Exercice 1

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-x^2-3{\cdot}x+1}{x-1}$$

1. Donner l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f.
2. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
3. Etablir le tableau de signe de la fonction f' sur $\mathcal{D}_f$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.
(on ne complétera pas les valeurs du tableau ...)

Correction 1

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un quotient dont le dénominateur s'annule en 1.
On en déduit que la fonction f admet pour ensemble de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. L'expression de la fonction d est donnée sous la forme du quotient de la fonction u par v définies par :
$u(x) = -x^2-3{\cdot}x+1 \quad ; \quad v(x) = x-1$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -2{\cdot}x-3 \quad ; \quad v'(x) = 1$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(-2{\cdot}x-3)(x-1)-(-x^2-3{\cdot}x+1){\cdot}1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2{\cdot}x^2+2{\cdot}x-3{\cdot}x+3+x^2+3{\cdot}x-1}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2{\cdot}x+2}{(x-1)^2}$$

3. Le numérateur de l'expression de la fonction f' est un polynôme du second degré qui admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2-4\times(-1)\times2 = 4+8 = 12$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2\times(-1)} = \frac{-2{\cdot}(1+\sqrt{3})}{-2} = 1+\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2\times(-1)} = \frac{-2{\cdot}(1-\sqrt{3})}{-2} = 1-\sqrt{3}$$

On en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2-3{\cdot}x+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

4. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	-∞		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 2

On considère la fonction définie par la relation suivante :

$$f : x \longmapsto (5x^2+5x-4){\cdot}\sqrt{x}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f.
On admet les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto0^+} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

Correction 2

1. La seule contrainte sur cette formule est que $\sqrt{x}$ soit définie ; ainsi l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

2. a. L'expression de la fonction f est définie par le produit des deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = 5x^2+5x-4 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 10x+5 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)$$

$$= (10x+5){\cdot}\sqrt{x}+(5x^2+5x-4){\cdot}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2x(10x+5)}{2\sqrt{x}}+\frac{5x^2+5x-4}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{20x^2+10x+5x^2+5x-4}{2\sqrt{x}} = \frac{25x^2+15x-4}{2\sqrt{x}}$$

b. La dérivée s'écrit sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est positif ; pour étudier son signe, il suffit de connaître le signe du numérateur.
Le polynôme du second degré définissant ce quotient a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 15^2-4\times25\times(-4) = 625 > 0$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{625} = 25$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet donc les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15-25}{50} = \frac{-40}{50} = -\frac{4}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15+25}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$25x^2{+}15x{-}4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$					‖	$-$	0	$+$	

3. Calculons l'image de $\frac{1}{5}$ par la fonction f :

$$f\Big(\frac{1}{5}\Big) = \Big[5{\times}\Big(\frac{1}{5}\Big)^2 + 5{\times}\frac{1}{5} - 4\Big]\sqrt{\frac{1}{5}}$$
$$= \Big(5{\times}\frac{1}{25} + 1 - 4\Big)\sqrt{\frac{1}{5}} = \Big(\frac{1}{5} + 1 - 4\Big)\sqrt{\frac{1}{5}}$$
$$= -\frac{14}{5}\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{14\sqrt{5}}{25}$$

Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
Variation de f	0	$\searrow$	$-\frac{14\sqrt{5}}{25}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^2-2x-2}{2x^2+x+1}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Etablir que la fonction dérivée f' admet l'expression suivante :
$$f'(x) = \frac{7x^2+14x}{\big(2x^2+x+1\big)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   On admet les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \frac{3}{2} \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$

