المجلس القومي للتعليم التقني والتقاني

National Council For Technical & Technological Education

Secretarait General الأمانة العامة

المرحلة الثانوية التقنية

الرياضيات

الصف الثاني

المعدون:

الدّكتور/ عبدالله محمود عبدا لمجيد

المركز القومي للمناهج و البحث التربوي – بخت الرضا

الدّكتور/ محمد مصطفى محمد

جامعة أفريقيا العالمية

الأستاذ/ عبدالرحمن بخاري عبدالقادر

وزارة التربية والتعليم – ولاية الخرطوم

المراجعون:

االأستاذ/ علي محمد الجاك

نائب مدير المركز القومي للمناهج و البحث التربوي – بخت الرضا

الدّكتور/ عبدالله محمود عبدا لمجيد

المركز القومي للمناهج و البحث التربوي – بخت الرضا

بِسْمِ اللهِ الرّحمنِ الرّحيمِ

المحتويات

م	الموضوع	الصّفحة	عدد الحصص
	الباب الأُول : الهندسة الاحداثية و معادلات الخط المستقيم		
١	َرْسُ الأول: معادلة المستقيم الموازي لأحد المحورين		
٢	ْسُ الثّانِي: معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة عليه		
٣	سُ الثّالثُ : معادلة المستقيم الذي ميله م ويقطع من المحور الصادي جزءاً طوله جـ		
٤	ْسُ الرّابعُ: معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢)		
٥	َرْسُ الخامس: صورة المقطعين		
٦	َرْسُ السادس: البعد العمودي بين المستقيم أس + ب ص + جـ = ٠ والنقطة (س١، ص١)		
٧	َرْسُ السابع: معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢)		
	الباب الثّاني : المتباينات		
١	َرْسُ الأول: حل المتباينة وتمثيلها هندسياً		
٢	ْسُ الثّانِي: كتابة المتباينة في صورة فترات		
٣	َرْسُ الثُ : كتابة المتباينة في الصورة المطلقة (العددية).		
٤	ْسُ الرّابعُ: التمثيل البياني.		
	الباب الثّالث: الأسس واللوغاريثمات والجذور الصم:		
١	َرْسُ الأول: قوانين الأسس وإستخدامها في الإختصارات.		
٢	ْسُ الثّانِي: حل المعادلات الأسية.		
٣	سُ الثّالثُ : تعريف اللوغاريثمات.		
٤	ْسُ الرّابعُ: قوانين اللوغاريثمات وتطبيقاتها		
٥	رْسُ الخامسُ: جمع وطرح الجذور الصم.		
٦	َرْسُ السادس: ضرب وقسمة الجذور الصم " المرافق".		
٧	َرْسُ السابع: المعادلات الجذرية.		

الباب الرّابع: المثلثات:			
١	َرْسُ الأول: تحويل مجموع وفرق زاويتين		
٢	ِسْ الثّانِي: ضعف الزاوية.		
٣	سُ الثّالثُ : تحويل ضرب نسبتين إلي مجموع أو فرق.		
٤	ِسْ الرّابعُ : معادلات مثلثية بسيطة.		
الباب الخامس: نظرية الباقي			
١	َرْسُ الأول: إجراء القسمة المطوّلة		
٢	ِسْ الثّانِي: إيجاد بقية العوامل		
٣	سُ الثّالثُ : إيجاد الباقي		
٤	ِسْ الرّابعُ : البحث عن العامل		
الباب السادس: المنطق الرياضي			
١	َرْسُ الأول: تحديد قيم الصواب		
٢	ِسْ الثّانِي: تكوين جدول الصواب لقضية أو قضيتين		
٣	سُ الثّالثُ : الروابط المنطقية وجداولها ومسائل عليها		
الباب السابع: المتتاليات			
١	َرْسُ الأول: المتتالية الحسابية		
٢	ِسْ الثّانِي: المتتالية الهندسية ، الحد العام والمجموع.		
٣	سُ الثّالثُ : المتتالية الهندسية اللانهائية		
الباب الثامن: الإحصاء			
١	َرْسُ الأول: تعريفات.		
٢	ِسْ الثّانِي: مقاييس النزعة المركزية من المفردات والوسط الحسابي من الجدول		
٣	سُ الثّالثُ : المنوال والوسيط من الجدول التكراري		

الباب الأوّل

الهندسة الاحداثية و معادلات الخط المستقيم

✓ أهداف الباب الأوّل :

بعد دراسة هذا الباب يُتَوقّع أنْ يكون الطالب قادراً علي أنْ :

١. يجد معادلة المستقيم الموازي للمحور السيني.

٢. يجد معادلة المستقيم الموازي للمحور الصادي.

٣. يجد ميل المستقيم من معادلة مستقيم.

٤. يجد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة عليه.

٥. يجد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل وجزء مقطوع من المحور الصادي.

٦. يجد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل وجزء مقطوع من المحور السيني.

٧. يجد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الجزئين المقطوعين من المحور السيني والمحور الصادي.

٨. يجد معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطتين عليه.

٩. يتعرّف علي الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

١٠. يجد طول العمود النازل من نقطة معلومة علي مستقيم معلوم.

الدرس الأوّل

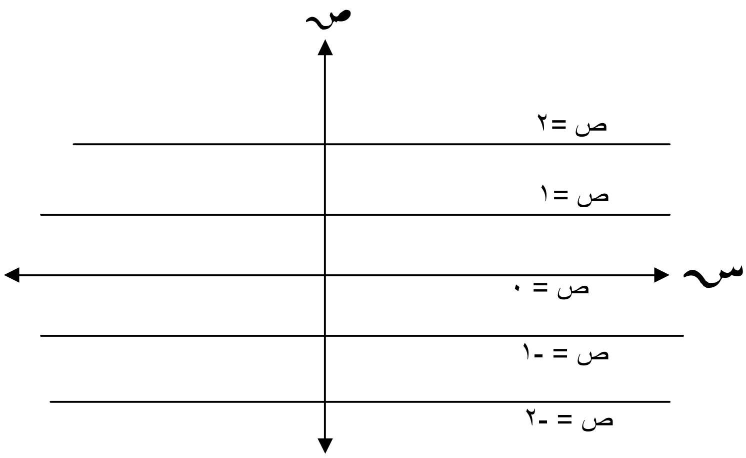
معادلة المستقيم الموازي لأحد المحورين

- **تعريف:** معادلة الخط المستقم هي العلاقة الجبرية التي تربط بين احداثيي أيّ نقطة تقع علي ذلك المستقيم.

- **معادلة المستقم الموازي للمحور السينى:**

بما أنّ الصفة المشتركة للاحداثي الصادي لأيّ نقطة تقع علي المحور السيني أنّ قيمته تساوي الصفر ، فإنّ معادلة المحور السيني هي ص = ٠ .

وكذلك أيّ مستقيم يوازيه ويبعد عنه بمقدار أ، فإنّ الاحداثي الصادي لأيّ نقطة عليه يساوي أ فتكون معادلةأيّ مستقيم يوازي المحور السيني ويبعد عنه بمقدار أ هي ص = أ .
ص = - ٢ هي معادلة مستقيم يوازي المحور السيني ويبعد عنه بمقدار -٢.
عموما: $\boxed{\text{ص} = \pm \text{ج}}$ هي معادلة أيّ مستقيم يوازي المحور السيني حيث ج ثابت .أنظر الشكل ١-١).



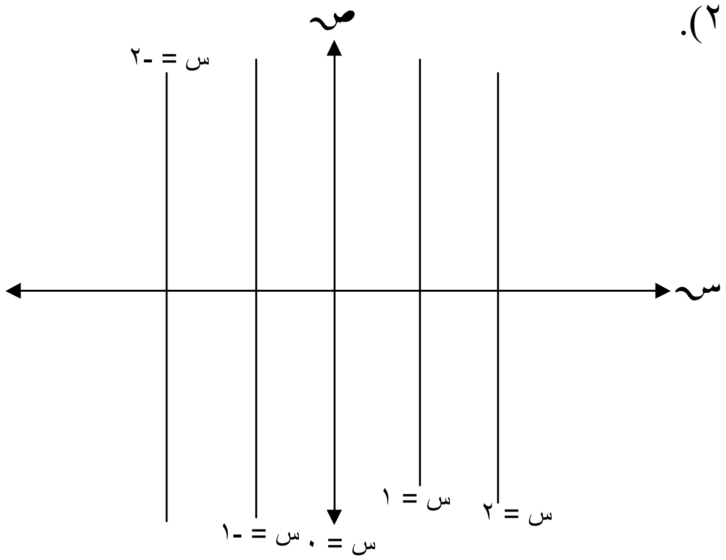
شكل (١-١)

- **<u>معادلة المستقيم الموازي للمحور الصادي:</u>**

كذلك أيّ نقطة علي المحور الصاديأحداثيها السيني يساوي صفراً ، فتكون معادلة المحور الصادي هي **س = ٠** ، وكل مستقيم يوازيه ويبعد عنه بمقدار أ تكون معادلته هي **س = أ** .

س = -١ هي معادلة مستقيم يوازي الصادي ويبعد عنه بمقدار -١.

عموما: $\boxed{\text{س} = \pm \text{ج}}$ هي معادلة أيّ مستقيم يوازي المحور الصادي حيث ج ثابت. أنظر الشكل(١-٢).



شكل (١-٢)

يمكن كتابة معادلة المستقيم الموازي للمحور السيني بطريقة الصفة المميزة هكذا:
{(س ، ص): ص = ± ج }

وكذلك معادلة المستقيم الموازي للمحور الصادي بطريقة الصفة المميزة هي :

{(س ، ص): س = ±ج }

<u>مثال:</u> أكتب بطريقة الصفة المميّزة معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ،-٤) إذا كان:
(أ) يوازي المحور السيني. (ب) يوازي المحور الصادي.

<u>الحل:</u>

(أ) عندما يوازي المحور السيني = {(س ، ص): ص = -٤}.
(ب) عندما يوازي المحور الصادي = {(س ، ص): س = ٣}.

<u>تمرين(١)</u>

١/ أكتب معادلة المستقيم الموازي للمحور السيني ويمر بالنقطة(٥،٢).

٢/ أكتب معادلة المستقيم الموازي للمحور الصادي ويمر بالنقطة (٣،-٢).

٣/ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢،١) إذا كان:

(أ) يوازي المحور السيني.

(ب) يوازي المحور الصادي.

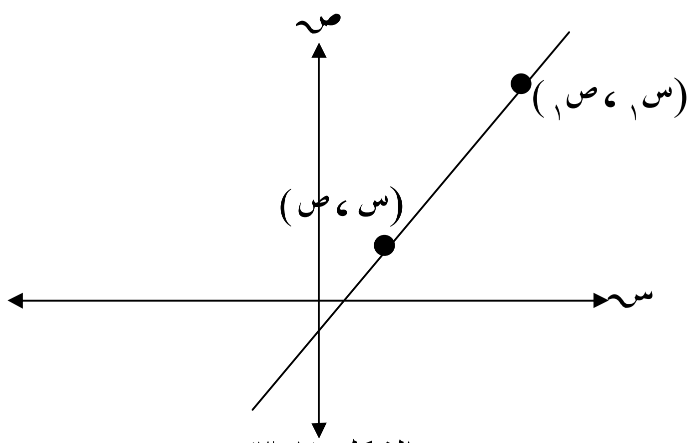
الدرس الثانى

معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة عليه

لايجاد معادلة المستقيم الذي ميله م ويمربالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) نفرض أنّ (س،ص)أيّ نقطة أخري عليه "الشكل (١-٣)" فيكون الميل م يساوي:

م = $\frac{ص - ص1}{س - س1}$ ، وبالضرب العكسي نحصل علي:

$\boxed{ص - ص_١ = م (س - س_١)}$ وهي معادلة هذا المستقيم.



الشكل (١-٣)

مثال(١): جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣،-٥) وميله $\frac{1}{4}$ ؟

الحل:

ص - ص١ = م (س - س١) ⇐ ص + ٥ = $\frac{1}{4}$ (س - ٣) وبالضرب العكسي نحصل علي:

٤ص + ٢٠ = س-٣ ⇐ ٤ص - س + ٢٣ = صفر .

مثال(٢): جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١،٢) ويصنع زاوية $135°$ مع المحور السيني الموجب.

الحل:

ص – ص١ = م (س – س١) ، م = ظا ١٣٥ = - ١ .

ص – ٢ = - (س + ١) ⇐ ص – ٢ = - س -١

∴ ، س + ص – ١ = ٠

مثال(٣): جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، -٤) ويوازي المستقيم المار بالنقطتين أ(٣ ،-١) و ب (١،٣) ؟

الحل:

$$م = \frac{ص2 - ص1}{س2 - س1} ، ∴ \frac{3+1}{1-3} = \frac{4}{-2} = -2 .$$

وعند التوازي فإنّ م١ = م٢ = -٢ . ∵ ، ص – ص١ = م(س – س١)

ص + ٤ = -٢(س – ٣) ⇐ ص + ٤ = -٢ س+ ٦.

∴ ، ص + ٢س – ٢ = ٠

مثال(٤): جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٤،٦) و يعامد المستقيم المار بالنقطتين أ (-٢ ، ١) و ب(٥،١)؟

الحل:

بفرض أنّ م١ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ و ب ، م٢ ميل المستقيم المطلوب.

$$∴ م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ١}{١ + ٢} = \frac{٤}{٣}.$$

منشرط التعامد فإنّ : م١ × م٢ = -١ ، ∴ ، م٢ = $-\frac{3}{4}$.

∵ ، ص – ص١ = م (س – س١) ⇐ ص – ٤ = $-\frac{3}{4}$ (س +٦) بالضرب العكسي :

٤ص – ١٦ =-٣س – ١٨ ، ∴ ، ٤ص + ٣س + ٢ = ٠

❖ **تمرين(٢):**

(١) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣،-٧) وميله - $\frac{1}{2}$؟

(٢) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٤،٢) ويصنع زاوية 135° مع المحور السيني الموجب.

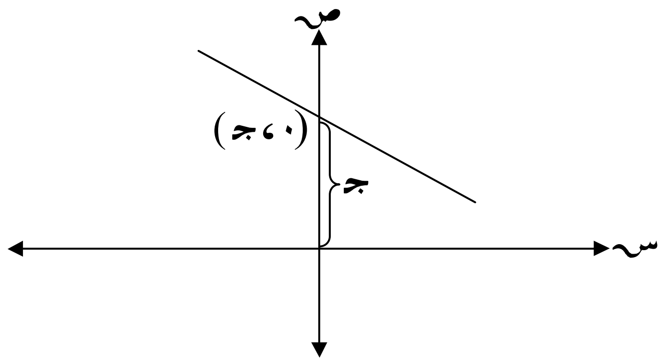
(٣) جد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله ٣ .

(٤) جد معادلة المستقيم المقام عمودياً عند منتصف النقطتين أ(٤ ، -٣) و ب(-٢،-٥)؟

الدرس الثالث

معادلة المستقيم الذي ميله م ويقطع من المحور الصادي جزءاً طوله جـ

إذا قطع المستقيم جزءاً طوله جـ احداثيات هذه النقطة هي: (٠ ، جـ) وبما أنّ ميله يساوي م فإنّ معادلته هي:



الشكل (١-٤)

$م = \frac{ص - جـ}{س - ٠}$ بالضرب العكسي نحصل علي : ص - جـ = م س

أو: $\boxed{ص = م\, س + جـ}$. حيث م ≡ الميل و جـ ≡ الجزء المقطوع من المحور الصادي.

<u>مثال(١)</u> جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور الصادي ٥ وميله – ٢ ؟

<u>الحل:</u>

ص = م س + جـ ، م = – ٢ ، جـ = ٥

∴ ، ص = – ٢س + ٥ أو ص + ٢س- ٥ = ٠

<u>مثال(٢)</u> جد معادلة المستقيم الذي يصنع زاوية ٦٠° مع المحور السيني الموجب ويقطع من المحور الصادي جزءاً طوله -٤ ؟

<u>الحل:</u>

ص = م س + جـ ، م = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$ ، جـ = -٤

ص = $\sqrt{٣}$ س – ٤ أو $\sqrt{٣}$س – ص – ٤ = صفر.

❖ **<u>تمرين(٣):</u>**

(١) جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور الصادي ٨ وميله $\frac{1}{2}$ ؟

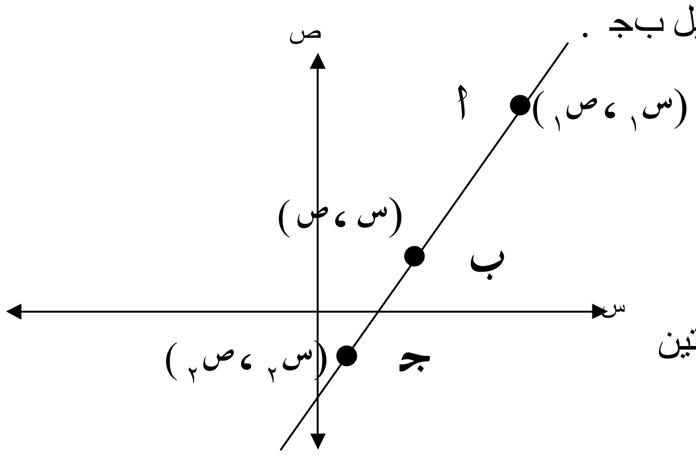
(٢) جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور الصادي -٧ ويصنع زاوية ١٣٥° مع المحور السيني الموجب؟

(٣)جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور الصادي جزءاً طوله $\sqrt{٣}$ ويصنع زاوية ٣٠° مع المحور السيني الموجب.

الدرس الرّابع

معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$) ، ب($\text{س}_{٢}$ ، $\text{ص}_{٢}$)

من الشكل (١- ٥) ميل أب = ميل أجـ = ميل بـجـ .



الشكل(١-٥)

∴ ، $\boxed{\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{س} - \text{س}_{١}} = \dfrac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}}$

وهي معادلة المستقيم المار بالنقطتين المعلومتين

($\text{س}_{١}$ ،$\text{ص}_{١}$) ، ($\text{س}_{٢}$ ، $\text{ص}_{٢}$)

مثال(١): جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(٤،-٢) ،ب(١،٥)؟

الحل:

∵ ، $\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{س} - \text{س}_{١}} = \dfrac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

∴ ، $\dfrac{\text{ص}+2}{\text{س}-4} = \dfrac{5+2}{1-4} = \dfrac{7}{-3}$.

٧س - ٢٨ = -٣ص – ٦ ∴ ، ٧س + ٣ص -٢٢ = صفر.

❖ **تمرين(٤):**

(١) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢،-٣) ويوازي المستقيم المار بالنقطتين أ(٤،١) ، ب(-١ ،٣)؟

(٢) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(٣،-٢) ،ب(١،٥)؟

(٣) جد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (١ ،-١)؟

الدرس الخامس

صورة المقطعين

معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور السيني جزءاً طوله أ ومن المحور الصادي جزءاً طوله ب : من الشكل ، خذ أيّ نقطة (س ، ص) علي المستقيم

وبما أنّ : $\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

$\frac{ص-0}{س-أ} = \frac{ب-0}{0-أ} = \frac{ب}{-أ}$ بالضرب العكسي

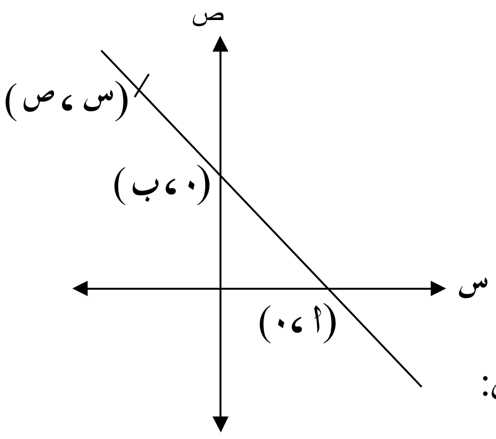
∴ ، ب س – أب = - أص

ب س + أص = أب وبالقسمة علي(أب) نحصل علي:

$\boxed{\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1}$ وهي صورة المقطعين حيث :

أ ≡ الجزء المقطوع من المحور السيني.

ب ≡ الجزء المقطوع من المحور الصادي.



الشكل(١-٦)

مثال (١): جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور السيني ٣ ومن المحور الصادي -٥ ؟

الحل:

$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1 \Leftarrow \frac{س}{3} + \frac{ص}{-5} = 1$ وبالضرب × ١٥

٥س – ٣ص = ١٥ ⇐ ٥س – ٣ص – ١٥ = ٠

- **معلومات مهمّة:**

(١) إذا مرّ المستقيم بأيّ نقطة ، فإنّها تحقق معادلته.

(٢) المستقيم يقطع المحور السيني عندما ص = ٠ أيْ عند (س،٠).

