გავაკეთეთ კერძო წილადებად გაშლის გზით და დავადგინეთ, რომ

$$y(t) = 3e^t \cos 2t + 4e^t \sin 2t - e^{-t}, \quad (3)$$

რომელიც წარმოადგენს (1) ამოცანის ამონახსნს საწყისი პირობით, რაც ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ.

მკითხველი ალბათ ეჭვის ქვეშ აყენებს ლაპლასის მეთოდის გამოყენების კეთილგონიერებას საწყისი პირობიანი ამოცანის ამოსახსნელად მაშინ, როცა იგივე ამოცანა შეიძლება მარტივად ამოხსნას ადრე განხილული მეთოდით. ამ პარაგრაფის დასაწყისში განხილული რამდენიმე მაგალითის მიზანია, უფრო ახლოს გააცნოს

მკითხველს ლაპლასის გარდაქმნის პროცედურები. ქვემოთ, მაგალით 4-ში და შემდგომ ვნახავთ, რომ ეს მეთოდი გამოიყენება იმ ამოცანების ამოსახსნელად, რომლებიც არ შეგვიძლია მარტივად ამოვხსნათ ადრე განხილული მეთოდით.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ საწყის პირობიანი ამოცანა

$$y'' + 4y' - 5y = te^t ; \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0 . \quad (4)$$

ამოხსნა. ვთქვათ,

$$Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s).$$

მოვახდინოთ (4) დიფერენციალური განტოლების ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნა, მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + 4\mathcal{L}\{y'\}(s) - 5Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} . \quad (5)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია გამოვსახოთ

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) \text{ და } \mathcal{L}\{y''\}(s)$$

სიდიდეები $Y(s)$ -ის საშუალებით. კერძოდ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'\}(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 , \\ \mathcal{L}\{y''\}(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s . \end{aligned}$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვავთ (5)-ში და ამოვხსნით $Y(s)$ -ის მიმართ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} [s^2Y(s) - s] + 4[sY(s) - 1] - 5Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} \\ (s^2 + 4s - 5)Y(s) &= s + 4 + \frac{1}{(s-1)^2} \\ (s+5)(s-1)Y(s) &= \frac{s^3 + 2s^2 - 7s + 5}{(s-1)^2} \\ Y(s) &= \frac{s^3 + 2s^2 - 7s + 5}{(s+5)(s-1)^3} . \end{aligned}$$

$Y(s)$ -ის გაშლას კერძო წილადებად აქვს სახე

$$\frac{s^3 + 2s^2 - 7s + 5}{(s+5)(s-1)^3} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3} . \quad (6)$$

ტოლობის ორივე მხარის საერთო მნიშვნელზე გადამრავლებით და კოეფიციენტების გატოლებით მიღებული სისტემის ამოხსნით მივიღებთ

$$A = 35/216, \quad B = 181/216, \quad C = -1/36, \quad D = 1/6.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვავთ (6)-ში, მივიღებთ

$$Y(s) = \frac{35}{216} \left(\frac{1}{s+5} \right) + \frac{181}{216} \left(\frac{1}{s-1} \right) - \frac{1}{36} \left(\frac{1}{(s-1)^2} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{2}{(s-1)^3} \right),$$

როცა ჩვენ ვწერთ $D = 1/6 = (1/12)2$ ამით ჩვენ ვამსგავსებთ გარდაქმნების ცხრილს, რათა ადვილად მოვძებნოთ შებრუნებული გარდაქმნა. კერძოდ, გვქვია

$$y(t) = \frac{35}{216}e^{-5t} + \frac{181}{216}e^t - \frac{1}{36}te^t + \frac{1}{12}t^2e^t \quad (7)$$

რაც წარმოადგენს (4) ამოცანის ამონახსნს.

მაგალითი 3. ამოცხსნათ საწყის პირობიანი ამოცანა

$$w''(t) - 2w'(t) + 5w(t) = -8e^{\pi-t}; \quad w(\pi) = 2, \quad w'(\pi) = 12. \quad (8)$$

ამოხსნა. ლაპლასის მეთოდის გამოსაყენებლად, პირველ რიგში, მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა ისე, რომ საწყისი მნიშვნელობა მოცემული იყოს $t=0$ წერტილში. ამისათვის დაუშვათ $y(t) = w(t+\pi)$. მაშინ,

$$y'(t) = w'(t+\pi), \quad y''(t) = w''(t+\pi).$$

(8) დიფერენციალურ განტოლებაში t შევცვალოთ $t+\pi$ -ით. გვქვია

$$w''(t+\pi) - 2w'(t+\pi) + 5w(t+\pi) = -8e^{\pi-(t+\pi)} = -8e^{-t}. \quad (9)$$

ჩავსვათ $y(t) = w(t+\pi)$ (9) განტოლებაში. მივიღებთ შემდეგ საწყის პირობიან ამოცანას

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = -8e^{-t}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12.$$

რადგან საწყისი პირობები მოცემულია სათავეში, ამიტომ შეიძლება გამოვიყენოთ ლაპლასის მეთოდი. ეს პროცესი ჩვენ ჩავატარეთ მაგალით 1-ში, სადაც მივიღეთ

$$y(t) = 3e^t \cos 2t + 4e^t \sin 2t - e^{-t}. \quad (10)$$

რადგან $w(t+\pi) = y(t)$, ამიტომ $w(t) = y(t-\pi)$. აქედან გამომდინარე, თუ (10)-ში t -ს შევცვლით $t-\pi$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} w(t) &= y(t-\pi) = 3e^{t-\pi} \cos [2(t-\pi)] + 4e^{t-\pi} \sin [2(t-\pi)] - e^{-(t-\pi)} \\ &= 3e^{t-\pi} \cos 2t + 4e^{t-\pi} \sin 2t - e^{\pi-t}. \end{aligned}$$

აქამდე ჩვენ ვიყენებდით ლაპლასის გარდაქმნას წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის მუდმივი კოეფიციენტებით. მაგრამ ზოგიერთი მნიშვნელოვანი განტოლება მათემატიკურ ფიზიკაში წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის კოეფიციენტები არიან t ცვლადის პოლინომები. ლაპლასის გარდაქმნით ასეთი განტოლების ამოხსნის დროს ვიყენებთ თეორემა 6-ს, სადაც ვამტკიცებთ, რომ

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s). \quad (11)$$

თუ დაუშვებთ $n=1$ და $f(t) = y'(t)$, მაშინ მივიღებთ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ty'(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\}(s) \\ &= -\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] = -sY'(s) - Y(s) .\end{aligned}$$

ანალოგიურად, როცა $n=1$ და $f(t) = y''(t)$, მაშინ (11)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ty''(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''\}(s) \\ &= -\frac{d}{ds}[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] \\ &= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0) .\end{aligned}$$

ამრიგად, ვხედავთ, რომ $y(t)$ -ს მიმართ წრფივი დიფერენციალური განტოლება, რომლის კოეფიციენტები t -ს მიმართ პოლინომებია, ლაპლასის გარდაქმნის მეთოდი მოცემულ განტოლებას გადაიყვანს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე $Y(s)$ -ის მიმართ, რომლის კოეფიციენტები არიან s -ს მიმართ პოლინომები. გარდა ამისა, თუ მოცემული განტოლების კოეფიციენტები არიან t -ს მიმართ პირველი რიგის პოლინომები, მაშინ (მიუხედავად მოცემული განტოლების რიგისა) $Y(s)$ -ის მიმართ განტოლება იქნება პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება. რადგან ვიცით, თუ როგორ ამოვხსნათ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება, ამიტომ, ერთ-ერთი სერიოზული წინააღმდეგობა, რაც შეიძლება შეგვხვდეს ამ დროს, იქნება $Y(s)$ -ის ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნის მოძებნა. ეს წინააღმდეგობა შეიძლება აღმოჩნდეს გადაულახავიც, რადგან $y(t)$ -ს შეიძლება არ ჰქონდეს ლაპლასის გარდაქმნა.

ლაპლასის მეთოდით სარგებლობის დროს ჩვენ ვიყენებთ შემდეგ ფაქტს.

თუ $f(t)$ უბანუბან უწყვეტი ფუნქციაა $[0, \infty)$ ინტერვალზე და აქვს ექსპონენციალური რიგი, მაშინ

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0 . \quad (12)$$

ეს შენიშვნა შეიძლება უკვე შეამჩნიეთ ლაპლასის გარდაქმნების ცხრილის წევრების მიხედვით.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ საწყის პირობიანი ამოცანა

$$y'' + 2ty' - 4y = 1 , \quad y(0) = y'(0) = 0 . \quad (13)$$

ამოხსნა. ვთქვათ,

$$Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s).$$

მოვახდინოთ დიფერენციალური განტოლების ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნა (13)-ში, მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + 2\mathcal{L}\{ty'(t)\}(s) - 4Y(s) = \frac{1}{s}. \quad (14)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით გავქვს

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

და

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty'(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\}(s) \\ &= -\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] = -sY'(s) - Y(s). \end{aligned}$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვავთ (14)-ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + 2[-sY'(s) - Y(s)] - 4Y(s) &= \frac{1}{s} \\ -2sY'(s) + (s^2 - 6)Y(s) &= \frac{1}{s} \\ Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)Y(s) &= \frac{-1}{2s^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

(15) წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის მაინტეგრებული მამრავლია

$$\mu(s) = e^{\int(3/s - s/2)ds} = e^{\ln s^3 - s^2/4} = s^3 e^{-s^2/4}.$$

გადავამრავლოთ (15) განტოლება $\mu(s)$ -ზე

$$\frac{d}{ds}\{\mu(s)Y(s)\} = \frac{d}{ds}\left\{s^3 e^{-s^2/4}Y(s)\right\} = -\frac{s}{2}e^{-s^2/4}.$$

ინტეგრებით და $Y(s)$ -ის ამიმართ მოხსნით მივიღებთ

$$\begin{aligned} s^3 e^{-s^2/4}Y(s) &= -\int \frac{s}{2}e^{-s^2/4} ds = e^{-s^2/4} + C \\ Y(s) &= \frac{1}{s^3} + C \frac{e^{s^2/4}}{s^3}. \end{aligned} \quad (16)$$

ახლა, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $Y(s)$ წარმოადგენს ექსპონენციალური რიგის უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნას, მაშინ (12)-ის მიხედვით ადგილი უნდა ჰქონდეს პირობას

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0.$$

ეს რომ დააკმაყოფილოს $Y(s)$ ფუნქციამ, მაშინ C მუდმივი (16) ტოლობაში უნდა იყოს ნულის ტოლი. ამიტომ $Y(s) = 1/s^3$ და შებრუნებული გარდაქმნა იქნება $y(t) = t^2/2$. (13) განტოლებაში ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $y(t) = t^2/2$ წარმოადგენს მოცემული საწყის პირობიანი ამოცანის ამონახსნს.

სავარჯიშო 20

ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანები

1. $y'' - 2y' + 5y = 0$;
 $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$
2. $y'' - y' - 2y = 0$;
 $y(0) = -2$, $y'(0) = 5$
3. $y'' + 6y' + 9y = 0$;
 $y(0) = -1$, $y'(0) = 6$
4. $y'' + 6y' + 5y = 12e^t$;
 $y(0) = -1$, $y'(0) = 7$
5. $w'' + w = t^2 + 2$;
 $w(0) = 1$, $w'(0) = -1$
6. $y'' - 4y' + 5y = 4e^{3t}$;
 $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$
7. $y'' - 7y' + 10y = 9 \cos t + 7 \sin t$;
 $y(0) = 5$, $y'(0) = -4$
8. $y'' + 4y = 4t^2 - 4t + 10$;
 $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
9. $z'' + 5z' - 6z = 21e^{t-1}$;
 $z(1) = -1$, $z'(1) = 9$
10. $y'' - 4y = 4t - 8e^{-2t}$;
 $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$
11. $y'' - y = t - 2$; $y(2) = 3$, $y'(2) = 0$
12. $w'' - 2w' + w = 6t - 2$;
 $w(-1) = 3$; $w'(-1) = 7$
13. $y'' - y' - 2y = -8 \cos t - 2 \sin t$;
 $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 0$
14. $y'' + y = t$; $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$

იპოვეთ შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანების $y(t)$ ამონახსნის ლაპლასის გარდაქმნა $Y(s)$

15. $y'' - 3y' + 2y = \cos t$;

$y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

16. $y'' + 6y = t^2 - 1$;

$y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

17. $y'' + y' - y = t^3$;

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

18. $y'' - 2y' - y = e^{2t} - e^t$;

$y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

19. $y'' + 5y' - y = e^t - 1$;

$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

20. $y'' + 3y = t^3$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

21. $y'' - 2y' + y = \cos t - \sin t$;

$y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

22. $y'' - 6y' + 5y = te^t$;

$y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

23. $y'' + 4y = g(t)$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$,

სადაც

$$g(t) = \begin{cases} t , & t < 2 , \\ 5 , & t > 2 \end{cases}$$

24. $y'' - y = g(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,

სადაც

$$g(t) = \begin{cases} 1 , & t < 3 , \\ t , & t > 3 \end{cases}$$

25. თეორემა 6-ის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ

$$\mathcal{L}\{t^2 y''(t)\}(s) = s^2 Y''(s) + 4s Y'(s) + 2Y(s) ,$$

სადაც $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$.

იპოვეთ შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანების ამონახსნები

$$26. \quad y'' + 3ty' - 6y = 1 ;$$

$$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0$$

$$27. \quad ty'' - ty' + y = 2 ;$$

$$y(0) = 2 , \quad y'(0) = -1$$

$$28. \quad ty'' - 2y' + ty = 0 ;$$

$$y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0$$

$$\text{მიითით. } \mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2 + 1)^2\}(t) = (\sin t - t \cos t)/2.]$$

$$29. \quad y'' + ty' - y = 0 ;$$

$$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 3$$

25. წყვეტილი და პერიოდული ფუნქციების გარდაქმნა

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით სპეციალურ ფუნქციებს, რომლებიც ხშირად გვხვდებიან, როდესაც ლაპლასის მეთოდი გამოიყენება ფიზიკურ ამოცანებში. განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ისეთი ამოცანების მოდელირება, რომლებიც ნახტომის ტიპის წყვეტის მქონე ფუნქციებზე აღიწერება. ნახტომის ტიპის წყვეტას ბუნებრივად აქვს ადგილი ფიზიკურ ამოცანებში, როგორცაა ელექტრული წრედი ჩამრთველ/გამომრთველით. ასეთი მოვლენების მოდელირების მიზნით ოლივერ ჰევისაიდმა შემოიღო შემდეგი საფეხურა ფუნქცია.

