Facultad de Ciencias Económicas 1 de junio de 2016

Tercera evaluación - Tema 2

- La duración estimada es de 120 minutos
- La evaluación se aprueba con al menos 60 puntos y el detalle de puntajes de cada uno de los ejercicios es:

1			2			3					4				5				TOTAL
I	II	III	I	II	III	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	I	II	III	IV	
4	4	4	4	4	4	3	5	5	5	5	5	5	5	6	8	8	8	8	
												4				3	1	1	60

1. Escriba:

i. Las ecuaciones paramétricas de una recta en R^3.

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

$r = (x, y, z)$ $v = (a, b, c) \neq 0$

$r_0 = (x_0, y_0, z_0)$

ii. La definición de conjunto generador de un espacio vectorial.

Sean $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vectores de un espacio vectorial V, se denomina conjunto generador $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a las distintas combinaciones lineales de los vectores. X

iii. Una propiedad de conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio vectorial

Para que el conjunto no sea linealmente dependiente los vectores no deben ser múltiplos escalares entre ellos y distintos de cero. X

2. Complete con alguna de las expresiones "es necesario y suficiente", "es necesario pero no suficiente", "es suficiente pero no necesario", "no es suficiente ni necesario" a modo de obtener proposición verdadera:

X i. Es necesario ....que T sea un conjunto generador de R^n para que T sea linealmente independiente.

ii. Siendo u y v vectores de R^3 es necesario y suficiente que u y v sean paralelos para que $gen(\{u, v\})$ sea una recta de R^3.

X iii. No es necesario ni suf. que $u = v + w$ para que el conjunto $\{u, v, w\}$ sea linealmente dependiente.

ya que deben ser $u = k \cdot v + h \cdot w$ siendo h, k escalares.

3. Sea R la recta de ecuación $(x,y,z) = t\,(1,-1,2),\ t \in R$. Responda cada ítem justificando:

i. Defina R como un conjunto de puntos.

$$W = \{(x,y,z) \in R^3 \ / \ \underbrace{(t,-t,2t)}_{(x,y,z)},\ t \in \mathbb{R}\}$$

ii. Pruebe que R un subespacio de R^3

<u>CN</u> $0 \in W$?

$$\begin{cases} 0 = t \\ 0 = -t \\ 0 = 2t \end{cases} \rightarrow t = 0 \qquad 0 \in W$$

<u>CS</u>

A1) <u>cierre</u> <u>la</u> <u>suma</u>

$$\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ -h \\ 2h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+h \\ -t+h \\ 2t+2h \end{pmatrix} = (t+h)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ cierre la suma en W

A6) <u>Cierre</u> <u>el</u> <u>producto</u> <u>por</u> <u>escalar</u>

$K, t \in \mathbb{R}$

$$K\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kt \\ -Kt \\ 2.K.t \end{pmatrix} = (K.t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ cierre el producto en W

iii. ¿Es R perpendicular al plano de ecuación $-2x + z = 1$?

$\vec{d} = (1,-1,2)$

$\vec{n} = (-2,0,1)$

$d = K\,n$

$(1,-1,2) = \overset{-1/2}{K}(-2,0,1)$

$(1,-1,2) \neq (1,0,-1/2) \Rightarrow R \not\perp P$

iii. ¿Es R el conjunto solución del sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 + 2R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x - y + 2z = 0$$

R no es el conjunto solución del sistema ya que al escalonar y reducir obtenemos un plano de R^3

iv. Proponga un conjunto de vectores $\{u, v\}$ que sea un conjunto de generadores de R.

