PROBABILITES

PROBABILITES

1) Vocabulaire de base des probabilités

Définitions et notation:
On appelle **Expérience aléatoire** toute expérience réalisée suivant un protocole expérimental précis et reproductible à l'identique. Chaque répétition est appelée une **épreuve**. L'ensemble des résultats possibles est appelé **Univers des possibles** (ou des **éventualités**, ou des **issues**), et est souvent noté Ω.

Exemple : Jet d'un dé à 6 faces. $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$. $Card(\Omega)=6$

Définitions
On appelle **événement** tout sous-ensemble (ou partie) de l'univers des possibles.
Si l'événement est réduit à une seule issue, on dit qu'il est **élémentaire**.
Ω est appelé évenement certain. $\varnothing$ est appelé évenement impossible.

Exemples :
Considérons comme expérience aléatoire le jet d'un dé à 6 faces. $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$. $Card(\Omega)=6$

L'événement A « tirer un nombre pair » se traduit par le sous-ensemble $A=\{2;4;6\}$. $Card(A)=3$

L'événement B « tirer un nombre impair » se traduit par le sous-ensemble $B=\{1;3;5\}$

Les événements {1} ; {5} et {6} sont élémentaires. L'événement « tirer un nombre <0 » est impossible. L'événement « tirer un nombre >0 » est certain.

Définitions
L'événement « A et B », noté $A\cap B$ est obtenu en regroupant les événements élémentaires communs à A **et** à B.
Deux événements seront dits incompatibles (ou disjoints) si et seulement si $A\cap B=\varnothing$
L'événement « A ou B », noté $A\cup B$ est obtenu en regroupant les événements élémentaires contenus dans A **ou** dans B.
Si A est une partie de Ω, l'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est composé des événements élémentaires de Ω qui ne sont pas contenus dans A.

Exemples
En reprenant l'exemple et les notations précédentes, on a $A\cup B=\Omega$ et $A\cap B=\varnothing$. De plus $B=\overline{A}$ et $A=\overline{B}$

2) Fréquence d'un événement

Définition
Soit A un évenement lié à une expérience aléatoire.
Répétons n fois cette expérience. Soit n_A le nombre de réalisations de A lors de ces n répétitions.

La fréquence de réalisation de l'événement A est alors $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$

L'expérience montre que lorsque n devient de plus en plus grand, $f_n(A)$ tend à se stabiliser autour d'un nombre p.

Ce nombre p s'appelle alors probabilité de l'événement A et se note $p(A)$

Propriétés des fréquences :

1) $f_n(\Omega)=1$, car Ω étant toujours réalisé, $n_\Omega=n$

2) Pour tout événement A, $f_n(A)\in[0;1]$ car $0\le n_A\le n$

3) Si A et B sont incompatibles, $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$ car $n_{A\cup B}=n_A+n_B$

3) Notion de probabilité

Définition :
Définir une probabilité, liée à une expérience aléatoire, c'est associer à chaque événement un réel de l'intervalle [0 ;1]
- La somme des probabilités des événements élémentaires soit égale à 1
- La probabilité d'un événement soit égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Une probabilité p est donc une **fonction** définie sur l'ensemble des événements, à valeurs dans [0 ;1]

Exemples :

On lance un dé cubique parfaitement équilibré, et on note le chiffre obtenu. $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

Issue ω_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On a $\sum_{w\in\Omega} p(\{w\}) = \sum_{i=1}^{6} p(\{w_i\}) = 1$

Soit A l'événement « tirer un nombre pair », alors $p(A) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Soit B l'événement « tirer un multiple de 3 », alors $p(B) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

De plus $p(A\cap B) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$

<u>Interprétation</u> : La probabilité d'un événement traduit la confiance que l'on a dans la réalisation de celui-ci.
Une probabilité proche de 1 traduit une confiance élevée tandis qu'une probabilité proche de 0 traduit le peu de confiance dans sa réalisation.

<u>REMARQUE :</u> Une probabilité n'est pas définie de manière unique !
Reprenant la situation précédente, et supposant que le dé est truqué, on peut bien se trouver dans la situation :

Issue ω_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

On a toujours $\sum_{w\in\Omega} p(\{w\}) = \sum_{i=1}^{6} p(\{w_i\}) = 1$, et on a alors

$p(A) = \frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ et $p(B) = \frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

4) Propriétés des probabilités

Soit E une expérience aléatoire d'univers des possibles $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\omega_3;...\omega_n\}$.

<u>Propriétés élémentaires</u>

Par définition même de la notion de probabiltié

1) $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$
2) Pour tout événement A, $0 \le p(A) \le 1$

<u>Théorème :</u>

Si A et B sont deux événements. La probabilité de l'événement (A ou B) est donnée par :

$\boxed{p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)}$

Dans le cas particulier où A et B sont incompatibles, cette formule se résumera à $\boxed{p(A\cup B) = p(A) + p(B)}$

<u>Preuve</u> :

Pour dénombrer les d'issues de $A\cup B$, on dénombre celles de A, puis celles de B, et on minore le tout de celles de $A\cap B$ qui ont été comptées deux fois.

Dans le cas particulier où $A\cap B = \varnothing$, il n'y a rien à soustraire puisque $p(A\cap B) = p(\varnothing) = 0$

<u>Corollaire :</u>

Quel que soit l'événement A, $\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$

<u>Preuve :</u>

$A\cup\overline{A} = \Omega$ et $A\cap\overline{A} = \varnothing$ donc d'après ce qui précède, $p(A\cup\overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$. Or $p(A\cup\overline{A}) = p(\Omega) = 1$

5) Situation d'équiprobabilité

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.

Dans si l'univers des possibles Ω a pour cardinal N, les événements élémentaires ont une probabilité égale à $\frac{1}{N}$.

Propriété :

Sous l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires d'une expérience aléatoire, d'univers des possibles Ω, alors pour tout événement A, on a : $\boxed{p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$

On retient souvent : $\boxed{p(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}}$

Preuve :

Notons $A=\{\omega_1;\omega_2;...\omega_p\}$. On a alors

$$p(A)=p(\omega_1)+p(\omega_2)+....p(\omega_p)$$

$$\underbrace{\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+....\frac{1}{N}}_{p\text{ fois}}=p\times\frac{1}{N}=\frac{p}{N}=\boxed{p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$$

Attention ! Cette formule est fausse en cas de non équiprobabilité.

Dans l'exemple du dé truqué, avec :

Issue ω_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

Si on note A l'événement « tirer un nombre pair », Il est **INTERDIT** d'écrire que $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ car nous ne sommes pas en situation d'équiprobabilité

6) Probabilités conditionnelles, événements indépendants

Dans une classe de 36 élèves, 23 élèves ont 18 ans, 29 élèves sont des filles et 17 filles ont 18 ans. On choisit au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux évènements suivants : A : « l'élève est une fille » , B : « l'élève a 18 ans » , $A\cap B$: « l'élève est une fille de 18 ans ». Ainsi $p(A)=\frac{29}{36}$, $p(B)=\frac{23}{36}$ et $p(A\cap B)=\frac{17}{36}$

Mais si on sait que l'élève est une fille, **l'ensemble de référence change** : la probabilité que l'élève ait 18 ans, sachant que c'est une fille, est alors $\frac{\text{nombre de filles de 18 ans}}{\text{nombre total de filles}}=\frac{17}{29}$

On remarque alors que $\frac{17}{29}=\frac{17/36}{29/36}=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

Définition :

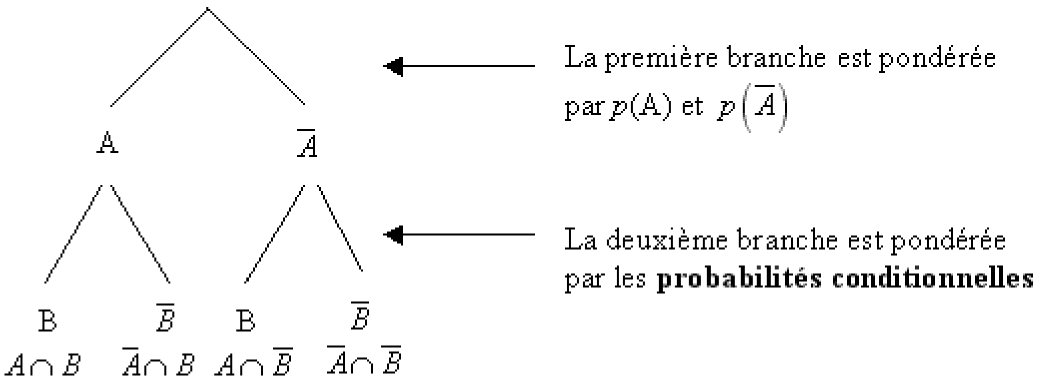
Soit A et B deux événements d'un même univers, tels que A soit de probabilité non nulle.

Le **probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé**, ou encore **probabilité de B sachant A**, est définie par $\boxed{p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}}$.