(٣) المستقيم يقطع المحور الصادي عندما س = ٠ أيْ عند (٠،ص).

مثال (٢): جد نقطتي تقاطع المستقيم ٣س – ٢ص = ١٢مع المحورين ،ثمّ ضع المعادلة في صورة المقطعين.

الحل:

٣س – ٢ص = ١٢ .

عندما ص = ٠ ⇐ ٣س = ١٢ ∴ ، س = ٤ يقطع السيني عند (٤،٠).

عندما س = ٠ ⇐ -٢ص = ١٢ ∴ ، ص = -٦ يقطع الصادي عند (٠،٦).

∴ ، المعادلة في صورة المفطعين تصبح: $\frac{س}{4} + \frac{ص}{-6} = 1$.

مثال (٣): جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور الصادي ضعف ما يقطعه من المحور السيني علماً بأنّه يمر بالنقطة (٤،-٢)؟

الحل:

يقطع من السيني أ ∴ ، يقطع من الصادي ٢أ = ب.

∵ ، $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1$ ⇐ $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{2أ} = 1$ بالضرب × ٢أ

٢س + ص = ٢أ .

(٤،-٢) تحقق ⇐ ٨ – ٢ = ٢أ ⇐ ٦ = ٢أ ⇐ أ= ٣ .

٢س + ص = ٦ ∴ ، ٢س + ص – ٦ = ٠

❖ **تمرين(٥):**

(١) جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور السيني ٣ ومن المحور الصادي ٢ ؟

(٢) جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور السيني - $\frac{1}{2}$ ومن المحور الصادي $\frac{2}{3}$ ؟

(٣) جد نقطتي تقاطع المستقيم ٣س – ٤ص = ١٢مع المحورين ،ثمّ ضع المعادلة في صورة المقطعين.

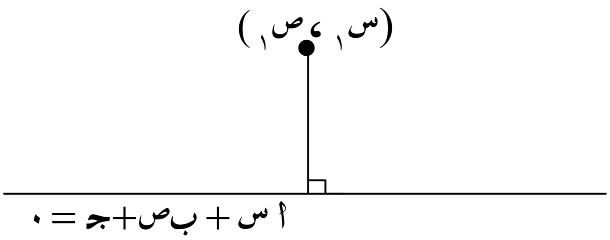
(٤) جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور الصادي أربعة أمثال ما يقطعه من المحور السيني.

الدرس السادس

البعد العمودي بين المستقيم أس + ب ص + ج = ٠ والنقطة (س$_١$، ص$_١$)

من الشكل (١-٧) ، (س$_١$، ص$_١$) نقطة خارج المستقيم أس + ب ص + ج = ٠،فإنّ البعد العمودي من هذه النقطة إلي المستقيم يعطي بالعلاقة:

$$\boxed{\text{البعد} = \frac{|\text{أ}\text{س}_١ + \text{ب}\text{ص}_١ + \text{ج}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}}$$



الشكل (١-٧)

مثال(١): جد البعد العمودي بين النقطة (٢ ، -٥) والمستقيم ٣س -٤ص – ٦ = ٠

الحل:-

$$\text{البعد} = \frac{|\text{أ}\text{س}_١ + \text{ب}\text{ص}_١ + \text{ج}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

$$\text{البعد} = \frac{|٣ \times ٢ - ٤ \times (-٥) - ٦|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}} = \frac{|٦ + ٢٠ - ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٢٠}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$$

∴ ، البعد = ٤ وحدات طولية.

مثال(٢): جد البعد العمودي بين المستقيم ٢س + ص + ٥ = ٠ ونقطة الأصل؟

الحل:-

$$\text{البعد} = \frac{|\text{أ}\text{س}_١ + \text{ب}\text{ص}_١ + \text{ج}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

البعد $= \frac{|\cdot + \cdot + 5|}{\sqrt{(2)^2 + 1}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$.

$\therefore$ ، البعد $= \sqrt{5}$ وحدة طولية.

<u>تمرين(٥):</u>

(١) جد البعد العمودي بين المستقيم ١٢س + ٥ص + ١٣ = ٠ والنقطة (-١، ٥)؟

(٢) جد البعد العمودي بين المستقيم $\sqrt{3}$ س + ص = ١٠ ونقطة الأصل؟

الدرس السابع
الصورة العامة لمعادلة المستقيم

إذا لاحظت في جميع الحالات التي مرت بنا لمعادلة الخط المستقيم ، أنّه يمكن وضع المعادلة في الصورة أس + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ، ب ، جأعداداً حقيقية ، أ ، ب لاتساويان الصفر في الوقت نفسه ، ونعرّف هذه الحالة بالصورة العامة لمعادلة المستقيم.
إذا كان:

أس + ب ص + جـ = ٠فإنّ بص = أس – جـ

$$ص = \frac{-أ}{ب}س - \frac{جـ}{ب}$$

فإذا قارنا هذه الصورة بالصورة: ص = مس+جـ ، نجد أنّ ميل المستقيم م = $\frac{-أ}{ب}$أيْ

خطأ! .

والجزء المقطوع من المحور الصادي يساوي $\frac{-جـ}{ب}$أيْ خطأ!.

مثال(١): جد ميل المستقيم ٣س + ٢ص – ١ = ٠؟

الحل:

∴ ، م = خطأ! = $-\frac{٣}{٢}$.

مثال(٢): جد ميل المستقيم ٥س = ٣ص – ٧ ، ثمّ جد ميل العمودي عليه؟

الحل:

∵ ، ٥س = ٣ص – ٧ ⇐ ٥س – ٣ص + ٧ = ٠

∴ ، م = خطأ! = $\frac{-٥}{-٣} = \frac{٥}{٣}$.

∴ ، ميل العمودي عليه = $\frac{-٣}{٥}$.

مثال(٣): جد الزاوية المحصورة بين المستقيمين : ٤س – ص = ٣ و ٢س + ص = ١.

الحل:

٤س – ص = ٣ ، ٢س + ص = ١.

م $=$ $\frac{\text{– معامل س}}{\text{معامل ص}}$ ، م١ = $\frac{-4}{-1}$ = ٤ ، م٢ = $\frac{-2}{1}$ $= -2$

ظاهـ = $\left|\frac{م1-م2}{1+م1م2}\right|$ ، ∴ ، ظاهـ = $\left|\frac{4-(-2)}{1+4(-2)}\right|$ = $\left|\frac{4+2}{1-8}\right|$ ، فإذا كانت هـ هي الزاوية بين المستقيمين فإنّ : ظاهـ = $\frac{6}{7}$ ⇐ هـ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٦}{٧}\right)$.

<u>مثال(٤):</u> جد قيم ك التي تجعل المستقيمين : ٤س – ص =١ و ك س + ص = ٦.

أ/ متوازيين. ب/ متعامدين.

<u>الحل:</u>

٤س – ص =١ و ك س + ص = ٦.

م $=$ $\frac{\text{– معامل س}}{\text{معامل ص}}$ ، م١ = $\frac{-4}{-1}$ = ٤ ، م٢ = - ك.

عند التوازي : م١ = م٢ ⇐ ٤ = - ك ⇐ ك = -٤ .

عند التعامد : م١ × م٢ = -١ ⇐ ٤ × (- ك) = -١.

∴ ، -٤ ك = -١ ⇐ ك = $\frac{-1}{-4}$ ، ∴ ، ك = $\frac{1}{4}$.

❖ **<u>تمرين(٦):</u>**

(١) جد ميل المستقيم ٢س = ٣ص – ٤ ، ثمّ جد ميل العمودي عليه؟

(٢) جد قيم أ التي تجعل المستقيمين : ٢س – ص = ١ ، س + أص = ٤ :

(*i*) متوازيين. (*ii*) متعامدين.

(٣) جد الزاوية المحصورة بين المستقيمين ٢س – ص =١ ، ٣س + ص = ٥ .

(٤) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٥،-١) إذا كان يوازي المستقيم ٤س – ٣ص = ٩.

(٥) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠،٠) إذا كان يعامد المستقيم س -٣ص = ٤.

الباب الثّاني

المتباينات

✓ **أهداف الباب الثاني :-**

بعد نهاية هذا الباب يتوقع أن يكون الطالب قادراً علي أنْ :

١. يعرف المتباينة.

٢. يتعرف خواص المتباينات.

٣يحل في متغير واحد ويمثّلها هندسياً .

٤. يكتب المتباينة في صورة فترات.

٥. يحل المتباينة في متغيرين علي الخط العددي.

٦. يكتب المتباينة في الصورة المطلقة.

٧يمثّل المتباينات هندسياً ويجد منطقة الحل.

الدرس الأوّل

حل المتباينة وتمثيلها هندسياً

تعريف : المتباينة هي جملة رياضية مفتوحة تحتوي علي إحدي علامات التباين > أو < أو ≤ أو ≥، وقد مرّ بك سابقاً عند دراسة المتباينات القوانين الأساسية للمتباينات وهي:

(١) إذا كان س > ص فإنّ س +ا > ص + ا ، س – ا > ص - ا .

إضافة أو طرح أي عدد إلي أو من طرفي المتباينة ، لا يؤثر فيها.

(٢) إذا كان ا > ٠، فإنّ ا موجبة.

إذا كان ا < ٠، فإنّ ا سالبة.

(٣) إذا كان س > ص ، ا > ٠فإنّ : اس > اص ، $\frac{س}{ا} > \frac{ص}{ب}$. أيْ عند ضرب أو قسمة طرفي المتباينة في أو علي عدد صحيح موجب فلا يؤثر فيها.

(٤) إذا كان س > ص ، ا < ٠فإنّ : اس < اص ، $\frac{س}{ا} < \frac{ص}{ب}$. أيْ عند ضرب أو قسمة طرفي المتباينة مع عدد سالب يعكس علامة المتباينة.

تستخدم هذه القوانين في حل المتباينة ، وحل المتباينة يعني تبسيطها وتحويلها إلي الصورة س ≤ ا أو س ≥ ا أو س > ا أو س < ا ثمّ نمثلها علي الخط العددي هندسياً ويمكن التعبير عن المتباينة بعد حلها في صورة فترة مغلقة أو مفتوحة حسب رموز التباين المستخدمة والأمثلة التالية توضّح ذلك:

مثال(١): حل المتباينة : ٣س + ٢ ≤ ١١، ومثّلها هندسياً ؟

الحل:

٣س + ٢ ≤ ١١ بطرح ٢ من من الطرفين

٣س ≤ ٩ بالقسمة علي ٣ .

س ≤ ٣ .

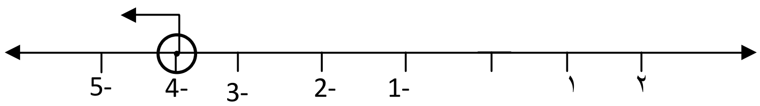
لاحظأنّ الدائرة عند ٣مغلقة لأنّ ٣تنتمي لمجموعة الحل لأنّ الرمز ≤ .

مثال(٢): حل المتباينة : ٥ – ٢س > ١٣ ؛ ثمّ مثلها هندشياً ؟

الحل:

٥ – ٢س > ١٣ ⇐ -٢س > ٨ ⇐ س < -٤ .

س < -٤ =]- ∞ ، -٤ [. لاحظ اتجاه الأسهم في حالة الفترة المفتوحة بالجانبين.



لاحظ أنّ الدائرة عند الرقم ٤دائرة مفتوحة ، غير مغلقة لأنّ ٤ لا تتمي لمجموعة الحل لأنّ الرمز < لا يشمل علي التساوي.

مثال(3): حل المتباينة : -٥ ≤ ٢س + ٣ ≤ ٧ ثمّ مثّلها هندسياً ؟

الحل:

- ٥ ≤ ٢س + ٣ ≤ ٧ بطرح ٣ من كل الأطراف

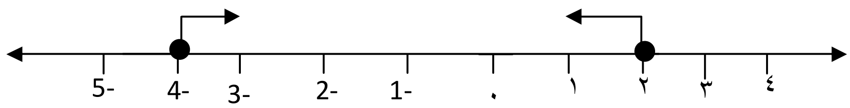
- ٨ ≤ ٢س ≤ ٤ بالقسمة علي ٢

- ٤ ≤ س ≤ ٢ .

التمثيل هندسياً :

وفي صورة فترات : ٤ ≤ س ≤ ٢ = [-٤ ، ٢]. لاحظ اتجاه الأسهم في الفترة المفتوحة

من الجانبين.



<u>مثال(4):</u> حل المتباينة : $٣ > \frac{١ - ٢س}{٥} > -١$، ثمّ أكتبها في صورة فترات؟

<u>الحل:</u>

$٣ > \frac{١ - ٢س}{٥} > -١$ بالضرب × ٥

$١٥ > ١ - ٢س > -٥$ بطرح ١ من كل الأطراف.

$١٤ > -٢س > -٦$ بقسمة كل الأطراف علي (-٢).

$-٧ < س < ٣ =]-٧ ، ٣[$.

❖ **<u>تمرين(١):</u>**

(١) حل المتباينة : $٢س - ١ \geq ٤$ ثمّ مثّلها هندسياً وأكتبها في صورة فترة ؟

(٢) حل المتباينة : $-٥ \leq ٤س - ١ \leq ٣$ ثمّ مثّلها هندسياً وأكتبها في صورة فترة ؟

(٣) حل المتباينة : $٧ > ٣ - ٢س > -١$ ثمّ مثّلها هندسياً .

(٤) حل المتباينة : $س - ٣ \leq ٢س + ١ \leq س + ٣$ ثمّ مثّلها هندسياً .

الدرس الثاني
المتباينة في الصورة المطلقة " العددية"

مرّ بك سابقاً أنّ |س|تعني القيمة المطلقة للمتغير س وهذا يعني أنّه إذا كان س عدداً حقيقياً فإنّ |س| = س إذا كان س $\geq$ ٠ و |س| = - س إذا كان س < ٠ ، وفي حالة المتباينات إذا كانت |س| $\leq$ ﺃ، فإنّ س تكون أكبر من أو تساوي – ﺃ وتكون س أصغر من أو تساوي ﺃ أيْ – ﺃ $\leq$ س $\leq$ ﺃ .

بعد حل المتباينة ووضعها في الصورة : ﺃ $\leq$ س $\leq$ ب ،ومثلاً لكتابتها في الصورة المطلقة لدينا الخطوات الآتية:

i. نوجد الوسط العددي للعددين ﺃ و ب = $\frac{ﺃ + ب}{٢}$.

ii. نطرح الوسط العددي من أطراف المتباينة.أيْ :

$$ﺃ - \frac{ﺃ + ب}{٢} \leq س - \frac{ﺃ + ب}{٢} \leq ب - \frac{ﺃ + ب}{٢}$$

، سنحصل علي النتيجة:

$$-\frac{(ب - ﺃ)}{٢} \leq س - \frac{ﺃ + ب}{٢} \leq \frac{(ب - ﺃ)}{٢}$$

$$\left| س - \frac{ﺃ + ب}{٢} \right| \leq \frac{(ب - ﺃ)}{٢}$$

<u>مثال (١)</u> : حل المتباينة : -٥ $\leq$ ٢س + ١ $\leq$ ١٧ ، ثمّ أكتبها في الصورة المطلقة؟

<u>الحل:</u>

-٥ $\leq$ ٢س + ١ $\leq$ ١٧ .

- ٦ $\leq$ ٢س $\leq$ ١٦ نقسم علي ٢ .

- ٣ $\leq$ س $\leq$ ٨ .

الوسط العددي = $\frac{-٣ + ٨}{٢} = \frac{٥}{٢}$ ، وبالتالي:

$$-٣ - \frac{٥}{٢} \leq س - \frac{٥}{٢} \leq ٨ - \frac{٥}{٢}$$

بالضرب × ٢ .

−٦ −٥ ≤ ٢س −٥ ≤ ١٦ −٥ .

−١١ ≤ ٢س −٥ ≤ ١١ ⇐ |٢س −٥| ≤ ١١ .

<u>مثال(٢):</u> حل المتباينة : ٩ > ١- س > - ٣، ثمّ أكتبها في الصورة المطلقة؟

<u>الحل:</u>

٩ > ١- س > - ٣ بطرح ١ من كل الأطراف.

٨ > - س > - ٤ بالقسمة علي (- ١) .

- ٨ < س < ٤ .

الوسط العددي = $\frac{-٨+٤}{٢} = \frac{-٤}{٢} = -٢$.

−٨ −(−٢) ≤ س −(−٢) ≤ ٤ −(−٢)

−٦ ≤ س + ٢ ≤ ٦ ⇐ |س + ٢| ≤ ٦

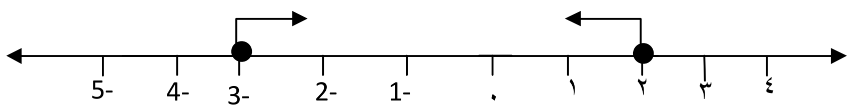
<u>مثال(٣):</u> حل المتباينة : |٢س + ١| ≤ ٥، ثمّ مثّلها هندسياً وأكتبها في صورة فترات ؟

<u>الحل:</u>

|٢س + ١| ≤ ٥ ⇐ −٥ ≤ ٢س + ١ ≤ ٥

−٦ ≤ ٢س ≤ ٤

−٣ ≤ س ≤ ٢ = [-٣ ، ٢].



تمرين(٢):

(١) حل المتباينة : $-٧ \leq ٢س - ٣ \leq ١٣$ ، ثمّ أكتبها في الصورة المطلقة؟

(٢) حل المتباينة : $٢ > \frac{٢س - ١}{٣} > -٤$ ، ثمّ أكتبها في الصورة العددية؟

(٣) حل المتباينة : $|٢س + ١| \geq ٩$، ثمّ مثّلها هندسياً وأكتبها في صورة فترات ؟

الدرس الثالث

التمثيل البياني للمتباينة في المتغيرين

يقصد بالتمثيل البياني تحديد المساحة التي تحققها المتباينة في متغيرين أو عدد من المتباينات في متغيرين أيضاً . فإذا كانت لدينا متباينة مثل أس + بص ≥ جـ مثلاً ونود تمثيلها وتحديد المساحة التي تمثلها ، نرسم المستقيم أس + بص = جـ أولاً .لاحظ استبدلنا رمز التباين بالتساوي ، ثمّ نحدّد المساحة وفقاً لرمز التباين المستخدم فتكون المساحة:

أ / أعلي المستقيم إذا كان علامة المتباينة > .

ب / أسفل المستقيم إذا كان علامة المتباينة < .

وتشمل المستقيم نفسه ، إذا كان برمز التباين التساوي.
وتكون يمين المستقيم في حالة أنْ يكون المستقيم رأسياً ، إذا كان رمز التباين > ويساره إذا كان رمز التباين <.

ولرسم المستقيم نحدّد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين ، وذلك بوضع ص = ٠ نحصل علي (س،٠) ، ثم بوضع س = ٠ ، نحصل علي (٠ ، ص)، ثمّ نوصل هاتين النقطتين ونمدهما.

مثال(١): مثّل بيانياً ٢س + ص ≤ ٤ ، ثمّ ظلل المساحة التي تحققها ؟

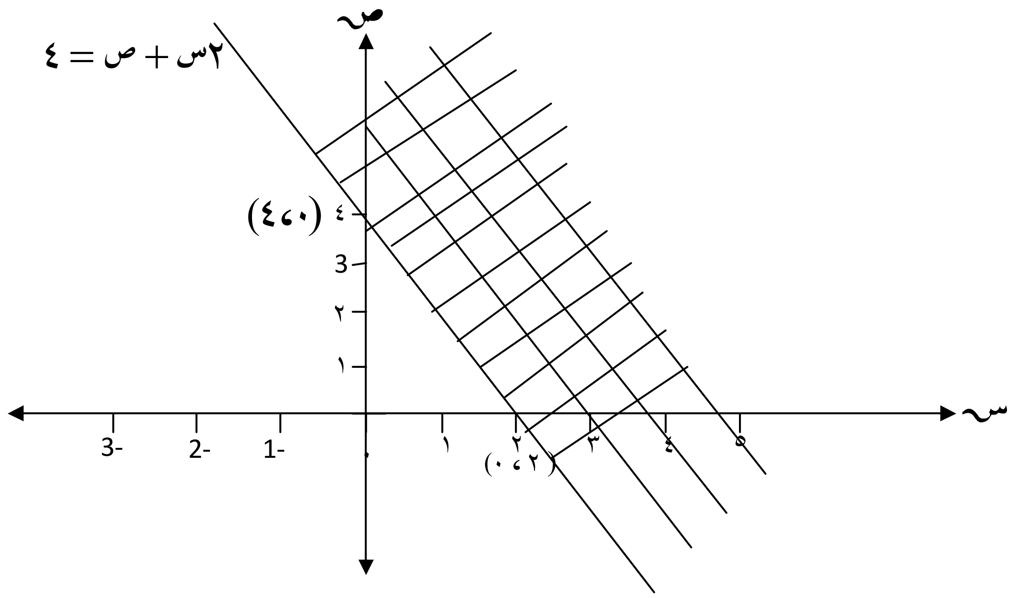
الحل:

٢س + ص ≤ ٤

٢س + ص = ٤

ص = ٠ ⇐ ٢س = ٤ ، ∴ ، س = ٢ ، (٢ ، ٠).