განსაზღვრება 5. ერთეული საფეხურა ფუნქცია $u(t)$ ასე განიმარტება

$$u(t) := \begin{cases} 0 , & t < 0 , \\ 1 , & 0 < t . \end{cases} \quad (1)$$

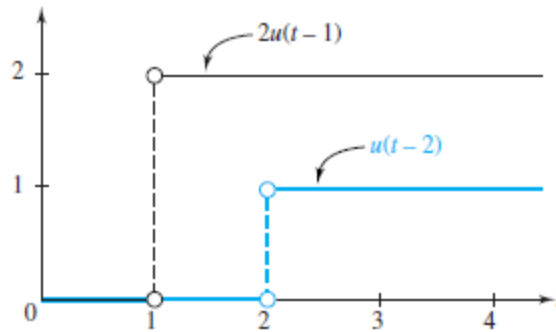
არგუმენტის ძვრით $u(t)$ ფუნქციის ნახტომი შეიძლება გადავწიოთ სხვაგან. კერძოდ, ფუნქციას

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 , & t - a < 0 , \\ 1 , & 0 < t - a \end{cases} = \begin{cases} 0 , & t < a \\ 1 , & a < t \end{cases} \quad (2)$$

ნახტომი აქვს $t = a$ წერტილში.

M მუდმივზე გადამრავლებით შეგვიძლია აგრეთვე ნახტომის სიდიდის მოდიფიცირება:

$$Mu(t - a) = \begin{cases} 0 , & t < a , \\ M , & a < t . \end{cases}$$



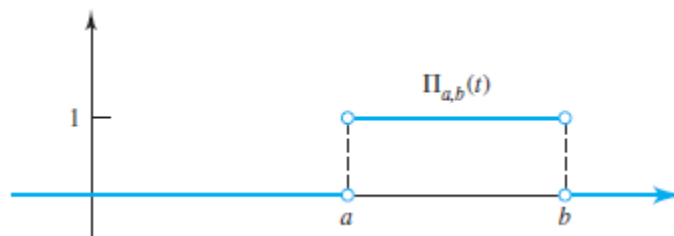
ნახაზი 42. ერთეული საფეხურა ფუნქციით გამოსახულია ორი საფეხურა ფუნქცია.

უბანუბან უწყვეტი ფუნქციის გამოსახვის მიზნით ვიყენებთ მართკუთხა ფანჯარას, რომელიც აღიწერება საფეხურა ფუნქციით. იგი შეესაბამება ჩართვა-გამორთვის მოდელს.

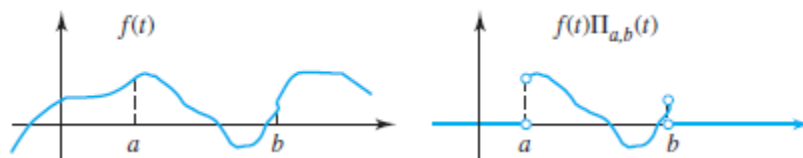
განმარტება 6. მართკუთხა ფანჯრის ფუნქცია $\Pi_{a,b}(t)$ ასე განიმარტება

$$\Pi_{a,b}(t) := u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & a < t < b, \\ 0, & b < t. \end{cases} \quad (3)$$

$\Pi_{a,b}(t)$ ფუნქცია გამოსახულია 43-ე ნახაზზე და ასევე 44-ე ნახაზებზე, რომელიც გამოსახავს რაიმე $f(t)$ ფუნქციის $\Pi_{a,b}(t)$ ფუნქციაზე ნამრავლს.



ნახაზი 43. მართკუთხა ფანჯარა



ნახაზი 44. $\Pi_{a,b}(t)$ -ზე გამრავლების („ფანჯრის“) ეფექტი

ნებისმიერი უბანუბან უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება გამოვსახოთ საფეხურა ფუნქციითა და ფანჯრის ფუნქციით.

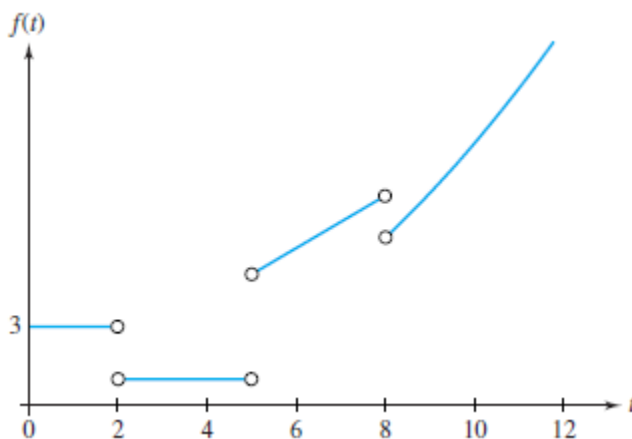
მაგალითი 1. ჩავწეროთ $[0, +\infty)$ შუალედში განსაზღვრული შემდეგი ფუნქცია

$$f(t) = \begin{cases} 3, & t < 2, \\ 1, & 2 < t < 5, \\ t, & 5 < t < 8, \\ t^2/10, & 8 < t \end{cases} \quad (4)$$

ფუნქცია ფანჯრისა და საფეხურა ფუნქციებით.

ამოხსნა. ცხადია, მონაცემის მიხედვით, ჩვენ გვინდა ფანჯარა $(0,2)$, $(2,5)$ და $(5,8)$ ინტერვალებში და საფეხურა ფუნქცია, როცა $t > 8$.

$$f(t) = 3\Pi_{0,2}(t) + 1\Pi_{2,5}(t) + t\Pi_{5,8}(t) + (t^2/10)u(t-8). \quad (5)$$



ნახაზი 45. (4) განტოლებით მოცემული $f(t)$ ფუნქციის გრაფიკი

მარტვი საჩვენებელია, რომ ჰევისაიდის $u(t-a)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა, როცა $a \geq 0$, არის

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}, \quad (6)$$

მართლაც, როცა $s > 0$, გვაქვს

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t-a)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_a^N = \frac{e^{-as}}{s}. \end{aligned}$$

პირიქით, როცა $a > 0$, ვიტყვით, რომ უბან-უბან უწყვეტი $u(t-a)$ ფუნქცია არის e^{-as}/s ფუნქციის ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა და დავწერთ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\}(t) = u(t-a) .$$

მართკუთხა ფანჯრის ფუნქციისათვის (6)-დან გამოვიყვანოთ

$$\mathcal{L}\{\Pi_{a,b}(t)\}(s) = \mathcal{L}\{u(t-a) - u(t-b)\}(s) = [e^{-sa} - e^{-sb}]/s, 0 < a < b. \quad (7)$$

$F(s)$ ფუნქციის ძვრის თვისება, რომელიც ადრე შევისწავლეთ, აღწერდა ფუნქციისა და e^{at} -ს ნამრავლის ლაპლასის გარდაქმნას. შემდეგი თეორემა ილუსტრირებს ანალოგიურ ეფექტს ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნისა და e^{-as} ნამრავლთან მიმართებაში.

თეორემა 8. ვთქვათ, არსებობს ლაპლასის გარდაქმნა

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

როცა $s > a \geq 0$. თუ a დადებითი მუდმივია, მაშინ

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) , \quad (8)$$

და, პირიქით, $e^{-as}F(s)$ ფუნქციის ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა მოიცემა ფორმულით

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = f(t-a)u(t-a) . \quad (9)$$

დამტკიცება. ლაპლასის გარდაქმნის განმარტებიდან გვექნება

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt , \end{aligned} \quad (10)$$

სადაც უკანასკნელ განტოლებაში ჩვენ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ $u(t-a)$ ნულია, როცა $t < a$ და ერთის ტოლია, როცა $t > a$. ახლა ვთქვათ $v = t-a$. მაშინ $dv = dt$ და (10) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-as}e^{-sv}f(v)dv \\ &= e^{-as} \int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv = e^{-as}F(s) . \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ (8) ფორმულა მოიცავს, როგორც კერძო შემთხვევას, ჰევისაიდის ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნის (6) ფორმულას. მართლაც, თუ ავიღებთ $f(t) \equiv 1$, მაშინ $F(s) = 1/s$ და (8) მიიღებს სახეს, რომელიც ემთხვევა (6) ფორმულას:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s) = e^{-as}/s.$$

პრაქტიკაში უფრო ხშირად გვიხდება ისეთი სახის ფუნქციის გარდაქმნის გამოთვლა, როგორიცაა $g(t)u(t-a)$, ვიდრე $f(t-a)u(t-a)$. რომ გამოვთვალოთ ლაპლასის გარდაქმნა

$$\mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\},$$

ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა $g(t) = f(t-a)$; მაშინ $f(t) = g(t+a)$ და (8) განტოლება მოგვცემს

$$\mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s). \quad (11)$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $t^2u(t-a)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა.

ამოხსნა. (11) ტოლობაში ავიღოთ $g(t) = t^2$ და $a = 1$. მაშინ

$$g(t+a) = g(t+1) = (t+1)^2 = t^2 + 2t + 1.$$

$g(t+a)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა იქნება

$$\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s) = \mathcal{L}\{t^2 + 2t + 1\}(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

ამიტომ (11) ფორმულით გვექნება

$$\mathcal{L}\{t^2u(t-1)\}(s) = e^{-s}\left\{\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right\}.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ

$$\mathcal{L}\{(\cos t)u(t-\pi)\}.$$

ამოხსნა. აქ $g(t) = \cos t$ და $a = \pi$. რადგან

$$g(t+a) = g(t+\pi) = \cos(t+\pi) = -\cos t,$$

ამიტომ $g(t+a)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა იქნება

$$\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s) = -\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = -\frac{s}{s^2 + 1}.$$

ამრიგად, (11) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{(\cos t)u(t-\pi)\}(s) = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2 + 1}.$$

მაგალით 2 და 3-ში ჩვენ აგრეთვე შეგვეძლო გამოგვეთვალა ლაპლასის გარდაქმნა უშუალოდ განმარტებიდან.

მაგალით 2 და 3-ში ჩვენ შეგვეძლო გამოგვეთვალა ლაპლასის გარდაქმნა აგრეთვე უშუალოდ განმარტებიდან. რაც შეეხება შებრუნებულ გარდაქმნას, ჩვენ არ გვაქვს მარტივი ალტერნატიული ფორმულა, რომელზედაც დავყვრდნობოდით, ამიტომ (9) ფორმულა განსაკუთრებით სასარგებლოა, როცა გარდაქმნას აქვს e^{-as} მამრავლი.

მაგალითი 4. განსაზღვრეთ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$$

და ააგეთ ნახაზი.

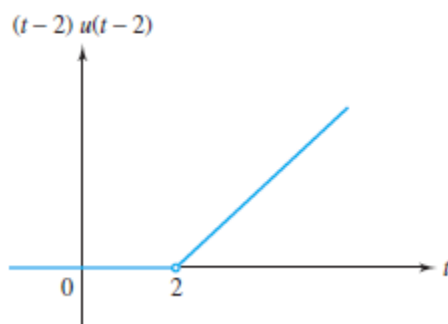
ამოხსნა. რომ გამოვიყენოთ (9) ფორმულა პირველ რიგში გამოვსახოთ e^{-2s}/s^2 , როგორც ნამრავლი $e^{-as}F(s)$. ამისათვის ავიღოთ $e^{-as} = e^{-2s}$ და $F(s) = 1/s^2$. ამრიგად, $a = 2$ და

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) = t.$$

ამიტომ (9) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}(t) = f(t-2)u(t-2) = (t-2)u(t-2).$$

იხილე 46-ე ნახაზი.



ნახაზი 46. მაგალით 4-ის ამოხსნის გრაფიკი

როგორც შემდეგი მაგალითიდან ჩანს საფეხურა ფუნქცია წარმოიშვება ჩართვა/გამორთვის მოდელირების დროს, პოლარობის შეცვლის დროს და ა.შ.

მაგალითი 5. დენი LC წრედში განისაზღვრება შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანით

$$I''(t) + 4I(t) = g(t); \quad I(0) = 0, \quad I'(0) = 0, \quad (12)$$

სადაც

$$g(t) := \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & 2 < t. \end{cases}$$

განვსაზღვროთ დენი, როგორც t დროის ფუნქცია.

ამოხსნა. ვთქვათ,

$$J(s) := \mathcal{L}\{I\}(s).$$

მაშინ გვექნება

$$\mathcal{L}\{I''\}(s) = s^2 J(s).$$

ჩავწეროთ $g(t)$ მართკუთხა ფანჯრის $\Pi_{a,b}(t) = u(t-a) - u(t-b)$ ფუნქციის საშუალებით

$$\begin{aligned} g(t) &= \Pi_{0,1}(t) + (-1)\Pi_{1,2}(t) = u(t) - u(t-1) - [u(t-1) - u(t-2)] \\ &= 1 - 2u(t-1) + u(t-2), \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}.$$

ამრიგად, როცა ჩვენ ავიღებთ (12) განტოლების ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნას, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{I''\}(s) + 4\mathcal{L}\{I\}(s) &= \mathcal{L}\{g\}(s) \\ s^2 J(s) + 4J(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} \\ J(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 4)} - \frac{2e^{-s}}{s(s^2 + 4)} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + 4)}. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$J(s) = F(s) - 2e^{-s}F(s) + e^{-2s}F(s),$$

სადაც

$$F(s) := \frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{s}{s^2 + 4} \right).$$

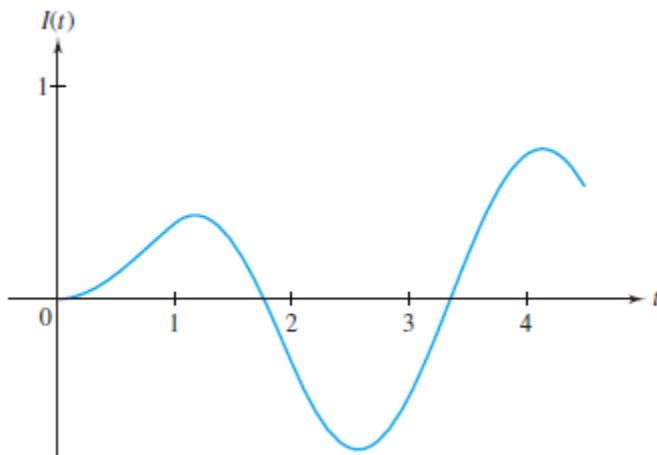
$F(s)$ ფუნქციის შებრუნებული გარდაქმნა იქნება

$$f(t) := \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t.$$

აქედან (9) თვისების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} I(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s) - 2e^{-s}F(s) + e^{-2s}F(s)\}(t) \\ &= f(t) - 2f(t-1)u(t-1) + f(t-2)u(t-2) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t \right) - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(t-1) \right] u(t-1) \\ &\quad + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2(t-2) \right] u(t-2). \end{aligned}$$

დენის გრაფიკი გამოსახულია 47-ე ნახაზზე. შევნიშნოთ, რომ $I(t)$ უფრო გლუვია ვიდრე $g(t)$. მართლაც, $I(t)$ ფუნქცია და მისი პირველი რიგის წარმოებული უწყვეტია, ხოლო მის მეორე რიგის წარმოებულს აქვს წყვეტა იმ წერტილებში, სადაც $g(t)$ ფუნქციას აქვს ნახტომის ტიპის წყვეტა.