Si on connaît la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé et la probabilité de B, alors on peut calculer la probabilité de l'événement de l'événement « A et B » : $\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)}$

Arbre de probabilité conditionnelle

On traduit souvent la situation sous la forme d'un arbre de probabilité conditionnelle.



Définition :
Soit A et B deux événements d'un même univers, de probabilités non nulles.
On dit que les événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne change pas la probabilité de réalisation de l'autre. Autrement dit, A et B sont indépendants si $\boxed{p_A(B)=p(B)}$ ou $\boxed{p_B(A)=p(A)}$

Conséquence :
Si A et B sont deux événements indépendants, la propriété $p_A(B)=p(B)$ se traduit par $\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=p(B)$ donc par :

$$\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p(B)}$$

7) Variables aléatoires

Définition :
Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle variable aléatoire toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$. $X(\Omega)$ est alors l'image de Ω.

Exemples :
On jette un dé cubique et on s'intéresse au jeu suivant : si on obtient un numéro ≤ 4 on perd 1 €, sinon on gagne 2 €. L'application X qui à tout tirage associe le gain obtenu (une perte est un gain négatif) est une variable aléatoire (discrète prenant un nombre fini de valeurs). On a $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $X(\Omega)=\{-1,2\}$ et $X(w)=\begin{cases}-1 & \text{ssi } 1\leq w\leq 4\\ 2 & \text{ssi } 5\leq w\leq 6\end{cases}$.

Loi de probabilité, espérance, variance

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
Soit $\{x_1,x_2,....x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X et p_i la probabilité de l'événement « $X=x_i$ »

On a alors $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1+p_2+p_n=1$

Définition:
On appelle loi de probabilité de X la fonction qui à tout x_i associe le nombre $p_i=p(X=x_i)$
On utilise souvent la représentation à l'aide d'un tableau

Valeurs possibles x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
probabilité $p_i=p(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Exemples :
Le tableau suivant nous donne la loi de probabilité de X :
Exemple de calcul :

$P(X=2)=P(\{5\})+P(\{6\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

k	-1	2
$P(X=k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Définitions :

L'espérance de cette loi est le nombre noté E(X) , égal à : $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1+p_2x_2+....p_nx_n}$

Définition:

La variance de cette loi est le nombre noté V(X) défini par :

$$\boxed{V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i-E(X)\right)^2 = p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+p_2\left(x_2-E(X)\right)^2+....p_n\left(x_n-E(X)\right)^2}$$

(Il s'agit de l'espérance de la variable aléatoire X-E(X))

Propriété (formule de Koenig)

La variance est donnée par la formule $V(X)=\underbrace{p_1x_1^2+p_2x_2^2+....p_nx_n^2}_{\text{espérance de la variable aléatoire } X^2} - \underbrace{\left[E(X)\right]^2}_{\text{carré de l'espérance de la variable aléatoire X}}$

Preuve :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i-E(X)\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i^2-2x_iE(X)+\left(E(X)\right)^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2+\sum_{i=1}^{n} p_i\left(-2x_iE(X)\right)+\sum_{i=1}^{n} p_i\left(E(X)\right)^2$$

$$=E\left(X^2\right)-\underbrace{2E(X)}_{\substack{\text{ne dépend pas}\\ \text{de i, donc peut}\\ \text{etre sorti de la}\\ \text{somme}}}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_ix_i}_{=E(X)}+\underbrace{\left(E(X)\right)^2}_{\substack{\text{ne dépend pas}\\ \text{de i, donc peut}\\ \text{etre sorti de la}\\ \text{somme}}}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1}$$

$$=E\left(X^2\right)-2E(X)^2+E(X)^2$$

$$=E\left(X^2\right)-E(X)^2$$

Définition : L'écart-type de cette loi, noté σ , est la racine carrée de la variance : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Propriétés

1) On a toujours $V(X)\geq 0$; donc on peut toujours calculer $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$. De plus on a toujours $\sigma(X)\geq 0$.

2) $\sigma(X)^2=V(X)$, c'est pourquoi $V(X)$ est souvent noté σ^2 .

Exemples :

Dans l'exemple précédent, $E(X)=\frac{2}{3}\times(-1)+\frac{1}{3}\times 2=0$ et $V(X)=\left(\frac{2}{3}\times(-1)^2+\frac{1}{3}\times(2)^2\right)-0^2=2$

D'où $\sigma(X)=\sqrt{2}$.

Fonction de répartition.

Définition :

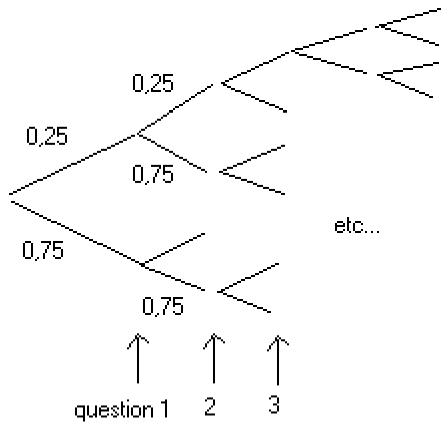
La fonction de répartition de X est la fonction $\begin{array}{llll} F: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & F(x)=P(X\leq x) \end{array}$.

Exemples : Ici, $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<-1 \\ \frac{2}{3} & \text{si} \quad -1\leq x<2 \\ 1 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

8) Loi binomiale

Un candidat doit répondre successivement à 5 questions de la forme QCM. Chaque question comporte quatre réponses, dont une seule est exacte On suppose que le candidat répond au hasard, et que les réponses aux questions sont données de manière indépendante. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses sur les 5 questions. On a donc $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$.

Quelle est la probabilité que le candidat obtienne exactement trois réponses exactes (c'est à dire X=3) ?
Un arbre permettrait de répondre à la question :



Il faut dénombrer le nombre de chemins ayant emprunté 3 branches "bonne réponse" (probabilité 0,25) et 2 branches "réponse fausse" (probabilité 0,75), chacun des chemins étant donc affecté d'une probabilité $(0,25)^3(0,75)^2$

Il y a autant de ces chemins que de mots de 5 lettres contenant 3 lettres V et 2 lettres F, soit $\binom{5}{2}=\binom{5}{3}$

On a donc $\boxed{p(X=3)=\binom{5}{2}\times 0,25^3\times 0,75^2}$

Définitions :
Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues possibles : « Succès » et « Echec ». Si on note p la probabilité d'un succès, alors la probabilité d'un échec est égale à $q=1-p$.

Propriété-définition :
Si on considère une expérience aléatoire, n'ayant que deux issues, un succès de probabilité p, et un échec de probabilité q=1-p , répétée n fois de manière indépendante, et si on note X la variable aléatoire désignant le nombre de succès obtenus au cours de ces n répétitions, on dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre n et p , notée $B(n,p)$

Alors pour tout entier k, tel que $0\leq k\leq n$, $\boxed{p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$.

Propriétés :
Si X suit la loi binomiale $B(n,p)$ alors $\boxed{E(X)=np}$, $\boxed{V(X)=np(1-p)}$ et $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}}$.

9) Autres exemples de lois discrètes

Loi de Poisson $L(\lambda)$

Définition :
Une variable aléatoire X suit la loi de poisson $L(\lambda)$ si et seulement si sa loi de probabilité est définie par :

Pour tout entier naturel k, $\boxed{P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}}$.

Une telle loi intervient dans des expériences aléatoires dont les résultats futurs sont indépendants des résultats passés.

Propriétés : Si X suit la loi de Poisson L(λ) alors $\boxed{E(X)=\lambda}$, $\boxed{V(X)=\lambda}$ et $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{\lambda}}$.

Si n est « grand », si p est « proche » de 0 et si np « n'est pas trop grand » alors on peut approcher la loi binomiale $B(n;p)$ par la loi de Poisson $L(np)$

10) Lois continues

Dans ce paragraphe, on aborde les lois de probabilité continues, dont l'univers est un intervalle $I=\left[a;b\right]$ ou $\left[a;+\infty\right[$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point (Cet univers est donc infini).

Définition :
Soit f une fonction continue, positive sur un intervalle $I=\left[a;b\right]$ (respectivement $\left[a;+\infty\right[$).
On définit sur I une loi de probabilité P dont f est appelée **densité** si :

- $\int_a^b f(t)dt=1$ (respectivement $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt=1$)
- Si c et d désignent les bornes d'un intervalle J, (de la forme $\left[c;d\right]$, $\left[c;d\right[$, $\left]c;d\right]$, $\left]c;d\right[$), avec c et d éléments de I, $\boxed{p(J)=\int_c^d f(t)dt}$. De plus pour tout intervalle $J=\left[c;+\infty\right[$, où c appartient à I, on a $p(J)=1-\int_a^c f(t)dt$

Remarques - Propriétés

- Puisque f est positive sur I, la probabilité de l'intervalle J d'extrémités c et d s'interprète comme l'aire comprise entre la courbe C représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=c$ et $x=d$
- Pour tout élément c , $p\left(\{c\}\right)=\int_c^c f(t)dt=0$
- La probabilité de la réunion d'intervalle disjoints est la somme des probabilités de chacun

Quelques exemples :

Définition : (Loi de durée de vie sans vieillissement)
La loi exponentielle de paramètre λ (réel strictement positif) a pour densité la fonction f_λ définie sur l'intervalle $I=\left[0;+\infty\right[$ par $f_\lambda(t)=\lambda e^{-\lambda t}$.