س = ٠ ⇐ ص = ٤ ، ∴ ، يمر بالنقطة (٠ ، ٤).



مثال(٢): مثّل بيانياً ٢ص - س ≥ ٤ ، س ≤ ١ثمّ ظلل المساحة التي تحققها معاً؟

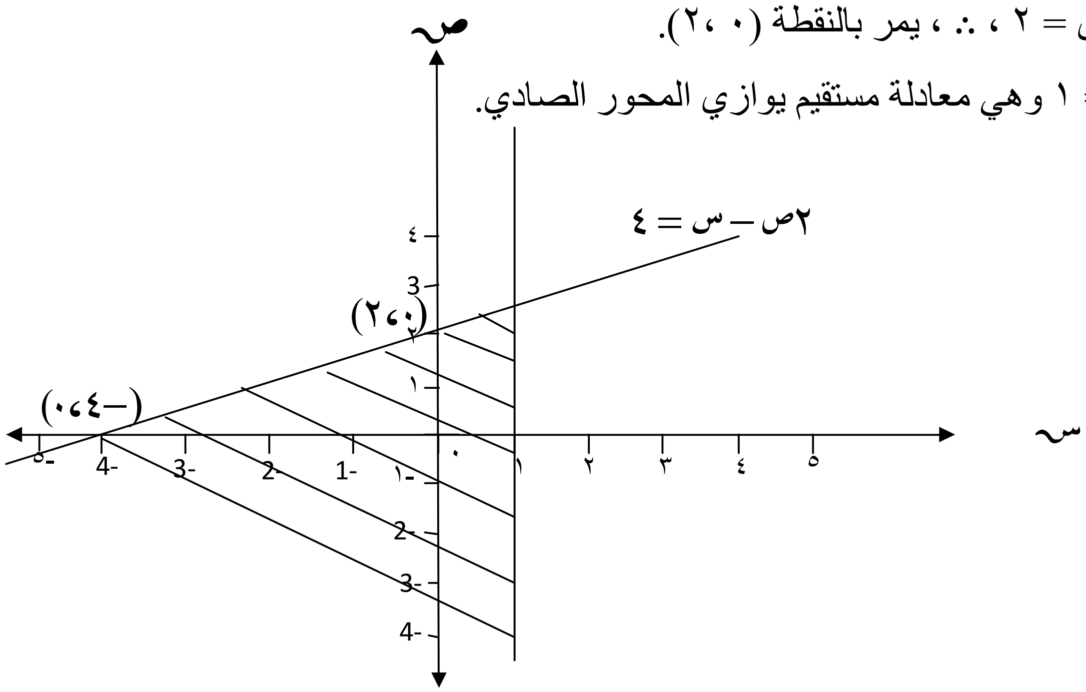
الحل:

٢ص - س ≥ ٤،   ٢ص - س = ٤

ص = ٠ ⇐ س = - ٤ ، ∴ ، يمر بالنقطة (-٤،٠).

س = ٠ ⇐ ص = ٢ ، ∴ ، يمر بالنقطة (٠ ،٢).

س ≤ ١ ، س = ١ وهي معادلة مستقيم يوازي المحور الصادي.



مثال(٣): مثّل بيانياً -٣ ≤ ٢س + ١ ≤ ٧، ثمّ ظلل المساحة التي تحققها ؟

الحل:

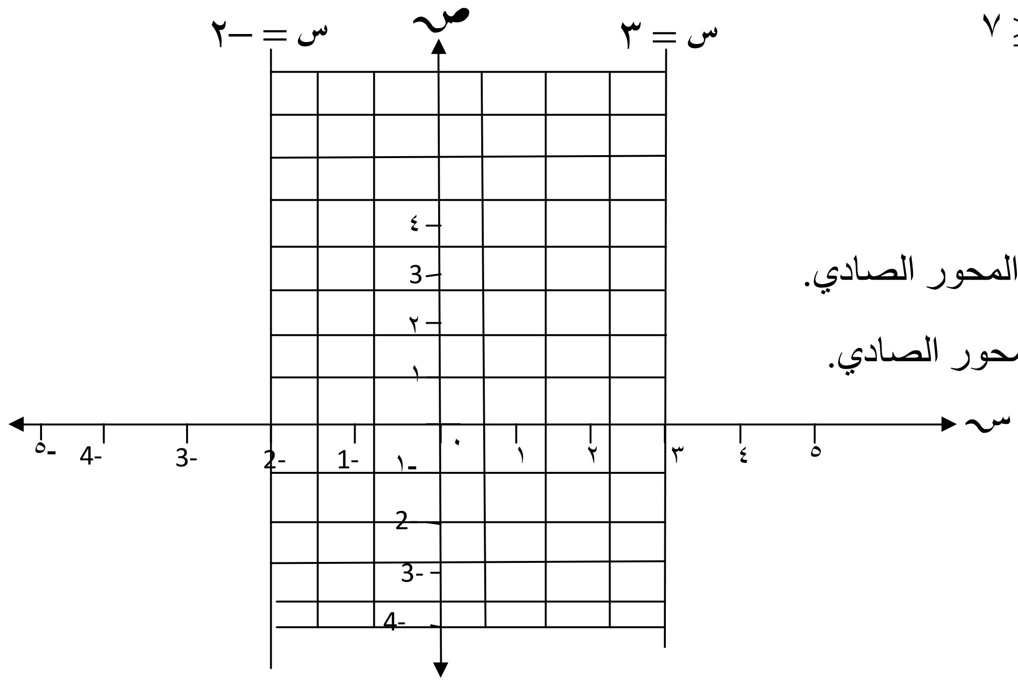
-٣ ≤ ٢س + ١ ≤ ٧

-٤ ≤ ٢س ≤ ٦

-٢ ≤ س ≤ ٣ .

س = -٢ يوازي المحور الصادي.

س = ٣ يوازي المحور الصادي.



مثال(٤): مثّل بيانياً ثمّ ظلل المساحة التي تحققها المتباينات:

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س ≥ ٦ ، ص ≥ ٥ ، س+ ص ≥ ٨ .

الحل:

س ≤ ٠ ، س = ٠ معادلة المحور الصادي.

ص ≤ ٠ ، ص = ٠ معادلة الحور السيني.

س ≥ ٦ ، س = ٦ معادلة مستقيم يوازي الصادي.

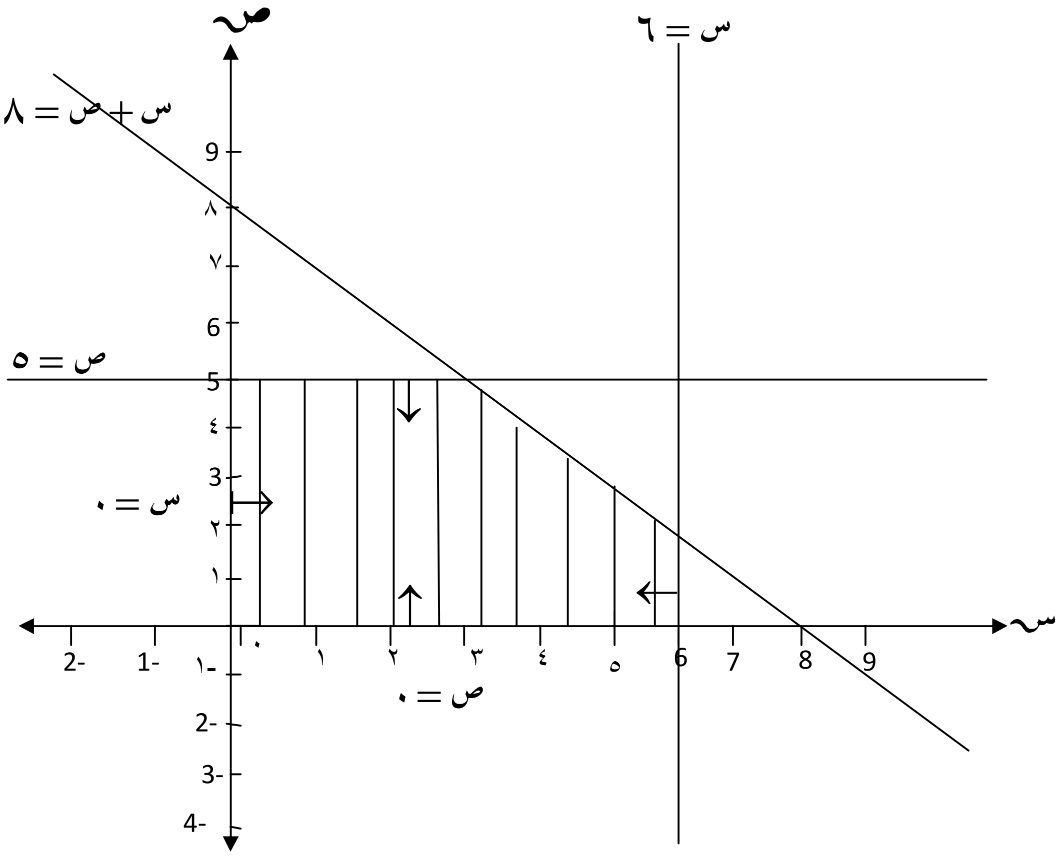
ص ≥ ٥ ، ص = ٥ معادلة مستقيم يوازي السيني.

س+ ص ≥ ٨ .

س+ ص = ٨ .

ص = ٠ ⇐ س = ٨ ، يمر ب (٨،٠).

س = ٠ ⟸ ص = ٨ يمر ب (٠،٨).



تمرين(٣):

(١)مثّل بيانياً، ثمّ ظلل المساحة التي تحققها معاً -١ ≤ ٣س – ٤ ≤ ٥ .

(٢)مثّل بيانياً ، ثمّ ظلل المساحة التي تحققها معاً المتباينات:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ١ ، س + ص ≤ ٣.

(٣)مثّل بيانياً ، ثمّ ظلل منطقة حل المتباينات:

٢ص – ٣س ≤ ٦ ، ص ≥ ٣ ، ٢ص + ٣س ≤ ١٢ .

(٤)مثّل بيانياً ، ثمّ ظلّل منطقة حل المتباينات:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤٠ ، ٢س + ص ≤ ٧٠ ، س + ٢ص ≤ ٦٠.

الباب الثالث

<u>الأسس واللوغاريثمات والجذور الصم</u>

✓ أهداف الباب:-

بعد دراسة هذا الباب يتوقع أن يكون الطالب قادراً علي أنْ :

١. يعرّف الأسس واللوغاريثمات.

٢. يميّز بين الأُسس واللوغاريثمات.

٣. يبسّط المقادير الأسية.

٤. يبسّط المقادير اللوغاريثمية.

٥. يعبّر عن المقادير الأسية بصورة لوغاريثمية والعكس.

٦. يعبّر عن المقادير الجذرية بصورة أسية.

٧. يجد حلاً للمعادلة الأسية.

٨. يجد حلاً للمعادلة اللوغاريثمية.

٩. يجد لوغاريثمات الأعداد.

١٠. يتعرّف الجذور الصم.

١١. يتعرّف جمع وطرح وضرب الجذور الصم.

١٢. يتعرّف المرافق وقسمة الجذور الصم.

١٣. يحل المعادلات الجذرية.

الدرس الأوّل

الأساس والقوة

أولاً: الأسس:- علمنا سابقاً أنّ:

$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$ ، $3^4 = 3\times3\times3\times3 = 81$

وبصورة عامة: $أ^ن = أ\times أ\times أ\times أ \ldots$ ن مرة حيث $ن \in ط$.

أ في هذه الحالة تسمي الأساس ، و ن تسمي الأس أو القوة.

مثال(١): أحسب قيمة مايلي:

i/ 5^3 ii/ $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ iii/ $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

الحل:-

i/ $5^3 = 5\times5\times5 = 125$.

ii/ $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

iii/ $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{32}{243}$

ونذكّرك بقوانين الأسس التي سبق أنْ درستها وهي:

(١) $\boxed{أ^ن \times أ^م = أ^{ن+م}}$ في حالة الضرب إذا تساوي الأساس نجمع القوي.

مثلاً: $أ^3 \times أ^4 = أ^{3+4} = أ^7$.

(٢) $\boxed{أ^ن \div أ^م = أ^{ن-م}}$

في حالة القسمة ، إذا تساوي الأساس نطرح القوي.مثلاً :

$أ^5 \div أ^3 = أ^{5-3} = أ^2$.

$\boxed{(س^ن)^م = س^{نم}}$

(٣)

إذا رُفع المقدار لقوتين ، نضرب القوة الخارجية في القوة الداخلية.مثلاً :

$(س^{٣})^{٢} = س^{٣×٢} = س^{٦}$.

(٤) $\boxed{س^{ن} \times ص^{ن} = (س ص)^{ن} \quad \frac{س^{ن}}{ص^{ن}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{ن}}$

في حالة الضرب والقسمة ، إذا تساوت القوي نضرب الأساس ونرفع لنفس القوة.مثلاً :

$$\frac{س^{٣}}{ص^{٣}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٣} \quad ، \quad س^{٣} \times ص^{٣} = (س ص)^{٣}$$

(٥) $\boxed{أ^{٠} = ١}$ أيّ عدد أو مقدار مرفوع للقوة صفر يساوي الواحد الصحيح.

(٦) $\boxed{\frac{أ}{س^{ن}} = أس^{-ن} \Leftarrow \frac{أ}{س^{-م}} = أس^{م}}$

ينقل المقدار من المقام للبسط أو من البسط للمقام بتغيير إشارة القوة.وذلك لأنه مثلاً :

$$\frac{أ^{٣}}{أ^{٥}} = \frac{أ \times أ \times أ}{أ \times أ \times أ \times أ \times أ} = \frac{١}{أ^{٢}} \Leftarrow \frac{أ^{٣}}{أ^{٥}} = أ^{٣-٥} = أ^{-٢} \quad ، \quad \frac{١}{أ^{٢}} = أ^{-٢}$$

- **<u>القوة الكسرية:</u>**

$$\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}} \quad ، \quad \sqrt[٣]{س} = س^{\frac{١}{٣}} \quad ، \quad \sqrt[٣]{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٣}}$$

(٧) $\boxed{\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}}$ نقسم القوة م علي دليل الجذر ن .

<u>مثال(١)</u>: إختصر مايلي:

i/ $\dfrac{\text{س}^{٥} \times \text{ص}^{٣}}{\text{س}^{٢} \times \text{ص}^{٤}}$ ii/ $\dfrac{\text{أ}^{٣}\ \text{ب}^{-٤}}{(\text{أ}^{-٢}\ \text{ب}^{٣})^{-١}}$

<u>الحل:-</u>

i/ $\dfrac{\text{س}^{٥} \times \text{ص}^{٣}}{\text{س}^{٢} \times \text{ص}^{٤}} = \dfrac{\text{س}^{٥-٢}}{\text{ص}^{٤-٣}} = \dfrac{\text{س}^{٣}}{\text{ص}}$.

ii/ $\dfrac{\text{أ}^{٣}\ \text{ب}^{-٤}}{(\text{أ}^{-٢}\ \text{ب}^{٣})^{-١}} = \dfrac{\text{أ}^{٣}\ \text{ب}^{-٤}}{\text{أ}^{٢}\ \text{ب}^{-٣}} = \dfrac{\text{أ}^{٣-٢}}{\text{ب}^{-٤+٣}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}^{-١}} = \text{أب}$.

<u>مثال(٢)</u>: إختصر مايلي: $\dfrac{٢^{٢\text{س}-١} \times ٩^{\text{س}+١}}{٤^{\text{س}-١} \times ٣^{٢\text{س}+١}}$.

<u>الحل:-</u>

$$\dfrac{٢^{٢\text{س}-١} \times ٩^{\text{س}+١}}{٤^{\text{س}-١} \times ٣^{٢\text{س}+١}} = \dfrac{٢^{٢\text{س}} \times ٢^{-١} \times ٩^{\text{س}} \times ٩}{٤^{\text{س}} \times ٤^{-١} \times ٣^{٢\text{س}} \times ٣} = \dfrac{\cancel{٢^{٢\text{س}}} \times \cancel{٣^{٢\text{س}}} \times ٩ \times ٤}{\cancel{٢^{٢\text{س}}} \times \cancel{٣^{٢\text{س}}} \times ٢ \times ٣} = ٦$$

<u>مثال(٣)</u>: ضع المقادير الآتية بأسس موجبة:

i/ $٢^{-٣}$ ii/ $\dfrac{١}{٣^{-٢}}$ iii/ $\text{س}^{-٥}$

<u>الحل:-</u>

i/ $٢^{-٣} = \dfrac{١}{٢^{٣}} = \dfrac{١}{٨}$.

ii/ $\dfrac{١}{٣^{-٢}} = ٣^{٢} = ٩$.

iii/ $\text{س}^{-٥} = \dfrac{١}{\text{س}^{٥}}$.

<u>تمرين(١)</u> إختصر مايلي:

(١) $\frac{(\text{س}^{٣}\ \text{ص}^{-٢})^{-٢}}{\text{س}^{-٥}\ \text{ص}^{٣}}$ (٢) $\frac{١٠^{٢\text{س}-١}}{٢٥^{\text{س}-١} \times ٤^{\text{س}}}$

(٣) بسّط ما يلي:

i/ $٣^{-٢}$ ii/ $٥^{-١}$ iii/ $\frac{١}{\text{س}^{-٢}}$

الدرس الثاني

المعادلات الأسية

المعادلة الأسية هي المعادلة التي تحتوي في أحد طرفيها أو كليهما مقادير جبرية تحتوي علي أسس. ولحل المعادلات الأسية ، لابدّ من تذكر القوانين التالية:

(١) إذا كان: $أ^{ن} = أ^{م}$ فإنّ $ن = م$ ، أي إذا تساوي الأساس ،فإنّ القوة متساوية.

(٢) إذا كان: $س^{ن} = ص^{ن}$ فإنّ $س = ص$ ، أي إذا تساوت القوة فإنّ الأساس متساوي.

(٣) إذا كان: $أ^{ن} = ب^{ن}$ ، وكانت $أ \neq ب$ فإنّ $ن = ٠$

مثلاً: $٣^{س-٢} = ٧^{س-٢} \Leftarrow س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$.

مثال(١): جد قيمة س إذا كان:

i/ $٣^{٢س-١} = ٢٧$ ii/ $٨^{س-١} = ٤^{س+١}$ iii/ $٥^{س^{٢}-٤س} = \frac{١}{١٢٥}$

الحل:-

i/ $٣^{٢س-١} = ٢٧$

$٣^{٢س-١} = ٣^{٣} \Leftarrow ٢س - ١ = ٣$ ، $\therefore ٢س = ٤ \Leftarrow س = ٢$.

ii/ $٨^{س-١} = ٤^{س+١}$

$\left(٢^{٣}\right)^{س-١} = \left(٢^{٢}\right)^{س+١} \Leftarrow ٢^{٣س-٣} = ٢^{٢س+٢}$

$\therefore$ ، $٣س - ٣ = ٢س + ٢ \Leftarrow ٣س - ٢س = ٢ + ٣$

$\therefore$ ، $س = ٥$.

iii/ $٥^{س^{٢}-٤س} = \frac{١}{١٢٥}$

$٥^{س^{٢}-٤س} = ٥^{-٣} \Leftarrow س^{٢} - ٤س = -٣$

$س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠ \Leftarrow (س - ١)(س - ٣) = ٠$

إما $س = ١$ أو $س = ٣$.

<u>تمرين(٢)</u> حل المعادلات الآتية:

(١) $\text{٧}^{\text{س}} = \text{٤٩}$ (٢) $\text{٢}^{\text{١−س}} = \frac{\text{١}}{\text{٨}}$ (٣) $\text{٣}^{\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}} = \text{٩}$

(٤) $\text{٥}^{\text{٢س−١}} = \text{٣}^{\text{س}^{\text{٢}}-\text{١}}$ (٥) $\text{٥}^{\text{س+١}} + \text{٥}^{\text{س}} = \text{٣٠}$

الدرس الثالث

اللوغريثمات

تعريف: لوغاريثم العدد لأساس معيّن هو القوة التي يُرفع إليها الأساس ليُعطي ذلك العدد .

فإذا كان $\text{لو}_{أ}^{س} = ن$ فإنّ ذلك يعني أنّ $س = أ^{ن}$ حيث:

$س \equiv$ العدد ، $أ \equiv$ الأساس ، $ن \equiv$ الأس.