3. En déduire que la fonction f admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2.

Correction 3

1. Le dénominateur est un polynôme du second degré ; son discriminant est :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4{\times}2{\times}1 = -7$$
Le discriminant est strictement négatif ; son dénominateur ne s'annule pas : son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v où :
$u(x) = 3x^2 - 2x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2x^2 + x + 1$
qui admettent pour dérivée les fonctions :
$u'(x) = 6x - 2 \quad ; \quad v'(x) = 4x + 1$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(6x-2)\cdot(2x^2+x+1) - (3x^2-2x-2)\cdot(4x+1)}{\big(2x^2+x+1\big)^2}$$
$$= \frac{(12x^3{+}6x^2{+}6x\text{-}4x^2\text{-}2x\text{-}2)\text{-}(12x^3{+}3x^2\text{-}8x^2\text{-}2x\text{-}8x\text{-}2)}{\big(2x^2{+}x{+}1\big)^2}$$
$$= \frac{(12x^3+2x^2+4x-2) - (12x^3-5x^2-10x-2)}{\big(2x^2+x+1\big)^2}$$
$$= \frac{7x^2+14x}{\big(2x^2+x+1\big)^2}$$

   b. Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur ; on peut factoriser le numérateur :
$7x^2 + 14x = 7x(x+2)$
Le signe du coefficient du terme du second degré est négatif ; on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Effectuons les calculs suivants :

- $f(-2) = \dfrac{3{\times}(-2)^2 - 2{\times}(-2) - 2}{2{\times}(-2)^2 + (-2) + 1} = \dfrac{14}{7} = 2$
- $f(0) = \dfrac{3{\times}0^2 - 2{\times}0 - 2}{2{\times}0^2 + 0 + 1} = \dfrac{-2}{1} = -2$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Variation de f	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

3. Puisque $2 > \frac{3}{2}$ et $-2 < -\frac{3}{2}$ et d'après le tableau de variations :

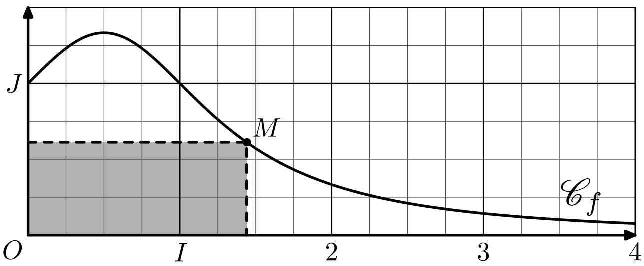
- 2 est la maximum de la fonction f et il est atteint pour $x = -2$;
- -2 est la minimum de la fonction f et il est atteint pour $x = 0$;

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et on construit comme l'indique la figure ci-dessus un rectangle où les points O et M sont des sommets de celui-ci.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x.

1. Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$.
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction $\mathcal{A}'$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.
3. Quel est la position du point M afin que l'aire du rectangle soit maximale?

Correction 4

1. Le point M a pour abscisse x et appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$; ainsi, le point M a pour coordonnées :
   $$M\Big(x\,;\frac{1}{x^2-x+1}\Big)$$
   Ainsi, le rectangle formé par le point M a pour dimensions x et $\dfrac{1}{x^2-x+1}$. Son aire a pour valeur :
   $$\mathcal{A}(x)=x\times\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{x}{x^2-x+1}$$

2. a. L'expression de la fonction $\mathcal{A}$ est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
   $u(x)=x \quad ; \quad v(x)=x^2-x+1$
   qui admettent pour dérivées :
   $u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=2x-1$
   La fonction $\mathcal{A}$ admet pour dérivée la fonction $\mathcal{A}'$ dont l'expression est donnée par la formule :
   $$\mathcal{A}'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
   $$=\frac{1\times(x^2-x+1)-x\times(2x-1)}{\big(x^2-x+1\big)^2}$$
   $$=\frac{x^2-x+1-2x^2+x}{\big(x^2-x+1\big)^2}=\frac{-x^2+1}{\big(x^2-x+1\big)^2}$$

   b. Le dénominateur de ce quotient est strictement positif sur $\mathbb{R}_+$.
   Le polynôme $-x^2+1$ admet pour racines -1 et 1. Son coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on obtient le tableau de signe suvant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-x^2+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}'(x)$					|	$+$	0	$-$	

   c. On a la valeur suivante :
   $$\mathcal{A}(1)=\frac{1}{1^2-1+1}=\frac{1}{1}=1$$
   Le signe de la fonction dérivée permet de déterminer le sens de variation de la fonction f. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Variation de $\mathcal{A}$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