Remarque : Une telle définition est possible car f_λ est positive sur $\left[0;+\infty\right[$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_\lambda(t)dt=1$

Définition : (Loi uniforme sur [0;1])
La loi uniforme P sur [0;1] modélise le choix d'un nombre réel au hasard dans l'intervalle [0;1].
Pour tous réels c et d de [0;1], tels que $c\le d$, si I désigne l'un des quatre intervalles $\left[c;d\right]$, $\left[c;d\right[$, $\left]c;d\right]$, $\left]c;d\right[$, on a $p(I)=d-c$

PROBABILITES - RESUME

L'**univers** Ω est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Un **événement** A est une partie de Ω

Langage ensembliste	Langage probabiliste	Notation
Ω	Univers des possibles	$\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3;...\omega_n\}$
$\{\omega_i\}\quad i\in[1;n]$	Evénement élémentaire	$\{\omega_i\}\quad i\in[1;n]$
A est une partie de Ω	A est un événement	$A\subset\Omega$
A est vide	L'événement A est impossible	$A=\varnothing$
A est égal à Ω	L'événement A est certain	$A=\Omega$
$C=A\cup B$	C est l'évenement « A **ou** B »	$C=A\cup B$
$C=A\cap B$	C est l'évenement « A **et** B »	$C=A\cap B$
A et B sont disjoints	Les événements A et B sont incompatibles	$A\cap B=\varnothing$
A et B sont complémentaires	Les événements A et B sont contraires	$B=\overline{A}$

Une probabilité p définie sur Ω vérifie :

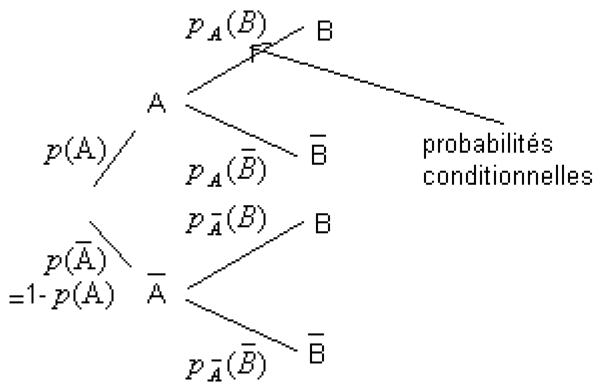
- Pour tout événement A, $\boxed{0\leq p(A)\leq 1}$. On a $\boxed{p(\varnothing)=0}$ et $\boxed{p(\Omega)=1}$
- La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent

En cas d'équiprobabilité, $\boxed{p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$. Pour deux événements A et B, $\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$.

S'ils sont incompatibles $\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$. Pour tout événement A, $\boxed{p(\overline{A})=1-p(A)}$

Si A et B sont deux événement, tels que $p(A)\neq 0$, on définit la **probabilité conditionnelle de l'événement B sachant A** par $\boxed{p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}}$. En version « multiplicative » on a $\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)}$

Les probabilités situés « sur les sous-branches » d'un arbre sont des probabilités conditionnelles



Les événements A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.
Autrement dit, $\boxed{p_A(B)=p(B)}$ ou $\boxed{p_B(A)=p(A)}$, ce qui se traduit en pratique par $\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p(B)}$

Variable aléatoire :

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle **variable aléatoire** toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$. $X(\Omega)$ est alors l'image de Ω. La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est la fonction $\begin{array}{llll} L:X(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ k & \mapsto & L(k)=P(X=k)\end{array}$. Elle est souvent présentée dans un tableau :

valeurs possibles	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
probabilité	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

L'espérance de cette loi est le nombre noté $E(X)$ à égal à : $\boxed{E(X)=p_1x_1+p_2x_2+....p_nx_n}$

La variance de cette loi est le nombre noté V(X) défini par : V(X)=E[X-E(X)] , autrement dit :

$$V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+....p_n(x_n-E(X))^2$$

Propriété (formule de Koenig) $V(X) = \underbrace{p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + ...p_nx_n^2}_{\text{espérance de la variable aléatoire } X^2} - \underbrace{\left[E(X)\right]^2}_{\text{carré de l'espérance de la variable aléatoire X}}$

L'écart-type de cette loi, noté σ, est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

On a toujours $V(X) \geq 0$; donc on peut toujours calculer $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. De plus on a toujours $\sigma(X) \geq 0$.

Loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues possibles : « Succès » et « Echec ». Si on note p la probabilité d'un succès, alors la probabilité d'un échec est égale à $q = 1 - p$.

Si on considère une une épreuve de Bernoulli, de succès de probabilité p, et d'échec de probabilité q=1-p , répétée n fois de manière indépendante, et si on note X la variable aléatoire désignant le nombre de succès obtenus au cours de ces n répétitions, on dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre n et p , notée $B(n,p)$

Alors pour tout entier k, tel que $0 \leq k \leq n$, $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}}$.

Si X suit la loi binomiale $B(n,p)$ alors $\boxed{E(X) = np}$, $\boxed{V(X) = np(1-p)}$ et $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$.

Loi de Poisson $L(\lambda)$

Une variable aléatoire X suit la loi de poisson $L(\lambda)$ si et seulement si sa loi de probabilité est définie par :

Pour tout entier naturel k, $\boxed{P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}$.

Si X suit la loi de Poisson L(λ) alors $\boxed{E(X) = \lambda}$, $\boxed{V(X) = \lambda}$ et $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\lambda}}$.

Si n est « grand », si p est « proche » de 0 et si np « n'est pas trop grand » alors on peut approcher la loi binomiale $B(n; p)$ par la loi de Poisson $L(np)$

Lois continues

Soit f une fonction continue, positive sur un intervalle $I = [a;b]$ (respectivement $[a;+\infty[$).

On définit sur I une loi de probabilité P dont f est appelée **densité** si :

- $\int_a^b f(t)dt = 1$ (respectivement $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$)
- Si c et d désignent les bornes d'un intervalle J, (de la forme $[c;d], [c;d[,]c;d],]c;d[$), avec c et d éléments de I, $\boxed{p(J) = \int_c^d f(t)dt}$. De plus pour tout intervalle $J = [c;+\infty[$, où c appartient à I, on a $p(J) = 1 - \int_a^c f(t)dt$

Loi de durée de vie sans vieillissement :

La loi exponentielle de paramètre λ (réel strictement positif) a pour densité la fonction f_λ définie sur l'intervalle $I = [0;+\infty[$ par $f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Ainsi, pour tout réel $x \geq 0$, $\boxed{p(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt}$

Loi uniforme sur [0;1]

La loi uniforme P sur [0;1] modélise le choix d'un nombre réel au hasard dans l'intervalle [0;1].

Pour tous réels c et d de [0;1], tels que $c \leq d$, si I désigne l'un des quatre intervalles $[c;d]$, $[c;d[$, $]c;d]$, $]c;d[$, on a $p(I) = d - c$

PROBABILITES - EXERCICES

Exercice n°1. (correction)
Dans chacune de situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné.
1) Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard. A : « Les deux élèves sont des filles ».
2) Dans un groupe de suisses et de belges, on discute avec une personne. B : « La personne est un homme belge ».
3) Au restaurant, Luc prend un plat et un dessert. C : « Luc prend une viande et une glace ».
4) A une loterie, Elise achète 3 billets.
D : « L'un des billets au moins est gagnant » , E : « Deux billets au maximum sont gagnants.

Exercice n°2. (correction)
Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :
A : « Tirer une boule blanche ».
B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge ».
C : Tirer une boule noire ou une boule rouge ».
1) A et B sont-ils incompatibles ?
2) B et C sont-ils incompatibles ?
3) Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice n°3. (correction)
Lors d'un jet de deux dés cubiques, on s'intéresse aux événements suivants :
A : « La somme obtenue est au moins égale à 5 ».
B : « La somme obtenue est au plus égale à 5 ».
C : « La somme obtenue est strictement inférieure à 3 ».
1) A et B sont-ils contraires ?
2) $\overline{B}$ et C sont-ils incompatibles ?
3) Traduire par une phrase $\overline{C}$.
4) A et $\overline{C}$ sont-ils incompatibles ?

Exercice n°4. (correction)
On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note :
A l'événement : "La carte choisie est un pique".
B l'événement : "La carte choisie est rouge (cœur ou carreau)".
C l'événement : "La carte choisie est une figure (valet, dame, roi)".
1) Présenter un modèle mathématique décrivant l'expérience aléatoire.
2) Déterminer les probabilités des évènements $A,B,C,A\cap B,B\cap C,A\cup B,A\cup C$.
3) Déterminer la probabilité de l'événement D "La carte choisie n'est ni un pique ni une figure".