مثال(١): أحسب قيمة ما يلي:

i/ $\text{لو}_{٥}^{١٢٥}$ ii/ $\text{لو}_{٣}^{٩}$

الحل:-

i/ $\text{لو}_{٥}^{١٢٥} = ٣$ لأنّ $٥^{٣} = ١٢٥$.

ii/ $\text{لو}_{٣}^{٩} = ٢$ لأنّ $٣^{٢} = ٩$.

قوانين اللوغاريثمات:

(١) بما أنّ : $س = س^{١}$ ، $\therefore \text{لو}_{س}^{س} = ١$ لأيّ قيمة للمتغير س .

(٢) $\text{لو}_{أ}^{(س ص)} = \text{لو}_{أ}^{س} + \text{لو}_{أ}^{ص}$ وذلك إذا فرضنا أنّ :

$$س = أ^{ن} \quad ، \quad ص = أ^{م} \Leftarrow س ص = أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن+م}$$

$\therefore \text{لو}_{أ}^{س ص} = ن + م$ ولكن $\text{لو}_{أ}^{س} = ن$ ، $\text{لو}_{أ}^{ص} = م$ ، وبالتالي:

$$\boxed{\text{لو}_{أ}^{س} + \text{لو}_{أ}^{ص} = \text{لو}_{أ}^{(س ص)}}$$

(٣) كذلك: $\frac{س}{ص} = \frac{أ^{ن}}{أ^{م}} = أ^{ن-م}$ عليه يكون: $\text{لو}_{أ}^{\left(\frac{س}{ص}\right)} = ن - م = \text{لو}_{أ}^{س} - \text{لو}_{أ}^{ص}$.

$$\boxed{\text{لو}_{أ}^{س} - \text{لو}_{أ}^{ص} = \text{لو}_{أ}^{\left(\frac{س}{ص}\right)}}$$

(٤) $\boxed{\text{لـو}_{\text{أ}}^{١} = \text{صفر}}$ لأنّ $\text{أ}^{\text{صفر}} = ١$.

(٥) $\boxed{\text{لـو}_{\text{أ}}^{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{ن}\,\text{لـو}_{\text{أ}}^{\text{س}}}$ وذلك لأنّه إذا فرضنا أنّ :

$\text{لـو}_{\text{أ}}^{\text{س}} = \text{ل}$ فإنّ :

$\text{س} = \text{أ}^{\text{ل}}$ ، وبرفع الطرفين للقوة ن يكون:

$\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ل ن}} \quad \therefore \quad \text{لـو}_{\text{أ}}^{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{ن ل}$.

ولكن $\text{ل} = \text{لـو}_{\text{أ}}^{\text{س}}$ ، $\therefore \quad \text{لـو}_{\text{أ}}^{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{ن}\,\text{لـو}_{\text{أ}}^{\text{س}}$.

<u>**مثال(١):**</u> بسّط ما يلي:

i/ $\text{لـو}_{٣}^{٨١}$ ii/ $\text{لـو}_{٢}^{\frac{١}{٨}}$ iii/ $\text{لـو}_{٣}^{٧٢} - \text{لـو}_{٣}^{٨}$ vi/ $\text{لـو}^{١٢٥} + \text{لـو}^{٨}$

<u>**الحل:-**</u>

i/ $\text{لـو}_{٣}^{٨١} = \text{لـو}_{٣}^{٣^{٤}} = ٤\text{لـو}_{٣}^{٣} = ٤ \times ١ = ٤$.

ii/ $\text{لـو}_{٢}^{\frac{١}{٨}} = \text{لـو}_{٢}^{\frac{١}{٢^{٣}}} = \text{لـو}_{٢}^{٢^{-٣}} = -٣\text{لـو}_{٢}^{٢} = -٣$.

iii/ $\text{لـو}_{٣}^{٧٢} - \text{لـو}_{٣}^{٨} = \text{لـو}_{٣}^{\left(\frac{٧٢}{٨}\right)} = \text{لـو}_{٣}^{٩} = \text{لـو}_{٣}^{٣^{٢}} = ٢\text{لـو}_{٣}^{٣} = ٢$.

vi/ $\text{لـو}^{١٢٥} + \text{لـو}^{٨} = \text{لـو}^{(١٢٥ \times ٨)} = \text{لـو}^{١٠٠٠} = ٣$.

<u>**ملاحظة مهمة:-**</u>

عندما لا يُكتب الأساس ، فإنّه يعتبر ١٠ . بالتالي:

$\text{لـو}^{١٠} = ١$ ، $\text{لـو}^{١٠٠} = ٢$ ، $\text{لـو}^{١٠٠٠} = ٣$

$\text{لـو}^{٠٫١} = -١$ ، $\text{لـو}^{٠٫٠١} = -٢$ ، $\text{لـو}^{٠٫٠٠١} = -٣$ وهكذا.

<u>مثال(٢)</u>: إختصر ما يلي:

i/ $\dfrac{\text{لو}^{٣٢}}{\text{لو}^{٨}}$ ii/ $\dfrac{\text{لو}\,\text{س}^{٢}}{\text{لو}\sqrt{\text{س}}}$

<u>الحل:-</u>

i/ $\dfrac{\text{لو}^{٣٢}}{\text{لو}^{٨}} = \dfrac{\text{لو}\,{٢}^{٥}}{\text{لو}\,{٢}^{٣}} = \dfrac{٥\text{لو}^{٢}}{٣\text{لو}^{٢}} = \dfrac{٥}{٣}$.

ii/ $\dfrac{\text{لو}\,\text{س}^{٢}}{\text{لو}\sqrt{\text{س}}} = \dfrac{\text{لو}\,\text{س}^{٢}}{\text{لو}\,\text{س}^{\frac{١}{٢}}} = \dfrac{٢\cancel{\text{لو}}\,\text{س}}{\frac{١}{٢}\cancel{\text{لو}}\,\text{س}} = ٢\times٢ = ٤$.

<u>مثال(٣)</u>: إختصر ما يلي:

i/ $\text{لو}^{\text{س}} + \text{لو}^{\frac{١}{\text{س}}}$ ii/ $\text{لو}_{٢}^{٤٥} - \text{لو}_{٢}^{\frac{٩}{٢٠}} + ٢\text{لو}_{٢}^{٥}$

<u>الحل:-</u>

i/ $\text{لو}^{\text{س}} + \text{لو}^{\frac{١}{\text{س}}} = \text{لو}^{\left(\text{س}\times\frac{١}{\text{س}}\right)} = \text{لو}\,١ =$ صفر .

ii/ $\text{لو}_{٢}^{٤٥} - \text{لو}_{٢}^{\frac{٩}{٢٠}} + ٢\text{لو}_{٢}^{٥} = \text{لو}_{٢}^{\left(\frac{٤٥\times٢٠}{٩\times٥^{٢}}\right)} = \text{لو}_{٢}^{\left(\frac{٤٥\times٢٠}{٩\times٢٥}\right)} = \text{لو}_{٢}^{٤} = ٢\text{لو}_{٢}^{٢} = ٢$

<u>تمرين(٣)</u> إختصر ما يلي:

(١) $\text{لو}_{٦}^{٣٦}$ (٢) $\text{لو}_{٣}^{٩} + \text{لو}_{٢}^{\frac{١}{٤}}$ (٣) $\text{لو}_{٢}^{٤٨} - \text{لو}_{٢}^{٦}$

(٤) $\dfrac{\text{لو}\,١٦}{\text{لو}\,٣٢}$ (٥) $\text{لو}\,١٢ - \text{لو}\,٣ + \text{لو}\,٢٥$

الدرس الرّابع

المعادلات اللوغاريثمية

إذا اشتملت المعادلة علي علاقة لوغاريثمية ، يكون المجهول فيها عدداً أو أساساً او أساً ، فإنّ حلها يعتمد علي تحويلها إلي الصورة الأسية ،ثمّ تحل كمعادلة أسية ، كما في الأمثلة التالية:

مثال(١): جد قيم س التي تحقق المعادلات الآتية:

i/ $\text{لـو}_{\text{٤}}\text{س} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ ii/ $\text{لـو}_{\text{س}}\text{٣٢} = \text{٥}$ iii/ $\text{لـو}_{\text{٢}}\text{٢}\sqrt{\text{٢}} = \text{س}$

vi/ $\text{لـو}_{\text{٣}}(\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}-\text{١}) = \text{صـــفر}$ v/ $\text{لـو}(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣س}) = \text{١}$

الحل:

i/ $\text{لـو}_{\text{٤}}\text{س} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

$\text{س} = \text{٤}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} = (\text{٢}^{\text{٢}})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} = \text{٢}^{\frac{\cancel{\text{٢}}\times\text{٣}}{\cancel{\text{٢}}}} = \text{٢}^{\text{٣}} = \text{٨}$ $\therefore$ ، س = ٨ .

ii/ $\text{لـو}_{\text{س}}\text{٣٢} = \text{٥} \Leftarrow \text{س}^{\text{٥}} = \text{٣٢}$ ، $\therefore$ س = ٢.

iii/ $\text{لـو}_{\text{٢}}\text{٢}\sqrt{\text{٢}} = \text{س} \Leftarrow \text{٢}^{\text{س}} = \text{٢}\sqrt{\text{٢}} = \text{٢}\times\text{٢}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \text{٢}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$ $\therefore \text{س} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$.

vi/ $\text{لـو}_{\text{٣}}(\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}-\text{١}) = \text{صـــفر}$

$\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}-\text{١} = \text{٣}^{\text{٠}} = \text{١} \Leftarrow \text{س}^{\text{٢}}+\text{س}-\text{٢} = \text{٠}$

$(\text{س}+\text{٢})(\text{س}-\text{١}) = \text{٠} \Leftarrow$ إما س = -٢ أو س = ١ .

v/ $\text{لـوس}^{\text{٢}}+\text{٣س} = \text{١}$

$\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣س} = \text{١٠} \Leftarrow \text{س}^{\text{٢}}+\text{٣س}-\text{١٠} = \text{٠}$

$(\text{س}+\text{٥})(\text{س}-\text{٢}) = \text{٠}$ ، إما س = -٥ أو س = ٢ .

تمرين(٤):

جد قيم س التي تحقق المعادلات الآتية:

(١) $\text{لــو}_{٣}^{(\text{س}+٧)} = ٢$　　(٢) $\text{لــو}_{\text{س}-١}^{٨} = ٣$　　(٣) $\text{لــو}_{ه}^{٢\text{س}-٩} = ٠$

(٤) $\text{لــو}_{٢\sqrt[٣]{٢}}^{٣٢\sqrt[٥]{٤}} = \text{س}$　　(٥) $\text{لــو}(\text{س}^{٢} + ٩\text{س}) = ١$

الدرس الخامس

الجذور الصم والعمليات عليها

تعريف : الجذور الصم هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير النسبية. مثلاً :

$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، ... هذه جذور صم لأنه لا يمكن كتابتها في صورة $\left(\frac{أ}{ب}\right)$.

تبسيط الجذور الصم:

$$\sqrt{١٢} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$$
$$\sqrt{١٨} = \sqrt{٩} \times \sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$$
$$\sqrt{٢٠} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$$

جمع وطرح الجذور الصم:-

نبسّط أولاً ثمّ نجمع أو نطرح.

مثال(١): بسّط ما يلي:

(١) $\sqrt{٧٥} - \sqrt{٤٨} + \sqrt{١٢} - \sqrt{٢٧}$ (٢) $\sqrt{٢٠٠} - \sqrt{٧٢} - \sqrt{٨}$

الحل:-

(١) $\sqrt{٧٥} - \sqrt{٤٨} + \sqrt{١٢} - \sqrt{٢٧} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٣} - \sqrt{١٦} \times \sqrt{٣} + \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} - \sqrt{٩} \times \sqrt{٣}$

$= ٥\sqrt{٣} - ٤\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣} = \sqrt{٣}(٥ - ٤ + ٢ - ٣)$

$= \sqrt{٣} \times \text{صفر} = ٠$

(٢) (٢) $\sqrt{٢٠٠} - \sqrt{٧٢} - \sqrt{٨} = \sqrt{١٠٠} \times \sqrt{٢} - \sqrt{٣٦} \times \sqrt{٢} - \sqrt{٤} \times \sqrt{٢}$

$= ١٠\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢}$

$= \sqrt{٢}(١٠ - ٦ - ٢) = ٢\sqrt{٢}$

ضرب الجذور الصم:

القاعدة: نفك الأقواس.

مثال (٢): بسّط ما يلي:

(١) $(\sqrt{٢}+١)^{٢}$ (٢) $(\sqrt{٥}-\sqrt{٢})(\sqrt{٢٠}+\sqrt{٨})$

الحل:-

(١) $(\sqrt{٢}+١)^{٢} = ٢ + ٢\sqrt{٢} + ١ = ٣ + ٢\sqrt{٢}$.

(٢) $(\sqrt{٥}-\sqrt{٢})(\sqrt{٢٠}+\sqrt{٨}) = \sqrt{١٠٠} + \sqrt{٤٠} - \sqrt{٤٠} - \sqrt{١٦} = ١٠ - ٤ = ٦$.

قسمة الجذور الصم:

القاعدة: نضرب في مرافق المقام ونقسم عليه.

$(\sqrt{أ}+\sqrt{ب})$ ، $(\sqrt{أ}-\sqrt{ب})$ يسميان مترافقان حيث:

$(\sqrt{أ}+\sqrt{ب})(\sqrt{أ}-\sqrt{ب}) = أ - ب$.

مثال(١): بسّط ما يلي:

i/ $\dfrac{٥}{\sqrt{٥}}$ ii/ $\dfrac{\sqrt{٧}+\sqrt{٥}}{\sqrt{٧}-\sqrt{٥}}$ iii/ $\dfrac{١}{\sqrt{٢}+١} + \dfrac{١}{٢+\sqrt{٣}} + \dfrac{١}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}$

الحل:-

i/ $\dfrac{٥}{\sqrt{٥}} = \dfrac{٥\times\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}\times\sqrt{٥}} = \dfrac{\cancel{٥}\sqrt{٥}}{\cancel{٥}} = \sqrt{٥}$.

ii/ $\dfrac{\sqrt{٧}+\sqrt{٥}}{\sqrt{٧}-\sqrt{٥}} = \dfrac{(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}{(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})} = \dfrac{(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})^{٢}}{٧-٥}$

$= \dfrac{٧+٢\sqrt{٣٥}+٥}{٢} = \dfrac{١٢}{٢} + \dfrac{٢\sqrt{٣٥}}{٢} = ٦ + \sqrt{٣٥}$.

iii/ $\dfrac{١}{\sqrt{٢}+١} + \dfrac{١}{٢+\sqrt{٣}} + \dfrac{١}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}} = \dfrac{١(\sqrt{٢}-١)}{(\sqrt{٢}+١)(\sqrt{٢}-١)} + \dfrac{١(٢-\sqrt{٣})}{(٢+\sqrt{٣})(٢-\sqrt{٣})}$

$$+\frac{(\sqrt{٣}-\sqrt{٢})}{(\sqrt{٣}+\sqrt{٢})(\sqrt{٣}-\sqrt{٢})}$$

$$=\frac{\sqrt{٢}-١}{\sqrt{٢}-١}+\frac{٢-\sqrt{٣}}{٤-٣}+\frac{\sqrt{٣}-\sqrt{٢}}{٣-٢}$$

$$=\sqrt{٢}-١+٢-\sqrt{٣}+\sqrt{٣}-\sqrt{٢}=١ .$$

<u>تمرين(٥):</u> بسّط ما يلي:

i/ $\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{١٢٥}$.

ii/ إختصر : $\sqrt{١٢٥}-\sqrt{٤٥}+\sqrt{٢٠}$.

iii/ إذا كان : $س=\frac{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}-\sqrt{٢}}$ ، فجد قيمة : $س+\frac{١}{س}$.

vi/ إختصر: $(\sqrt{١٢}-\sqrt{٨})(\sqrt{٣}+\sqrt{٢})$.

v/ إختصر: $\frac{٦}{\sqrt{٣}}+\sqrt{٢٧}-\sqrt{١٢}$.

الدرس السادس

المعادلات الجذرية

يعتمد حل المعادلات الجذرية علي التخلص من الجذور وذلك بتربيع الطرفين كما في الأمثلة التالية:

مثال:- حل المعادلات الآتية:

١/ $\sqrt{\text{٢س} - \text{١}} = \text{٣}$ ٢/ $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س}} = \text{٢}$

٣/ $\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} = \sqrt{\text{٦}}$ ٤/ $\sqrt{\text{س} + \text{٣}} + \sqrt{\text{س}} = \text{٣}$

الحل:-

١/ $\sqrt{\text{٢س} - \text{١}} = \text{٣}$ بتربيع الطرفين نحصل علي:

$$\text{٢س} - \text{١} = \text{٩} \Leftarrow \text{٢س} = \text{١٠} \Leftarrow \text{س} = \text{٥} .$$

٢ / $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س}} = \text{٢}$ بتربيع الطرفين نحصل علي:

$$\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س} = \text{٤} \Leftarrow \text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س} - \text{٤} = \text{٠}$$

$$(\text{س} + \text{٤})(\text{س} - \text{١}) = \text{٠} \Leftarrow \text{إما س} = \text{٤} \text{ أو س} = \text{١} .$$

٣/ $\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} = \sqrt{\text{٦}}$ بتربيع الطرفين نحصل علي:

$$\text{س} + \sqrt{\text{س}} = \text{٦} \Leftarrow \sqrt{\text{س}} = \text{٦} - \text{س} \quad \text{بتربيع الطرفين:}$$

$$\text{س} = (\text{٦} - \text{س})^{\text{٢}} \Leftarrow \text{س} = \text{٣٦} - \text{١٢س} + \text{س}^{\text{٢}}$$

$$\text{س}^{\text{٢}} - \text{١٣س} + \text{٣٦} = \text{٠} \Leftarrow (\text{س} - \text{٩})(\text{س} - \text{٤}) = \text{٠}$$

$\therefore$ ، س = ٩ أو س = ٤ .

٤/ $\sqrt{\text{س} + \text{٣}} + \sqrt{\text{س}} = \text{٣}$

$\sqrt{\text{س} + \text{٣}} = \text{٣} - \sqrt{\text{س}}$ بتربيع الطرفين.

$س + ٣ = (٣ - \sqrt{س})^{٢} \Rightarrow س + ٣ = ٩ - ٦\sqrt{س} + س$

$٦\sqrt{س} = ٦$ بالقسمة علي ٦.

$\sqrt{س} = ١$ بتربيع الطرفين $\Rightarrow س = ١$.

<u>تمرين(٦):</u>

حل المعادلات الآتية:

١/ $\sqrt{٣س + ١} = ٤$

٢/ $\sqrt{س^{٢} + ٢س} = \sqrt{٨}$

٣/ $\sqrt{س + \sqrt{٢س - ١}} = \sqrt{٢}$

٤/ $\sqrt{س + ٥} - \sqrt{س} = ١$.

الباب الرّابع

المثلثات

- ✓ **أهداف الباب الرابع :-**

بعد نهاية هذا الباب يتوقعأن يكون الطالب قادراً عليأنْ :

١. يجد النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين.

٢. يحل المتطابقات المثلثية.

٣. يحل المعادلات المثلثية.

الدرس الأوّل

النسب المثلثية

تذكّر أنّ : جا الزاوية = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا الزاوية = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، ظا = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$. وذلك إذا كانت الزاوية احدي الزاويتين الحادتين في المثلث القائم الزاوية.

النسب المثلثية للزوايا الخاصة والربعية:

جا صفر = صفر
جتا صفر = ١
ظا صفر = صفر

جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$
جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$
ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا ٤٥ = ١

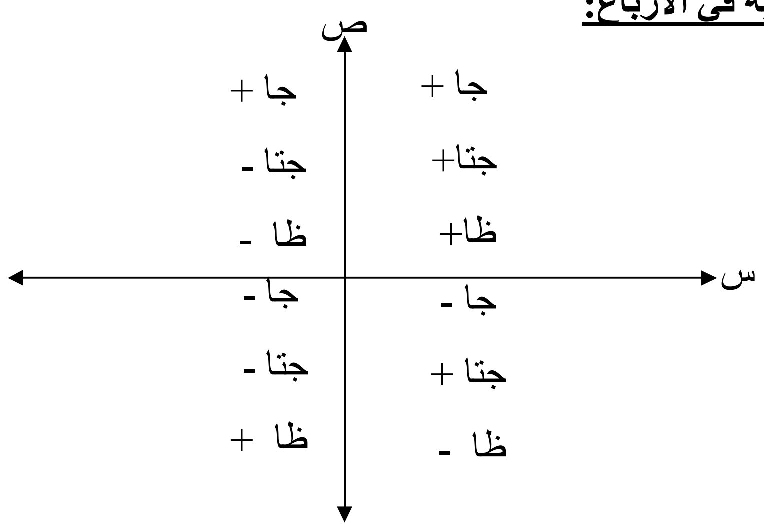
جا ٩٠ = ١
جتا ٩٠ = صفر
ظا ٩٠ = ∞

جا ١٨٠ = ٠
جتا ١٨٠ = -١
ظا ١٨٠ = ٠

جا ٢٧٠ = -١
جتا ٢٧٠ = ٠
ظا ٢٧٠ = $-\infty$

جا ٣٦٠ = ٠
جتا ٣٦٠ = ١
ظا ٣٦٠ = ٠

إشارات النسب المثلثية فى الأرباع:



قوانين مهمة:-

(١) $جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١$

(٢) $ظاس = \frac{جاس}{جتاس}$

(٣) $ظتاس = \frac{جتاس}{جاس} = \frac{١}{ظاس}$

(٤) $قتاس = \frac{١}{جاس}$

(٥) $قاس = \frac{١}{جتاس}$

(٦) $١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س$

(٧) $١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س$

النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين:-

$أ + ب \equiv$ مجموع زاويتين.