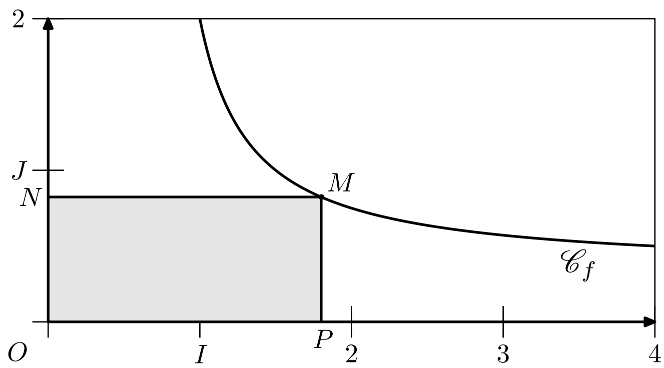
3. Pour que l'aire du rectangle soit maximale, il est nécessaire que le point M ait pour abscisse 1.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\Big]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\Big[$ par la relation :

$$f(x)=\frac{x+1}{3x-2}$$

La représenation $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où x est l'abscisse du point M. Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

1. Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $\mathcal{A}$.

3. Etablir le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.

4. En déduire la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.

Correction 5

1. En notant x l'abscisse du point M, la longueur du rectangle $OPMN$ a pour valeur :
$OP = x$

Le point M appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ et a pour coordonnée :
$$M(x\,;f(x)) = \Big(x\,;\frac{x+1}{3x-2}\Big)$$
Ainsi, le rectangle $OPMN$ a pour largeur :
$$ON = \frac{x+1}{3x-2}$$
Ainsi, le rectangle $OPMN$ a pour aire :
$$\mathcal{A}(x) = ON\times OP = \frac{x+1}{3x-2}\times x = \frac{x^2+x}{3x-2}$$

2. La fonction $\mathcal{A}$ associant à chaque nombre x l'aire du rectangle $OPMN$ a son expression définie par le quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x^2+x \quad ; \quad v(x) = 3x-2$
qui admettent pour dérivée :
$u(x) = 2x+1 \quad ; \quad v'(x) = 3$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $\mathcal{A}'$:
$$\mathcal{A}'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(2x+1)\cdot(3x-2)-(x^2+x)\cdot 3}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{(6x^2-4x+3x-2)-(3x^2+3x)}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{6x^2-x-2-3x^2-3x}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2-4x-2}{(3x-2)^2}$$

3. Le dénominateur de la fonction $\mathcal{A}'$ est positif sur $\Big[\frac{2}{3}\,;+\infty\Big[$. Le signe de $\mathcal{A}'$ ne dépend que de son numérateur.

Etudions le polynôme du second degré $3x^2-4x-2$ qui admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-4)^2-4\times3\times(-2) = 16+24 = 40$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = \sqrt{4\times10} = 2\sqrt{10}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-4)-2\sqrt{10}}{2\times3} = \frac{4-2\sqrt{10}}{6} = \frac{2\cdot(2-\sqrt{10})}{2\times3} = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-4)+2\sqrt{10}}{2\times3} = \frac{4+2\sqrt{10}}{6} = \frac{2\cdot(2+\sqrt{10})}{2\times3} = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$$
Le coefficient du terme du second degré étant positif, ce polynôme admet le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
$3x^2-4x-2$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

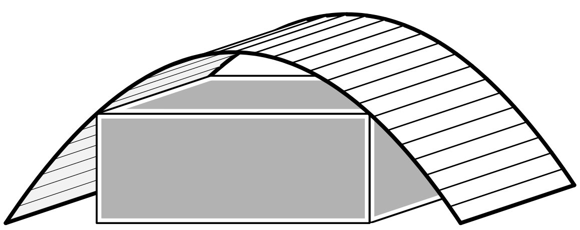
On obtient l tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\Big]\frac{2}{3}\,;+\infty\Big[$

x	$\frac{2}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

4. A l'aide du tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$, on en déduit que l'aire minimale du rectangle $OPMN$ est atteinte lorsque le point M a pour abscisse $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$