ნახაზი 47. მაგალითი 5-ის ამონახსნი

პერიოდული ფუნქციები სხვა კლასის ფუნქციებია, რომლებიც ხშირად გვხვდებიან გამოყენებებში.

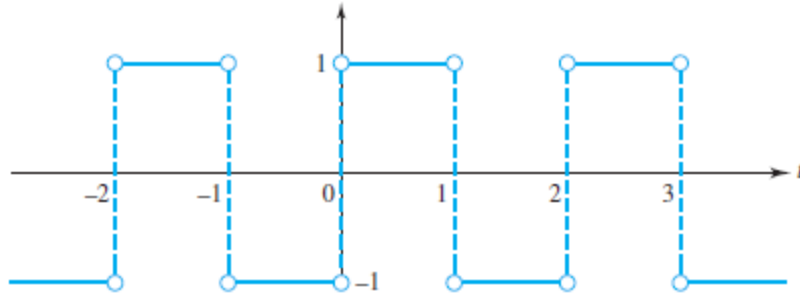
განსაზღვრა 7. ვიტყვით, რომ $f(t)$ *პერიოდული ფუნქციაა*, პერიოდით T ($\neq 0$), თუ

$$f(t+T) = f(t)$$

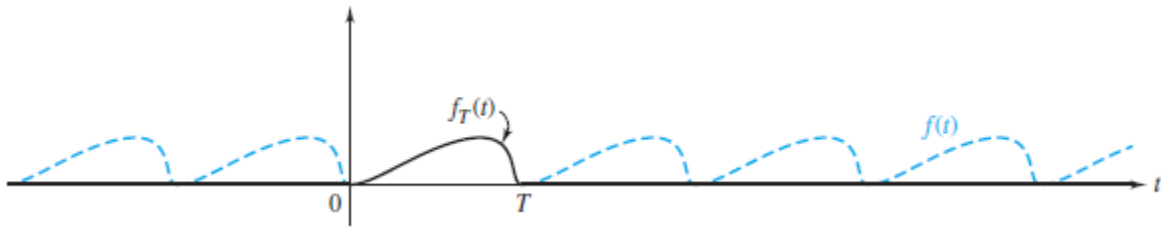
ნებისმიერი t -თვის f ფუნქციის განსაზღვრის არიდან.

როგორც ვიცით, სინუს და კოსინუს ფუნქციები პერიოდული ფუნქციებია პერიოდით 2π და ტანგენს ფუნქცია პერიოდულია π პერიოდით. პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრისათვის საკმარისია მისი მნიშვნელობების განსაზღვრა ერთი პერიოდის სიგრძის ინტერვალზე. მაგალითად, კვადრატული ტალღის ფუნქცია, რომელიც 48-ე ნახაზზეა გამოსახული შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ

$$f(t) := \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \end{cases} \quad \text{და } f(t) \text{ პერიოდი 2-ის ტოლია} \quad (13)$$



ნახაზი 48. კვადრატული ტალღის ფუნქციის გრაფიკი



ნახაზი 49. პერიოდული ფუნქციის ფანჯრის ვარიანტი

პერიოდული $f(t)$ ფუნქციის „ფანჯრის“ ვარიანტისათვის ხელსაყრელია შემოვიტანოთ აღნიშვნა (გამოვიყენოთ მართკუთხა ფანჯარა, რომლის სიგანე პერიოდის ტოლია)

$$f_T(t) := f(t)\Pi_{0,T}(t) = f(t)[u(t) - u(t - T)] = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases} \quad (14)$$

(ნახ. 49). $f_T(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნას ექნება სახე

$$F_T(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_T(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

იგი დაკავშირებულია $f(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნასთან შემდეგნაირად

თეორემა 9. თუ f -ის პერიოდი არის T და უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა $[0, T]$ ინტერვალზე, მაშინ ლაპლასის გარდაქმნები

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \text{და} \quad F_T(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობით

$$F_T(s) = F(s)[1 - e^{-sT}] \quad \text{ან} \quad F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}}. \quad (15)$$

დამტკიცება. f -ის პერიოდულობიდან და (14) ტოლობიდან გვექნება

$$f_T(t) = f(t)u(t) - f(t)u(t - T) = f(t)u(t) - f(t - T)u(t - T), \quad (16)$$

ამიტომ ლაპლასის გარდაქმნის მოხდენით და (8)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$F_T(s) = F(s)[1 - e^{-sT}],$$

რომელიც (15)-ის ტოლფასია.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $\mathcal{L}\{f\}$, სადაც f არის კვადრატული ტალღის ფუნქცია, რომელიც 48-ე ნახაზზეა გამოსახული.

ამოხსნა. აქ $T = 2$. თუ f ფუნქციას ჩავწერთ ფანჯრის ფუნქციით

$$f_T(t) = \Pi_{0,1}(t) - \Pi_{1,2}(t),$$

მაშინ (7) ტოლობის გამოყენებით მივღებთ

$$F_T(s) = (1 - e^{-s})/s - (e^{-s} - e^{-2s})/s = (1 - e^{-s})^2/s.$$

მაშასადამე, (15) მოგვცემს

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{(1 - e^{-s})^2/s}{1 - e^{-2s}} = \frac{1 - e^{-s}}{(1 + e^{-s})s}.$$

ხარისხოვანი მწკრივის წევრების ლაპლასის გარდაქმნის მოსაძებნად ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = n!/s^{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$$

მაგალითი 7. ვიპოვოთ $\mathcal{L}\{f\}$, სადაც

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

ამოხსნა. გავშალოთ $f(t)$ ტეილორის მწკრივად $t = 0$ წერტილში. რადგან

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots,$$

მაშინ t -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots$$

$t > 0$. ამ წარმოდგენას ადგილი აქვს აგრეთვე $t = 0$ წერტილში, რადგან

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

შევნიშნოთ, რომ $f(t)$ უწყვეტია $[0, \infty)$ ინტერვალზე და აქვს ექსპონენციალური რიგი. ამიტომ მისი ლაპლასის გარდაქმნა არსებობს ნებისმიერი საკმარისად დიდი s -თვის. აქედან გამომდინარე, ლაპლასის გარდაქმნის წრფივობის თვისების თანახმად, უნდა ველოდეთ, რომ ადგილი ექნება ტოლობას

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f\}(s) &= \mathcal{L}\{1\}(s) - \frac{1}{3!}\mathcal{L}\{t^2\}(s) + \frac{1}{5!}\mathcal{L}\{t^4\}(s) + \dots \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2!}{3!s^3} + \frac{4!}{5!s^5} - \frac{6!}{7!s^7} + \dots \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} + \frac{1}{5s^5} - \frac{1}{7s^7} + \dots\end{aligned}$$

მართლაც, ანალიზის მეთოდების გამოყენებით შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ მწკრივად წარმოდგენა მართებულია ნებისმიერი $s > 1$ -თვის. გარდა ამისა შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მწკრივი კრებადია $\arctan(1/s)$ ფუნქციისაკენ. ამრიგად,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = \arctan \frac{1}{s} . \quad (17)$$

მსგავსი ოპერაციები შეიძლება გამოვიყენოთ $F(s)$ ფუნქციის $1/s$ ხარისხებად

მწკრივად გაშლისას $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$ -ის გამოსათვლელად.

ჩვენ წინასწარ ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი n -თვის

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = n!/s^{n+1}.$$

მაგრამ საინტერესოა რა ხდება, როცა t -ს ხარისხი არ არის მთელი? არის ეს ფორმულა კვლავ მართებული? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად ჩვენ დაგვჭირდება „ფაქტორილის“ განმარტება არამთელი რიცხვისათვის.

განმარტება 8. გამა ფუნქცია $\Gamma(t)$ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-u} u^{t-1} du , \quad t > 0 . \quad (18)$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (18) ინტეგრალი კრებადია, როცა $t > 0$. გამა ფუნქციის სასარგებლო თვისებაა შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულება

$$\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t) . \quad (19)$$

ეს იგივეობა გამომდინარეობს (18) განმარტებიდან ნაწილობითი ინტეგრების შესრულებით

$$\begin{aligned}\Gamma(t + 1) &= \int_0^\infty e^{-u} u^t du = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-u} u^t du \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ -e^{-u} u^t \Big|_0^N + \int_0^N t e^{-u} u^{t-1} du \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (-e^{-N} N^t) + t \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-u} u^{t-1} du \\ &= 0 + t\Gamma(t) = t\Gamma(t) .\end{aligned}$$

როცა t დადებითი მთელია, ვთქვათ $t = n$, მაშინ (19) რეკურენტული დამოკიდებულება გვაძლევს

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots \\ &= n(n-1)(n-2)\dots 2\Gamma(1) .\end{aligned}$$

(18) განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\Gamma(1) = 1$, ამიტომ გვქვია

$$\Gamma(n+1) = n! .$$

ამრიგად გამა ფუნქცია აფართოებს ფაქტორიალის განმარტებას.

გამა ფუნქციის გამოყენების მიზნით დავუბრუნდეთ t -ს ნებისმიერი ხარისხის ლაპლასის გარდაქმნის მოძებნის ამოცანას. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ფორმულა

$$\mathcal{L}\{t^r\}(s) = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} \quad (20)$$

მართებულია ნებისმიერი $r > -1$ ნამდვილი რიცხვისთვის.

განმარტების თანახმად გვაქვს

$$\mathcal{L}\{t^r\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^r dt .$$

მოვახდინოთ ჩასმა $u = st$. მაშინ $du = sdt$ და მივიღებთ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^r\}(s) &= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^r \left(\frac{1}{s}\right) du \\ &= \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^r du = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}} .\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $r = n$ არის არაუარყოფითი მთელი, მაშინ $\Gamma(n+1) = n!$ და ამიტომ (20) ფორმულა დაიყვანება ცნობილ $\mathcal{L}\{t^n\}$ ფორმულაზე.

სავარჯიშო 21

ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები და იპოვეთ მათი ლაპლასის გარდაქმნები

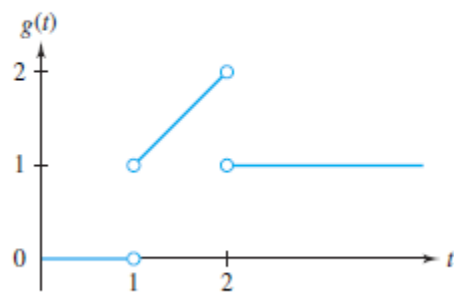
1. $(t-1)^2 u(t-1)$
2. $u(t-1) - u(t-4)$
3. $t^2 u(t-2)$
4. $tu(t-1)$

მოცემული ფუნქციები გამოსახეთ ფანჯრის და საფეხურა ფუნქციებით და გამოთვალეთ მათი ლაპლასის გარდაქმნები

$$5. g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1, \\ 2, & 1 < t < 2, \\ 1, & 2 < t < 3, \\ 3, & 3 < t \end{cases}$$

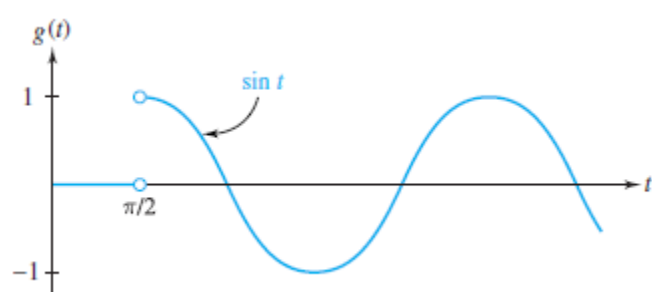
$$6. g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2, \\ t + 1, & 2 < t \end{cases}$$

7.



ნახაზი 50. მე-7 ამოცანის ფუნქცია

8.



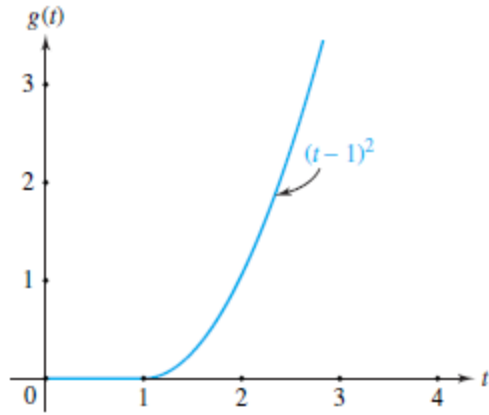
ნახაზი 51. მე-8 ამოცანის ფუნქცია

9.



ნახაზი 52. მე-9 ამოცანის ფუნქცია

10.



ნახაზი 53. მე-10 ამოცანის ფუნქცია

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნები

11. $\frac{e^{-2s}}{s-1}$

12. $\frac{e^{-3s}}{s^2}$

13. $\frac{e^{-2s} - 3e^{-4s}}{s+2}$

14. $\frac{e^{-3s}}{s^2+9}$

15. $\frac{se^{-3s}}{s^2+4s+5}$

16. $\frac{e^{-s}}{s^2+4}$

17. $\frac{e^{-3s}(s-5)}{(s+1)(s+2)}$

18. $\frac{e^{-s}(3s^2-s+2)}{(s-1)(s^2+1)}$

19. $I(t)$ დენი RLC მიმდევრობით წრედში განისაზღვრება შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანით

$$I''(t) + 2I'(t) + 2I(t) = g(t) ;$$

$$I(0) = 10 , \quad I'(0) = 0 ,$$

სადაც

$$g(t) := \begin{cases} 20 , & 0 < t < 3\pi , \\ 0 , & 3\pi < t < 4\pi , \\ 20 , & 4\pi < t . \end{cases}$$

განსაზღვრეთ დენი როგორც t დროის ფუნქცია. ააგეთ $I(t)$ ფუნქციის გრაფიკი $0 < t < 8\pi$ ინტერვალში.

20. $I(t)$ დენი LC მიმდევრობით წრედში განისაზღვრება შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანით

$$I''(t) + 4I(t) = g(t) ;$$

$$I(0) = 1 , \quad I'(0) = 3 ,$$

სადაც

$$g(t) := \begin{cases} 3 \sin t, & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ 0, & 2\pi < t. \end{cases}$$

განსაზღვრეთ დენი როგორც t დროის ფუნქცია.

იპოვეთ შემდეგი პერიოდული ფუნქციების ლაპლასის გარდაქმნა. ააგეთ მოცემული $f(t)$ ფუნქციის გრაფიკი

21. $f(t) = t$, $0 < t < 2$, და $f(t)$ -ს პერიოდია 2.