$أ - ب \equiv$ فرق زاويتين.

(٨) $جا(أ + ب) = جاأجتاب + جتاأجاب$

(٩) $جا(أ - ب) = جاأجتاب - جتاأجاب$

(١٠) $جتا(أ + ب) = جتاأجتاب - جاأجاب$

(١١) $جتا(أ - ب) = جتاأجتاب + جاأجاب$

(١٢) $ظا(أ + ب) = \frac{ظاأ + ظاب}{١ - ظاأظاب}$

(١٣) $ظا(أ - ب) = \frac{ظاأ - ظاب}{١ + ظاأظاب}$

الزوايا المنتسبة:

يمكنك من هذه القواعد أو بطريقة أخري استنتاج الزوايا المنتسبة التالية:

جا(٩٠ ± هـ) = ± جتاهـ
جتا(٩٠ ± هـ) = ∓ جاهـ
ظا(٩٠ ± هـ) = ∓ ظتاهـ

جا(١٨٠ ± هـ) = ∓ جاهـ
جتا(١٨٠ ± هـ) = ∓ جتاهـ
ظا(١٨٠ ± هـ) = ± ظتاهـ

جا(٢٧٠ ± هـ) = ∓ جتاهـ
جتا(٢٧٠ ± هـ) = ± جاهـ
ظا(٢٧٠ ± هـ) = ∓ ظتاهـ

جا(٣٦٠ ± هـ) = ± جاهـ
جتا(٣٦٠ ± هـ) = ± جتاهـ
ظا(٣٦٠ ± هـ) = ± ظاهـ

مثال(١): بدون إستخدام الجداول الرياضية ، جد قيمة الآتي:

١/ جا١٨جتا١٢+جتا١٨جا١٢ ٢/ جتا٥٠جتا١٠-جا٥٠جا١٠

٣/ $\frac{\text{ظا٢٥+ظا٢٠}}{\text{١–ظا٢٥ظا٢٠}}$ ٤/ جا٧٠جتا١٠-جتا٧٠جا١٠

الحل:-

١/ جا١٨جتا١٢+جتا١٨جا١٢= جا(١٨+١٢) = جا٣٠= $\frac{١}{٢}$.

٢ / جتا٥٠جتا١٠-جا٥٠جا١٠= جتا(٥٠+١٠) =جتا٦٠= $\frac{١}{٢}$.

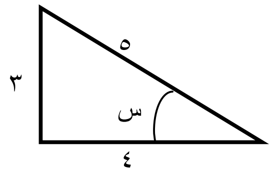
٣/ $\frac{\text{ظا٢٥+ظا٢٠}}{\text{١–ظا٢٥ظا٢٠}}$=ظا(٢٥+٢٠) =ظا٤٥=١ .

٤/ جا٧٠جتا١٠-جتا٧٠جا١٠=جا(٧٠–١٠) =جا٦٠= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

<u>مثال(٢):-</u> إذا كان : $\text{جاس} = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{جتاص} = \frac{١٢}{١٣}$ ، فجد قيمة الآتي:

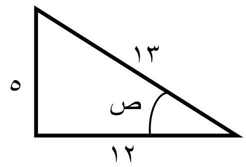
i/ $\text{جا}(\text{س} - \text{ص})$ ii/ $\text{جتا}(\text{س} + \text{ص})$

<u>الحل:-</u>



∵ ، $\text{جاس} = \frac{٣}{٥}$ فإنّ :

$\text{جتاس} = \frac{٤}{٥}$



$\text{جتاص} = \frac{١٢}{١٣}$

$\text{جاص} = \frac{٥}{١٣}$

i/ $\text{جا}(\text{س} - \text{ص}) = \text{جاس جتاص} - \text{جتاس جاص}$

$$= \frac{٣}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٣٦}{٦٥} - \frac{٢٠}{٦٥} = \frac{١٦}{٦٥} .$$

ii/ $\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) = \text{جتاس جتاص} - \text{جاس جاص}$

$$= \frac{٤}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٤٨}{٦٥} - \frac{١٥}{٦٥} = \frac{٣٣}{٦٥} .$$

<u>مثال(٣):</u> جد قيمة ما يلي:

١/ جا ٧٥ ٢/ ظا١٥

<u>الحل:-</u>

١/ جا٧٥= جا(٤٥+٣٠) =جا٤٥جتا٣٠-جتا٤٥جا٣٠ .

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣}-١}{٢\sqrt{٢}} .$$

٢/ ظا١٥ = ظا$(٦٠ - ٤٥) = \frac{ظا٦٠ - ظا٤٥}{١ + ظا٦٠ظا٤٥} = \frac{\sqrt{٣}-١}{١+\sqrt{٣}}$

$$= \frac{\sqrt{٣}-١}{\sqrt{٣}+١} = ٢ - \sqrt{٣} .$$

تمرين(١):

أ/ بدون إستخدام الجداول الرياضية جد قيمة ما يلي:

١) جتا١٥ ٢) جا١٠٥ ٣) ظا٧٥.

ب/ إذا كان: جاس $= \frac{٤}{٥}$ ، ظاص $= \frac{٥}{١٢}$ ، جد قيمة:

١) جا(س + ص) ٢) جتا(س – ص) ٣) ظا(س – ص).

ج/ بدون إستخدام الجداول الرياضية ، برهن صحة المتطابقات الآتية:

١) جا١٧جتا١٣+جتا١٥جا١٣ ٢) $\frac{ظا٧٠ - ظا٤٠}{١+ظا٧٠ظا٤٠}$

٣) جتا٨٠جتا٤٠-جا٨٠جا٤٠

د/ برهن أنّ :

١) جا$\left(\frac{\pi}{٢} - هـ\right)$=جتاهـ ، $\pi = ١٨٠^\circ$

٢) جتا$(\pi + س) = -$ جاس.

هـ) إذا كان أ ، ب ، جـ زوايا مثلث داخلية ، فبرهن أنّ :

ظاأ+ظاب+ظاجـ =ظاأظابظاجـ .

الدرس الثانى

النسب المثلثية لضعف الزاوية

إذا كان أ زاوية فإنّ ضعف أ هو ٢أ .

$$\text{جا٢أ} = \text{٢جاأجتاأ}$$

$$\text{جتا٢أ} = \text{جتا}^{٢}\text{أ} - \text{جا}^{٢}\text{أ}$$

$$= \text{٢جتا}^{٢}\text{أ} - ١$$

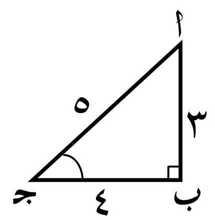
$$= ١ - \text{٢جا}^{٢}\text{أ}$$

$$\text{ظا٢أ} = \frac{\text{٢ظاأ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{أ}}$$

مثال(١):- إذا كان: ظاس = $\frac{٣}{٤}$ ، جد قيمة جا٢س ، جتا٢س ، ظا٢س .

الحل:-

من المثلث القائم الزاوية:



$$\text{ظاس} = \frac{٣}{٤}$$

$$\text{جاس} = \frac{٣}{٥} \quad ، \quad \text{جتاس} = \frac{٤}{٥}$$

- $\text{جا٢س} = \text{٢جاسجتاس}$

$$= ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$$

- $\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$

$$= \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٧}{٢٥} \; .$$

- $\text{ظا٢س} = \frac{\text{جا٢س}}{\text{جتا٢س}}$

$$= \frac{٢٤}{٢٥} \div \frac{٧}{٢٥} = \frac{٢٤}{٢٥} \times \frac{٢٥}{٧} = \frac{٢٤}{٧}$$

مثال(٢):- برهن صحة المتطابقات الآتية:

١) $\dfrac{\text{جا٣هـ}}{\text{جاهـ}} - \dfrac{\text{جتا٣هـ}}{\text{جتاهـ}} = ٢$ ٢) $\dfrac{\text{جا٢س}}{\text{١+جتا٢س}} = \text{ظا٢س}$

الحل:-

١) الطرف الأيمن: $\dfrac{\text{جا٣هـ}}{\text{جاهـ}} - \dfrac{\text{جتا٣هـ}}{\text{جتاهـ}} = \dfrac{\text{جا٣هـجتاهـ} - \text{جتا٣هـجاهـ}}{\text{جاهـجتاهـ}} = \dfrac{\text{جا}(\text{٣هـ} - \text{هـ})}{\text{جاهـجتاهـ}}$

$= \dfrac{\text{جا٢هـ}}{\text{جاهـجتاهـ}} = \dfrac{\text{٢جاهـجتاهـ}}{\text{جاهـجتاهـ}} = ٢$.

∴ ، الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

٢) الطرف الأيمن: $\dfrac{\text{جا٢س}}{\text{١+جتا٢س}} = \dfrac{\text{٢جاسجتاس}}{\cancel{١} + \text{٢جتا}^{٢}\text{س} - \cancel{١}} = \dfrac{\cancel{٢}\text{جاسجتاس}}{\cancel{٢}\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$= \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \text{ظاس}$.

∴ ، الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

تمرين(٢):

(١) بدون إستخدام الجداول الرياضية جد قيمة ما يلي:

أ/ قتا١٥ قا١٥ ب/ ظا٧٥ + ظتا٧٥ ج/ $\text{٢جتا}^{٢}\text{١٥} - ١$

د/ $١ - \text{٢جا}^{٢}\,٢٢\tfrac{١}{٢}$.

(٢) إذا كان: $\text{جتاهـ} = \dfrac{١٢}{١٣}$ ، جد قيمة جا٢هـ ، جتا٢هـ ، ظا٢هـ .

(٣) برهن صحة المتطابقات الآتية:

أ/ $\dfrac{\text{١−جتا٢س}}{\text{جا٢س}} = \text{ظاس}$ ب/ $\dfrac{\text{١+جتا٢س}}{\text{١−جتا٢س}} = \text{ظتا}^{٢}\text{س}$

الدرس الثالث

المعادلات المثلثية

المعادلة المثلثية هي المعادلة التي تحتوي علي نسبة مثلثية لزاوية مجهولة ، وحلها يعني إيجاد قيمة المجهول ، ويعتمد حل المعادلة المثلثية علي معرفة النسب المثلثية للزوايا الخاصة في هذه المرحلة وإشارات النسب في الأرباع.

مثال(١):- حل المعادلات الآتية لقيم ٠ $\leq$ س $\leq$ ٣٦٠.

i) جتاس = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ii) ظاس = $-$١

iii) ٢جا^{٢}س+جاس $-$ ١ = ٠

الحل:-

i) جتاس = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سالبة في الربعين الثاني والثالث.

س = ٣٠

في الربع الثاني : س = ١٨٠° $-$ ٣٠° = ١٥٠° .

في الربع الثالث : س = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

∴ س = ١٥٠° ، ٢١٠° .

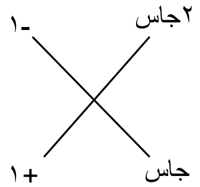
ii) ظاس = $-$١ سالب في الربعين الثاني والرابع.

س = ٤٥ .

في الربع الثاني : س = ١٨٠° $-$ ٤٥° = ١٣٥° .

في الربع الرابع : س = ٣٦٠° $-$ ٤٥° = ٣١٥°

∴ ، س = ١٣٥° ، ٣١٥° .



iii) ٢جا^{٢}س+جاس − ١ = ٠

(٢جاس − ١)(جاس + ١) = ٠

إما ٢جاس − ١ = ٠ ∴ ، جاس = $\frac{١}{٢}$

أو جاس + ١ = ٠ ∴ ، جاس = − ١ .

* عندما جاس = $\frac{١}{٢}$ موجب في الربعين الأول والثاني ، ∴ ، س = ٣٠° .

في الربع الأول : س = ٣٠° .

في الربع الثاني: س = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° .

* عندما جاس = $\frac{١}{٢}$ سالب في الثالث والرابع ، ∴ ، س = ٩٠° .

في الربع الثالث : س = ١٨٠° + ٩٠° = ٢٧٠° .

في الربع الرابع: س = ٣٦٠° − ٩٠° = ٢٧٠° .

∴ ، س = ٣٠° ، ١٥٠° ، ٢٧٠° .

<u>تمرين(٣):</u>

حل المعادلات الآتية لقيم ٠ ≤ س ≤ ٣٦٠° .

١) جتاس = $\frac{١}{٢}$ ٢) ظاس = ١

٣) جا^{٢}س = $\frac{٣}{٤}$ ٤) ٢جتا^{٢}س−جتاس − ١ = ٠

٥) جا٢س+جتاس = ٠

الباب الخامس

<u>نظرية الباقي</u>

✓ أهداف الباب الخامس :-

بعد دراسة هذا البابيتوقّعأن يكون الطالب قادراً علي:

١. يعرف نظرية الباقي.

٢. يقسم المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي.

٣. يجد عوامل المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي.

٤. يحلل المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي.

٥. يجد جذور المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي.

الدرس الأوّل

العامل للمقدار الجبري

تستخدم نظرية الباقي لتحليل المقادير الجبرية التي من الدرجة الثالثة فمافوق.

* **العامل:-** إذا كان ق(س) مقدار جبري ، وكان (س – أ) أحد عوامل المقدار ق(س)، فإنّ :

$$\boxed{\text{ق(أ)} = \text{صفر}}$$

مثال(١):- أثبت أنّ (س – ٣) عامل من عوامل المقدار: د(س) = س ^{٣} – ٢س ^{٢} + ٥س – ٢٤ .

الحل:-

د(س) = س ^{٣} – ٢س ^{٢} + ٥س – ٢٤

(س – ٣) = ٠ ⇐ س = ٣.

د(٣) = ٣ ^{٣} – ٢ × ٣ ^{٢} + ٥ × ٣ – ٢٤ = ٢٧ – ١٨ + ١٥ – ٢٤ = صفر .

∴ ، (س – ٣) عامل من عوامل المقدار.

مثال(٢):- برهن أنّ (س + ٢) عامل من عوامل المقدار:

ق(س) = س ^{٤} + ٢س ^{٣} – س ^{٢} + ٦س + ١٦

الحل:-

ق(س) = س ^{٤} + ٢س ^{٣} – س ^{٢} + ٦س + ١٦

(س + ٢) = ٠ ⇐ س = –٢

ق(–٢) = ١٦ – ١٦ – ٤ – ١٢ + ١٦ = صفر .

∴ ، (س – ٣) عامل من عوامل المقدار.

* **الباقي:-** إذا كان ق(س) مقدار جبري قُسم علي المقدار (س – أ)، وكان الباقي جـ فإنّ

$$\boxed{\text{ق(أ)} = \text{جـ}}$$ حيث جـ الباقي.

مثال(٣):- جد الباقي عند قسمة المقدار ى(س) = س ٣ + ٥س ٢ – ٧س + ١٢ علي (س – ٢) ؟

الحل:-

ى(س) = س ٣ + ٥س ٢ – ٧س + ١٢.

(س – ٢) = ٠ ⇐ س = ٢

ى(٢) = ٨ + ٢٠ – ١٤ + ١٢ = ٢٦ . ∴ ، الباقي = ٢٦ .

لاحظ: ى(س) = (س ٣ + ٥س ٢ – ٧س + ١٢) ÷ (س – ٢) = ر(س) + ٢٦ ،حيث ر(س) مقدارجبري يمثّل خارج القسمة و ٢٦يمثّل الباقي ، وبالتالي (س – ٢) ليست عاملاً من عوامل المقدار.

مثال(٤):- إذا كان (س + ١) عامل من عوامل المقدار:

ى(س) = س ٣ + ٢س ٢ + كس – ٦ ، فجد قيمة ك ؟

الحل:-

ى(س) = س ٣ + ٢س ٢ + كس – ٦.

(س + ١) = ٠ ⇐ س = –١

ى(–١) = –١ + ٢ – ك – ٦ = –٥ – ك ⇐ ى(–١) = ٠

–٥ – ك = ٠ ، ∴ ك = –٥.

مثال(٥):- إذا كان الباقي ١٢ عند قسمة المقدار :

هـ(س) = س ٣ + ٣س ٢ + ١٠س + جـ علي (س – ٢) ، فجد قيمة جـ؟

الحل:-

هـ(س) = س ٣ + ٣س ٢ + ١٠س + جـ.

(س – ٢) = ٠ ⇐ س = ٢

هـ(٢) = ٨ + ١٢ + ٢٠ + جـ = ٤٠ + جـ ، ولكن هـ(٢) = ١٢ .

∴ ، ٤٠ + جـ = ١٢ ⇐ جـ = ١٢ – ٤٠ = –٢٨ .

تمرين(١):

١) أثبت أنّ $(س - ٢)$ عامل من عوامل المقدار $ء(س) = س^{٣} - ٧س + ٦$.

٢) جد الباقي عند قسمة المقدار: $ﻫ(س) = س^{٤} + ٢س^{٣} - ٥س^{٢} + ٨$ علي $(س - ١)$.

٣) إذا كان $(س + ٢)$ عامل من عوامل المقدار: $ء(س) = س^{٣} + كس^{٢} + ٦$. جد قيمة ك .

٤) إذا كان الباقي ٨ عند قسمة المقدار :

$ﻫ(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + كس - ١٢$ ، فجد قيمة ك.

الدرس الثاني
إيجاد بقية العوامل

لإيجاد بقية العوامل نُجري القسمة المطولة.

مثال(١):- أثبت أنّ (س – ٢) عامل من عوامل المقدار:

ه(س) = س ^{٣} + ٢س ^{٢} – ٥س – ٦ ، ثمّ جد بقية العوامل؟

الحل:-

ه(س) = س ^{٣} + ٢س ^{٢} – ٥س – ٦.

(س – ٢) = ٠ ⟸ س = ٢.

ه(٢) = ٨ + ٨ – ١٠ – ٦ = صفر ، ∴ ، (س – ٢) عامل من عوامل المقدار.

الآن نوجد بقية العوامل باستخدام القسمة المطولة ، كالآتي:

س ^{٢} + ٤س + ٣

س – ٢ | س ^{٣} + ٢س ^{٢} – ٥س – ٦

س ^{٣} – ٢س ^{٢}

٤س ^{٢} – ٥س

٤س ^{٢} – ٨س

٣س – ٦

٣س – ٦

∴ ، س ^{٣} + ٢س ^{٢} – ٥س – ٦ = (س – ٢)(س ^{٢} + ٤س + ٣)

= (س – ٢)(س + ١)(س + ٣)

وبالتالي العوامل هي: (س – ٢) ، (س + ١) ، (س + ٣) .

مثال(٢):- أثبت أنّ (س + ٢) عامل من عوامل المقدار: ء(س) = س ^{٣} – ٧س – ٦ ، ثمّ جد بقية العوامل؟

الحل:-

د(س) = س^{٣} – ٧س – ٦.

(س + ٢) = ٠ ⇐ س = –٢.

∵ ، د(–٢) = –٨ + ١٤ – ٦ = ٠

∴ ، (س + ٢) عامل من عوامل المقدار.

∴ ، (س + ٢)(س^{٢} – ٢س – ٣)

س^{٢} – ٢س – ٣
س + ٢ | س^{٣} + ٠ – ٧س – ٦
س^{٣} + ٢س^{٢}
– ٢س^{٢} – ٧س
– ٢س^{٢} – ٤س
– ٣س – ٦
– ٣س – ٦
٠ ٠

(س + ٢)(س – ٣)(س + ١) ، وبالتالي العوامل هي:

(س + ٢) ، (س – ٣) ، (س + ١) .

مثال(٣):- جد جذور المعادلة: س^{٣} – ٢س^{٢} – ٥س + ٦ = ٠

الحل:-

نبحث عن عامل وذلك بالتعويض بعوامل العدد ٦ وهي: ±١، ±٢، ±٣، ±٦ .