Exercice n°5. (correction)
On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.
1) Donner la liste de tous les résultats possibles en notant P pour Pile et F pour Face (exemple : PPF).
2) Donner la probabilité des événements suivants :

A « le tirage ne comporte que des Piles ».
B « le tirage comporte au moins une fois Face ».

Exercice n°6. (correction)
Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.
On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.
1) Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate.
2) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.
3) Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate.
4) Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

Exercice n°7. (correction)
Lors d'un référendum, deux questions étaient posées.
65 % des personnes ont répondu « oui » à la première question, 51 % ont répondu « oui » à la seconde question, et 46 % ont répondu « oui » aux deux questions.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « oui » à l'une ou l'autre des questions ?
2) Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « non » aux deux questions ?

Exercice n°8. (correction)

On lance un dé à 6 faces. On note p_i la probabilité de sortie de la face marquée i. Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités de sortie des faces sont : $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}1$; $p_5 = 0{,}15$.

Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6 ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exercice n°9. (correction)

On lance un dé à 6 faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle.

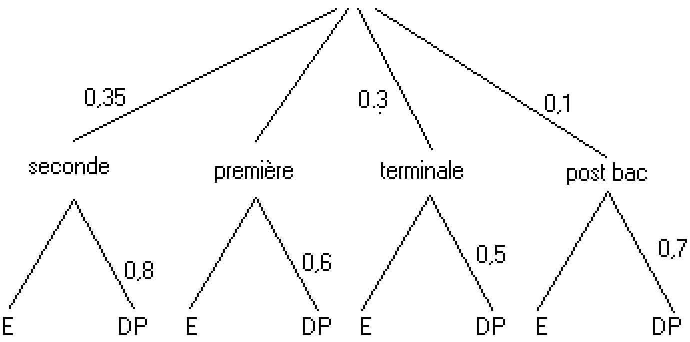
Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.

Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice n°10. (correction)

Dans un lycée, quel que soit le niveau, un élève peut être externe ou demi-pensionnaire.

L'arbre ci-contre indique la répartition selon le niveau et la qualité de l'élève (E: externe ; DP: demi-pensionnaire)



1) Recopier et compléter cet arbre.
2) a) Déterminer le pourcentage d'élèves externes dans ce lycée.

b) Déterminer la part des Terminales parmi les externes.

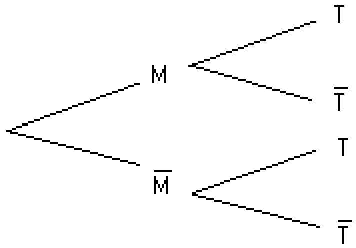
Exercice n°11. (correction)

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?
4) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



Exercice n°12. (correction)

On dispose de deux urnes u_1 et u_2. L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire . L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_2. (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2) On a tiré une boule blanche. Calculer le probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1.

Exercice n°13. (correction)

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

a) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$

b) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

c) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice n°14. (correction)

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule

Si elle est rouge, il gagne 10 € , si elle est jaune, il perd 5 €, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 €, sinon il perd 4 €.

1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.

2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).

a) Etablir la loi de probabilité de la variable X

b) Calculer l'espérance de X

3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Exercice n°15. (correction)

On considère un dé rouge et un dé vert, cubiques, équilibrés.

Le dé rouge comporte : deux faces numérotées –1 ; deux faces numérotées 0 ; -deux faces numérotées 1.

Le dé vert comporte : une face numérotée 0;trois faces numérotées 1;deux faces numérotées 2.

On lance simultanément les deux dés. On note X la somme des points obtenus.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Définir F, fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique

Exercice n°16. (correction)

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue choisie et de l'activité sportive choisie.

On choisit un élève au hasard.

	Tennis	Equitation	Voile
Anglais	45	18	27
Allemand	33	9	18

1) Les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » sont-ils indépendants ?

2) Les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont-ils indépendants ?

Exercice n°17. (correction)

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se répartissent en 2003 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante. Nous savons de plus que : 37% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

25% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante.

21% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques et ont obtenu le baccalauréat.

32,5% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité SES et ont obtenu le baccalauréat. De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante, 72,5% ont obtenu le baccalauréat. On interroge un candidat pris au hasard. On note :

M l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques » ;

S l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales » ;

L l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité langue vivante » ;

R l'événement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».

On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats seront arrondis au millième.

1) Traduire en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.

2) a) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de SES.

b) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.

3) Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au baccalauréat ?

4) Ce candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?

5) Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6%.

6) On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.

a) Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit reçu ?

b) Quelle est la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus ?

Exercice n°18. (correction)

On utilise deux pièces de monnaie : l'une pipée, de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit $1/4$; l'autre normale dont la probabilité d'obtenir pile est $1/2$ à chaque lancer.

1) On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité $1/2$ d'être prise)

a) Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?

b) On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile en faisant trois lancers avec la pièce choisie ?

2) Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard qu'on lance (chacune des deux pièces a donc à chaque fois une probabilité $1/2$ d'être lancée) : déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile

3) On lance les deux pièces ensembles : quelle est la probabilité d'obtenir le même résultat pour les deux pièces ?

Exercice n°19. (correction)

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions. Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte. Un candidat se présente et répond à toutes les questions *au hasard*. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.

Exercice n°20. (correction)

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « Pile » et un côté « Face ». La troisième est truquée et possède deux côtés « Face ».

On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les évènements suivants:

B : la pièce prise est normale. $\overline{B}$: la pièce prise est truquée.

P : on obtient « Pile » au premier lancer. F_n : on obtient « Face » pour les n premiers lancers.

1) a) Quelle est la probabilité de l'évènement B ?

b) Quelle est la probabilité de l'évènement P sachant que B est réalisé ?

2) Calculer la probabilité de l'événement $P \cap B$, puis de l'évènement $P \cap \overline{B}$.

En déduire la probabilité de l'évènement P.

3) Calculer la probabilité de l'évènement $F_n \cap B$ puis de l'évènement $F_n \cap \overline{B}$.

En déduire la probabilité de l'évènement F_n .

Exercice n°21. (correction)

Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique.

60 % des élèves pratiquent un instrument à cordes (C) . 45 % des élèves pratiquent un instrument à vent (V)

10 % des élèves pratiquent un instrument à cordes et vent.

1) On choisit un élève au hasard dans le conservatoire.
a) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique au moins un des instruments considérés »
b) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique un et un seul des instruments considérés »
2) On choisit au hasard un élève pratiquant un instrument C. Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique un instrument V ?
3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves. On suppose que le nombre d'élèves du conservatoire est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un instrumentiste du type donné soit constante au cours du sondage.
a) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un des élèves choisis pratique un instrument C ?
b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,999$

Exercice n°22. (correction)

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher, de 3 sortes : 4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ». Un joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes.

Exercice n°23. (correction)

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités :
a) De ne tirer que 3 jetons verts ;
b) De ne tirer aucun jeton vert
c) De tirer au plus 2 jetons verts ;
d) De tirer exactement 1 jeton vert.
2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

PROBABILITES – CORRECTION

Exercice n°1 (énoncé)

1) L'événement $\overline{A}$ est « au moins un des deux élèves est un garçon ».

2) L'événement $\overline{B}$ est « La personne est soit une femme, soit un suisse ».

3) L'événement $\overline{C}$ est « Luc ne prend pas de viande ou ne prend pas de glace ».

4) L'événement $\overline{D}$ est « aucun billet n'est gagnant ».

5) L'événement $\overline{E}$ est « les trois billets sont gagnants ».

Exercice n°2 (énoncé)

1) A et B sont incompatibles car une boule ne peut être simultanément blanche et non blanche.
2) B et C ne sont pas incompatibles car le tirage d'une boule noire les réalise simultanément.

3) L'événement $\overline{A}$ est « tirer une boule noire ou rouge ».

4) L'événement $\overline{B}$ est « tirer une boule blanche ou rouge ».

Exercice n°3 (énoncé)

1) A et B ne sont pas contraires car une somme égale à 5 les réalise simultanément.

2) $\overline{B}$ et C sont incompatibles car la somme ne peut être simultanément strictement supérieure à 5 (événement $\overline{B}$) et strictement inférieure à 3 (événement C).

3) L'événement $\overline{C}$ est « La somme est supérieure ou égale à 3 ».

4) A et $\overline{C}$ ne sont pas incompatibles car ils sont simultanément réalisés par une somme supérieure ou égale à 5.

Exercice n°4 (énoncé)

1) On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 32 cartes du jeu. Ainsi $Card(\Omega)=32$.