Si $u = (1,-1,2)$ $v = (0,0,0)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & b \\ 2 & 0 & c \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & c-2a \end{array}\right]$$

$R_2 + R_1$

$R_3 - 2 \cdot R_1$

$a = -b$

$c = 2a$

$$\begin{cases} a = t \\ b = -t \\ c = 2t \end{cases}$$

$$R = \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\text{gen } W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Siendo $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, u \right\}$ un subconjunto de R^3. Indique en cada caso si es posible determinar u de forma tal que se cumplan las condiciones requeridas en cada ítem. Si su respuesta es afirmativa muestre u y justifique su elección. De lo contrario dé una razón:

	Es/no es posible	u	Cálculo/Razón
i. $u \in gen \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}_{W}$	No es posible X		$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & b+a \\ 0 & 2 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1/2(b+1/2a) \\ 0 & 2 & c \end{array}\right]$ $\xrightarrow{R_3+(-2)R_2} \left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1/2b+1/2a \\ 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right]$ $c = b+a$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b+a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b+a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\notin$ al gen W
ii. $T \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto de generadores de una recta de R^3.	No es posible ✓		No se puede ya que nos dará un plano perteneciente a R^3 nunca una recta porque...
iii. T genera un plano de R^3.	Si es posible ✓	$U=(0,0,0)$ ✓	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 & z \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}$ $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1/2x+1/2y \\ 0 & 2 & 0 & z \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+(-2)R_2} \boxed{\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1/2x+1/2y \\ 0 & 0 & 0 & z-x-y \end{array}\right]}$ Genera al plano de R^3 $z-x-y=0$ o lo que es lo mismo $\boxed{-x-y+z=0}$
iv. Los vectores de T son las columnas de una matriz A, tal que $A.X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ sea incompatible.	Si es posible ✓	$U=(0,2,2)$ ✓	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}$ $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+(-2)R_2} \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ $\boxed{SI}$

5. Argumente la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

i. Si v_1, v_2, v_3 son vectores distintos de un espacio vectorial V, entonces $gen(\{v_1, v_2\}) \neq gen(\{v_1, v_2, v_3\})$. $\boxed{F}$

Si: $v_1 = (1, 2, 0)$
$v_2 = (2, 4, 0)$
$v_3 = (0, 0, 0)$

gen $\{v_1, v_2\} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + (-2) R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x + 2y = 0$
$= ?$

gen $\{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
$= ?$

$\{(x, y, z)$ / $x + 2y = 0$ Generan el mismo plano
por lo tanto gen$\{v_1, v_2\}$ = gen$\{v_1, v_2, v_3\}$

ii. Es suficiente que el conjunto de vectores $\{u, v\}$ sea linealmente independiente en R^n y A una matriz de orden n inversible para que el conjunto $\{Au, Av\}$ sea linealmente independiente. $\boxed{V}$

$\{u, v\}$ li en $R^n \Rightarrow k_1 u + k_2 v = 0 \Rightarrow k_1 y k_2 = 0$

$(k_1 u + k_2 v) . A = 0$ no se puede multiplicar! en ese orden

$(k_1 A . u + k_2 . A v) = 0$ mal deducido

$\underbrace{k_1}_{0} (A . u) + \underbrace{k_2}_{0} (A v) = 0 \Rightarrow \{Au, Av\}$ es linealmente independiente.

iii. Si el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente, entonces algún vector del conjunto es combinación lineal de los restantes. $\boxed{V}$

$\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente. $\Rightarrow u = k v + h w$ siendo $k, h \in \mathbb{R}$.

Es verdadera ya que es la primera propiedad de independencia y dependencia lineal. Alguno de los vectores es combinación lineal de los demás. Dem

iv. Es necesario que el sistema $A.X = 0$ tenga infinitas soluciones para que las columnas de la matriz A sean vectores linealmente dependientes. $\boxed{V}$

q: las columnas de ld.

p: $AX = 0$ SCI ? no se

Siendo $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \neq 0$ $\neq 0$ u y v vectores de $\mathbb{R}^2$

$u = (u_1, u_2)$ ld $\rightarrow \overset{\neq 0}{k_1} (u_1, u_2) + \overset{\neq 0}{k_2} (v_1, v_2) = 0$
$v = (v_1, v_2)$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$k_1 . u_1 + v_1 . k_2 = 0$
$k_1 u_2 + k_2 v_2 = 0$ $\boxed{V}$