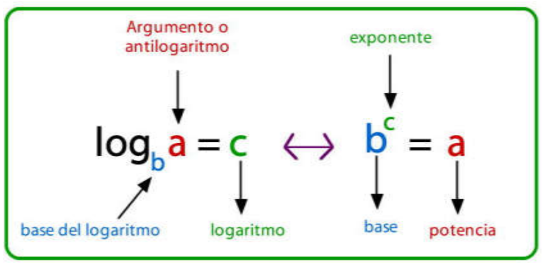
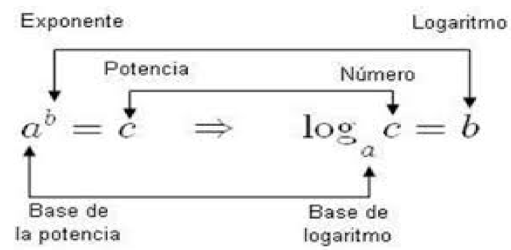
LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

(4° AÑO Educación Media General y Técnica)

1- Definición de Logaritmo

Se define logaritmo como el exponente de una potencia con cierta base, es decir, el número al cual se debe elevar una base dada para obtener un resultado determinado.





Por ejemplo:

$5^0 = 1$ $5^1 = 5$ $5^2 = 25$ $5^3 = 125$, etc.

- Luego, siendo la **base** 5, el logaritmo de 1 (que se escribe $\log_5 1$) es 0, por que 0 es el **exponente** al que hay que elevar la **base** 5 para que dé 1
- el $\log_5 5$ es 1
- el $\log_5 25$ es 2
- el $\log_5 125$ es 3, etc.

No existe el logaritmo de los números negativos.

El argumento y la base de un logaritmo son números reales positivos. Además, la base no puede ser 1. Es decir, en la expresión $\mathbf{\log_b a}$, siempre, por definición, $a \in R^+$ y $b \in R^+ - \{1\}$.

La expresión $\mathbf{\log_b a}$, se lee como: **"logaritmo de a en base b".**

Ejemplo1: Calcula el valor de $\log_7 343$ equivale a resolver la ecuación:

$$\mathbf{\log_7 343 = x}$$

Entonces, ya que la base del logaritmo es 7, el exponente no se conoce y 343 es el argumento, es decir, el valor de la potencia, se puede escribir:

$7^x = 343$ por descomposición del 343 nos queda $7^x = 7^3$, luego, igualando los exponentes, se concluye que $\mathbf{x = 3}$

2- Propiedades

2.1- Logaritmo de la unidad. El logaritmo de 1 en cualquier base es igual a 0.

$$\log_b (1) = 0 \; ; \; \text{con } b \neq 1.$$

Ej: $\log_5 (1) = 0$ porque $5^0 = 1$ $\quad \log_7 (1) = 0$ porque $7^0 = 1$ $\quad \log_{20} 1 = 0 \Leftrightarrow 20^0 = 1$

2.2- Logaritmos de la base

El logaritmo de la base es igual a 1. $\quad \log_b (b) = 1 \; ;$ con $b \neq 1$.

Ej: $\log_5 (5) = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$ $\quad \log_6 (6) = 1 \Leftrightarrow 6^1 = 6$ $\quad \log_{12} (12) = 1 \Leftrightarrow 12^1 = 12$

2.3- Logaritmo de una potencia con igual base:

El logaritmo de una potencia de un número es igual al producto entre el exponente de la potencia y el logaritmo del número.

$$\log_b b^n = n, \text{ con } b \neq 1 \qquad \text{Ej: } \log_6 6^3 = 3$$

2.4- Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c \qquad \text{Ej: } \log_b (5 \cdot 2) = \log_b 5 + \log_b 2$$

2.5- Logaritmos de un cociente

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el logaritmo del divisor.

$$\log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$$

Ej: $\log_2 \left(\frac{3}{4}\right) = \log_2 3 - \log_2 4$

2.6- Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

$\log_a c^n = n \log_a c$ Ej: $\log_3 10^2 = 2 \log_3 10$

2.7- Logaritmo de una raíz

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido entre el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_b a$$

$$\log_4 \sqrt[6]{16} = \frac{1}{6} \cdot \log_4 4^2$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2$$

$$\log_4 \sqrt[6]{16} = \frac{1}{3}$$

2.8- Cambio de base

$$\log_p a = \frac{\log_b a}{\log_b p}$$

para todo p, a, b > 0; b, c ≠ 1

Ej: $\log_2 5 = \log 5 / \log 2$

RESUMEN:

Definición y Notación

$$\boxed{\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x \quad , \forall x \in IR^+ \wedge b \neq 1}$$

Propiedades

$Log_b 1 = 0$	Logaritmo de uno es cero
$Log_b b = 1$	Logaritmo de la base es igual a uno
$Log_b (b^n) = n$	Log de potencia de la base es igual al exponente
$Log_b (m \bullet n) = Log_b m + Log_b n$	Logaritm de producto
$Log_b \left(\frac{m}{n}\right) = Log_b m - Log_b n$	Logaritm de cuociente
$Log_b (m^n) = n \bullet Log_b m$	Logaritmo de Potencia
$Log_b (\sqrt[n]{m}) = \frac{Log_b m}{n}$	Logaritmo de Raíz
$Log_b (x) = \frac{Log_c (x)}{Log_c (b)}$	Cambio de BASE

Ejercicios resueltos.