Il y a équiprobabilité des tirages de cartes. Ainsi

2) $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$, $p(B)=\dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}$, $p(C)=\dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)}=\dfrac{3\times 4}{32}=\dfrac{3}{8}$,

$p(A\cap B)=0$ car une carte ne peut être simultanément rouge et pique,

$$p(B\cap C)=\frac{Card(B\cap C)}{Card(\Omega)}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}.$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-0=\frac{3}{4}.$$

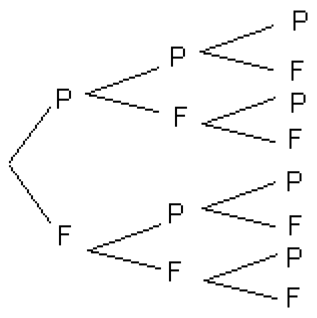
$$p(A\cup C)=p(A)+p(C)-p(A\cap C)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{32}=\frac{17}{32}.$$

3) On cherche $p(\overline{A\cup C})=1-p(A\cup C)=1-\dfrac{17}{32}=\dfrac{15}{32}$.

Remarque : on a $p\left(\overline{A\cup C}\right)=p\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)$.

Exercice n°5 (énoncé)

1) A l'aide d'un arbre comme ci-contre,



On peut lister $\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$.

D'où $Card(\Omega)=8$.

2) Les tirages étant équiprobables, on a $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{1}{8}$ (seul le tirage PPP convient).

Enfin, on remarque que $B=\overline{A}$ donc $p(B)=p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$.

Exercice n°6 (énoncé)

Le tableau suivant permet de dénombrer les différentes catégories :

	Cravate (événement C)	Pas de Cravate (événement $\overline{C}$)	Total
Yeux Bleus (événement B)	50	35	85
Yeux non bleus (événement $\overline{B}$)	70	95	165
Total	120	130	250

On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 250 personnes. Ainsi $Card(\Omega)=250$.

Il y a équiprobabilité des choix de personnes. Ainsi

1) $p(C)=\dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)}=\dfrac{120}{250}=\dfrac{12}{25}$, 2) $p(B\cap C)=\dfrac{Card(B\cap C)}{Card(\Omega)}=\dfrac{50}{250}=\dfrac{1}{5}$,

3) $p(B\cup C)=p(B)+p(C)-p(B\cap C)=\dfrac{85}{250}+\dfrac{120}{250}-\dfrac{50}{250}=\dfrac{155}{250}=\dfrac{31}{50}$ (on pouvait aussi directement écrire $p(B\cup C)=\dfrac{Card(B\cup C)}{Card(\Omega)}=\dfrac{50+70+35}{250}=\dfrac{155}{250}=\dfrac{31}{50}$).

3) $p\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)=p\left(\overline{B\cup C}\right)=1-p(B\cup C)=1-\dfrac{31}{50}=\dfrac{19}{50}$.

Exercice n°7 (énoncé)

Si on note A l'événement « la personne a répondu oui à la première question » et B l'événement « la personne a répondu oui à la deuxième question », l'énoncé nous fournit $p(A)=0,65$, $p(B)=0,51$ et $p(A\cap B)=0,46$.

1) On calcule $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0,65+0,51-0,46=0,7$.

2) On calcule $p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)=1-0,7=0,3$.

Exercice n°8 (énoncé)

Si on note p_6 la probabilité d'apparition du chiffre 6, la somme des probabilités des événements élémentaires valant 1, on a $p_6=1-(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5)=1-0,85=0,15$.

L'événement A « obtenir un nombre pair » étant $A=\{2;4;6\}$, on a $p(A)=p_2+p_4+p_6=0,2+0,1+0,15=0,45$.

Il ne fallait surtout pas écrire $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ car **il n'y a pas équiprobabilité des faces de dés.**

Exercice n°9 (énoncé)

Si on note p la probabilité d'apparition du chiffre 1, les probabilités d'apparition des autres faces sont respectivement égales à $2p,3p,4p,5p,6p$, puisque proportionnelles au numéro de chaque face.

Puisque la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1, on a $p+2p+3p+4p+5p+6p=1$, donc $21p=1\Leftrightarrow p=\dfrac{1}{21}$. On en déduit donc :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\dfrac{1}{21}$	$\dfrac{2}{21}$	$\dfrac{3}{21}$	$\dfrac{4}{21}$	$\dfrac{5}{21}$	$\dfrac{6}{21}$

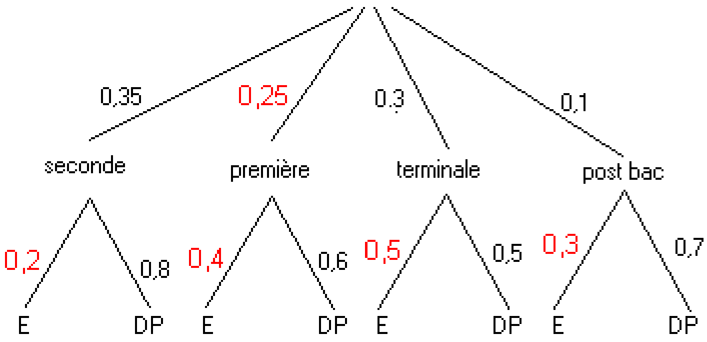
Et ainsi , l'événement A « obtenir un nombre pair » étant $A=\{2;4;6\}$, on a $p(A)=\dfrac{2}{21}+\dfrac{4}{21}+\dfrac{6}{21}=\dfrac{12}{21}$.

Il ne fallait surtout pas écrire $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ car **il n'y a pas équiprobabilité des faces de dés.**

Exercice n°10 (énoncé)

L'arbre nous renseigne sur le fait que « 35 % des élèves du lycée sont en seconde, et parmi ces élèves de seconde, 80 % sont demi-pensionnaires, etc… ».

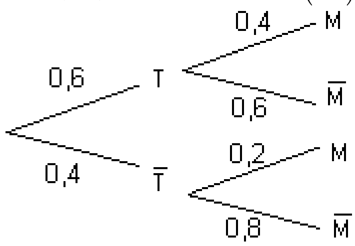
1) La somme des poids figurant sur les arêtes au départ de chaque « nœud » doit être égale à 1 (coefficients multiplicateurs traduisant des pourcentages). On obtient ainsi l'arbre :



2) Les élèves de seconde externes représentent une fraction de l'effectif total égale à $0,35\times 0,2=0,07$, soit 7 %.
Les externes représentent donc une fraction égale à $0,35\times 0,2+0,25\times 0,4+0,3\times 0,5+0,1\times 0,3=0,35$, soit 35 %.
3) Sur 1000 élèves, 350 sont donc externes. Les élèves de terminale externes représentent $1000\times 0,3\times 0,5=150$ élèves, soit une part égale à $\dfrac{150}{350}\times 100\approx 43\%$ à 1% près..

Exercice n°11 (énoncé)

On note T l'événement « le client achète un téléviseur » et M l'événement « le client achète un magnétoscope ».
L'énoncé fournit $p(T)=0,6$ (donc $p(\overline{T})=1-0,6=0,4$), $p_T(M)=0,4$ (donc $p_T(\overline{M})=1-0,4=0,6$), et $p_{\overline{T}}(M)=0,2$ (donc $p_{\overline{T}}(\overline{M})=1-0,2=0,8$,
ce que l'on peut traduire par l'arbre de probabilités



1) En appliquant la formule de définition d'une probabilité conditionnelle, dans sa « version multiplicative »,
$p_T(M)=\dfrac{p(T\cap M)}{p(T)}\Leftrightarrow p(T\cap M)=p(T)\times p_T(M)=0,6\times 0,4=0,24$

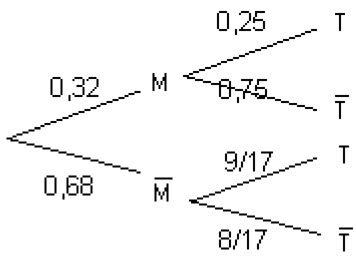
2) En appliquant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(M)&=p(T\cap M)+p(\overline{T}\cap M)\\ &=p(T)\times p_T(M)+p(\overline{T})\times p_{\overline{T}}(M)\\ &=0,6\times 0,4+0,4\times 0,2=0,32\end{aligned}$$

3) On demande $p_M(T)=\dfrac{p(M\cap T)}{p(M)}=\dfrac{0,6\times 0,4}{0,32}=0,75$

4) Puisque $p(M)=0,32$, on a $p(\overline{M})=1-0,32=0,68$. Puisque $p_M(T)=0,75$, on a $p_M(\overline{T})=1-0,75=0,25$
On calcule de la même manière qu'à la question 3),
$p_{\overline{M}}(T)=\dfrac{p(\overline{M}\cap T)}{p(\overline{M})}=\dfrac{0,6\times 0,6}{0,68}=\dfrac{0,36}{0,68}=\dfrac{9}{17}$, donc $p_{\overline{M}}(\overline{T})=1-\dfrac{9}{17}=\dfrac{8}{17}$.