22. $f(t) = e^t$, $0 < t < 1$, და $f(t)$ -ს პერიოდია 1.

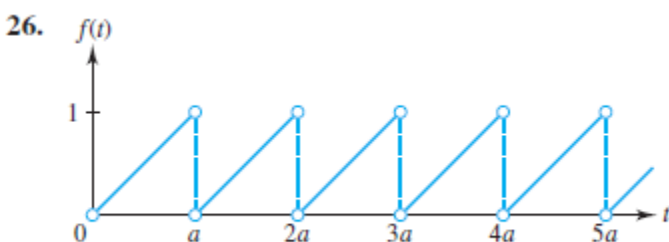
23. $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \end{cases}$
და $f(t)$ -ს პერიოდია 2.

24. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 1 - t, & 1 < t < 2, \end{cases}$
და $f(t)$ -ს პერიოდია 2.

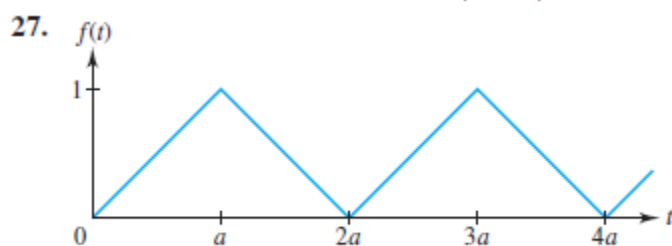
იპოვეთ შემდეგი გრაფიკებით მოცემული ფუნქციების ლაპლასის გარდაქმნები



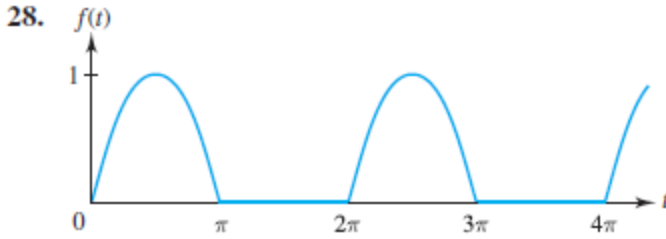
ნახაზი 54. კვადრატული ტალღა



ნახაზი 55. ხერხის კბილა ტალღა



ნახაზი 56. სამკუთხა ტალღა



ნახაზი 57. ნახევრად გაწრფივებული
სინუსოიდალური ტალღა

ლაპლასის გარდაქმნის მეთოდით ამოხსენით შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანები და ააგეთ ამონახსნის გრაფიკი

29. $y'' + y = u(t - 3) ;$

$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1$

30. $w'' + w = u(t - 2) - u(t - 4) ;$

$w(0) = 1 , \quad w'(0) = 0$

31. $y'' + y = t - (t - 4)u(t - 2) ;$

$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1$

32. $y'' + y = 3 \sin 2t - 3(\sin 2t)u(t - 2\pi) ;$

$y(0) = 1 , \quad y'(0) = -2$

ლაპლასის გარდაქმნის მეთოდით ამოხსენით შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანები

33. $y'' + 2y' + 2y = u(t - 2\pi) - u(t - 4\pi) ;$

$y(0) = 1 , \quad y'(0) = 1$

34. $y'' + 4y' + 4y = u(t - \pi) - u(t - 2\pi) ;$

$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0$

35. $z'' + 3z' + 2z = e^{-3t}u(t - 2) ;$

$z(0) = 2 , \quad z'(0) = -3$

36. $y'' + 5y' + 6y = tu(t - 2) ;$

$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1$

37. $y'' + 4y = g(t) ; \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 3 ,$

სადაც $g(t) = \begin{cases} \sin t , & 0 \leq t \leq 2\pi , \\ 0 , & 2\pi < t \end{cases}$

38. $y'' + 2y' + 10y = g(t) ;$

$y(0) = -1 , \quad y'(0) = 0 ,$

სადაც $g(t) = \begin{cases} 10 , & 0 \leq t \leq 10 , \\ 20 , & 10 < t < 20 , \\ 0 , & 20 < t \end{cases}$

39. $y'' + 5y' + 6y = g(t)$;

$y(0) = 0$, $y'(0) = 2$,

სადაც $g(t) = \begin{cases} 0 , & 0 \leq t < 1 , \\ t , & 1 < t < 5 , \\ 1 , & 5 < t \end{cases}$

40. $y'' + 3y' + 2y = g(t)$;

$y(0) = 2$, $y'(0) = -1$,

სადაც $g(t) = \begin{cases} e^{-t} , & 0 \leq t < 3 , \\ 1 , & 3 < t \end{cases}$

41. აჩვენეთ, რომ თუ

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = [(s + \alpha)(1 - e^{-Ts})]^{-1},$$

სადაც $T > 0$ ფიქსირებული რიცხვია, მაშინ

$$g(t) = e^{-\alpha t} + e^{-\alpha(t-T)}u(t-T) + e^{-\alpha(t-2T)}u(t-2T) + e^{-\alpha(t-3T)}u(t-3T) + \dots \quad (21)$$

მითითება: ისარგებლეთ ტოლობით

$$1 + x + x^2 + \dots = 1/(1 - x).$$

42. (21) ფორმულაში მოცემული $g(t)$ ფუნქცია შეიძლება გამოვსახოთ უფრო ხელსაყრელი სახით:

ა) აჩვენეთ, რომ თითოეული $n = 0, 1, 2, \dots$ რიცხვისთვის

$$g(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{(n+1)\alpha T} - 1}{e^{\alpha T} - 1} \right]$$

როცა $nT < t < (n+1)T$. მითითება: ისარგებლეთ ტოლობით

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1};$$

ბ) ვთქვათ, $v = t - (n+1)T$. აჩვენეთ, რომ როცა $nT < t < (n+1)T$, მაშინ $-T < v < 0$ და

$$g(t) = \frac{e^{-\alpha v}}{e^{\alpha T} - 1} - \frac{e^{-\alpha t}}{e^{\alpha T} - 1}. \quad (22)$$

გ) ისარგებლეთ იმ ფაქტით, რომ (22)-ის პირველი წევრი არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით T , მეორე წევრი დამოუკიდებელია n -ზე და ააგეთ (22)-ით მოცემული $g(t)$ ფუნქციის გრაფიკი, როცა $\alpha = 1$ და $T = 2$.

26. ნახვევი

განვიხილოთ საწყის პირობიანი ამოცანა

$$y'' + y = g(t) ; \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0 . \quad (1)$$

თუ აღვნიშნავთ

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s), \quad G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s),$$

მაშინ (1)-ის ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნით მივიღებთ

$$s^2 Y(s) + Y(s) = G(s) ,$$

აქედან

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) G(s) . \quad (2)$$

ამრიგად, (1)-ის ამონახსნის ლაპლასის გარდაქმნა არის ნამრავლი $\sin t$ ფუნქციისა და მარჯვენა მხარის $g(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნებისა. როგორ შეიძლება გამოვსახოთ $y(t)$ ამონახსნი $\sin t$ და $g(t)$ ფუნქციების საშუალებით? ვიცით, რომ ინტეგრალი ნამრავლიდან არ არის ინტეგრალების ნამრავლი, ანუ $y(t)$ არ არის $\sin t$ და $g(t)$ ფუნქციების ნამრავლი. მიუხედავად ამისა, ჩვენ შეგვიძლია გამოვსახოთ $y(t)$ როგორც $\sin t$ და $g(t)$ ფუნქციების „ნახვევი“.

განსაზღვრება 9. ვთქვათ, $f(t)$ და $g(t)$ უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებია $[0, \infty)$ ინტერვალზე. $f(t)$ და $g(t)$ ფუნქციების **ნახვევი** აღინიშნება $f * g$ სიმბოლოთი და ასე განისაზღვრება

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - v)g(v)dv . \quad (3)$$

მაგალითად, t და t^2 ფუნქციების ნახვევი იქნება

$$\begin{aligned} t * t^2 &= \int_0^t (t - v)v^2 dv = \int_0^t (tv^2 - v^3)dv \\ &= \left(\frac{tv^3}{3} - \frac{v^4}{4} \right) \Big|_0^t = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{12} . \end{aligned}$$

ნახვევი განსხვავებულია ჩვეულებრივი ნამრავლისაგან. მაგალითად, $1 * 1 = t \neq 1$ და ზოგადად $1 * f \neq f$. თუმცა ნახვევს გააჩნია გამრავლების ოპერაციის ანალოგიური რამდენიმე თვისება.

თეორემა 10. ვთქვათ, $f(t)$, $g(t)$ და $h(t)$ უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებია $[0, \infty)$ ინტერვალზე. მაშინ

$$f * g = g * f, \quad (4)$$

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h), \quad (5)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h), \quad (6)$$

$$f * 0 = 0. \quad (7)$$

დამტკიცება. (4)-ის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ განმარტება

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-v)g(v)dv.$$

$w = t - v$ ცვლადთა გარდაქმნით მივიღებთ

$$(f * g)(t) = \int_t^0 f(w)g(t-w)(-dw) = \int_0^t g(t-w)f(w)dw = (g * f)(t),$$

რაც ამტკიცებს (4) ტოლობას. (5) და (6) ტოლობების დამტკიცება მკითხველს მივანდოთ. (7) განტოლება ცხადია, რადგან $f(t-v) \cdot 0 \equiv 0$.

დავუბრუნდეთ ჩვენს მიზანს და დავამტკიცოთ, რომ თუ $Y(s)$ არის ნამრავლი $F(s)$ და $G(s)$ ლაპლასის გარდაქმნებისა, მაშინ $y(t)$ არის ნახვევი $(f * g)(t)$.

თეორემა 11. ვთქვათ, $f(t)$ და $g(t)$ უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებია $[0, \infty)$ ინტერვალზე და ორივე α რიგის ექსპონენციალური ფუნქციებია. ვთქვათ,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s), \quad G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s).$$

მაშინ

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s), \quad (8)$$

ანუ

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t). \quad (9)$$

დამტკიცება. დავიწყოთ (8)-ის მარცხენა მხარით და გამოვიყენოთ ნახვევის განმარტება. ცხადია, როცა $s > \alpha$, გავქვს

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-v)g(v)dv \right] dt.$$

განმეორებითი ინტეგრალის გამოთვლის გამარტივების მიზნით, შემოვიტანოთ ერთეულოვანი საფეხურა ფუნქცია $u(t-v)$ და დავწეროთ

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^\infty u(t-v)f(t-v)g(v) dv \right] dt ,$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ $u(t-v)=0$, როცა $v > t$. ინტეგრების რიგის შეცვლა მოგვცემს

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty g(v) \left[\int_0^\infty e^{-st} u(t-v)f(t-v) dt \right] dv . \quad (10)$$

ძვრის ფორმულის გამოყენებით, მარტივად დავადგენთ, რომ (10)-ის კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება $e^{-sv}F(s)$ -ის ტოლია. ამიტომ

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty g(v)e^{-sv}F(s) dv = F(s) \int_0^\infty e^{-sv}g(v) dv = F(s)G(s) .$$

ეს ამტკიცებს (8) ფორმულას.

გავიხსენოთ, რომ (1) საწყის პირობიანი ამოცანისათვის მიღებული გვექონდა ტოლობა

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) G(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s) \mathcal{L}\{g\}(s) .$$

მაშინ ნახვევის თეორემიდან გამომდინარე დავასკვნით

$$y(t) = \sin t * g(t) = \int_0^t \sin(t-v)g(v)dv .$$

ამრიგად, მივიღეთ საწყის პირობიანი ამოცანის ამონახსნის ინტეგრალური წარმოდგენა ნებისმიერი $g(t)$ მარჯვენა მხარისათვის, რომელიც არის უბან-უბან უწყვეტი ფუნქცია $[0, \infty)$ ინტერვალზე და აქვს ექსპონენციალური რიგი.

მაგალითი 1. გამოვიყენოთ ნახვევის თეორემა შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანის ამოსახსნელად

$$y'' - y = g(t) ; \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 1 , \quad (11)$$

სადაც $g(t)$ უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა $[0, \infty)$ ინტერვალზე და აქვს ექსპონენციალური რიგი.

ამოხსნა. ვთქვათ,

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s), \quad G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s),$$

მაშინ (11)-ში დიფერენციალური განტოლების ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნის აღებით და საწყისი პირობის გამოყენებით მივიღებთ

$$s^2 Y(s) - s - 1 - Y(s) = G(s) .$$

აქედან

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} \right) G(s) = \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} \right) G(s) .$$

საიდანაც დავსკვნით

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1} G(s)\right\}(t) \\ &= e^t + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1} G(s)\right\}(t) . \end{aligned}$$

ლაპლასის გარდაქმნების ცხრილის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\mathcal{L}\{\sinh t\}(s) = \frac{1}{s^2-1} ,$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1} G(s)\right\}(t) = \sinh t * g(t) .$$

ამრიგად, ამონახსნს ექნება სახე

$$y(t) = e^t + \int_0^t \sinh(t-v)g(v)dv$$

მაგალითი 2. ნახვევის თეორემის გამოყენებით ვიპოვოთ

$$\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+1)^2\}.$$

ამოხსნა. დავწეროთ

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right) .$$

რადგან

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1/(s^2+1),$$

ამიტომ ნახვევის თეორემით მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}(t) &= \sin t * \sin t = \int_0^t \sin(t-v)\sin v dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(2v-t) - \cos t] dv \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2v-t)}{2} \right]_0^t - \frac{1}{2} t \cos t \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin t}{2} - \frac{\sin(-t)}{2} \right] - \frac{1}{2} t \cos t \\ &= \frac{\sin t - t \cos t}{2} . \end{aligned}$$

როგორც ეს მაგალითი გვიჩვენებს, ნახვევის თეორემა სასარგებლოა s -ის მიმართ რაციონალური ფუნქციის შებრუნებული გარდაქმნის მოსაძებნად. მართლაც, იგი გვაძლევს კერძო წილადებად დაშლის მეთოდის ალტერნატივას. მაგალითად,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-a}\right)\left(\frac{1}{s-b}\right)\right\}(t) = e^{at} * e^{bt} ,$$

და შებრუნებული გარდაქმნის მოსაძებნად დაგვრჩა გამოვთვალოთ ნახვევი.

მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის კვლევისას, 1900-იან წლებში ვ. ვოლტერამ შემოიღო *ინტეგრო-დიფერენციალური* განტოლებები. ეს განტოლებები მას საშუალებას აძლევდა მხედველობაში მიეღო „მემკვიდრეობითი ზეგავლენები“. ზოგიერთ შემთხვევაში ეს განტოლებები შეიცავდნენ ნახვევს. როგორც შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, ნახვევის თეორემა გვეხმარება ასეთი სახის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაში.