د(١) = ١ – ٢ – ٥ + ٦ = ٠

∴ ، (س – ١) عامل من عوامل المقدار.

وبقسمة المقدار علي (س – ١) قسمة مطولة .

س^{٢} – س – ٦
س – ١ | س^{٣} – ٢س^{٢} – ٥س + ٦
س^{٣} – س^{٢}
– س^{٢} – ٥س
– س^{٢} + س
– ٦س + ٦
– ٦س + ٦
٠ ٠

∴ ، (س^{٢} – س – ٦)(س – ١) = ٠

(س – ٣)(س + ٢)(س – ١) = ٠

إما (س – ٣) = ٠ ⇐ س = ٣

أو (س + ٢) = ٠ ⇐ س = - ٢

أو (١- س) = ٠ ⇐ س = ١

∴ ، جذور المعادلة هي : ٣ ، -٢ ، ١

تمرين(٢):

١)أثبت أنّ $(س - ٣)$ عامل من عوامل المقدار: $ه(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٤س + ١٢$، ثمّ جد بقية العوامل.

٢) أثبت أنّ $(س - ٢)$ عامل من عوامل المقدار: $ء(س) = س^{٣} - ٧س + ٦$ ، ثمّ جد بقية العوامل.

٣) جد جذور المعادلة: $س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٠س - ٢٤ =$ صفر

الباب السّادس

المنطق الرياضي

✓ **أهداف الباب السادس :-**

بعد نهاية هذا الباب يتوقعأن يكون الطالب قادراً علىأنْ :

١. يتعرف المنطق الرياضي.

٢. يحدد قيم الصواب.

٣يكوّن جدول صواب القضايا المركّبة.

٤. يتعرف الروابط المنطقية وجداولها.

الدرس الأول

القضية وقيم الصواب

تعريف: المنطق الرياضي هو لغة علمية متفق عليها بين الرياضيين تُعني بكتابة الجمل الرياضية في صور رمزية مع قواعد معروفة سهلة الإستخدام.

ينقسم الكلام في اللغة إلي قسمين هما:

١- جُمل خبرية : وهي التي تحتمل الصواب والخطأ أو الصدق والكذب.

٢- جُمل إنشائية : وهي لا تحتمل الصواب والخطأ وتأتي في عدة صيغ هي: الأمر ، السؤال ، التعجب ، النداء ، التمني ، النهي.

■ **القضية:-**

تعريف: القضية هي جملةخبرية ذات معني محدّد يمكن وصفها بأنّها صائبة أو خاطئة ولا يمكن وصفها بالصواب والخطأ في آنٍ واحد.

■ **قيم الصواب:-**

* عندما تكون القضية صائبة نرمز لها ب (ص).

* عندما تكون القضية خاطئة نرمز لها ب (خ).

* يرمز للقضية بحرف أبجدي ، مثل القضية أ ، القضية ب ، ... وهكذا.

مثال(١): بيّن قيم الصواب للقضايا الآتية:

أ/ نهر النيل يجري في أفريقيا. " قضية صائبة"

ب/ هل أكرمتَ الضيف؟ " ليست قضية".

ج/ أكتب الدرس " ليست قضية".

د / إذا كان : س – ٥ = ٠فإنّ س = ٥ ." قضية صائبة (ص)"

هـ/ ٣ > ٧ . "قضية خاطئة (خ)".

و/ لندن عاصمة الصين." قضية خاطئة (خ)"

■ **قيم صواب القضية الواحدة:-**

إذا كان أ قضية فلها قيمتي صواب هما:

١/ إما صائبة (ص).   ٢/ أو خاطئة(خ).

أ
ص
خ

■ **نفي القضية**:- إذا كان أ قضية ، فإنّنا نرمز لنفي أ بالصورة : ~ أ وتُقرأ " ليست أ".

أ	~ أ
ص	خ
خ	ص

مثال(٢): جد قيم صواب القضايا الآتية ، ثمّ أنفيها وجد قيم الصواب للنفي:

i / أ ≡ الخرطوم عاصمة السعودية.

ii/ ب ≡ ٧ > ٢ .

iii/ جـ ≡ فرنسا دولة أفريقية.

vi/ د ≡ سواكن تقع علي البحر الأبيض المتوسط.

الحل:-

i / أ ≡ الخرطوم عاصمة السعودية. خاطئة (خ)

~ أ ≡ الخرطوم ليست عاصمة السعودية. صائبة (ص)

ii/ ب ≡ ٧ > ٢ . صائبة (ص)

~ ب ≡ ٧ ≤ ٢ خاطئة (خ)

iii/ جـ ≡ فرنسا دولة أفريقية. خاطئة (خ)

~ جـ ≡ فرنسا ليست دولة أفريقية. (ص)

/vi د ≡ سواكن تقع علي البحر الأبيض المتوسط. (خاطئة)

~ د ≡ سواكن لا تقع علي البحر الأبيض المتوسط. (صائبة)

تمرين(١):

*جد قيم صواب القضايا الآتية ، ثمّ أنفيها وجد قيمة الصواب:

أ ≡ ٥ + ٣ ≠ ٦ + ٤ .

ب ≡ ٦٣ يقبل القسمة علي ٧ .

جـ ≡ الفاشر تقع في شرق السودان.

د ≡الأُ بيّض أكبر سوق للصمغ العربي في العالم.

هـ ≡ بخت الرضا تقع في مدينة الدويم.

الدرس الثاني

القضايا المركبة وجداول الصواب للرابط (و) والرابط (أو)

■ **جدول الصواب لقضيتين:-**

أولاً: إذا كان ا قضية ، ب قضية فإنّ كل الحالات الممكنة كالآتي:

١) ا صائبة ، ب صائبة.

٢) ا صائبة ، ب خاطئة.

٣) ا خاطئة، ب صائبة.

٤) ا خاطئة ، ب خاطئة.

وبالتالي جدول قيم الصواب هو:

ا	ب
ص	ص
ص	خ
خ	ص
خ	خ

ثانياً: إذا كان ا ، ب ، جثلاث قضايا ، فإنّ جدول الصواب كالآتي:

ا	ب	ج
ص	ص	ص
ص	ص	خ
ص	خ	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	ص	خ
خ	خ	ص
خ	خ	خ

■ **القضية المركبة:-**

تعريف:- القضية المركبة هي التي تتكوّن من عدد من القضايا البسيطة وترتبط بإحدي أدوات الربط المنطقية.

أدوات الربط المنطقية هي:

١) الرابط " و" ويرمز له بالرمز($\wedge$).

٢) الرابط " أو" ويرمز له بالرمز($\vee$).

٣) إذا كان ...فإنّ ... ويرمز له بالرمز ($\leftarrow$) .

٤) إذا وفقط إذا كان ويرمز له بالرمز ($\leftrightarrow$) .

مثال(١):-

مستخدماً إحدي أدوات الربط المنطقية ، أربط كل زوج من أزواج القضايا التالية:

i/ أحمد طالب ذكي ، أحمد طالب مجتهد.

ii/ ذهب محمد إلي المكتبة ، ذهب محمد إلي المسجد.

iii/ أحرز المريخ ثلاثة أهداف ، يفوز المريخ بالكأس.

vi/ المثلث متساوي الأضلاع ، زوايا المثلث الداخلية متساوية.

الحل:-

i/ أحمد طالب ذكي ومجتهد.

ii/ ذهب محمد إلي المكتبة أوالمسجد.

iii/إذا أحرز المريخ ثلاثة أهداف ، فإنّه يفوز بالكأس.

vi/ يكون المثلث متساوي الأضلاع ، إذا وفقط إذا كانت زواياه الداخلية متساوية.

■ جداول الروابط المنطقية:

(١) جدول الرابط" و" (∧)   أ ∧ ب تُقْرأ أ و ب وجدول صوابها هو:

أ	ب	أ ∧ ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

(٢) جدول الرابط " أو" (∨)   أ ∨ بتُقْرأ أ أو ب وجدول صوابها هو:

أ	ب	أ ∨ ب
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

مثال(١): أوجد جدول صواب القضايا الاتية:

i/ ~ (~أ ∧ ب)   ii/ أ ∨ ~ ب

الحل:-

i/

أ	ب	~ أ	~ أ∧ب	~ (~أ ∧ ب)
ص	ص	خ	خ	ص
ص	خ	خ	خ	ص
خ	ص	ص	ص	خ
خ	خ	ص	خ	ص

ii/

أ	ب	~ ب	أ∨~ ب
ص	ص	خ	ص
ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص

تمرين(٢):

١)مستخدماً إحدي أدوات الربط المنطقية ، أربط كل زوج من أزواج القضايا التالية:

- نعمات بنت قصيرة ، نعمات بنت بدينة.
- نجح عمر في الرياضيات ، نجح عمر في الفيزياء.
- السحب كثيفة ، المطر ينهمر.
- الجو حار ، الشمس عمودية علي الأرض.

٢)كوّن جدول الصواب للقضايا الاتية:

i/ $\sim$ س $\wedge$ ص   ii/ $\sim$ (س $\vee$ ص) .

الدرس الثالث

جداول الصواب للرابط (إذا كان ...فإنّ ...) والرابط (إذا وفقط إذا ...)

(٣)جدول الرابط إذا كان فإنّ :-

أ ← بويُقْرأ إذا فإنّ :

أ	ب	أ ← ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

(٤) جدول الرابط إذا وفقط إذا :

أ ↔ ب وتقرأ تكون أ إذا وفقط إذا كانت ب. جدول الصواب لهذا الرابط هو:

أ	ب	أ ↔ ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

مثال(١): كوّن جدول صواب القضايا الآتية:

i/ أ ← ~ ب　　　ii/ ~ أ ↔ ب　　　iii/ (أ ← ب) ∧ ~ ب .

الحل:-

i/ أ ← ~ ب

أ	ب	~ ب	أ ← ~ب
ص	ص	خ	خ
ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص
خ	خ	ص	خ

ii/ ~ أ ↔ ب :

أ	ب	~ أ	~ أ ↔ ب
ص	ص	خ	خ
ص	خ	خ	ص
خ	ص	ص	ص
خ	خ	ص	خ

iii/ (أ ← ب) ∧ ~ ب :

أ	ب	أ ← ب	~ ب	(أ ← ب) ∧ ~ ب
ص	ص	ص	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

تمرين(٣):

كوّن جدول صواب القضايا الآتية:

١) ~ س ← ~ ص ٢) (س ∧ ص) ↔ (س ∨ ص)

٣) (س ← ص) ∧ (س ↔ ص) (٤) (أ ∨ ب) ← ~ جـ

الدرس الرابع

القضايا المتكافئة والقضايا الصائبة والخاطئة منطقياً

<u>تعريف:</u> نقول إنّ القضيتين متكافئتين منطقياً ، إذا كان لهما نفس قيم الصواب ، ويرمز للتكافؤ بـ ⟺ أو ≡ وعدم التكافؤ بـ ⟺̸ أو ≢ .

<u>مثال(١):</u> أثبت أنّ : ~(أ ∧ ب) ≡ ~أ ∨ ~ب ؟

<u>الحل:-</u>

أ	ب	أ ∧ ب	~ (أ ∧ ب)	~أ	~ب	~أ ∨ ~ب
ص	ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

↓ الطرف الأيمن ↓ الطرف الأيسر

∴ ، ~(أ ∧ ب) ≡ ~أ ∨ ~ب.

* **<u>القضية الصائبة منطقياً أو القضية التكرارية:-</u>**

إذا كان جميع قيم الصواب صائبة (ص) فنقول إنّ القضية صائبة منطقياً " تكرارية".

* **<u>القضية الخاطئة منطقياً " قضية تناقض":-</u>**

إذا كان جميع قيم الصواب خاطئة (خ) فنقول إنّ القضية خاطئة منطقياً " تناقض".

<u>مثال(١):-</u> برهن أنّ القضية: (س ∨ ~ س) ، صائبة منطقياً؟

الحل:-

س	~ س	(س ∨ ~ س)
ص	خ	ص
خ	ص	ص

∴ ، (س ∨ ~ س) صائبة منطقياً " تكرارية"

مثال(٢):- أثبت أنّ القضية (س ∧ ~ س) خاطئة منطقياً؟

الحل:-

س	~ س	(س ∧ ~ س)
ص	خ	خ
خ	ص	خ

∴ ، (س ∧ ~ س) خاطئةمنطقياً " تناقض".

تمرين(٤):

(١) برهن أنّ القضايا الآتية متكافئةمنطقياً :

i/ ~ (س ← ط) ⇔ س ∧ ~ ط .

ii/ ~ (أ ↔ ب) ≡ (أ ∧ ~ ب) ∨ (~ أ ∧ ب) .

(٢) بيّن أنّ القضايا الآتية صائبة منطقياً أو خاطئة منطقياً :

i/ أ ← (أ ∨ ب) .

ii/ (س ↔ ع) ∧ (~ س ↔ ع) .

الباب السابع

<u>المتتاليات</u>

✓ أهداف الباب السابع :-

بعد نهاية هذا الباب يتوقّع أنْ يكون الطالب قادراً على أنْ :

١. يتعرف المتتالية الحسابية والهندسية والهندسية اللانهائية.

٢. يميّز بين المتتاليات الحسابية والهندسية.

٣. يجد الحد العام للمتتاليات الحسابية والهندسية.

٤. يجد مجموع المتتاليات الحسابية والهندسية ، والهندسية اللانهائية.

الدرس الأول

المتتالية

تعريف:- المتتالية هي تطبيق مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية أو أيّ مجموعة جزئية منها ، وتبدأ بحد معروف يسمي الحد الأول.

إذا كان الحد النوني للمتتالية هو $ع_{ن} = د(ن)$ ، فإننا نعوّض $ن = ١، ٢، ٣، ٤، ...$ للحصول علي الحد $ع_{١}، ع_{٢}، ع_{٣}، ع_{٤}، ...$ وهكذا.

مثال(١): جد الخمسة حدود الأولي من المتتاليات التي حدها النوني يعطي بالعلاقة:

أ/ $ع_{ن} = ٣ن - ١$ ب/ $ع_{ن} = \frac{ن}{ن + ١}$

ج/ $ع_{ن} = (-١)^{ن}$ د/ $ع_{ن} = ٣ \times ٢^{ن-١}$

الحل:-

أ/ $ع_{ن} = ٣ن - ١$

$ع_{١} = ٣ \times ١ - ١ = ٢$ ، $ع_{٢} = ٣ \times ٢ - ١ = ٥$ ، $ع_{٣} = ٣ \times ٣ - ١ = ٨$ ،

$ع_{٤} = ٣ \times ٤ - ١ = ١١$ ، $ع_{٥} = ٣ \times ٥ - ١ = ١٤$

∴ ، الحدود هي: ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ .

ب/ $ع_{ن} = \frac{ن}{ن + ١}$

$ع_{١} = \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$ ، $ع_{٢} = \frac{٢}{٢ + ١} = \frac{٢}{٣}$ ، $ع_{٣} = \frac{٣}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$ ،

$ع_{٤} = \frac{٤}{٤ + ١} = \frac{٤}{٥}$ ، $ع_{٥} = \frac{٥}{٥ + ١} = \frac{٥}{٦}$

$\therefore$ ، الحدود هي : $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٥}{٦}$.

ج/ $ع_{ن} = (-١)^{ن}$

$ع_{١} = (-١)^{١} = -١$ ، $ع_{٢} = (-١)^{٢} = ١$ ، $ع_{٣} = (-١)^{٣} = -١$ ،

$ع_{٤} = (-١)^{٤} = ١$ ، $ع_{٥} = (-١)^{٥} = -١$

$\therefore$ ، الحدود هي : -١ ، ١ ، -١ ، ١ ، -١.

د/ $ع_{ن} = ٣ \times ٢^{ن-١}$

$ع_{١} = ٣ \times ٢^{١-١} = ٣ \times ٢^{٠} = ٣ \times ١ = ٣$ ، $ع_{٢} = ٣ \times ٢^{٢-١} = ٣ \times ٢ = ٦$ ،

$ع_{٣} = ٣ \times ٢^{٣-١} = ٣ \times ٢^{٢} = ١٢$ ، $ع_{٤} = ٣ \times ٢^{٤-١} = ٣ \times ٨ = ٢٤$ ،

$ع_{٥} = ٣ \times ٢^{٥-١} = ٣ \times ٢^{٤} = ٤٨$

$\therefore$ ، الحدود هي : ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨.

تمرين(١):

(أ)أكتب الخمسة حدود الأولي للمتتاليات الآتية ، ثمّ جد الحد العاشر:

i/ $ع_{ن} = ٩٨ - ٥ن$ ii/ $ع_{ن} = \frac{ن-١}{ن+٢}$

iii/ $ع_{ن} = \frac{(-١)^{ن}}{ن}$ vi/ $ع_{ن} = ن^{٢} + ن$

(ب) متتالية حدها الأول ٣ وتعطي بالعلاقة: $ع_{ن+١} = ع_{ن} + ن$ ، جد الستة حدود الأولي.

(ج) متتالية حدها النوني $ع_{ن} = ٢٨ - ٣ن$ ، جد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.

الدرس الثاني

المتتالية الحسابية

تعريف:- هي مجموعة أعداد يكون الفرق بين الحد والحد السابق له مباشرة ثابت.

دائماً نشير للحد الأول بـ أ ، للفرق الثابت بـ ء ، ولرتبة الحد بـ ں حيث ں ∈ ط ، وللحد

بـ $ح_ں$.

* أمثلة للمتتالية الحسابية:

٢ ، ٦ ، ١٠ ، ...

-١ ، ١ ، ٣ ، ...

-٤ ، -١ ، ٢ ، ...

-٥ ، -٧ ، -٩ ، ...

* الفرق الثابت " الأساس":

الفرق الثابت " الأساس" هو ء حيث:

$ء = ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = \cdots = ح_ں - ح_{ں-١}$.

عموماً : $\boxed{\text{ء = أيّ حد - الحد السابق له}}$.

مثال(١): من المتتاليات الآتية ، جد الحد الأول والأساس.

١/ ٣ ، ٧ ، ١١ ، ...

٢/ -٥ ، -٢ ، ١ ، ...

٣/ -٤ ، -٩ ، -١٤ ، ...

٤/ ٢٩ ، ٢٣ ، ١٧ ، ...

٥/ ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، صفر ، ...

الحل:-

١/ ٣ ، ٧ ، ١١ ، ...

$أ = ١$، $ى = ٧ - ٣ = ١١ - ٧ = ٤$.

٢/ -٥ ، -٢ ، ١ ، ...

$أ = -٥$، $ى = -٢ + ٥ = ٣$.

٣/ -٤ ، -٩ ، -١٤ ، ...

$أ = -٤$، $ى = -٩ - (-٤) = -٩ + ٤ = -٥$.

٤/ ٢٩ ، ٢٣ ، ١٧ ، ...

$أ = ٢٩$، $ى = ٢٣ - ٢٩ = -٦$.

٥/ ١، $\frac{١}{٢}$، صـــفر، ...

$أ = ١$، $ى = \frac{١}{٢} - ١ = -\frac{١}{٢}$.

مثال(٢): كوّن متتالية حسابية فيها:

i/ $أ = ٢$ ، $ى = ٤$.　　ii/ $أ = -٣$ ، $ى = ٥$

iii/ $أ = \frac{٣}{٢}$ ، $ى = \frac{١}{٢}$　　vi/ $أ = -٦$ ، $ى = -١$

v/ $أ = ٥٨$ ، $ى = -٣$.

الحل:-

i/ $أ = ٢$ ، $ى = ٤$ $\Leftarrow$ المتتالية هي: ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ...

ii/ $أ = -٣$ ، $ى = ٥$ $\Leftarrow$ المتتالية هي: -٣ ، ٢ ، ٧ ، ...

iii/ $أ = \frac{٣}{٢}$ ، $ى = \frac{١}{٢}$ $\Leftarrow$ المتتالية هي: $\frac{٣}{٢}$ ، ٢، $٢\frac{١}{٢}$، ...

vi/ أ = –٦ ، ء = –١ ⇐ المتتالية هي: –٦، –٧، –٨، ...

v/ أ = ٥٨ ، ء = –٣ ⇐ المتتالية هي: ٥٨، ٥٥، ٥٢، ...

الدرس الثالث

الحد العام للمتتالية الحسابية

الصورة العامة للمتتالية الحسابية هي:

أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، ... ، أ + (ن − ١)د .

∴ ، الحد العام للمتتالية الحسابية هو: $\boxed{\text{ع}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}}$ حيث :

أ ≡ الحد الأول ، د ≡ الأساس.

ن ≡ رتبة الحد ، $\text{ع}_{\text{ن}}$ ≡ الحد الذي ترتيبه " ن".

مثال(٣): من المتتالية: ٢ ، ٧ ، ١٢ ، ... جد :

i/ الحد العشرون ii/ الحد النوني.

iii/ رتبة الحد ٥٧ .