On peut donc « inverser » l'arbre de probabilité :



Exercice n°12 (énoncé)

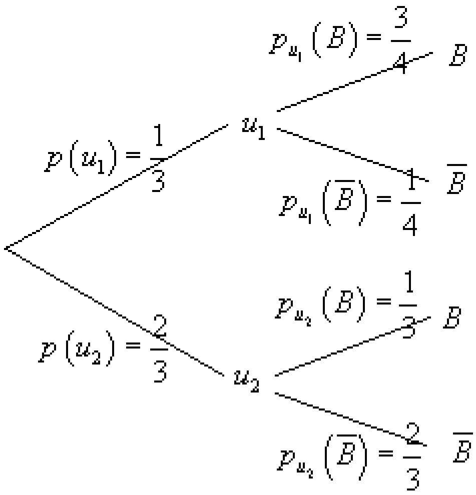
Notons Ω l'ensemble des résultats possibles du jet de dé. On a donc $Card(\Omega)=6$.

Notons u_1 l'événement « Le tirage s'effectue dans l'urne u_1 » et u_2 l'événement « Le tirage s'effectue dans l'urne u_2 ».
Notons B l'événement « obtenir une boule blanche »

La répartition des boules blanches et noires données dans l'énoncé nous fournit les probabilités : $p_{u_1}(B)=\frac{3}{4}$ donc $p_{u_1}(\overline{B})=\frac{1}{4}$, ainsi que $p_{u_2}(B)=\frac{1}{3}$ et $p_{u_2}(\overline{B})=\frac{2}{3}$

Enfin, puisqu'il y a équiprobabilité dans les résultats du lancer de dé, $p(u_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $p(u_2)=\frac{2}{3}$.

On peut résumer cette situation par l'arbre de probabilités suivant :



1) En appliquant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p(B)&=p(u_1\cap B)+p(u_2\cap B)\\&=p(u_1)\times p_{u_1}(B)+p(u_2)\times p_{u_2}(B)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{2}{9}=\frac{17}{36}\end{aligned}$$

2) On demande $p_B(u_1)$. Puisque $p(B)\neq 0$, on peut appliquer la formule de définition de la probabilité conditionnelle de l'événement u_1 conditionné par B : $p_B(u_1)=\frac{p(B\cap u_1)}{p(B)}=\frac{p(u_1\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}{17/36}=\frac{1}{4}\times\frac{36}{17}=\frac{9}{17}$

Exercice n°13 (énoncé)

Notons V l'événement « être vacciné » et M l'évément « être malade »

L'énoncé fournit $p(V)=\frac{1}{4}$ donc $p(\overline{V})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. De plus $p_M(\overline{V})=4\times p_M(V)$. Puisque $p_M(V)+p_M(\overline{V})=1$, on déduit $p_M(V)=\frac{1}{5}$ et $p_M(\overline{V})=\frac{4}{5}$. Enfin l'énoncé indique que $p_V(M)=\frac{1}{12}$ donc $p_V(\overline{M})=\frac{11}{12}$.

a) **La formule des probabilités totales** appliquée au système complet d'événements $\{V;\overline{V}\}$, permet de calculer :

$$p(M)=p(V\cap M)+p(\overline{V}\cap M)=p(V)\times p_V(M)+p(\overline{V})\times p_{\overline{V}}(M)$$

Puisque $p_{\overline{V}}(M)=\frac{p(M\cap\overline{V})}{p(\overline{V})}=\frac{p(M)\times p_M(\overline{V})}{3/4}=\frac{p(M)\times 4/5}{3/4}=p(M)\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{16}{15}p(M)$, on se retrouve avec l'équation $p(M)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}+\frac{3}{4}\times\frac{16}{15}p(M)\Leftrightarrow p(M)-\frac{12}{15}p(M)=\frac{1}{48}\Leftrightarrow p(M)\left(1-\frac{12}{15}\right)=\frac{1}{48}$ d'où l'on tire :

$$\boxed{p(M)=\frac{1}{48}\times\frac{15}{3}=\frac{5}{48}}$$

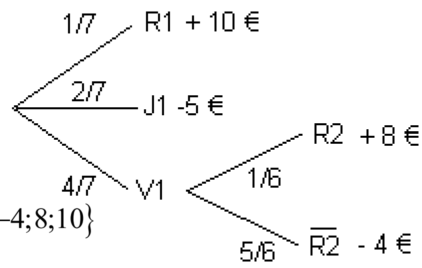
b) Du coup, on calcule $\boxed{p_{\overline{V}}(M)=\frac{16}{15}p(M)=\frac{16}{15}\times\frac{5}{48}=\frac{1}{9}}$

c) D'après les calculs précédents, en moyenne, 1 individu sur 9 non vaccinés tombe malade, contre 1 individu sur 12 vaccinés….

Exercice n°14 (énoncé)

On désigne par R_1 l'événement « la boule tirée au 1er tirage est rouge », R_2 l'événement « la boule tirée au 2ème tirage est rouge », et ainsi de suite avec les autres couleurs. Par équiprobabilité , on a $p(R_1)=\frac{1}{7}$, $p(J_1)=\frac{2}{7}$ et $p(V_1)=\frac{4}{7}$ En cas de deuxième tirage, l'urne ne contient plus que 6 boules, dont une rouge, deux jaunes et **trois** vertes, ce qui permet d'affirmer que $p_{V_1}(R_2)=\frac{1}{6}$ donc $p_{V_1}\left(\overline{R_2}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

1) L'arbre de probabilités (et les gains qui sont associés au différents événements) est donc →



2) a) X peut prendre quatre valeurs distinctes : -5 , -4 , +8 , 10 (on note $X(\Omega)=\{-5;-4;8;10\}$

On détermine les probabilités :

$p(X=-5)=p(J_1)=\frac{2}{7}$ $\qquad$ $p(X=-4)=p\left(V_1\cap\overline{R_2}\right)=p(V_1)\times p_{V_1}\left(\overline{R_2}\right)=\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{21}$

$p(X=+8)=p(V_1\cap R_2)=p(V_1)\times p_{V_1}(R_2)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{21}$ $\qquad$ $p(X=+10)=p(R_1)=\frac{1}{7}$

Les résultats présentés dans un tableau sont :

x_i	-5	-4	8	10
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

b) Par définition, $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p(X=x_i)$

$=(-5)\times p(X=-5)+(-4)\times p(X=-4)+8\times p(X=8)+10\times p(X=10)$

$=-5\times\frac{2}{7}-4\times\frac{10}{21}+8\times\frac{2}{21}+10\times\frac{1}{7}=-\frac{24}{21}=-\frac{8}{7}$

3) Notons a le gain correspondant à l'événement $V_1\cap R_2$.

On a donc $E(X)=-5\times\frac{2}{7}-4\times\frac{10}{21}+a\times\frac{2}{21}+10\times\frac{1}{7}=\frac{2a-40}{21}$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $E(X)=0\Leftrightarrow 2a-40=0\Leftrightarrow a=20€$

Exercice n°15 (énoncé)

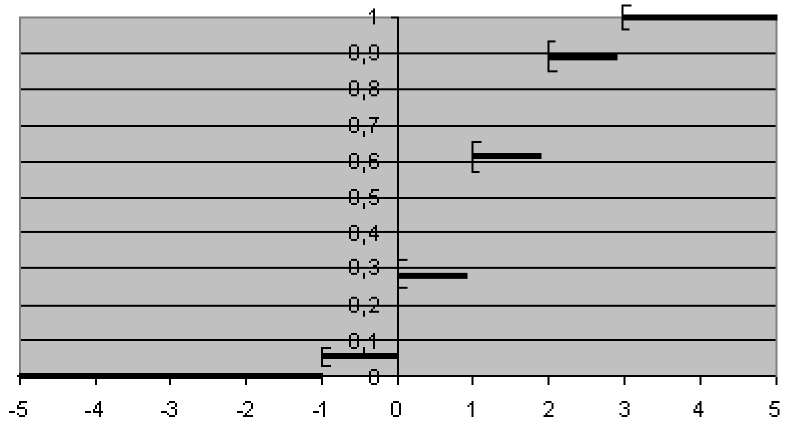
On peut consigner les résultats dans le tableau suivant :

Dé vert / Dé Rouge	0	1	1	1	2	2
-1	-1	0	0	0	1	1
-1	-1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	2	2
0	0	1	1	1	2	2
1	1	2	2	2	3	3
1	1	2	2	2	3	3

1) Si on note X la somme des points obtenus, on a donc $X(\Omega)=\{-1;0;1;2;3\}$, avec

x_i	-1	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$	$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$	$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

2) On définit ainsi la fonction de répartition de X par : $F(x)=p(X\le x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<-1\\ \frac{1}{18} \text{ si } -1\le x<0\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{5}{18} \text{ si } 0\le x<1\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{11}{18} \text{ si } 1\le x<2\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}=\frac{8}{9} \text{ si } 2\le x<3\\ \frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}+\frac{1}{9}=1 \text{ si } 3\le x\end{cases}$