მაგალითი 3. ამოვხსნათ ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება

$$y'(t) = 1 - \int_0^t y(t-v)e^{-2v} dv , \quad y(0) = 1 . \quad (12)$$

ამოხსნა. (12) განტოლება ასე შეიძლება გადავწეროთ

$$y'(t) = 1 - y(t) * e^{-2t} . \quad (13)$$

ვთქვათ, $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. ავიღოთ (13)-ის ლაპლასის გარდაქმნა და გამოვიყენოთ ნახვევის თეორემა, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} sY(s) - 1 &= \frac{1}{s} - Y(s)\left(\frac{1}{s+2}\right) \\ sY(s) + \left(\frac{1}{s+2}\right)Y(s) &= 1 + \frac{1}{s} \\ \left(\frac{s^2 + 2s + 1}{s+2}\right)Y(s) &= \frac{s+1}{s} \\ Y(s) &= \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1)^2} = \frac{s+2}{s(s+1)} \\ Y(s) &= \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} . \end{aligned}$$

აქედან $y(t) = 2 - e^{-t}$.

წრფივი სისტემის *გადაცემის ფუნქცია* $H(s)$ ვუწოდოთ გამომავალი $y(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნის შეფარდებას შემავალი $g(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნასთან იმ დაშვებით, რომ საწყისი პირობები ნულია. ამრიგად,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} .$$

თუ წრფივი სისტემა აღიწერება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით

$$ay'' + by' + cy = g(t) , \quad t > 0 , \quad (14)$$

სადაც a, b, c მუდმივებია, ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ შესაბამისი გადაცემის ფუნქცია შემდეგნაირად. ავიღოთ (14)-ის ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნა

$$as^2Y(s) - asy(0) - ay'(0) + bsY(s) - by(0) + cY(s) = G(s) .$$

რადგან საწყისი პირობები დაშვების თანახმად ნულია, ამიტომ მივიღებთ

$$(as^2 + bs + c)Y(s) = G(s) .$$

ამრიგად, (14)-ის გადაცემის ფუნქცია იქნება

$$H(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1}{as^2 + bs + c} . \quad (15)$$

აღბათ შეამჩნიეთ გარკვეული მსგავსება ამ გამოთვლებსა და (14)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელი განტოლების მოძებნას შორის. მართლაც, პირველი ნაბიჯი

$$Y(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c}$$

ფუნქციის შებრუნებული გარდაქმნის მოძებნისათვის, არის $as^2 + bs + c$ მნიშვნელის ფესვების პოვნა, რაც იდენტურია (14)-ის მახასიათებელი განტოლების ამოხსნისა.

$h(t) := \mathcal{L}^{-1}\{H\}(t)$ ფუნქციას ეწოდება სისტემის *იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია*, რადგან ფიზიკური აზრიდან გამომდინარე, იგი აღწერს მყისიერი ზემოქმედების შედეგს; მაგალითად, იგი აღწერს სისტემის იმ ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზამბარაზე უროს მყისიერი დარტყმის შედეგად. ჩვენ შეგვიძლია, აგრეთვე, დავახასიათოთ $h(t)$ როგორც ერთადერთი ამონახსნი შემდეგი არაერთგვაროვანი ამოცანისა:

$$ah'' + bh' + ch = 0 ; \quad h(0) = 0 , \quad h'(0) = 1/a . \quad (16)$$

მართლაც, შევნიშნოთ, რომ (16) განტოლების ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნის აღებით მივიღებთ

$$a[s^2H(s) - sh(0) - h'(0)] + b[sH(s) - h(0)] + cH(s) = 0 . \quad (17)$$

ჩავსვათ $h(0) = 0$ და $h'(0) = 1/a$ და ამოვხსნათ $H(s)$ -ის მიმართ

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} ,$$

რაც ემთხვევა (15) განტოლებაში გადაცემის ფუნქციისათვის მიღებულ ფორმულას.

ერთი განსაკუთრებული კარგი თვისება იმპულსური გარდამავალი ფუნქციისა არის ის, რომ იგი შეიძლება დაგვეხმაროს შემდეგი ზოგადი საწყისი პირობიანი ამოცანის ამონახსნის შესწავლაში

$$ay'' + by' + cy = g(t) ; \quad y(0) = y_0 , \quad y'(0) = y_1 . \quad (18)$$

(14) განტოლების განხილვიდან შეგვიძლია დავინახოთ, რომ ნახვევი $h * g$ არის (18)-ის ამონახსნი იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც საწყისი პირობები ნულია (ე.ი. $y_0 = y_1 = 0$). რაც შეეხება არანულოვან საწყის პირობებს, ვთქვათ, y_k აღნიშნავს შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებისათვის საწყის პირობიანი ამოცანის ამონახსნს

$$ay'' + by' + cy = 0 ; \quad y(0) = y_0 , \quad y'(0) = y_1 . \quad (19)$$

მაშინ (18) ზოგადი საწყის პირობიანი ამოცანის სასურველი ამონახსნი უნდა იყოს $h * g + y_k$. მართლაც, რადგან $h * g$ არის (14) განტოლების ამონახსნი და y_k არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, ამიტომ ჯამი $h * g + y_k$ იქნება (14) განტოლების ამონახსნი. ამასთან ერთად, რადგან $h * g$ აკმაყოფილებს ნულოვან საწყის პირობებს, ამიტომ

$$\begin{aligned} (h * g)(0) + y_k(0) &= 0 + y_0 = y_0 , \\ (h * g)'(0) + y_k'(0) &= 0 + y_1 = y_1 . \end{aligned}$$

შევაჯამოთ ეს შედეგები თეორემის სახით.

თეორემა 12. ვთქვათ, I არის ინტერვალი, რომელიც შეიცავს სათავეს. მაშინ შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანის

$$ay'' + by' + cy = g ; \quad y(0) = y_0 , \quad y'(0) = y_1 ,$$

სადაც a, b, c მუდმივებია და g უწყვეტია I -ზე, ერთადერთი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$y(t) = (h * g)(t) + y_k(t) = \int_0^t h(t - v)g(v) dv + y_k(t) , \quad (20)$$

სადაც h არის სისტემის იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია და y_k არის (19)-ის ერთადერთი ამონახსნი.

(20) განტოლება სასარგებლოა იმ თვალსაზრისით, რომ იგი გვიჩვენებს, თუ როგორ არის დამოკიდებული $y(t)$ ამონახსნი საწყის პირობებზე ($y_k(t)$ -ს საშუალებით) და განტოლების $g(t)$ მარჯვენა მხარეზე (ნახვევის ინტეგრალის საშუალებით). იგი აგრეთვე მიუთითებს დამოკიდებულების მიზეზ-შედეგობრივ კავშირზე, რაც გამოიხატება იმაში, რომ $g(v)$ ფუნქცია არ ახდენს გავლენას $y(t)$ -ზე, სანამდის $t \geq v$. გამოვიყენოთ ეს თეორემა შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანის ამონახსნის მოსაძებნად.

მაგალითი 4. წრფივი სისტემა აღიწერება განტოლებით

$$y'' + 2y' + 5y = g(t) ; \quad y(0) = 2 , \quad y'(0) = -2 . \quad (21)$$

ვიპოვოთ სისტემის გადაცემის ფუნქცია, იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია და ამონახსნის ფორმულა.

ამოხსნა. (15) ფორმულის შესაბამისად, (21)-ის გადაცემის ფუნქცია იქნება

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 2^2} .$$

$H(s)$ ფუნქციის ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა არის იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H\}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t . \end{aligned}$$

საწყის პირობიანი ამოცანის ამოსახსნელად ჩვენ გვჭირდება შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებისათვის იმავე საწყის პირობიანი ამოცანის ამოხსნა. შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა $r^2 + 2r + 5 = 0$, რომლის ფესვებია $r = -1 \pm 2i$. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი იქნება $C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t$. შევარჩიოთ C_1 და C_2 ისე, რომ დაკმაყოფილდეს (21) საწყისი პირობები. მაშინ გვექნება $y_k(t) = 2e^{-t} \cos 2t$.

ამრიგად, (21) საწყისი პირობიანი ამოცანის ამონახსნი იქნება

$$(h * g)(t) + y_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-v)} \sin[2(t-v)] g(v) dv + 2e^{-t} \cos 2t .$$

სავარჯიშო 22

ნახვევის თეორემის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი საწყისი პირობიანი ამოცანების ამონახსნის ფორმულა, სადაც $g(t)$ უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა $[0, \infty)$ ინტერვალზე და აქვს ექსპონენციალური რიგი.

1. $y'' - 2y' + y = g(t)$;
 $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$
2. $y'' + 9y = g(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
3. $y'' + 4y' + 5y = g(t)$;
 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
4. $y'' + y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

ნახვევის თეორემის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლაპლასის მებრუნებული გარდაქმნა

5. $\frac{1}{s(s^2 + 1)}$

6. $\frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$

7. $\frac{14}{(s + 2)(s - 5)}$

8. $\frac{1}{(s^2 + 4)^2}$

9. $\frac{s}{(s^2 + 1)^2}$

10. $\frac{1}{s^3(s^2 + 1)}$

11. $\frac{s}{(s - 1)(s + 2)} \left[\text{მით: } \frac{s}{s - 1} = 1 + \frac{1}{s - 1} \right]$

12. $\frac{s + 1}{(s^2 + 1)^2}$

13. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა

$$f(t) := \int_0^t (t - v) e^{3v} dv .$$

14. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა

$$f(t) := \int_0^t e^v \sin(t - v) dv .$$

ამოხსენით შემდეგი ინტეგრალური და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები

$$15. y(t) + 3 \int_0^t y(v) \sin(t-v) dv = t$$

$$16. y(t) + \int_0^t e^{t-v} y(v) dv = \sin t$$

$$17. y(t) + \int_0^t (t-v) y(v) dv = 1$$

$$18. y(t) + \int_0^t (t-v) y(v) dv = t^2$$

$$19. y(t) + \int_0^t (t-v)^2 y(v) dv = t^3 + 3$$

$$20. y'(t) + \int_0^t (t-v) y(v) dv = t, \quad y(0) = 0$$

$$21. y'(t) + y(t) - \int_0^t y(v) \sin(t-v) dv = -\sin t, \\ y(0) = 1$$

$$22. y'(t) - 2 \int_0^t e^{t-v} y(v) dv = t, \quad y(0) = 2$$

$y(t)$ -ს მიმართ

23-28 ამოცანებში წრფივი სიტყმება აღიწერება მითითებული საწყის პირობიანი ამოცანებით. იპოვეთ სისტემის გადაცემის ფუნქცია $H(s)$, იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია $h(t)$ და შესაბამისი საწყის პირობიანი ამოცანის ამოხსნა

$$23. y'' + 9y = g(t);$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

$$24. y'' - 9y = g(t); \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

$$25. y'' - y' - 6y = g(t);$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$$

$$26. y'' + 2y' - 15y = g(t);$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 8$$

$$27. y'' - 2y' + 5y = g(t);$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

$$28. y'' - 4y' + 5y = g(t);$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

27. იმპულსები და დირაკის დელტა ფუნქცია

მექანიკური სისტემების, ელექტრული წრედების, ძელის ღუნვის და სხვა გამოყენებითი ამოცანების შესწავლისას ვხვდებით ფუნქციებს, რომლებსაც გააჩნიათ ძალიან დიდი მნიშვნელობები დროის ძალიან მცირე ინტერვალში. მაგალითად, უროს დარტყმა იწვევს შედარებით დიდი ინტენსიობის ძალას შედარებით მცირე დროში, ასევე დიდი წონის კონცენტრირება დაკიდებული ძელის პატარა მოხვევით იწვევს ძალიან დიდი ინტენსიობის დატვირთვას ძელის საკმარისად მცირე განაკვეთზე. ასეთი მცირე ხანგრძლივობის ძლიერი ძალების შესასწავლად ფიზიკოსები და ინჟინრები იყენებენ დელტა ფუნქციას, რომელიც შემოიტანა პოლ დირაკმა. დირაკის ფუნქციაზე წარმოდგენას გვაძლევს შემდეგი არაფორმალური განმარტება.

განსაზღვრება 10. დირაკის დელტა ფუნქცია $\delta(t)$ ხასიათდება შემდეგი ორი თვისებით:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

და

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (2)$$

ნებისმიერი $f(t)$ ფუნქციისათვის, რომელიც უწყვეტია ღია ინტერვალზე, რომელიც შეიცავს $t = 0$ წერტილს.

$\delta(t)$ ფუნქციაში არგუმენტის ძვრით მივიღებთ $\delta(t-a) = 0$, $t \neq a$ და

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \quad (3)$$

ნებისმიერი $f(t)$ ფუნქციისათვის, რომელიც უწყვეტია ღია ინტერვალზე, რომელიც შეიცავს $t = a$.

ცხადია, რომ $\delta(t-a)$ არ არის ფუნქცია ჩვეულებრივი აზრით; ნაცვლად ამისა, იგი არის მაგალითი იმისა, რის გამოც მას უწოდებენ *განზოგადოებულ ფუნქციას* ან კიდევ *განაწილებას (დისტრიბუციას)*. ამ ნაკლის მიუხედავად, დირაკის დელტა ფუნქცია წარმატებით გამოიყენებოდა წლების განმავლობაში ფიზიკისა და საინჟინრო ამოცანების ამოსახსნისას, ვიდრე ლორან შვარცმა მათემატიკურად დააფუძნა მისი გამოყენება.