1 Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{64}\cdot 2^3}{32\cdot\sqrt{8}}\right)$ b) $\log\sqrt[3]{\dfrac{1000\cdot 10^{-2}}{10^5\cdot 10^{-1}}}$

Calcular el valor de logaritmos

Para calcular el valor de un logaritmo podemos hacerlo aplicando la definición o aplicando las propiedades.

a) $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{64}\cdot 2^3}{32\cdot\sqrt{8}}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{64}\cdot 2^3}{32\cdot\sqrt{8}}\right) = \log_2\left(\sqrt{64}\cdot 2^3\right) - \log_2\left(32\cdot\sqrt{8}\right) =$$

$$\log_2\sqrt{64} + \log_2 2^3 - \left(\log_2 32 + \log_2\sqrt{8}\right) =$$

$$\log_2\left(2^6\right)^{1/2} + 3\log_2 2 - \left(\log_2 2^5 + \log_2\left(2^3\right)^{1/2}\right) =$$

$$\log_2 2^3 + 3\cdot 1 - \left(5\log_2 2 + \log_2 2^{3/2}\right) =$$

$$3\log_2 2 + 3 - 5\cdot 1 - \frac{3}{2}\log_2 2 =$$

$$3\cdot 1 + 3 - 5 - \frac{3}{2}\cdot 1 = 3 + 3 - 5 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

b) $\log\sqrt[3]{\dfrac{1000\cdot 10^{-2}}{10^5\cdot 10^{-1}}} = -1$

$$\log\sqrt[3]{\frac{1000\cdot 10^{-2}}{10^5\cdot 10^{-1}}} = x \Leftrightarrow 10^x = \sqrt[3]{\frac{1000\cdot 10^{-2}}{10^5\cdot 10^{-1}}}$$

$$10^x = \sqrt[3]{\frac{10^3\cdot 10^{-2}}{10^4}} \rightarrow 10^x = \sqrt[3]{\frac{10}{10^4}}$$

$$10^x = \sqrt[3]{\frac{1}{10^3}} \rightarrow 10^x = \sqrt[3]{10^{-3}}$$

$$10^x = (10)^{-3/3} \rightarrow 10^x = 10^{-1} \rightarrow x = -1$$

Toma logaritmos en las siguientes expresiones y desarrolla:

a) $a = \dfrac{x^2}{d\sqrt{a}}$ b) $x = \dfrac{m}{n}\sqrt{p}\sqrt[3]{q}$

a) $a = \dfrac{x^2}{d\sqrt{a}}$

$$a = \frac{x^2}{d\sqrt{a}} \xrightarrow{1} \log a = \log \frac{x^2}{d\sqrt{a}}$$

$$\log a \underset{\boxed{2}}{=} \log x^2 - \log d\sqrt{a}$$

$$\log a \underset{\boxed{3}}{=} \log x^2 - \left(\log d + \log \sqrt{a}\right)$$

$$\log a = \log x^2 - \log d - \log \sqrt{a}$$

Propiedades de los logaritmos

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos de los factores.

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER:

1.- Aplicando propiedades logarítmicas determina el valor de cada expresión.

a.-) $X = a^2.b\sqrt[3]{ab^2}$ b.-) $X = \dfrac{ab^5.c^2}{3}$ c.-) $X = y^2.z^2$ d.-) $X = \dfrac{m^3n\sqrt[5]{mn^4p}}{\sqrt{mnp}}$

e.-) $X = 81m^2n^3$ f.-) $X = \dfrac{2m^2}{a^3}$ g.-) $X = \dfrac{a^2b\sqrt[3]{a^2.b}}{\sqrt[5]{a^2b^3}}$

2.- Conociendo el logaritmo de una expresión determinar la expresión que lo determinó

Ejemplo: dado la el valor del logaritmo, determina **"X"** como expresión.

$\log_a m + 2\log_a n - 5\log_a p$ **de donde** $\log_a x = \log_a \dfrac{mn^2}{P^5}$ es decir $\mathbf{X = \dfrac{mn^2}{p^5}}$ operación inversa

a.-) $\log_a X = \dfrac{\log_a m}{3} - \dfrac{\log_a n}{2} + b$

b.-) $\log_a X = 2\sqrt{10} + \log_a 5 - 3\log_a b - \log_a 11$

c.-) $\log_a X = \log_a (a+b) + \log_a (b-a)$