Exercice n°16 (énoncé)

Après avoir complété le tableau des effectifs :

	Tennis (T)	Equitation (E)	Voile (V)	Total
Anglais (A)	45	18	27	90
Allemand (D)	33	9	18	60
Total	78	27	45	150

On choisit un élève au hasard et on note On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 150 élèves . Ainsi $Card(\Omega)=32$. Il y a équiprobabilité dans le choix des élèves. Ainsi pour tout événement A, $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

1) On calcule séparément :

$p(D\cap T)=p(T)\times p_T(D)=\dfrac{78}{150}\times\dfrac{11}{26}=\dfrac{11}{50}$ et $p(T)\times p(D)=\dfrac{78}{150}\times\dfrac{60}{150}=\dfrac{26}{50}\times\dfrac{20}{50}=\dfrac{13}{25}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{26}{125}$

Puisque $p(D\cap T)\neq p(T)\times p(D)$, on peut conclure que les événements « étudier l'allemand » et « pratiquer le tennis » ne sont pas indépendants

2) On calcule séparément :

$p(A\cap V)=p(V)\times p_V(A)=\dfrac{45}{150}\times\dfrac{27}{45}=\dfrac{27}{150}=\dfrac{9}{50}$ et $p(A)\times p(V)=\dfrac{90}{150}\times\dfrac{45}{150}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{50}$

Puisque $p(A\cap V)=p(A)\times p(V)$, on peut conclure que les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer la voile » sont indépendants

Exercice n°17 (énoncé)

Le début de l'exercice est l'archétype classique d'un exercice de probabilités conditionnelles.

1) En utilisant les notations de l'énoncé, nous avons $p(M)=0,37$, $p(L)=0,25$, $p(M\cap R)=0,21$, $p(S\cap R)=0,325$ et $p_L(R)=0,725$

2) a) On calcule $p(S)=1-\big(p(M)+p(L)\big)=1-(0,37+0,25)=1-0,62=0,38$

b) On calcule $p(L\cap R)=p(L)\times p_L(R)=0,25\times 0,725=0,18125\approx 0,181$ arrondi au millième

3) On calcule $p(L\cap\overline{R})=p(L)\times p_L(\overline{R})=0,25\times\big(1-p_L(R)\big)=0,25\times(1-0,725)=0,06875\approx 0,069$ arrondi au millième

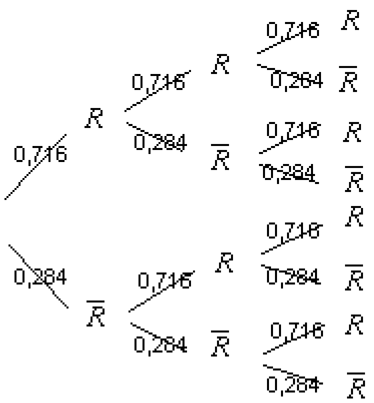
4) On calcule $p_M(\overline{R})=\dfrac{p(M\cap\overline{R})}{p(M)}=\dfrac{p(M\cap\overline{R})}{0,37}$ arrondi au millième. Puisque $p(M)=0,37$ et $p(M\cap R)=0,21$, on calcule $p_M(R)=\dfrac{p(M\cap R)}{p(M)}=\dfrac{0,21}{0,37}=\dfrac{21}{37}$ et donc $p_M(\overline{R})=1-p_M(R)=1-\dfrac{21}{37}=\dfrac{16}{37}\approx 0,432$ arrondi à 10^{-3}

5) En appliquant la formule des probabilités totales,

$p(R)=p(L\cap R)+p(S\cap R)+p(M\cap R)\approx 0,181+0,325+0,21\approx 0,716$, d'où la réponse

6) On répète 3 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à choisir un élève qui peut avoir été reçu (issue R que nous appellerons SUCCES, de probabilité 0,716) ou qui peut avoir échoué (issue $\overline{R}$ que nous appellerons ECHEC, de probabilité 1-0,716=0,284). Le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre 3 et 0,716.

On peut matérialiser cette situation par un arbre :



a) L'événement contraire de l'événement « au moins un des trois candidats est reçu » est l'événement « les trois candidats ne sont pas reçus », de probabilité $0,284^3$. L'événement considéré a donc pour probabilité $1-0,284^3 \approx 0,977$ arrondi au millième

b) Pour calculer la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus, soit on compte le nombre de chemins répondant à cette situation sur l'arbre (on en compte trois : $RR\overline{R}$, $R\overline{R}R$ et $\overline{R}RR$, chacun d'eux représentant une probabilité égale à $0,716^2 \times 0,284^1$), soit on applique la formule donnant le nombre de succès dans une situation binomiale, pour aboutir au calcul :

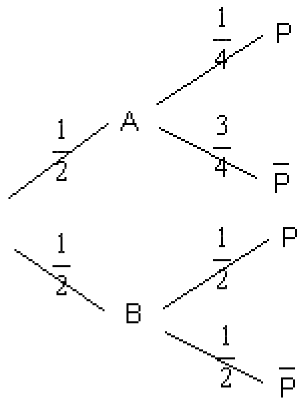
$$\begin{array}{c}\text{nombre de répétitions}\\ \text{nombre de succès}\end{array}\binom{3}{2} \times \underbrace{0,716}_{\substack{\text{probabilité}\\ \text{d'un succès}}}^{\overset{\substack{\text{nombre}\\ \text{de succès}}}{2}} \times \underbrace{0,284}_{\substack{\text{probabilité}\\ \text{d'un échec}}}^{\overset{\substack{\text{nombre}\\ \text{d'échec}}}{1}} = 3\times 0,716^2 \times 0,284^1 \approx 0,437 \text{ arrondi au millième}$$

Exercice n°18 (énoncé)

Notons A l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce truquée » et B l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce équilibrée ». L'énoncé nous fournit $p(A)=p(B)=\frac{1}{2}$.

1) (a) Notons P l'événement « obtenir Pile lors d'un lancer ». L'énoncé nous fournit $p_A(P)=\frac{1}{4}$ donc $p_A(\overline{P})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; et $p_B(P)=\frac{1}{2}$ donc $p_B(\overline{P})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Ceci peut se traduire par l'arbre de probabilités

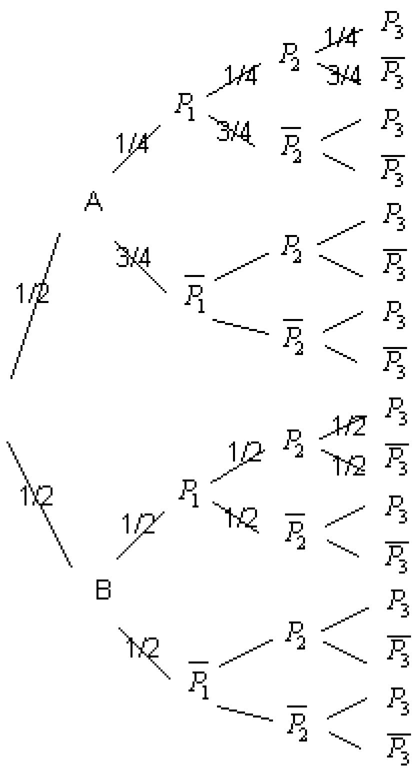


La formule des probabilités totales appliqué au système complet $\{A;B\}$ fournit :

$$\boxed{p(P)=p(A\cap P)+p(B\cap P)=p(A)\times p_A(P)+p(B)\times p_B(P)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}}$$

(b) On demande $\boxed{p_P(A)=\frac{p(A\cap P)}{p(P)}=\frac{1/2\times 1/4}{3/8}=\frac{1}{8}\times\frac{8}{3}=\frac{1}{3}}$

(c) Notons P_1,P_2,P_3 les probabilités d'obtenir Pile respectivement aux tirages n°1,2 et 3. On peut ainsi dresser l'arbre de probabilité :



Raisonnons avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », qui est « obtenir trois fois face ». D'après la formule des probabilités totales, ce dernier événement a pour probabilité :

$$p(F_1\cap F_2\cap F_3)=p(A\cap F_1\cap F_2\cap F_3)+p(B\cap F_1\cap F_2\cap F_3)$$
$$=p(A)\times p_A(F_1\cap F_2\cap F_3)+p(B)\times p_B(F_1\cap F_2\cap F_3)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{27}{128}+\frac{1}{16}=\frac{35}{128}$$

La probabilité d'obtenir au moins une fois pile avec une pièce choisie est donc égale à $\boxed{1-\frac{35}{128}=\frac{93}{128}}$

2) La situation est cette fois ci différente de la question 1) (c) car on retire une pièce au hasard avant chaque lancer. On répète ainsi 3 fois consécutivement et

de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli décrite dans la question 1) (a), qui admet deux issues : $p(P)=\frac{3}{8}$ donc $p(\overline{P})=\frac{5}{8}$. Le nombre de succès (obtention de Pile) sur les trois répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre $p(P)=\frac{3}{8}$ et $n=3$. On raisonne encore une fois avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », qui est « obtenir trois fois face », de probabilité $\left(p(\overline{P})\right)^3=\left(\frac{5}{8}\right)^3=\frac{125}{512}$. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile sur les trois lancers (et choix) est donc $\boxed{1-\frac{125}{512}=\frac{387}{512}}$

3) Les résultats des deux pièces sont indépendants l'un de l'autre. Si on note P_A l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce truquée » et P_B l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce équilibrée», l'événement cherché aura donc une probabilité égale à : $\boxed{p(P_A\cap P_B)+p(F_A\cap F_B)=p(P_A)\times p(P_B)+p(F_A)\times p(F_B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}$

Exercice n°19 (énoncé)

1) On répète 10 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à répondre à une question en choisissant au hasard et de manière équiprobable une réponse parmi les quatre proposées. Chaque épreuve a donc une probabilité de réussite égale à $p=0,25$ et une probabilité 'échec égale à $q=1-p=1-0,25=0,75$. Le nombre de succès X parmi les 10 répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre 10 et 0,25.