დირაკის დელტა ფუნქციის არსებობის ევრისტიკული არგუმენტი შეიძლება იყოს ძალის იმპულსი დროის მცირე ინტერვალში. თუ ძალა $F(t)$ გამოიყენება t_0

მომენტიდან t_1 მომენტამდე, მაშინ $F(t)$ ძალის მოქმედებით გამოწვეული იმპულსი გამოისახება ინტეგრალით

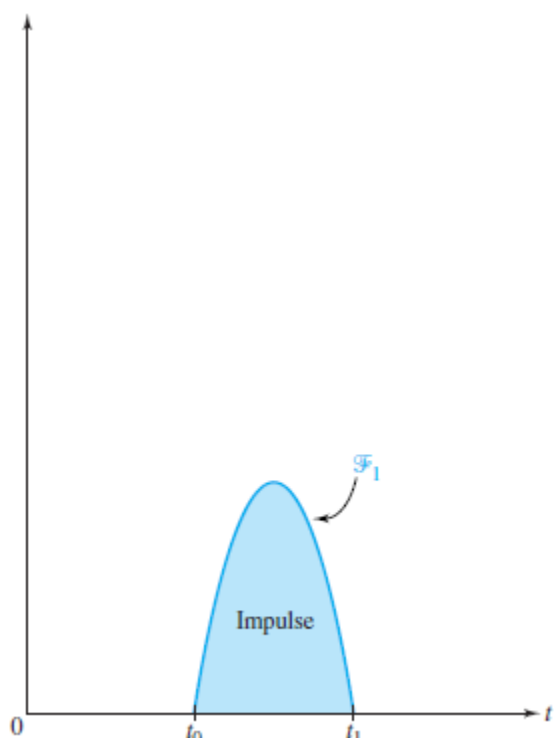
$$\text{იმპულსი} = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt.$$

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად

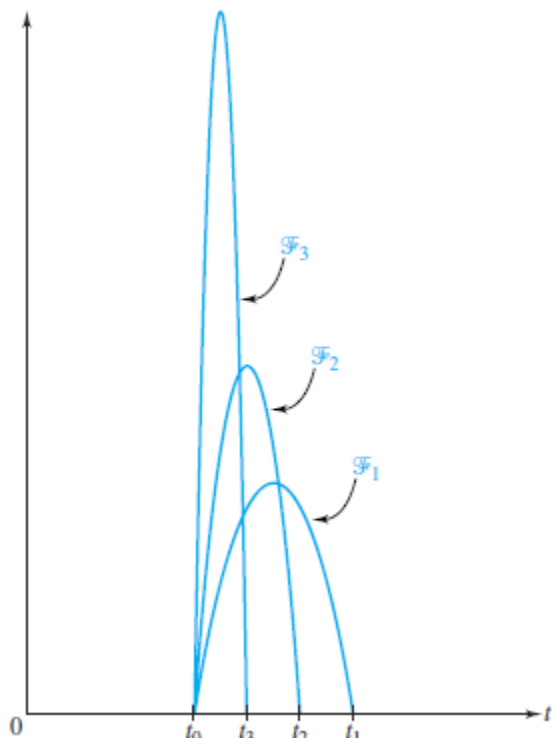
$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{dv}{dt} dt = mv(t_1) - mv(t_0), \quad (4)$$

სადაც m აღნიშნავს მასას და v სიჩქარეს. რადგან mv წარმოადგენს მოძრაობის რაოდენობას, ამიტომ შეგვიძლია (4)-ის ასეთი ინტერპრეტირება: **იმპულსი ტოლია მოძრაობის რაოდენობის ცვლილებისა.**

როდესაც უროს ურტყავთ საგანს, ის გადასცემს სხეულს იმპულსს ანუ მოძრაობის რაოდენობის ცვლილებას. ამასთან მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება ხდება დროის მცირე პერიოდში, ვთქვათ, $[t_0, t_1]$ ინტერვალში. თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ $F_1(t)$ წარმოადგენს უროს დარტყმის ძალას, მაშინ ფართობი $F_1(t)$ წირის ქვეშ იქნება იმპულსი ანუ მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება (ნახ. 58).



ნახაზ-58. ძალა უროს დარტყმის გამო



ნახაზი 59. ძალები ერთი და იგივე იმპულსით

თუ, როგორც ეს 59-ე ნახაზზეა გამოსახული, მოძრაობის რაოდენობის იგივე ცვლილებას ადგილი აქვს დროის უფრო და უფრო მცირე ინტერვალში, ვთქვათ,

$[t_0, t_2]$ ან $[t_0, t_3]$ ინტერვალებში, მაშინ საშუალო ძალა უნდა გახდეს უფრო და უფრო დიდი, რათა იმპულსი (რომელიც არის ფართობი $F_n(t)$ წირის ქვეშ) დარჩეს უცვლელი. მართლაც, თუ F_n ძალებს აქვთ ერთი და იგივე იმპულსი და ზემოქმედებენ შესაბამისად $[t_0, t_n]$ ინტერვალებზე, სადაც $t_n \rightarrow t_0$, როცა $n \rightarrow \infty$, მაშინ F_n ძალა მიისწრაფის ფუნქციისაკენ, რომელიც არის ნული როცა $t \neq t_0$, მაგრამ აქვს უსასრულო მნიშვნელობა როცა $t = t_0$. გარდა ამისა, F_n ფუნქციის გრაფიკის ქვეშ ფართობს აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა. ამ მნიშვნელობის ნორმალიზაცია 1-ით გვაძლევს

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_n(t) dt = 1 \text{ ნებისმიერი } n\text{-თვის.}$$

როცა $t_0 = 0$, მაშინ F_n ფუნქციის ზღვრული თვისებებიდან მივიღებთ- δ „ფუნქციას“, რომელიც დააკმაყოფილებს (1) თვისებას და ინტეგრალურ პირობას

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (5)$$

შევნიშნოთ, რომ (5) არის (2) თვისების კერძო შემთხვევა, როცა $f(t) \equiv 1$. საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ (1) და (5) ნამდვილად გულისხმობს (2) ზოგად თვისებას.

დირაკის ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა შეგვიძლია ტრივიალურად მივიღოთ (3) თვისებიდან. რადგან $\delta(t-a) = 0$, $t \neq a$, მაშინ თუ (3)-ში დავუშვებთ, რომ $f(t) = e^{-st}$, მივიღებთ

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t-a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \delta(t-a) dt = e^{-as}.$$

ამრიგად, როცა $a \geq 0$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as}. \quad (6)$$

არსებობს საინტერესო კავშირი ერთეულოვან საფეხურა ფუნქციასა და დირაკის დელტა ფუნქციას შორის. შევნიშნოთ, რომ როგორც (5) განტოლების შედეგი და ის ფაქტი, რომ $\delta(x-a)$ ნულია როცა $x < a$ და $x > a$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \delta(x-a) dx &= \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t > a \end{cases} \\ &= u(t-a). \end{aligned} \quad (7)$$

თუ (7)-ის ორივე მხარეს ფორმალურად გავაწარმოებთ t ცვლადით, მაშინ დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემის ძალით მივიღებთ

$$\delta(t-a) = u'(t-a).$$

ამრიგად, დირაკის დელტა ფუნქცია წარმოადგენს ერთეულოვანი საფეხურა ფუნქციის წარმოებულს. ცხადია, აქ „გაწარმოება“ იგულისხმება გარკვეული განზოგადებული აზრით, რომლის მკაცრი მათემატიკური განმარტება სცილდება ჩვენი კურსის ფარგლებს.

დირაკის დელტა ფუნქცია გამოიყენება მექანიკური რხევის ამოცანების მოდელირებაში, რომლებიც ხასიათდებიან იმპულსებით. მაგალითად, ზამბარა რომელიც წონასწორობაში იმყოფება, უროს დარტყმის შემდეგ გადასცემს იმპულს მასზე მიმაგრებულ სხეულს და მისი შემდგომი მოძრაობა სიმბოლურად უნდა აღიწერებოდეს შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანით

$$x'' + x = \delta(t); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad (8)$$

სადაც $x(t)$ აღნიშნავს გადაადგილებას წონასწორობის მდგომარეობიდან t მომენტში. ჩვენ მას ვუწოდებთ როგორც სიმბოლურ (ფორმალურ) ამოცანას, რადგან (8) განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს ჩვეულებრივ ფუნქციას, მარჯვენა მხარე კი არა. შესაბამისად არ არის ცხადი, რას ვგულისხმობთ (8) ამოცანის ამონახსნში. რადგან $\delta(t)$ ნულია ყველგან გარდა $t=0$ წერტილისა, ამიტომ ერთი შეხედვით (8) შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ერთგვაროვანი განტოლება ერთგვაროვანი საწყისი პირობებით. მაგრამ ამ უკანასკნელ პირობებში ამოცანის ამონახსნი ნულია ყველგან, რომელიც ცხადია არ აღწერს სხეულის მოძრაობას უროს დარტყმის შემდეგ.

რომ განვსაზღვროთ, თუ რა გვესმის (8)-ის ამონახსნის ქვეშ, გავიხსენოთ, რომ $\delta(t)$ წარმოდგენილია როგორც ზღვარი $F_n(t)$ ფუნქციისა, რომელსაც აქვს ერთეულოვანი იმპულსი და მოქმედებს დროის უფრო და უფრო მცირე ინტერვალებში. თუ დავუშვებთ, რომ $y_n(t)$ არის შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანის ამონახსნი

$$y_n'' + y_n = F_n(t); \quad y_n(0) = 0, \quad y_n'(0) = 0, \quad (9)$$

სადაც δ შეიცვალა F_n -ით, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ~~გვეთქვოდ~~ განვმარტოთ (8) განტოლების $x(t)$ ამონახსნი, როგორც ზღვარი $y_n(t)$ ამონახსნებისა, როცა $n \rightarrow \infty$.

მაგალითად, დავუშვათ

$$F_n(t) = n - nu(t - 1/n) = \begin{cases} n, & t \in \left(0, \frac{1}{n}\right), \\ 0, & t \notin \left(0, \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

მოვახდინოთ (9) განტოლების ლაპლასის გარდაქმნა. მივიღებთ

$$(s^2 + 1)Y_n(s) = \frac{n}{s}(1 - e^{-s/n}),$$

ამიტომ

$$Y_n(s) = \frac{n}{s(s^2 + 1)} - e^{-s/n} \frac{n}{s(s^2 + 1)} .$$

რადგან

$$\frac{n}{s(s^2 + 1)} = \frac{n}{s} - \frac{ns}{s^2 + 1} = \mathcal{L}\{n - n \cos t\}(s) .$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} y_n(t) &= n - n \cos t - \left[n - n \cos(t - 1/n) \right] u(t - 1/n) \\ &= \begin{cases} n - n \cos t , & 0 < t < 1/n , \\ n \cos(t - 1/n) - n \cos t , & 1/n < t . \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

დავაფიქსიროთ $t > 0$. მაშინ საკმარისად დიდი n -თვის გვექნება $1/n < t$. ამრიგად,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [n \cos(t - 1/n) - n \cos t] \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(t - 1/n) - \cos t}{-1/n} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(t + h) - \cos t}{h} \quad (\text{სადაც } h = -1/n) , \\ &= - \frac{d}{dt}(\cos t) = \sin t . \end{aligned}$$

$t = 0$ -თვის აგრეთვე გვექნება $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(0) = 0 = \sin 0$. მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \sin t .$$

ამრიგად სიმბოლური საწყის პირობიანი (8) ამოცანის ამონახსნი იქნება $x(t) = \sin t$.

საბედნიეროდ, ჩვენ არ მოგვიწევს ამოხსნის ასეთი დამღლევი მუშაობის ჩატარება ყოველ y_n -ზე, რათა მოვძებნოთ სიმბოლური ამოცანის $x(t)$ ამონახსნი. აღმოჩნდა, რომ ლაპლასის გარდაქმნის მეთოდი, როცა მას უშუალოდ (8) განტოლებაზე ვიყენებთ, პირდაპირ გვაძლევს $x(t)$ ამონახსნს. მართლაც, (8)-ის ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნის აღებით და (6) ტოლობის გამოყენებით, მივიღებთ (როცა $a = 0$)

$$\begin{aligned} (s^2 + 1)X(s) &= 1 , \\ X(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} , \end{aligned}$$

რაც გვაძლევს

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} (t) = \sin t .$$

დირაკის დელტა ფუნქციის გამოყენების თავისებურება ისაა, რომ სიმბოლური საწყის პირობიანი ამოცანის ამონახსნი $x(t) = \sin t$ არ აკმაყოფილებს ორივე საწყის

პირობას ე.ი. $x'(0)=1 \neq 0$. ეს ასახავს იმ ფაქტს, რომ $\delta(t)$ იმპულსი გამოიყენება $t=0$ მომენტში. ამრიგად, მოძრაობის რაოდენობა x' (შევნიშნოთ, რომ (8) განტოლებაში სხეულის მასა 1 ტოლია) განიცდის უეცარ ნახტომს $x'(0)=0$ დან $x'(0^+)=1$ -მდე.

მაგალითი 1. სხეული, რომელიც ზამზარაზეა მიმაგრებული, წონასწორობის მდგომარეობიდან ჩამოწეულია ქვემოთ 1 მ-ით და შემდეგ ზამზარა იწყებს რხევას. π წმ-ის შემდეგ სხეულზე ურტყავენ უროს, რომელიც სხეულს გადასცემს იმპულსს. სისტემა აღიწერება შემდეგი სიმბოლური საწყის პირობიანი ამოცანით

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 3\delta(t - \pi) ; \quad x(0) = 1 , \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 , \quad (11)$$

სადაც $x(t)$ აღნიშნავს გადაადგილებას წონასწორობის მდგომარეობიდან t მომენტისათვის. განვსაზღვროთ $x(t)$.

ამოხსნა. ვთქვათ

$$X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s).$$

რადგან

$$\mathcal{L}\{x''\}(s) = s^2X(s) - s \quad \text{და} \quad \mathcal{L}\{\delta(t - \pi)\}(s) = e^{-\pi s} ,$$

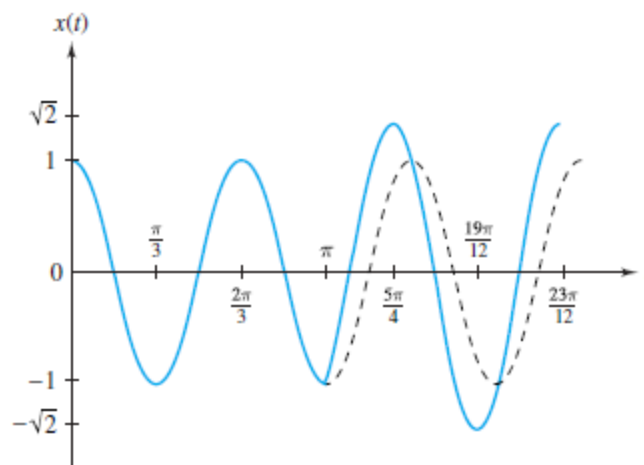
ამიტომ (11)-ს ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნით და $X(s)$ -ის მიმართ ამოხსნით მივიღებთ

$$\begin{aligned} s^2X(s) - s + 9X(s) &= 3e^{-\pi s} \\ X(s) &= \frac{s}{s^2 + 9} + e^{-\pi s} \frac{3}{s^2 + 9} \\ &= \mathcal{L}\{\cos 3t\}(s) + e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\sin 3t\}(s) . \end{aligned}$$

გამოვიყენოთ ძვრის თვისება, რათა განვსაზღვროთ $X(s)$ -ის ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა. მივიღებთ

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 3t + [\sin 3(t - \pi)]u(t - \pi) \\ &= \begin{cases} \cos 3t , & t < \pi , \\ \cos 3t - \sin 3t , & \pi < t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \cos 3t , & t < \pi , \\ \sqrt{2} \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) , & \pi < t . \end{cases} \end{aligned}$$

$x(t)$ -ს გრაფიკი მოცემულია მე-60 ნახაზზე. შედარებისათვის, წყვეტილი წირი გამოსახავს გადაადგილებას ზამზარის რხევისას შეშფოთების გარეშე. შევნიშნოთ, რომ იმპულსის ფაქტობრივად უმატებს 3 ერთეულს მოძრაობის რაოდენობას $t = \pi$ მომენტში.