الحل:-

i/ $\text{ع}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}$.

أ = ٢ ، د = ٥ ، ن = ٢٠ .

$\text{ع}_{٢٠} = ٢ + (٢٠ - ١) \times ٥ = ٢ + ١٩ \times ٥$

$= ٢ + ٩٥ = ٩٧$.

ii/ $\text{ع}_{\text{ن}} = ٢ + (\text{ن} - ١) \times ٥$

$= ٢ + ٥\text{ن} - ٥$

∴ ، $\text{ع}_{\text{ن}} = ٥\text{ن} - ٣$

iii/ عندما $\text{ع}_{\text{ن}} = ٥٧$، فإنّ $٥\text{ن} - ٣ = ٥٧$

$٥\text{ن} = ٦٠ \Leftarrow \text{ن} = ١٢$ ، ∴ ، $\text{ع}_{١٢} = ٥٧$.

مثال(٤): جد رتبة وقيمة أول حد سالب في المتتالية: ٩٨ ، ٩٣ ، ٨٨ ، ...

الحل:-

$ع_ن = أ + (ن - ١)د$ ، $أ = ٩٨$ ، $د = -٥$.

$ع_ن = ٩٨ + (ن - ١) \times (-٥) = ٩٨ - ٥ن + ٥$

$= ١٠٣ - ٥ن$

$ع_ن = ١٠٣ - ٥ن$ ، أول حد سالب عندما $ع_ن < ٠$

$١٠٣ - ٥ن < ٠$ ، $١٠٣ < ٥ن \Leftarrow ٥ن > ١٠٣$

$ن > \frac{١٠٣}{٥} \Leftarrow ن > ٢٠\frac{٣}{٥}$ ، $\therefore ن = ٢١$

$\therefore$ ، أول حد سالب هو $ع_{٢١} = -٢$.

■ **كتابة المتتالية بمعلومية حدين فيها:-**

القاعدة: نكوّن معادلتين في أ ، د ونحلهما آنياً .

مثال(٥): متتالية حسابية حدها الثالث ١١ ، وحدها التاسع ٣٥ ، جد المتتالية؟

الحل:-

$ع_ن = أ + (ن - ١)د$ ، $ع_٣ = ١١$ ، $ع_٩ = ٣٥$

$أ + ٢د = ١١$ ------ (١)

$أ + ٨د = ٣٥$ ---- (٢)

$(٢) - (١) \Leftarrow ٦د = ٢٤ \Leftarrow د = ٤$

عوّض في (١) $\Leftarrow أ + ٨ = ١١ \Leftarrow أ = ١١ - ٨ = ٣$.

∴ ، أ = ٣ ، ء = ٤ وبالتالي المتتالية هي: ٣ ، ٧ ، ١١ ، ...

<u>مثال(٦)</u>:- إذا كان: س − ٨ ، ٥س − ٢ ، ٣س + ١٠ في توال عددي ، فجد قيمة س .

<u>الحل:-</u>

س − ٨ ، ٥س − ٢ ، ٣س + ١٠ في توال عددي ⇐ $ع_٢ - ع_١ = ع_٣ - ع_٢$

(٥س − ٢) − (س − ٨) = (٣س + ١٠) − (٥س − ٢)

٥س − ٢ − س + ٨ = ٣س + ١٠ − ٥س + ٢ ⇐ ٤س + ٦ = ١٢ − ٢س

∴ ، ٦س = ٦ ⇐ س = ١ .

■ **<u>الأوساط الحسابية:-</u>**

<u>مثال(٧)</u>: أدخل ٤ أوساط حسابية بين ٢ ، ٢٢؟

<u>الحل:-</u>

$ع_ن$ = أ + (ن − ١)ء ، ٢ □ □ □ □ ٢٢

أ = ٢ --- (١)

$ع_٦$ = ٢٢ ⇐ أ + ٥ء = ٢٢ ---- (٢)

عوّض (١) في (٢) ⇐ ٢ + ٥ء = ٢٢ ⇐ ٥ء = ٢٠ ⇐ ء = ٤

∴ ، الأوساط هي : ٦ ، ١٠ ، ١٤ ، ١٨ .

<u>مثال(٨)</u>: أدخل سبعة أوساط حسابية بين ٣٧ ، -٣ ؟

<u>الحل:-</u>

$ع_ن$ = أ + (ن − ١)ء ، ٣٧ □ □ □ □ □ □ □ 3-

أ = ٣٧ --- (١)

ع٩ = −٣ ⟸ أ + ٨د = −٣ ---- (٢)

عوّض (١) في (٢) ⟸ ٣٧ + ٨د = −٣ ⟸ ٨د = −٣ − ٣٧ = −٤٠

⟸ ٨د = −٤٠ ، ∴ د = −٥

∴ ، الأوساط هي : ٣٢ ، ٢٧ ، ٢٢ ، ١٧ ، ١٢ ، ٧ ، ٢ .

<u>تمرين(٢):-</u>

(١) إذا كان س ، ع ، ص في توال عددي ، فبرهن أنّ ع = $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ ؟

(٢) إذا كان س − ١ ، ٢س − ١ ، ٥س − ٧ في توالٍ عددي ، جد قيمة س ؟

(٣) من المتتالية -١ ، ١ ، ٣ ، ... ، جد:

١/ حدها الأول وأساسها. ٢/ الحد السابع عشر.

٣/ رتبة الحد ٩٧.

(٤) متتالية حسابية ، حدها الرّابع ٧ ، وحدها العاشر -٥ ، جد المتتالية.

(٥) أدخل ٥ أوساط حسابية بين -٧ ، ٨ ؟

(٦) جد رتبة وقيمة أوّل حد موجب من المتتالية: −٧٠ ، −٦٤ ، −٥٨ ، ...

(٧) متتالية حسابية حدودها ٥ ، وحدّها الأخير ٥ ، ومجموع حدودها٥ ، جد حدود هذه المتتالية.

الدرس الرابع

مجموع أول $ن$ حداً من المتتالية الحسابية

عرفنا أنّ الصورة العامة للمتتالية الحسابية هي:

$أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، \cdots ، ل$ حيث $ل$ الحد الأخير.

ولإيجاد مجموع $ن$حداً منها ابتداءاً من حدها الأول $أ$ وحتي حدها الأخير $ل$ نتبع الخطوات التالية:

$$جـ_ن = أ + أ + د + أ + ٢د + أ + ٣د + \cdots + ل \leftarrow (١)$$

$$جـ_ن = ل + ل - د + ل - ٢د + ل - ٣د + \cdots + أ \leftarrow (٢)$$

بالجمع $\Leftarrow$ $٢جـ_ن = ن أ + ن ل = ن[أ + ل]$.

$$\boxed{\therefore ، جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)}$$

هذا هو قانون مجموع المتتالية الحسابية بمعلومية حدها الأخير. حيث :

$جـ_ن \equiv$ المجموع ، $ن \equiv$ عدد الحدود.

$أ \equiv$ الحد الأول ، $ل \equiv$ الحد الأخير.

ولكن: $ل = أ + (ن - ١)د \Leftarrow جـ_ن = \frac{ن}{٢}[أ + أ + (ن - ١)د]$

$$\therefore ، \boxed{جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]}$$

هذا هو قانون المجموع العام للمتتالية الحسابية.

مثال(١): متتالية حسابية حدها الأول ٣ وحدها العشرين ٨١,٤، جد مجموع العشرين حداً الأولي منها؟

الحل:-

$ج_ن = \frac{ن}{٢}(أ+ل)$ ، أ = ٣ ، ل = ٨١,٤ ، ن = ٢٠ .

$ج_ن = \frac{٢٠}{٢}[٣+٨١,٤] = ١٠ \times ٨٤,٤ = ٨٤٤$.

<u>مثال(٢):</u> جد قيمة: ٢ + ٥ + ٨ + ... + ١١٩ ؟

<u>الحل:-</u>

رتبة الحد الأخير = عدد الحدود.

$ع_ن = أ + (ن - ١)د$ ، أ = ٢ ، د = ٣ ، ل = ١١٩

$١١٩ = ٢ + (ن - ١) \times ٣ = ٢ + ٣ن - ٣$

$١١٩ = ٣ن - ١$ ، $١٢٠ = ٣ن \Leftarrow ن = ٤٠$.

$\because ج_ن = \frac{ن}{٢}[أ + ل] \Leftarrow ج_{٤٠} = \frac{٤٠}{٢}[٣ + ١١٩]$.

$\therefore ج_{٤٠} = ٢٠ \times ١٢٢ = ٢٤٤٠$.

<u>مثال(٣):</u> جد مجموع الثلاثين حداً الأولي للمتتالية: -١ ، ١ ، ٣ ، ...؟

<u>الحل:-</u>

$ج_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$ ، أ = -١ ، د = ٢ ، ن = ٣٠

$ج_{٣٠} = \frac{٣٠}{٢}[٢ \times (-١) + (٣٠ - ١) \times ٢]$

$= ١٥[-٢ + ٥٨] = ١٥ \times ٥٦ = ٨٤٠$

$\therefore ج_{٣٠} = ٨٤٠$

<u>مثال(٤):</u> متتالية حسابية ، حدها الثالث ١٠ وحدها الخامس ١٨ ، جد مجموع الخمسين حداً الأولي منها؟

<u>الحل:-</u>

$ع_ن = أ + (ن - ١)د$.

$ع_٣ = ١٠$ ، $ع_٥ = ١٨$

$أ + ٢د = ١٠ \leftarrow (١)$

$أ + ٤د = ١٨ \leftarrow (٢)$

$(٢) - (١) \Leftarrow ٢د = ٨ \Leftarrow د = ٤$.

بالتعويض في (١) ، نحصل علي: $أ + ٨ = ١٠$ ، $\therefore أ = ٢$.

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$ ، $أ = ٢$ ، $د = ٤$ ، $ن = ٥٠$

$جـ_{٥٠} = \frac{٥٠}{٢}[٢ \times ٢ + (٥٠ - ١) \times ٤]$

$= ٢٥[٤ + ١٩٦] = ٢٥ \times ٢٠٠ = ٥٠٠٠$

$\therefore جـ_{٥٠} = ٥٠٠٠$

<u>مثال(٥):</u> قاعة دراسة بها ٢٠ مدرج ، المدرج الأول به ٢٤ مقعد ، والمدرج الثاني به ٢٨ مقعد ، والمدرج الثالث به ٣٢ مقعد وهكذا. جد:

أ/ عدد المقاعد بالمدرج الأخير.

ب/ عدد المقاعد الكلي بالقاعة.

<u>الحل:-</u>

٢٤ ، ٢٨ ، ٣٢ ، ...

$ع_ن = أ + (ن - ١)د$ ، $أ = ٢٤$ ، $د = ٤$ ، $ن = ٢٠$

$ع_{٢٠} = ٢٤ + (٢٠ - ١) \times ٤ = ٢٤ + ٧٦ = ١٠٠$ مقعد.

عدد المقاعد الكلي = $جـ_{٢٠}$.

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{ن}{٢}\left[٢أ + (ن-١)د\right] \Leftarrow \text{جـ}_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}\left[٢\times٢٤ + (٢٠-١)\times٤\right]$$

$$= ١٠\left[٤٨+٧٦\right] = ١٠\times١٢٤ = ١٢٤٠$$

$\therefore$ ، $\text{جـ}_{٢٠} = ١٢٤٠$ مقعد.

تمرين(٣)

(١) جد قيمة: ٣ + ٥ + ٧ + ... + ٤٩ .

(٢)جد مجموع الأربعين حداً الأولي للمتتالية: ٣ ، ٧ ، ١١ ، ...

(٣) متتالية حسابية حدها الثامن ٢٠ ، وحدها الخامس عشر ٤١، جد مجموع العشرين حداً الأولي منها.

(٤) إذا كان تكلفة المتر الأول لحفر وبناء بئر هي ٧٥ جنيه ، وتكلفة المتر الذي يليه ١٠٠ جنيه، وتكلفة المتر الثالث ١٢٥ جنيه. كم يكلف حفر وبناء بئر عمقها ١٨ متر.

(٥) متتالية حسابية حدها الثالث = ١٠ ، وحدها الخامس = ٦. أوجد مجموع العشرة حدود الأولي منها.

(٦) في متتالية عددية مجموع ن حداً منها يعطي بالعلاقة : $\text{جـ}_{ن} = ٢١ن - ن^{٢}$ ، جد :

أ/ المتتالية. ب/ حدها العام.

ج/ ترتيب أول حد سالب.

الدرس الخامس

المتتالية الهندسية

تعريف: المتتالية الهندسية هي مجموعة أعداد ناتج قسمة كل حد علي الحد السابق له مباشرةً نسبة ثابتة.

الصورة العامة للمتتالية الهندسية هي:

$أ ، أر ، أر^{٢} ، أر^{٣} ، \cdots ، أر^{ن-١}$

$\boxed{ح_ن = أر^{ن-١}}$ هذا هو قانون الحد العام للمتتالية الهندسية ، حيث:

$أ \equiv$ الحد الأول ، $ر \equiv$ الأساس.

$ن \equiv$ رتبة الحد ، $ح_ن \equiv$ الحد الذي ترتيبه ن.

$$ر = \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \cdots = \frac{ح_ن}{ح_{ن-١}} .$$

عموماً : $ر$ تسمي الأساس أو النسبة الثابتة.

مثال(١): من المتتاليات الهندسية التالية ، جد الحد الأول والأساس:

i/ ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ... ii/ ٣٦ ، ٢٤ ، ١٦ ، ...

iii/ ٨ ، ٤ ، ٢ ، ... vi/ ٣ ، -٦ ، ١٢ ، ...

الحل:-

i/ ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...

$أ = ٢ \quad ، \quad ر = \frac{٦}{٢} = \frac{١٨}{٦} = ٣$

ii/ ٣٦ ، ٢٤ ، ١٦ ، ... $\Leftarrow$ $أ = ٣٦ \quad ، ر = \frac{٢٤}{٣٦} = \frac{٢}{٣}$.

iii/ ٨ ، ٤ ، ٢ ، ... $\Leftarrow$ $أ = ٨ \quad ، ر = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$.

vi/ ٣ ، -٦ ، ١٢ ، ... $\Leftarrow$ أ = ٣ ، ر = $\frac{-٦}{٣} = \frac{١٢}{-٦} = -٢$.

مثال(٢): كوّن المتتالية الهندسية التي فيها:

i/ أ = ٤ ، ر = ٣ .   ii/ أ = ١٨ ، ر = $\frac{٢}{٣}$

iii/ أ = $\frac{١}{٤}$ ، ر = ٢

الحل:-

i/ أ = ٤ ، ر = ٣ $\Leftarrow$ المتتالية هي : ٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ...

ii/ أ = ١٨ ، ر = $\frac{٢}{٣}$ $\Leftarrow$ المتتالية هي : ١٨ ، ١٢ ، ٨، ...

iii/ أ = $\frac{١}{٤}$ ، ر = ٢ $\Leftarrow$ المتتالية هي : $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٢}$، ١، ...

مثال(٣): من المتتالية ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... جد:

i/ حدها الأول وأساسها.   ii/ حدها الثامن.

iii/ رتبة الحد ١٥٣٦ .

الحل:-

i/ أ = ٣ ، ر = ٢ .

ii/ $ع_ن = أ ر^{ن-١} \Leftarrow ع_٨ = ٣ \times ٢^{٨-١} = ٣ \times ٢^{٧}$
$= ٣ \times ١٢٨ = ٣٨٤$

iii/ رتبة الحد ١٥٣٦.

عندما $ع_ن = ١٥٣٦$ فإنّ : $١٥٣٦ = ٣ \times ٢^{ن-١}$ بالقسمة علي ٣.

$\frac{١٥٣٦}{٣} = ٢^{ن-١} \Leftarrow ٥١٢ = ٢^{ن-١}$

$٢^{ن-١} = ٢^{٩} \Leftarrow ن - ١ = ٩$ ، $\therefore$ ، ن = ١٠ .

مثال(٤): إذا كان: ٣ ، س – ١ ، ١٢ في توالٍ هندسي ، فجد قيمة س .

الحل:-

٣ ، س – ١ ، ١٢ في توال هندسي فإنّ : $\frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}} = \frac{\text{ع}_{٣}}{\text{ع}_{٢}}$.

$(\text{س} - ١)^{٢} = ٣٦$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين.

$\text{س} - ١ = \pm ٦$

إمّا $\text{س} - ١ = ٦$ ∴ ، $\text{س} = ٧$

أو $\text{س} - ٦ = -٦$ ∴ ، $\text{س} = -٥$

■ **كتابة المتتالية الهندسية بمعلومية حدين فيها:-**

القاعدة:- نكوّن معادلتين ونحلهما آنياً بالقسمة.

مثال(٥): متتالية هندسية حدها الثالث ٨ ، وحدها السادس ٦٤ ، جد المتتالية؟

الحل:-

$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-١}$

∵ ، $\text{ع}_{٣} = ٨ \Leftarrow \text{أ}\,\text{ر}^{٢} = ٨ \leftarrow (١)$

∵ ، $\text{ع}_{٦} = ٦٤ \Leftarrow \text{أ}\,\text{ر}^{٥} = ٦٤ \leftarrow (٢)$

$(٢) \div (١) \Leftarrow \frac{\text{أ}\,\text{ر}^{٥}}{\text{أ}\,\text{ر}^{٢}} = \frac{٦٤}{٨} \Leftarrow \text{ر}^{٣} = ٨ = ٢^{٣}$ ، $\text{ر} = ٢$.

عوض في (١) $\Leftarrow \text{أ} \times ٤ = ٨$ ، $\text{أ} = ٢$.

∴ ، المتتالية هي : ٢ ، ٤ ، ٨ ، ...

■ الأوساط الهندسية:-

مثال(٦):- أدخل أربعة أوساط هندسية بين ٢ ، ٤٨٦ ؟

الحل:-

$ع_ن = أ ر^{ن-1}$. ٢ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ 486

$أ = ٢$ ------ (١) ، $ع_٦ = ٤٨٦$ ، وبالتالي:

$أ ر^٥ = ٤٨٦$ --- (٢)

(٢) ÷ (١) $\Leftarrow \frac{أ ر^٥}{أ ر} = \frac{٤٨٦}{٢} = ٢٤٣$.

$ر^٥ = ٣^٥$ ، $\therefore ر = ٣$. الأوساط هي : ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ١٦٢ .

تمرين(٤)

١) من المتتالية ١٢ ، ٦ ، ٣ ، ... جد :

أ/ حدها الأول وأساسها. ب/ الحد السابع.

٢) إذا كان س ، ع ، ص في توالٍ هندسي ، برهن أنّ : $ع = \sqrt{س ص}$.

٣) إذا كان س ، ١٢ ، ٣٦ في توالٍ هندسي ، جد قيمة س .

٤) متتالية هندسية حدها الرابع ٤ ، وحدها السابع $\frac{١}{٢}$ ، جد المتتالية؟

٥) أدخل أربعة أوساط هندسية بين ٣ ، ٩٦ ؟

الدرس السادس

مجموع أول ن حداً من المتتالية الهندسية

الصورة العامة للمتتالية الهندسية هي:

$\text{أ} ، \text{أ}\text{ر} ، \text{أ}\text{ر}^{٢} ، \text{أ}\text{ر}^{٣} ، \cdots ، \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}-١}$

$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ} + \text{أ}\text{ر} + \text{أ}\text{ر}^{٢} + \text{أ}\text{ر}^{٣} + \cdots + \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}-١} \rightarrow (١)$

بضرب الطرفين $\times \text{ر}$.

$\text{ر}\,\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ}\text{ر} + \text{أ}\text{ر}^{٢} + \text{أ}\text{ر}^{٣} + \text{أ}\text{ر}^{٤} + \cdots + \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}} \rightarrow (٢)$ بالطرح:

$(٢) - (١) \Rightarrow \text{ر}\,\text{جـ}_{\text{ن}} - \text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ}\text{ر}^{\text{ن}} - \text{أ} = \text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)$

$\Rightarrow \text{جـ}_{\text{ن}}(\text{ر} - ١) = \text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)$ بالقسمة علي $(\text{ر} - ١)$.

$$\boxed{\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}}$$

حيث : $\text{جـ}_{\text{ن}} \equiv$ المجموع ، $\text{أ} \equiv$ الحد الأول ، $\text{ر} \equiv$ الأساس ، $\text{ن} \equiv$ عدد الحدود.

مثال(١): من المتتالية ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... جد مجموع العشرة حدود الأولي منها؟

الحل:-

٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...

$\text{أ} = ٣ ، \text{ر} = ٢ ، \text{ن} = ١٠$.