2) On a ainsi :

$p(X=8)=\binom{10}{8}0,25^8\times 0,75^2=\frac{10\times 9}{2}\times 0,25^8\times 0,75^2$, $p(X=9)=\binom{10}{9}0,25^9\times 0,75^1=10\times 0,25^9\times 0,75^1$ et enfin $p(X=10)=\binom{10}{10}0,25^{10}\times 0,75^0=0,25^{10}$. L'événement considéré a donc pour probabilité la somme de ces trois derniers nombres.

Exercice n°20 (énoncé)

1) a) Les choix de pièces dans l'urne étant équiprobables, $p(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{2}{3}$

b) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » vaut $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $p_B(P)=\frac{1}{2}$

2) On calcule $p(P\cap B)=p(B)\times p_B(P)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

Puisque $p(B)=\frac{2}{3}$, alors $p(\overline{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Si l'événement $\overline{B}$ est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » est nulle, puisque la pièce truquée possède «deux « faces ». Ainsi $p_{\overline{B}}(P)=0$. On en déduit $p(P\cap\overline{B})=p(\overline{B})\times p_{\overline{B}}(P)=\frac{1}{3}\times 0=0$.

En utilisant la formule des probabilités totales, pusique le système $(B,\overline{B})$ est un système complet d'événement, on obtient $p(P)=p(P\cap B)+p(P\cap\overline{B})=\frac{1}{3}$

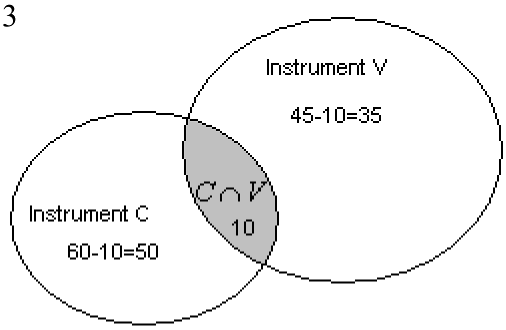
3) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, donc $p_B(F_n)=\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, et ainsi

$p(F_n\cap B)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Si l'événement $\overline{B}$ est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » vaut 1 à chaque lancer, donc la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers vaut 1, c'est-à-dire $p_{\overline{B}}\left(F_n\right)=1$ et ainsi $p\left(F_n \cap \overline{B}\right)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$

En utilisant la formule des probabilités totales, puisque le système $\left(B,\overline{B}\right)$ est un système complet d'événement, on obtient $p\left(F_n\right)=p\left(F_n \cap B\right)+p\left(F_n \cap \overline{B}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}$

Exercice n°21 (énoncé)



L'énoncé nous fournit $p(C)=0,6$, $p(V)=0,45$ et $p(C\cap V)=0,1$

1) On calcule $p(C\cup V)=p(C)+p(V)-p(C\cap V)=0,6+0,45-0,1=0,95$

(on aurait pu aussi raisonner avec les effectifs ramenés à 100 élèves, conformément au diagramme ci-contre)

2) a) On calcule $p(C\cup V)-p(C\cap V)=0,95-0,1=0,85$

(on aurait pu aussi raisonner avec les effectifs ramenés à 100 élèves, conformément au diagramme ci-dessus)

b) L'énoncé (ou le diagramme) fournit $p_C(V)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

3) On répète n fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à choisir un élève qui peut pratiquer un instrument C (SUCCES, de probabilité 0,6) ou ne pas pratiquer un instrument C (issue $\overline{C}$ que nous appellerons ECHEC, de probabilité 1-0,6=0,4). Le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre n et 0,6.

a) L'événement contraire de l'événement « au moins un des élèves choisis pratique un instrument C » est l'événement « les n élèves choisis ne pratiquent pas un instrument C » de probabilité $0,4^n$. Ainsi $p_n=1-0,4^n$

b)

$p_n \geq 0,999 \Leftrightarrow 1-0,4^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,4^n \leq 0,001$

$\Leftrightarrow 0,4^n \leq 0,001$ car la fonction ln est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$

$\Leftrightarrow n\ln(0,4)\leq \ln(0,001)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,4)}$ car $\ln(0,4)<0$

$\Leftrightarrow n \geq 7,53$ à 10^{-2} près

Puisque n est entier, on déduit donc $n\geq 8$

Exercice n°22 (énoncé)

L'univers est constitué de l'ensemble des combinaisons de 2 éléments pris parmi 10, d'où $Card(\Omega)=\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$.

Notons A l'événement « d'obtenir deux bulletins de sortes différentes ».

2 raisonnements s'offrent à nous :

- Ou bien on décide de déterminer $Card(A)$. Il y a trois possibilités (1 bulletin « oui » et 1 bulletin « non », 1 bulletin « oui » et 1 bulletin « blanc », ou 1 bulletin « non » et 1 bulletin « blanc ») donc $Card(A)=\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{3}{1}\binom{3}{1}=4\times 3+4\times 3+3\times 3=33$, et ainsi $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{33}{45}=\frac{11}{15}$

- Ou bien on raisonne avec l'événement contraire $\overline{A}$ qui est « obtenir deux bulletins identiques ». Il y a trois possibilités (deux bulletins « oui », deux bulletins « non » , deux buleltins « blanc », donc $Card\left(\overline{A}\right)=\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{2}=\frac{4\times 3}{2}+\frac{3\times 2}{2}+\frac{3\times 2}{2}=6+3+3=12$, d'où $p\left(\overline{A}\right)=\frac{Card\left(\overline{A}\right)}{Card(\Omega)}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$ et donc $p(A)=1-p\left(\overline{A}\right)=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$

Les deux méthodes fournissent le même résultat !

Exercice n°23 (énoncé)

1) Tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 9. Il y a $A_9^3 = 504$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $\boxed{p(A) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $\boxed{p(B) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{1}{21}}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1ère méthode : $p(C) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{42} = \boxed{\frac{37}{42}}$

2ème méthode

$$p(C) = \frac{\overbrace{A_9^3}^{\text{Ne tirer aucun vert}} + \overbrace{3 \times A_5^1 \times A_4^2}^{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :} \\ \text{- choix de la place du jeton vert} \\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}} + \overbrace{3 \times A_5^2 \times A_4^1}^{\text{Tirer exactement 2 verts}}}{A_9^3} = \frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D) = \frac{3 \times A_5^2 \times A_4^1}{A_9^3} = \boxed{\frac{5}{14}}$

2) Tirages simultanés de 3 jetons parmi 9. Il y a $C_9^3 = 84$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $\boxed{p(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $\boxed{p(B) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1ère méthode : $p(C) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{42} = \boxed{\frac{37}{42}}$

2ème méthode

$$p(C) = \frac{\overbrace{C_9^3}^{\text{Ne tirer aucun vert}} + \overbrace{C_5^1 \times C_4^2}^{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :} \\ \text{- choix de la place du jeton vert} \\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}} + \overbrace{C_5^2 \times C_4^1}^{\text{Tirer exactement 2 verts}}}{C_9^3} = \frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \boxed{\frac{5}{14}}$

Commentaire sur l'exercice :

Selon toute logique, on doit retrouver les mêmes résultats dans les deux parties. En effet, tirer successivement sans remise 3 boules ou les tirer simultanément revient au même. Que l'on traite un tirage comme un arrangement ou comme un sous-ensemble, les questions a) et b) nous fournissent le même résultat si on a conservé l'ordre jusqu'au bout (numérateurs et dénominateurs des fractions) le même mode de comptage. En ce qui concerne la question c), si on travaille avec des arrangements, on induit ainsi un ordre. Il ne faut donc pas oublier de multiplier par 3, c'est à dire de choisir d'abord une place pour le jeton vert. Ce problème ne se pose pas avec des combinaisons. Conclusion : Il est plus facile de travailler avec des combinaisons.

Cette dernière remarque est valable car le type d'événements étudié ne fait pas intervenir d'ordre.