ნახაზი 60. გადაადგილება ზამბარის რხევის დროს $t = \pi$ მომენტში უროს დარტყმის შემდეგ

ზემოთ,

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (12)$$

განტოლებისათვის ჩვენ განვსაზღვრეთ *იმპულსური გარდამავალი ფუნქცია* შემდეგნაირად

$$h(t) := \mathcal{L}^{-1}\{H\}(t),$$

სადაც $H(s)$ *გადაცემის ფუნქციაა*. გავიხსენოთ, რომ $H(s)$ არის შეფარდება

$$H(s) := \frac{Y(s)}{G(s)},$$

სადაც $Y(s)$ (12)-ის ამონახსნის ლაპლასის გარდაქმნაა ნულოვანი საწყისი პირობით და $G(s)$ არის $g(t)$ ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა. მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ $H(s)$ და შესაბამისად $h(s)$ არაა დამოკიდებული $g(t)$ ფუნქციის არჩევანზე (12)-ში. მიუხედავად ამისა სასარგებლოა ვიფიქროთ იმპულსურ გარდამავალ ფუნქციაზე, როგორც შემდეგი საწყის პირობიანი სიმბოლური ამოცანის ამონახსნზე

$$ay'' + by' + cy = \delta(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (13)$$

მართლაც, როცა $g(t) = \delta(t)$, გვაქვს $G(s) = 1$ და $H(s) = Y(s)$. შესაბამისად $h(t) = y(t)$. ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ $h(t)$ ფუნქცია არის $\delta(t)$ იმპულსის რეაქცია მექანიკური სისტემისათვის, რომელიც აღიწერება (13) სიმბოლური საწყის პირობიანი ამოცანით.

სავარჯიშო 23

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები

1. $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - 1)\delta(t) dt$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{3t}\delta(t) dt$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} (\sin 3t)\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta(t + 1) dt$
5. $\int_0^{\infty} e^{-2t}\delta(t - 1) dt$
6. $\int_{-1}^1 (\cos 2t)\delta(t) dt$

იპოვეთ შემდეგი განზოგადოებული ფუნქციების ლაპლასის გარდაქმნები

- | | |
|------------------------------------|------------------------|
| 7. $\delta(t - 1) - \delta(t - 3)$ | 8. $3\delta(t - 1)$ |
| 9. $t\delta(t - 1)$ | 10. $t^3\delta(t - 3)$ |
| 11. $\delta(t - \pi)\sin t$ | 12. $e^t\delta(t - 3)$ |

ამოხსენით შემდეგი სიმბოლური საწყის პირობიანი ამოცანები

13. $w'' + w = \delta(t - \pi)$;
 $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$
14. $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$;
 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
15. $y'' + 2y' - 3y = \delta(t - 1) - \delta(t - 2)$;
 $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$
16. $y'' - 2y' - 3y = 2\delta(t - 1) - \delta(t - 3)$;
 $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$
17. $y'' - y = 4\delta(t - 2) + t^2$;
 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$
18. $y'' - y' - 2y = 3\delta(t - 1) + e^t$;
 $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
19. $w'' + 6w' + 5w = e^t\delta(t - 1)$;
 $w(0) = 0$, $w'(0) = 4$
20. $y'' + 5y' + 6y = e^{-t}\delta(t - 2)$;
 $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$

ამოხსენით შემდეგი სიმბოლური საწყის პირობიანი ამოცანები და ააგეთ ამონახსნის გრაფიკი

21. $y'' + y = \delta(t - 2\pi) ;$

$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1$

22. $y'' + y = \delta(t - \pi/2) ;$

$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1$

23. $y'' + y = -\delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi) ;$

$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1$

24. $y'' + y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi) ;$

$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1$

28. წრფივი სისტემების ამოხსნა ლაპლასის გარდაქმნით

ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია დავიყვანოთ საწყის პირობიანი წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგიერთი სისტემა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე, სადაც უცნობები არიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ლაპლასის გარდაქმნები. ამოვხსნით ამ ალგებრულ სისტემას, ვიპოვით მათი ლაპლასის შებრუნებულ გარდაქმნებს და მივიღებთ მოცემული სისტემისათვის საწყის პირობიანი ამოცანის ამონახსნს.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ საწყის პირობიანი ამოცანა

$$x'(t) - 2y(t) = 4t ; \quad x(0) = 4 , \quad (1)$$

$$y'(t) + 2y(t) - 4x(t) = -4t - 2 ; \quad y(0) = -5 .$$

ამოხსნა. დიფერენციალურ განტოლებათა ორივე მხარის ლაპლასის გარდაქმნით მივიღებთ

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) - 2\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{4}{s^2} , \quad (2)$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) - 4\mathcal{L}\{x\}(s) = -\frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} .$$

ვთქვათ

$$X(s) := \mathcal{L}\{x\}(s) \text{ და } Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s).$$

მაშინ გვექნება

$$\mathcal{L}\{x'\}(s) = sX(s) - x(0) = sX(s) - 4 ,$$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) + 5 .$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულებები (2) სისტემაში და გავამარტივოთ:

$$sX(s) - 2Y(s) = \frac{4s^2 + 4}{s^2}, \quad (3)$$

$$-4X(s) + (s + 2)Y(s) = -\frac{5s^2 + 2s + 4}{s^2}.$$

თუ სისტემიდან გამოვრიცხავთ $Y(s)$ -ს, გვექნება

$$[s(s + 2) - 8]X(s) = \frac{(s + 2)(4s^2 + 4)}{s^2} - \frac{10s^2 + 4s + 8}{s^2}.$$

საიდანაც

$$X(s) = \frac{4s - 2}{(s + 4)(s - 2)}.$$

შეზრუნებული გარდაქმნის მოსაძებნად დავშალოთ წილადებად

$$X(s) = \frac{3}{s + 4} + \frac{1}{s - 2}.$$

აქედან, ლაპლასის გარდაქმნების ცხრილის მიხედვით მივიღებთ

$$x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t}. \quad (4)$$

ახლა ამოვხსნათ (3) სისტემა $Y(s)$ -ის მიმართ და ვიპოვოთ მისი შეზრუნებული გარდაქმნა. თუმცა (1) სისტემის პირველი განტოლებიდან შეგვიძლია პირდაპირ განვსაზღვროთ $y(t)$. მივიღებთ

$$y(t) = \frac{1}{2}x'(t) - 2t.$$

ჩავსვათ აქ $x(t)$ -ს გამოსახულება. საბოლოოდ მივიღებთ

$$y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t. \quad (5)$$

ამრიგად, (1) სისტემისათვის საწყის პირობიანი ამოცანის ამონახსნი იქნება ფუნქციათა წყვილი $x(t)$ და $y(t)$, რომლებიც მოიცემიან (4) და (5) განტოლებებით.

სავარჯიშო 24

ლაპლასის გარდაქმნის მეთოდის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი საწყის პირობიანი ამოცანები

1. $x' = 3x - 2y$; $x(0) = 1$,
 $y' = 3y - 2x$; $y(0) = 1$
2. $x' = x - y$; $x(0) = -1$,
 $y' = 2x + 4y$; $y(0) = 0$
3. $z' + w' = z - w$; $z(0) = 1$,
 $z' - w' = z - w$; $w(0) = 0$
4. $x' - 3x + 2y = \sin t$; $x(0) = 0$,
 $4x - y' - y = \cos t$; $y(0) = 0$
5. $x' = y + \sin t$; $x(0) = 2$,
 $y' = x + 2 \cos t$; $y(0) = 0$
6. $x' - x - y = 1$; $x(0) = 0$,
 $-x + y' - y = 0$; $y(0) = -5/2$
7. $x'' + 2y' = -x$; $x(0) = 2$, $x'(0) = -7$,
 $-3x'' + 2y'' = 3x - 4y$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -9$
8. $x'' + y = 1$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$,
 $x + y'' = -1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
9. $x' + y = 1 - u(t - 2)$; $x(0) = 0$,
 $x + y' = 0$; $y(0) = 0$
10. $x' + y = x$; $x(0) = 0$, $y(0) = 1$,
 $2x' + y'' = u(t - 3)$; $y'(0) = -1$
11. $x' - y' = (\sin t)u(t - \pi)$; $x(0) = 1$,
 $x + y' = 0$; $y(0) = 1$
12. $x'' = y + u(t - 1)$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$,
 $y'' = x + 1 - u(t - 1)$; $y(0) = 0$,
 $y'(0) = 0$
13. $x' - 2y = 2$; $x(1) = 1$,
 $x' + x - y' = t^2 + 2t - 1$; $y(1) = 0$
14. $x' - 2x + y' = -(\cos t + 4 \sin t)$; $x(\pi) = 0$,
 $2x + y' + y = \sin t + 3 \cos t$; $y(\pi) = 3$
15. $x' + x - y' = 2(t - 2)e^{t-2}$; $x(2) = 0$,
 $x'' - x' - 2y = -e^{t-2}$; $x'(2) = 1$, $y(2) = 1$

29. მატრიცული მეთოდი წრფივი სისტემებისათვის. შესავალი

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავუბრუნდებით დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ანალიზს. როდესაც სისტემის განტოლებები წრფივია, სისტემის ჩასაწერად გამოიყენება მატრიცთა ალგებრის კომპაქტური აღნიშვნები. ეს აღნიშვნები გვთავაზობს ახალ და ელეგანტურ ხერხს ამონახსნის თვისებების დასადგენად და ეფექტურ მეთოდებს ზუსტი ამონახსნის მისაღებად.

განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 4y,\end{aligned}\tag{1}$$

სადაც $x(t)$ და $y(t)$ უცნობი ფუნქციებია. (1) სისტემის პირველი განტოლების მარჯვენა მხარეს სტრუქტურულად აქვს სახე, რომელიც ცნობილია ჩვენთვის ვექტორთა აღრიცხვიდან. კერძოდ, იგი არის ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი:

$$-4x + 2y = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

ანალოგიურად, (1) სისტემის მეორე განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს სკალარულ ნამრავლს

$$4x - 4y = \begin{bmatrix} 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

მათემატიკაში სკალარული ნამრავლის ხშირად გამოყენებამ ისე, როგორც ეს (1) სისტემაში არის მოცემული, მიგვიყვანა *მატრიცთა ალგებრის* განვითარებასთან ანუ მათემატიკურ დისციპლინასთან, რომლის ძირითადი ოპერაცია - მატრიცთა ნამრავლი - არის სკალარულ ნამრავლთა ერთობლიობა შემდეგი წესის შესაბამისად:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x + 2y \\ 4x - 4y \end{bmatrix}.$$

ზოგადად, მატრიცის, ანუ m სტრიქონისა და n სვეტის მართკუთხა ცხრილის სახით ჩაწერილ რიცხვთა ერთობლიობის, ნამრავლი სვეტ მატრიცაზე (ვექტორზე) განისაზღვრება სკალარულ ნამრავლთა ერთობლიობით მატრიცის სტრიქონისა სვეტ მატრიცაზე, როგორც ვექტორზე

$$\begin{bmatrix} \text{სტრ. \# 1} \\ \text{სტრ. \# 2} \\ \vdots \\ \text{სტრ. \# m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{სტრ. \# 1} \end{bmatrix} \cdot v \\ \begin{bmatrix} \text{სტრ. \# 2} \end{bmatrix} \cdot v \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \text{სტრ. \# m} \end{bmatrix} \cdot v \end{bmatrix},$$

სადაც v ვექტორს აქვს n კომპონენტი. ორი n განზომილებიანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი გამოითვლება ცხადი სახით

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

მატრიცული ნამრავლის აღნიშვნების გამოყენებით (1) სისტემა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს ამ აღნიშვნების გამოყენებას ოთხგანზომილებიან შემთხვევაში. შევნიშნოთ, რომ წრფივ სისტემაში არაა სავალდებულო კოეფიციენტები იყოს მუდმივები.

მაგალითი 1. ჩავწეროთ შემდეგი სისტემა

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2x_1 + t^2x_2 + (4t + e^t)x_4 , \\ x'_2 &= (\sin t)x_2 + (\cos t)x_3 , \\ x'_3 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 , \\ x'_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

როგორც მატრიცული განტოლება.

ამოხსნა. (3) სისტემის პირველი განტოლების მარჯვენა მხარე გამოვსახოთ როგორც სკალარული ნამრავლი

$$2x_1 + t^2x_2 + (4t + e^t)x_4 = [2 \quad t^2 \quad 0 \quad (4t + e^t)] \cdot [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4] .$$

ანალოგიურად გამოისახება დანარჩენი სკალარული ნამრავლები და საბოლოოდ მატრიცულ ჩანაწერს ექნება სახე

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & t^2 & 0 & (4t + e^t) \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} .$$

ზოგადად, თუ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ექნება სახე

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n , \end{aligned}$$

მაშინ ვიტყვით, რომ წრფივი **სისტემა ნორმალური სახისაა**. ეს სისტემა მატრიცული სახით ასე ჩაიწერება

$$x' = Ax ,$$

სადაც A არის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცა

$$A = A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

x ამონახსნი ვექტორია

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ $\mathbf{x}'$ გამოვიყენეთ ვექტორის წარმომადგენლის აღსანიშნავად

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}.$$

მაგალითი 2. ზამბარის არამილევადი და არაიძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლება

$$my'' + ky = 0 \quad (4)$$

წარმოვადგინოთ ეკვივალენტური პირველი რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის სახით, ჩაწერილი მატრიცული ფორმით.

ამოხსნა. ჩვენ უნდა გამოვსახოთ მეორე რიგის წარმომადგენელი y'' როგორც პირველი რიგის წარმომადგენლის წარმომადგენელი, რათა (4) წარმოვადგინოთ როგორც პირველი რიგის სისტემა. ეს მარტივია. აჩქარება y'' არის სიჩქარის წარმომადგენელი $v = y'$. ამიტომ (4) მიიღებს სახეს

$$mv' + ky = 0. \quad (5)$$

მაშინ პირველი რიგის სისტემა მიიღება (5) განტოლების გაერთიანებით $v = y'$ ტოლობასთან ერთად:

$$\begin{aligned} y' &= v \\ mv' &= -ky. \end{aligned}$$

ამ სისტემის ნორმალური სახით გადასაწერად გავყოთ მეორე განტოლების ორივე მხარე m მასაზე დ შემდეგ ჩავწეროთ მატრიცული განტოლების სახით. მივიღებთ

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}.$$

ზოგადად, n -ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

ნორმალური სახის ეკვივალენტური სისტემის სახით გადასაწერად y ფუნქციის პირველი $(n-1)$ რიგის წარმომადგენელი, თავად y -ის ჩათვლით, აღვნიშნოთ ახალი უცნობი ფუნქციებით

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= y'(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

მაშინ სისტემა აღნიშვნების შესაბამისად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ტოლობებით $x_j(t) = x'_{j-1}(t)$ და მოცემული განტოლებით, რომლის ორივე მხარე გაყოფილია $a_n(t)$ -ზე და გათვალისწინებულია აღნიშვნები

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2, \\x'_2 &= x_3, \\&\vdots \\x'_{n-1} &= x_n, \\x'_n &= -\frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1 - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n.\end{aligned}$$

ორი და უფრო მეტი მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებებისაგან შედგენილი სისტემისათვის იგივე მოქმედებები გამოიყენება თითოეული უცნობი ფუნქციისათვის.