$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$

$\text{جـ}_{١٠} = \frac{٣(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = \frac{٣(١٠٢٤ - ١)}{١} = ٣ \times ١٠٢٣ = ٣٠٦٩$

مثال(٢): متتالية هندسية حدها الأول ١ ، وحدها السادس٣٢ ، جد مجموع الثمانية حدود الأولي ؟

الحل:-

$ع_ن = أ ر^{ن-١}$

$أ = ١ \leftarrow (١)$

$ع_٦ = ٣٢ \Leftarrow أ ر^٥ = ٣٢ \leftarrow (٢)$

$ر^٥ = ٣٢ = ٢^٥ \Leftarrow ر = ٢$.

$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} \Leftarrow جـ_٨ = \frac{١(٢^٨ - ١)}{٢ - ١} = ٢٥٦ - ١ = ٢٥٥$

■ **المتتالية الهندسية اللانهائية:**

$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ عندما $ن = \infty \Leftarrow ر^\infty = \infty$ عندما $ر > ١$.

$\boxed{جـ_\infty = \infty}$ عندما $ر > ١$.

$جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ عندما $ن = \infty \Leftarrow ر^\infty =$ صـــفر ، عند $ر < ١$.

$جـ_\infty = \frac{أ(١ - ر^\infty)}{١ - ر} = \frac{أ(١ - ٠)}{١ - ر} = \frac{أ}{١ - ر}$.

$\boxed{جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر}}$ عندما $ر < ١$.

مثال(٣):- جد قيمة ما يلي:

١) $٨ + ٤ + ٢ + \cdots \leftarrow \infty$

٢) $٣٦ + ٢٤ + ١٦ + \cdots \leftarrow \infty$

الحل:-

١) $٨ + ٤ + ٢ + \cdots \leftarrow \infty$

$أ = ٨$ ، $ر = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

$$ج_{\infty} = \frac{أ}{1-ر} \quad ، \therefore ج_{\infty} = \frac{8 \times 2}{(1-\frac{1}{2}) \times 2} = \frac{16}{2-1} = 16 .$$

$\therefore$ ، $ج_{\infty} = 16$.

٢) $36 + 24 + 16 + \cdots \to \infty$

$أ = 36$ ، $ر = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$$ج_{\infty} = \frac{أ}{1-ر} \quad ، \therefore ج_{\infty} = \frac{36 \times 3}{(1-\frac{2}{3}) \times 3} = \frac{108}{3-2} = 108$$

$\therefore$ ، $ج_{\infty} = 108$.

<u>مثال(٤)</u>:- متتالية هندسية لا نهائية ، حدها الأول ١٨ ومجموعها الكلي ٥٤ ، جد أساسها؟

<u>الحل:-</u>

$$ج_{\infty} = \frac{أ}{1-ر}$$

$\frac{54}{1} = \frac{18}{1-ر}$ بالضرب العكسي

$18 = 54 - 54ر \Leftarrow 54ر = 54 - 18 = 36$

$\therefore$ ، $ر = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$. $\therefore$ ، أساسها $= \frac{2}{3}$.

<u>تمرين(٥)</u>

(١) جد قيمة ما يلي:

i/ $12 + 6 + 3 + \cdots \to \infty$

ii/ $48 + 36 + 27 + \cdots \to \infty$

iii/ $1{,}8 + 0{,}18 + 0{,}018 + \cdots \to \infty$

(٢) متتالية هندسية لانهائية ، مجموعها الكلي $\frac{128}{3}$ وأساسها $\frac{1}{4}$ ، جد حدها الأول؟

الباب الثامن

<u>الإحصاء</u>

✓ **أهداف الباب الثامن :-**

بعد دراسة هذا البابيتوقّعأنْ يكون الطالب قادراً عليأنْ :

١.يعرّف الإحصاء.

٢.يتعرّف مقاييس النزعة المركزية.

٣. يعرف الوسط الحسابي.

٤. يجد الوسط الحسابي من مفردات.

٥. يجد الوسط الحسابي من الجدول.

٦. يتعرف الوسيط.

٧. يجد الوسيط من مفردات.

٨. يجد الوسيط لبيانات مبوبة في جدول تكراري.

٩. يتعرف المنوال.

١٠. يجد المنوال لمفردات.

١١. يجد المنوال لقيم مبوبة في الجدول التكراري.

الباب الاول

الإحصاء

تعريف:- الإحصاء هو مجموعة الطرق والنظريات العلمية التي تهدف إلي جمع البيانات ، وعرضها ، ووصفها ، وتحليلها ، وإستخدام نتائجها في أغراض التحقق أو التقرير أو التنبؤ.

أهداف الإحصاء:-

١) جمع البيانات.

٢) عرض البيانات.

٣) وصف البيانات.

٤) تحليل البيانات.

٥) إستخدام نتائج البيانات.

أغراض الإحصاء هي : التحقق – التقرير - التنبؤ.

يتم جمع البيانات بعدة طرق منها:

i/ الإستبيانات. ii/ معلومة من مصادر قديمة موثوق بها.

يتم عرض البيانات بعدة طرق منها:

i/ في صورة جداول تكرارية.

ii/ في صورة رسوم بيانية "مدرّج تكراري –مضلّع تكراري".

iii/ في صورة رسوم هندسية " دوائر – مربعات".

وقد بق أنْ درست هذه الحالات في مرحلة التعليم الأساسي.

وصف البيانات:

يتم وصف البيانات بإيجاد:

i/ مقاييس النزعة المركزية. ii/ مقاييس التشتت.

iii/ مقاييس الإعتدال.   vi/ مقاييس الإلتواء.

وسنقتصر في دراستنا علي مقاييس النزعة المركزية فقط.

مقاييس النزعة المركزية:-

تعريف: مقاييس النزعة المركزية هي ظاهرة تراكم القيم حول قيمة متوسطة " نموذجية".

مقاييس النزعة المركزية هي :

١) الوسط الحسابي.   ٢) الوسيط.   ٣) المنوال.

أولاً : الوسط الحسابي:

تعريف: الوسط الحسابي هو القيمة التي لو أعطيت لِكلّ مفردة ، لكان الناتج هو نفس مجموع القيم الأصلية.

تعريف رياضي:- الوسط الحسابي هو مجموع القيم علي عددها. ويُرمز للوسط الحسابي بـ: $\bar{س}$ وبالتالي:

$$\boxed{\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}}$$

ميزات الوسط الحسابي:-

١) سهل الحساب وواضح المعني.

٢) تدخل كل القيم في حسابه.

عيوبه:-

مضلّل وينحاز للقيم المتطرفة أو الشاذة.

ثانياً : المنوال:-

هو المفردة الأكثر شيوعاً أو الأكبر تكراراً .

ميزاته:- يعتبر أكثر تعبيراً عن البيانات ، ولذلك يستخدم كمقياس نزعة في صناعة الملبوسات الجاهزة.

ثالثاً : الوسيط:-

تعريف:-الوسيط هو المفردة التي تتوسّط المفردات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

طريقة إيجاد الوسيط:

أ/ إذا كان ن فردية ، فيوجد وسيط واحد نوجده بالخطوات الآتية:-

i) رتبة الوسيط = $\frac{ن+١}{٢}$.   ii)نرتب البيانات تصاعدياً .

ب/ إذا كان ن زوجية ، فيوجد وسيطان:-

i) رتبة الوسيط الأول = $\frac{ن}{٢}$.

ii) رتبة الوسيط الثاني = $\frac{ن+٢}{٢}$.

iii)نرتّب البيانات تصاعدياً .

vi) الوسيط النهائي = الوسط الحسابي للوسيطين الأول والثاني.

مثال(١):- جد الوسط الحسابي للقيم: ١٨ ، ٢٦ ، ٢٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٢ .

الحل:-

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} .$$

$$\bar{س} = \frac{١٨+٢٦+٢٢+١٤+١٦+١٢}{٦} = \frac{١٠٨}{٦} = ١٨ .$$

مثال (٢):- جد المنوال من القيم : ٤ ، ٨ ، ٣ ، ٧ ، ٥ ، ٧ ، ٣ ، ٣ ، ٩ .

الحل:-

المنوال هو ٣، لأنه الأكثر تكراراً .

مثال(٣):- جد الوسيط من البيانات:

٨٥ ، ٩٢ ، ٨٦ ، ٨٤ ، ٩١ ، ٩٠ ، ٧٩ .

الحل:-

∵ عدد المفردات ن = ٧ فردياً ، فإنّ رتبة الوسيط = $\frac{ن+١}{٢} = \frac{٧+١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$.

الترتيب تصاعدياً : ٧٩ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ . ∴ ، الوسيط هو المفردة الرابعة من البداية وبالتالي الوسيط = ٨٦ .

مثال(٤):- جد الوسط الحسابي والمنوال والوسيط من البيانات:

-٣ ، -١ ، ١ ، ٨ ، ١١ ، ١٠ ، -١ ، -٥ .

الحل:-

* $\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$

$\bar{س} = \frac{-٣-١+١+٨+١١+١٠-١-٥}{٨} = \frac{٢٠}{٨} = ٢\frac{١}{٢}$

* المنوال = -١ .

* رتبة الوسيط الأول = $\frac{ن}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$.

رتبة الوسيط الثاني = $\frac{ن+٢}{٢} = \frac{٨+٢}{٢} = ٥$.

الترتيب تصاعدياً : -٥ ، -٣ ، -١ ، -١ ، ١ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ .

الوسيط الأول = -١ ، الوسيط الثاني = ١ .

∴ ، الوسيط النهائي = $\frac{-١+١}{٢} = \frac{صفر}{٢} =$ صفر .

<u>تمرين(١)</u>

(١) جد المنوال والوسيط من البيانات:

٤ ، ٨ ، ٩، ٧ ، ٤، ٥ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١٠ ، ٧ .

(٢) جد الوسط الحسابي والمنوال للقيم : ٣ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ٢ .

(٣) جد الوسط الحسابي والوسيط للقيم : ٣٥ ، ٢٨ ، ٣٦ ، ٣٤ ، ٣٢ ، ٢٧ .

(٤)إذا كان مجموع درجات طلاب فصلٍ ما ٣٠٢٤ درجة ، وكان وسطهم الحسابي ٧٢ درجة ، جد عدد طلاب الفصل.

(٥) إذا كان متوسط وزن الفرخة ١,٥ كجم لستة فرخات ، ومتوسط وزن الفرخة لخمسة فرخات منهم ١,٤ كجم. جد وزن الفرخة السادسة؟

الدرس الثاني

الوسط الحسابي من الجدول التكراري

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum (\text{م} \times \text{ك})}{\sum \text{ك}}$$

حيث: م ≡ مراكز الفئات ، $\sum$ك ≡ مجموع التكرارات.

مثال(١): جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري التالي:

الفئة	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	المجموع
التكرار	٢	٨	١٤	١٠	٦	٤٠

الحل:-

بإعادة كتابة الجدول رأسياً لتسهيل الحسابات.

الفئة	ك	م	$\sum$(م×ك)
١٦-	٢	١٨	٠٣٦
٢٠-	٨	٢٢	١٧٦
٢٤-	١٤	٢٦	٣٦٤
٢٨-	١٠	٣٠	٣٠٠
٣٢-	٦	٣٤	٢٠٤
المجموع	٤٠		١٠٨٠

∵ ، $$\bar{\text{س}} = \frac{\sum (\text{م} \times \text{ك})}{\sum \text{ك}}$$

مركز الفئة م = **خطأ!**

$$\bar{\text{س}} = \frac{١٠٨٠}{٤٠} = ٢٧$$

مثال(٢):- جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري التالي:

الدرجة	٢	٤	٦	٨	١٠	المجموع
التكرار	٨	١٠	١٦	١٢	٤	٥٠

الحل:-

هذا الجدول يسمي الجدول التكراري البسيط وفيه لا توجد مركز فئة.

الدرجة (س)	ك	$\sum$(م×ك)
٢	٨	٠١٦
٤	١٠	٠٤٠
٦	١٦	٠٩٦
٨	١٢	٠٩٦
١٠	٤	٤٠
	٥٠	٢٨٨

$$\bar{س} = \frac{\sum(م\times ك)}{\sum ك}$$

$$\bar{س} = \frac{٢٨٨}{٥٠} = ٥,٧٦$$

تمرين(٢)

جد الوسط الحسابي من الجداول التكرارية التالية:

(١)

الفئة	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٩	١٠	١٢	١٠	٩	٥٠

(٢)

الكمية المستهلكة	٠	٤	٨	١٢	١٦	٢٠
عدد المستهلكين	٣٠	٢١	١٥	١٦	١٤	٤

الدرس الثالث

المنوال من الجدول التكراري

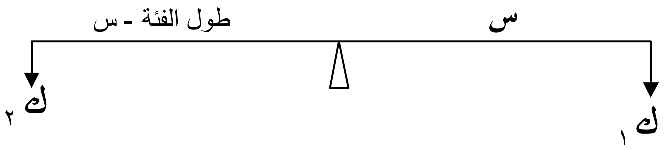
الفئة المنوالية: الفئة المنوالية هي الفئة التي تقابل أكبر تكرار.

يُحسب المنوال من الجدول التكراري بثلاث طرق هي:

١) **طريقة مركز الفئة المنوالية: "غير دقيقة"**

المنوال = مركز الفئة المنوالية

٢) **طريقة الرافعة: " دقيقة":**



المنوال = مبدأ الفئة المنوالية + س

(ك $_{١}$ × س = ك $_{٢}$ (طول الفئة – س)

في الشكل علي اليسار:

ك $_{١}$ يمثل تكرار الفئة قبل المنوالية.

ك $_{٢}$ يمثل تكرار الفئة بعد المنوالية.

نوجد قيمة س من العلاقة : ك $_{١}$ س = ك $_{٢}$ (طول الفئة – س) .

٣) **طريقة بيرسون:- " أكثر الطرق دقة"**

وفي هذه الطريقة نحسب قيمة س من العلاقة التالية:

خطأ! = **خطأ!**

فيكون: المنوال = مبدأ الفئة المنوالية + س

<u>مثال(١):</u> جد المنوال من الجدول التكراري التالي بالطرق الثلاث السابقة للجدول التكراري التالي:

الفئة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	١٨	٢٤	٢٦	٢٠	١٢	١٠٠

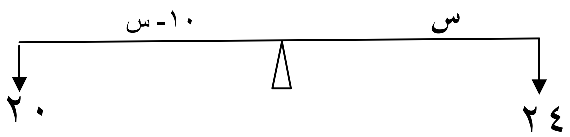
<u>الحل:-</u>

<u>أولاً</u> :- طريقة مركز الفئة:

المنوال = مركز الفئة المنوالية ، والفئة المنوالية هي ٣٠ وأقل من ٤٠ ، لأنها الفئة الأكثر تكراراً .

$$\therefore \text{، المنوال} = \frac{\text{٣٠} + \text{٤٠}}{\text{٢}} = \text{٣٥} \; .$$

<u>ثانياً</u> : طريقة الرافعة:



المنوال = مبدأ الفئة المنوالية + س

$$\text{٢٤س} = \text{٢٠}(\text{١٠} - \text{س})$$

$$\text{٢٤س} = \text{٢٠٠} - \text{٢٠س}$$

$$\text{٢٤س} + \text{٢٠س} = \text{٢٠٠} \Leftarrow \text{٤٤س} = \text{٢٠٠}$$

$$\therefore \text{، س} = \frac{\text{٢٠٠}}{\text{٤٤}} = \frac{\text{٥٠}}{\text{١١}} = \text{٤}\tfrac{\text{٦}}{\text{١١}} \; .$$

$$\text{المنوال} = \text{٣٠} + \text{٤}\tfrac{\text{٦}}{\text{١١}} = \text{٣٤}\tfrac{\text{٦}}{\text{١١}} \; .$$

ثالثاً : <u>طريقة بيرسون:-</u>

المنوال = مبدأ الفئة المنوالية + س

$$\frac{\text{س}}{\text{١٠} - \text{س}} = \frac{\text{٢٦} - \text{٢٤}}{\text{٢٦} - \text{٢٠}} \Leftarrow \frac{\text{س}}{\text{١٠} - \text{س}} = \frac{\text{٢}}{\text{٦}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$$

$$٣س = ١٠ - س \Leftarrow ٤س = ١٠ \Leftarrow س = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$$

المنوال = ٣٠+٢,٥ =٣٢,٥ .

<u>تمرين(٣)</u>

جد المنوال من الجدول التكراري التالي بالطرق الثلاث:

الفئة	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	المجموع
التكرار	١٥	١٨	٢٠	١٦	١٥	٨٠

<u>الدرس الرّابع: الوسيط من الجدول التكراري:-</u>

لإيجاد الوسيط من الجدول التكراري نتبع الخطوات التالية:

١) نوجد رتبة الوسيط = $\frac{\sum ك}{٢}$.

٢)نكوّن المتجمّع الصاعد.

٣) الوسيط = مبدأ فئة الوسيط + طول الفئة × $\frac{\left(\frac{\sum ك}{٢} - ك_{١}\right)}{ك_{٢} - ك_{١}}$

حيث :

طول الفئة = الفرق الثابت بين بداية الفئة ونهايتها.

$ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ هما التكراران اللذان تقع بينهما رتبة الوسيط.

مبدأ فئة الوسيط هي الفئة التي تقابل $ك_{١}$ في المتجمع الصاعد.

<u>مثال(١):</u> <u>جد</u> الوسيط من الجدول التكراري التالي:

الفئة	٢-	٨-	١٤-	٢٠-	٢٦-	المجموع
التكرار	٧	١٤	١٨	١٦	٥	٦٠

<u>الحل:-</u>

رتبة الوسيط $= \frac{\sum ك}{٢} = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$.

الوسيط = مبدأ فئة الوسيط + طول الفئة $\times \frac{\left(\frac{\sum ك}{٢} - ك_{١}\right)}{ك_{٢} - ك_{١}}$

نكوّن المتجمع الصاعد:-

أقل من ٢	أقل من ٨	أقل من ١٤	أقل من ٢٠	أقل من ٢٦	أقل من ٣٢
صفر	٧	٢١	٣٩	٥٥	٦٠

مبدأ فئة الوسيط = ١٤ ، طول الفئة = ٦ .

$ك_{١} = ٢١$ ، $ك_{٢} = ٣٩$.

الوسيط $= ١٤ + \frac{٦(٣٠ - ٢١)}{٣٩ - ٢١} = ١٤ + \frac{٦ \times ٩}{١٨} = ١٤ + ٣ = ١٧$.

<u>مثال(٢):</u> جد الوسيط من الجدول التكراري التالي:

الفئة	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٦	١٢	١٥	١٤	٥	٥٢

الحل:-

رتبة الوسيط $= \frac{\sum ك}{٢} = \frac{٥٢}{٢} = ٢٦$.

نكوّن المتجمع الصاعد.

أقل من ٥	أقل من ١٥	أقل من ٢٥	أقل من ٣٥	أقل من ٤٥	أقل من ٥٥
صفر	٦	١٨	٣٣	٤٧	٥٢

الوسيط = مبدأ فئة الوسيط + طول الفئة $\times \frac{\left(\frac{\sum ك}{٢} - ك_١\right)}{ك_٢ - ك_١}$

مبدأ فئة الوسيط = ٢٥ ، طول الفئة = ١٠ .

$ك_١ = ١٨$ ، $ك_٢ = ٣٣$.

الوسيط $= ٢٥ + \frac{١٠(٢٦-١٨)}{٣٣-١٨} = ٢٥ + \frac{١٠\times٨}{١٥} = ٢٥ + \frac{١٦}{٣} = ٢٥ + ٥\frac{١}{٣}$

∴ ، الوسيط $= ٣٠\frac{١}{٣}$.

تمرين(٤)

الجدول التالي يبين درجات طلاب في إمتحان المعلومات العامة ، أدرس الجدول جيداً ، ثمّ أملأْ الفراغ:

الفئة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٣	٤	٨	١٥	٢٠	٢٤	٢٦	١٢	٨

١) عدد الطلاب الجالسين للإمتحان = --

٢) طول الفئة = ------------------------------------

٣) المدي المطلق = --------------------------------

٤) الفئة المنوالية = ------------------------------------

٥) مبدأ الفئة المنوالية = --------------------------------

٦) مركز الفئة المنوالية = ---------------------------------

٧) مبدأ فئة الوسيط = -------------------------------------

٨) إذا كان درجة النجاح ٥٠درجة فما فوق ، فإنّ عدد الطلاب الناجحين = ----------------

٩) إذا كان النجاح بنسبة ٨٠درجة فما فوق هو تقدير ممتاز ، فإنّ عدد الطلاب الذين نالوا تقدير ممتاز = --

١٠)إذا كان الجلوس للملاحق للطلاب الذين أحرزوا أقلّ من ٥٠ درجة وأكثر من ٢٠ درجة فإنّ عدد الطلاب الذين يجلسون للملاحق = --

١١)إذا كان يُفصل الطلاب الذين أحرزوا أقلّ من ٢٠درجة ، فإنّ عدد الطلاب المفصولين =