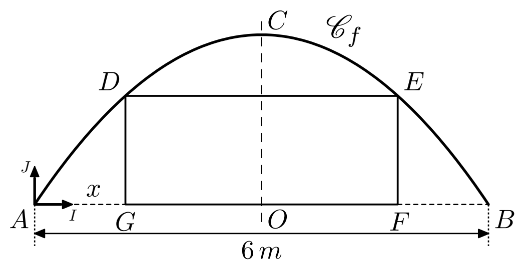
Exercice 6

Sous un hangar, dont le toit est de forme "*parabolique*", on souhaite installer une habitation de forme parallélépipédique. Le dessin ci-dessous illustre le problème :



On suppose l'habitat s'étalant sur toute la longueur du hangar. Le but de cet exercice est de déterminer les dimensions de la façade de cet habitat afin d'en maximaliser le volume.

On modélise ce problème par la figure ci-dessous :



Le rectangle $DEFG$ admet la droite (CO) pour axe de symétrie. On note x la mesure de la longueur AG.

Dans le repère $\big(A\,;I\,;J\big)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\big[0\,;6\big]$ par la relation :
$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{3}{2}\cdot x$$
On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $DEFG$ en fonction de x.

1. Le point G appartenant au segment $[AO]$, quelles sont les valeurs possibles pour la variable x exprimée en mètre?

2. Démontrer que pour $x \in [0\,;3]$:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{9}{2}\cdot x^2 + 9\cdot x$$

3. a. Déterminer le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[0\,;3]$.

b. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale.

Correction 6

1. x représente la mesure de la longueur AG : x doit être positif.

La droite (CO) étant un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, on en déduit la mesure $AO = 3\,m$.
Le point G appartenant au segment $[AO]$, on en déduit que la longueur AO ne peut dépasser $3\,m$.

On en déduit que la variable x prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;3]$.

2. Le rectangle $DEFG$ a pour longueur GF et pour hauteur GD.

- On a : $$\begin{aligned} AG + GF + FB &= 6 \\ x + GF + x &= 6 \\ GF &= 6 - 2x \end{aligned}$$
- Le point D est le point d'abscisse x appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$. Il a pour coordonnées $(x\,;f(x))$.
Le point G est un point de l'axe des abscisse ayant x pour abscisse. Il a pour coordonnées $G(x\,;0)$.
On en déduit la mesure de la longueur : $DG = f(x)$.

Ainsi, le rectangle $DEFG$ a pour aire :

$$\mathcal{A}(x) = L\times\ell = (6-2x)\times f(x) = (6-2x)\times\Big(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\Big)$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 9x + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x$$

3. a. La fonction $\mathcal{A}$ admet pour fonction dérivée :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{2}\cdot(3x^2) - \frac{9}{2}\cdot(2x) + 9 = \frac{3}{2}\cdot x^2 - 9x + 9$$

Le polynôme du second degré définissant la fonction $\mathcal{A}'$ admet pour discriminant :

$$b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-9)^2 - 4\times\frac{3}{2}\times 9 = 81 - 54 = 27$$

On a la simplification suivante :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{27} = \sqrt{9\times3} = 3\sqrt{3}$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)-3\sqrt{3}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{9-3\sqrt{3}}{3} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{3} = 3-\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)+3\sqrt{3}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{9+3\sqrt{3}}{3} = \frac{3(3+\sqrt{3})}{3} = 3+\sqrt{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
$\frac{3}{2}\cdot x^2-9x+9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de signe de la fonction $\mathcal{A}'$ et le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $[0\,;3]$:

x	0		$3-\sqrt{3}$		3
Signe de $\mathcal{A}'$		$+$	0	-	
Variation de $\mathcal{A}$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

b. On en déduit que l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale lorsque le point G a pour abscisse $3-\sqrt{3}$.