მაგალითი 3. განვიხილოთ სისტემა

$$\begin{aligned}2\frac{d^2x}{dt^2} + 6x - 2y &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2y - 2x &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

ჩავწეროთ (6) მატრიცული სახით.

ამოხსნა. დაბალი რიგის წარმოებულებისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = y, \quad x_4 = y'.\tag{7}$$

ამ აღნიშვნებით (6) სისტემა მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned}2x'_2 + 6x_1 - 2x_3 &= 0, \\x'_4 + 2x_3 - 2x_1 &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

მაშინ ნორმალური სახე იქნება

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2, \\x'_2 &= -3x_1 + x_3, \\x'_3 &= x_4, \\x'_4 &= 2x_1 - 2x_3\end{aligned}$$

ან მატრიცულად

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

სავარჯიშო 25

ჩაწერეთ მატრიცული სახით შემდეგი სისტემები

1. $x' = 7x + 2y$,

$y' = 3x - 2y$

2. $x' = y$,

$y' = -x$

3. $x' = x + y + z$,

$y' = 2z - x$,

$z' = 4y$

4. $x'_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$,

$x'_2 = x_1 + x_4$,

$x'_3 = \sqrt{\pi}x_1 - x_3$,

$x'_4 = 0$

5. $x' = (\sin t)x + e^t y$,

$y' = (\cos t)x + (a + bt^3)y$

6. $x'_1 = (\cos 2t)x_1$,

$x'_2 = (\sin 2t)x_2$,

$x'_3 = x_1 - x_2$

ჩაწერეთ ნორმალური სახის სისტემებად შემდეგი მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

7. ზამბარის მიღევადი რხევის განტოლება $my'' + by' + ky = 0$.

8. ლეჟანდრის განტოლება $(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$.

9. ეირის განტოლება $y'' - ty = 0$.

10. ბესელის განტოლება $y'' + \frac{1}{t}y' + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)y = 0$.

ჩაწერეთ მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებებისაგან შედგენილი მოცემული სისტემები ნორმალური სახის მატრიცულ სისტემებად

11. $x'' + 3x + 2y = 0$,

$y'' - 2x = 0$

12. $x'' + 3x' - y' + 2y = 0$,

$y'' + x' + 3y' + y = 0$

13. $x'' - 3x' + t^2y - (\cos t)x = 0$,

$y''' + y'' - tx' + y' + e^t x = 0$

30. წრფივი ალგებრული განტოლებები

აქ ჩვენ მიმოვიხილავთ წრფივი ალგებრული სისტემების და მატრიცთა ალგებრის ძირითად დებულებებს, რომლებიც სასარგებლო იქნება დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური სისტემების ამოსახსნელად.

შემდეგი სახის განტოლებათა ერთობლიობას

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

სადაც a_{ij} და b_i მოცემული მუდმივებია, *ალგებრულ განტოლებათა წრფივი სისტემა ეწოდება* $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობების მიმართ. ამ სისტემის ამოხსნა უცნობთა გამორიცხვის მეთოდით კარგად არის ცნობილი. განვიხილოთ ეს უნივერსალური მეთოდი, რომელსაც *გაუს-ჟორდანის გამორიცხვის ალგორითმი ეწოდება*. ამ ალგორითმის ძირითადი არსი არის ის, რომ პირველი განტოლება გამოიყენება x_1 უცნობის გამოსარიცხად სისტემის ყველა დანარჩენი განტოლებიდან. შემდეგ მეორე განტოლება გამოიყენება x_2 უცნობის გამოსარიცხად ყველა დანარჩენი განტოლებიდან და ასე შემდეგ. შედეგად სისტემა განცალდება უცნობების მიმართ და მივიღებთ $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობების მნიშვნელობებს.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 16, \\ 4x_1 + 15x_2 + 19x_3 &= 38, \\ 2x_1 + \quad \quad + 3x_3 &= 6. \end{aligned}$$

ამოხსნა. გადავამრავლოთ პირველი განტოლება 2-ზე და გამოვაკლოთ მეორეს. ამით გამოირიცხება x_1 მეორე განტოლებიდან. ანალოგიურად გავამრავლოთ პირველი განტოლება 1-ზე და გამოვაკლოთ მესამეს. ამით გამოირიცხება x_1 მესამე განტოლებიდან.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 16, \\ 3x_2 + 3x_3 &= 6, \\ -6x_2 - 5x_3 &= -10. \end{aligned}$$

ახლა გადავამრავლოთ მეორე განტოლება 2-ზე და გამოვაკლოთ პირველ განტოლებას. ასევე, გადავამრავლოთ მეორე განტოლება 2-ზე და დავუმატოთ მესამეს. ამით ჩვენ გამოვრიცხავთ x_2 უცნობს პირველი და მესამე განტოლებიდან

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 4, \\ 3x_2 + 3x_3 &= 6, \\ x_3 &= 2. \end{aligned}$$

დაბოლოს, გამოვრიცხოთ პირველი და მეორე განტოლებიდან x_3 მივიღებთ

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 0, \\ 3x_2 &= 0, \\ x_3 &= 2. \end{aligned}$$

ამრიგად, მოხდა სისტემის განცალგება და შეგვიძლია ამოვხსნათ თითოეული განტოლება. საბოლოოდ მივიღებთ

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2.$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 1, \\ -2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 2x_4 &= 4, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -3. \end{aligned}$$

ამოხსნა. პირველი უცნობი x_1 გამოვრიცხოთ დანარჩენი სამი განტოლებიდან

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_3 + x_4 &= 1, \\ 4x_4 &= 4, \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3. \end{aligned}$$

ახლა ჩვენ არ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მეორე განტოლება მეორე უცნობის გამოსარიცხად, რადგან არ შეიცავს x_2 უცნობს. შემდეგი განტოლება, რომელიც შეიცავს x_2 უცნობს არის მეოთხე განტოლება, ამიტომ ჩვენ გადავსვავთ მეორე და მეოთხე განტოლებებს:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3, \\ 4x_4 &= 4, \\ 2x_3 + x_4 &= 1, \end{aligned}$$

x_2 -ის გამორიცხვით მივიღებთ

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3, \\ 4x_4 &= 4, \\ 2x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

x_3 უცნობის გამორიცხვის მიზნით კვლავ გადავსვავთ მესამე და მეოთხე განტოლებები

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3, \\ 2x_3 + x_4 &= 1, \\ 4x_4 &= 4, \end{aligned}$$

x_3 და x_4 უცნობების გამორიცხვით მივიღებთ

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_4 = 0, & & x_1 = 1, \\ 2x_2 = -2, & & 2x_2 = -2, \\ 2x_3 + x_4 = 1, & \text{და} & 2x_3 = 0, \\ 4x_4 = 4, & & 4x_4 = 4. \end{array}$$

განცალეხადი განტოლების ამონახსნი არის

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1.$$

გაუს-ჟორდანის ალგორითმის გამოყენებისას შეიძლება შეგვხვდეს გარკვეული სირთულეები. მაგალითად, რა გავაკეთოთ იმ შემთხვევაში, როცა ჩვენ ვაპირებთ x_j უცნობის გამორიცხვას და იგი არ მონაწილეობს არცერთ დანარჩენ განტოლებაში? პირველი რაც უნდა გავაკეთოთ უნდა გამოვრიცხოთ შემდეგი x_{j+1} უცნობი.

მაგალითი 3. გამოვიყენოთ გაუს-ჟორდანის ალგორითმი შემდეგი სისტემისათვის

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 = 6, \\ -4x_1 - 8x_2 + x_3 = -10. \end{array} \quad (1)$$

ამოხსნა. x_1 უცნობის გამორიცხვა ჩვეულებრივ შესრულდება

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8, \\ -x_3 = -2, \\ 3x_3 = 6. \end{array}$$

რადგან x_2 არ შედის მეორე და მესამე განტოლებაში, ამიტომ ვიყენებ მეორე განტოლებას x_3 -ის გამოსარიცხად

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 = 6, \\ -x_3 = -2, \\ 0 = 0. \end{array} \quad (2)$$

როგორ გავიგოთ (2) სისტემა? მესამე განტოლება იგივეობაა და არავითარ ინფორმაციას არ შეიცავს, ამიტომ, ცხადია, უკუვაგდებთ მას. მეორე განტოლება გვეუბნება, რომ $x_3 = 2$.

პირველი განტოლებიდან გვაქვს $x_1 = 3 - 2x_2$, მაგრამ არ გვაქვს არავითარი განტოლება x_2 -თვის. ცხადია, x_2 არის თავისუფალი ცვლადი და ჩვენ შეგვიძლია მივანიჭოთ მას ნებისმიერი მნიშვნელობა და, შესაბამისად, x_1 იქნება $3 - 2x_2$. ამრიგად, (1) სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე და ეს ამონახსნები ასე ჩაიწერება

$$x_1 = 3 - 2s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 2; \quad -\infty < s < \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ ეკვივალენტური ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ, თუ x_1 -ს ავიღებდით თავისუფალ ცვლადად. ვთქვათ, $x_1 = s$ და დანარჩენ უცნობებს ასე განვსაზღვრავდით: $x_2 = (3 - s) / 2$, $x_3 = 2$.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ შემდეგი სისტემის ყველა ამონახსნი

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 , \\
2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 1 , \\
3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 &= -3 , \\
4x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 &= 0 .
\end{aligned}$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ პირველი განტოლება x_1 უცნობის გამოსარიცხად

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 , \\
- x_4 &= 1 , \\
3x_4 &= -3 , \\
0 &= 0 .
\end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, უცნობები x_2 და x_3 არ მონაწილეობენ დანარჩენ განტოლებებში, ამიტომ ვიყენებთ მეოთხე განტოლებას x_4 -ის გამოსარიცხად

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 , \\
-x_4 &= 1 , \\
0 &= 0 , \\
0 &= 0 .
\end{aligned}$$

აქ არ გვაქვს შეზღუდვა x_2 -ზე და x_3 -ზე; ამიტომ ჩვენ ვიღებთ მათ თავისუფალ ცვლადებად და ამონახსნს აქვს სახე

$$x_1 = 2 + s - 2t , \quad x_2 = s , \quad x_3 = t , \quad x_4 = -1, \quad -\infty < s, t < \infty .$$

სავარჯიშო 26

გაუს-ჟორდანის ალგორითმის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი სისტემების ყველა ამონახსნი

- $$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 , \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 , \\
x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 , \\
x_1 + x_4 &= 0 , \\
2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 , \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 0 , \\
-x_1 - x_2 + x_3 &= 0 , \\
x_1 + x_2 - x_3 &= 0
\end{aligned}$$

$$4. \quad x_3 + x_4 = 0 ,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 ,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 ,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$5. \quad -x_1 + 2x_2 = 0 ,$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

$$6. \quad -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 ,$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 ,$$

$$4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$7. \quad -x_1 + 3x_2 = 0 ,$$

$$-3x_1 + 9x_2 = 0$$

$$8. \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 ,$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 ,$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$$

$$9. \quad (1-i)x_1 + 2x_2 = 0 ,$$

$$-x_1 - (1+i)x_2 = 0$$

$$10. \quad x_1 + x_2 + x_3 = i ,$$

$$2x_1 + 3x_2 - ix_3 = 0 ,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = i$$

$$11. \quad 2x_1 + x_3 = -1 ,$$

$$-3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 ,$$

$$-x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$$

12. გამოიყენეთ გაუს-ჟორდანის გამორიცხვის ალგორითმი და აჩვენეთ, რომ განტოლებათა შემდეგ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა $r=2$, და ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა, როცა $r=1$.

$$2x_1 - 3x_2 = rx_1 ,$$

$$x_1 - 2x_2 = rx_2$$

13. გამოიყენეთ გაუს-ჟორდანის გამორიცხვის ალგორითმი და აჩვენეთ, რომ განტოლებათა შემდეგ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა $r=-1$, $r=2$, და ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა, როცა $r=2$.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = rx_1 ,$$

$$x_1 + x_3 = rx_2 ,$$

$$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = rx_3$$

ლაპლასის გარდაქმნების ცხრილი

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$
1. $f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	20. $\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
2. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	21. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
3. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	22. $t^{n-(1/2)}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+(1/2)}}$
4. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	23. $t^r, \quad r > -1$	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$
5. $t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	24. $\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
6. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	25. $\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
7. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$	26. $e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
8. $(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$	27. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
9. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$	28. $\sinh bt$	$\frac{b}{s^2 - b^2}$
		29. $\cosh bt$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$
10. $f(t-a)u(t-a), \quad a \geq 0$	$e^{-as}F(s)$	30. $\sin bt - bt \cos bt$	$\frac{2b^3}{(s^2 + b^2)^2}$
11. $g(t)u(t-a), \quad a \geq 0$	$e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}(s)$	31. $t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$
12. $u(t-a), \quad a \geq 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$	32. $\sin bt + bt \cos bt$	$\frac{2bs^2}{(s^2 + b^2)^2}$
13. $\Pi_{a,b}(t), \quad 0 < a < b$	$\frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}$	33. $t \cos bt$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$
14. $\delta(t-a), \quad a \geq 0$	e^{-as}	34. $\sin bt \cosh bt - \cos bt \sinh bt$	$\frac{4b^3}{s^4 + 4b^4}$
15. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	35. $\sin bt \sinh bt$	$\frac{2b^2s}{s^4 + 4b^4}$
16. $t^n, \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	36. $\sinh bt - \sin bt$	$\frac{2b^3}{s^4 - b^4}$
17. $e^{at}t^n, \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	37. $\cosh bt - \cos bt$	$\frac{2b^2s}{s^4 - b^4}$
18. $e^{at} - e^{bt}$	$\frac{(a-b)}{(s-a)(s-b)}$	38. $J_\nu(bt), \nu > -1$	$\frac{(\sqrt{s^2 + b^2} - s)^\nu}{b^\nu \sqrt{s^2 + b^2}}$
19. $ae^{at} - be^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$		