CPN
Facultad de Ciencias Económicas

22 de junio de 2016

INTEGRADOR

- La duración estimada es de 135 minutos
- La evaluación se aprueba con al menos 60 puntos y el detalle de puntajes de cada uno de los ejercicios es:

1				2				3			4		5				6				TOTAL
I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	I	II	I	II	III	IV	I	II	III	IV	
3	3	3	3	3	3	3	3	6	4	6	6	6	5	5	5	5	7	7	7	7	
						0	0			3		3	3		1		1	0	0	5	60

1. Escriba:

i. La definición de conjunto solución de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación. $AX=B$ es

$S = \{ S \in R^{n\times 1} / A.S = B \}$ Es el conjunto solución de $AX=B$

ii. La definición de matriz inversible. Si A es una matriz cuadrada y se puede encontrar una matriz B del mismo tamaño, tal que se cumpla $AB = B.A = I$, entonces puede decirse que A es invertible y B es la inversa de A.

iii. La definición de subespacio vectorial.

El subconjunto W no vacío de un espacio vectorial V, se denomina subespacio de V, si W es un espacio vectorial por sí mismo con las operaciones definidas en V.

iv. La definición de conjunto de vectores linealmente independiente.

$S = \{v_1, v_2, v_3, ... v_n\}$ es un conjunto de vectores de S, es linealmente independiente si la única solución de la ecuación $h_1.v_1 + h_2.v_2 ..... + h_n v_n = 0$ es la solución trivial.

2. Complete con alguna de las expresiones "es necesario y suficiente", "es necesario pero no suficiente", "es suficiente pero no necesario", "no es suficiente ni necesario" a modo de obtener una proposición verdadera:

i. Que uno de los vectores del conjunto S sea múltiplo de otro ...suficiente pero no necesario...... para que el conjunto de vectores S sea linealmente dependiente.

ii. Que (0,0,0) pertenezca al conjunto U ...Necesario pero no suficiente... para que el conjunto U sea subespacio de R^3.

iii. Que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible determinado ...Necesario y suficiente... para que la matriz de coeficientes del sistema tenga determinante no nulo.

iv. Sean u y v vectores de R^3, que el espacio generado por los vectores u, v sea un plano ...necesario pero no suficiente......... para asegurar para que $\{u, v\}$ es linealmente independiente.

Recta $\qquad t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} \to$ Recta

3. Considere que $S = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} / t \in R \right\}$ es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales:

i. Diga si el siguiente sistema $\begin{cases} -x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$ tiene como conjunto solución al conjunto S. Justifique su respuesta.

NO

NO

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-1F_1 : F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 : F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3/2 & 3/2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

libre

xq me dan 2 parametros
No tiene el mismo conjunto solución del enunciado.

ii. Diga por qué sí o por qué no es posible proponer un sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes 1x3 que tenga como conjunto solución a S. Si su respuesta es "es posible" muéstrelo. De lo contrario justifique.

NO

No, no es posible.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

libre libre

xq voy a tener en este caso 2 columnas libres y en enunciado solo tengo un parametro es por eso que no puede ser. 1x3 me da 2 parametros.

Nunca me lleva a generar una Recta

iii. Proponga un sistema de 4 ecuaciones lineales cuyo conjunto solución sea el conjunto S. Justifique.

Si

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} x = -2z \\ y = 3z \\ y = 0 \end{matrix} \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} \right\}$$

?

$\{ x -$

Es posible porque me queda una matriz con una columna libre para ser parametro que es el que posee mi conjunto solución.

AEL podría haber agregado ecuaciones múltiplos!

4. Los tiempos empleados por una fábrica de indumentaria deportiva para producir tres prendas distintas (remeras, pantalones y buzos) están dados en las columnas de la siguiente matriz $T = \begin{array}{c} \begin{matrix} R & P & B \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 1{,}2 & 2{,}4 & 3{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}2 & 1{,}2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \to \text{cortado} \\ \to \text{coser} \\ \to \text{lista} \end{matrix}$. En la primera fila se indican las horas de trabajo requeridas para cortar el género, en la segunda para coser y en la última las horas requeridas para que la prenda salga lista para la venta (etiquetado, limpieza, planchado, etc.) por una unidad de cada una de esas prendas. El salario por hora del modisto que corta es de 120 pesos, del que cose es de 100 pesos y del que deja la prenda lista para entregar es de 70 pesos.

120
100
70

i. Escriba una matriz S con los salarios por hora de cada uno de los trabajadores y mediante un único cálculo matricial determine cuál es el costo de mano de obra de una unidad de cada uno de los productos.

El costo de una unidad

$$\begin{array}{c} \\ R \\ Pant \\ Buzo \end{array} \; S = \begin{array}{c} \begin{matrix} Corte & Coser & L \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 2{,}4 & 1{,}2 \\ 0{,}4 & 3{,}2 & 1{,}2 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 384 \\ 452 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to R \\ \to R \\ \to B \end{matrix}$$

3x3 3x1 3x1

x corte x hs — coser hs — lista hs

$R = (0{,}2 \cdot 120 + 1{,}20 \cdot (100) + 0{,}8(70)) = 200 \to$ de cada unidad Remera

$P = (0{,}5(120) + 2{,}4 \cdot (100) + 1{,}2(70)) = 384 \to$ unidad Pantalon

$Buz = 0{,}4 \cdot (1200) + 3{,}2 \cdot (100) + 1{,}20(70) = 452 \to$ unidad Buzo

Forma matricial $A \cdot X = B$

$$A \cdot X = B$$

$\left\{ [\,] \cdot [\,] = [\,] \right\}$

matriz coeficiente — matriz incog — termino indep

Cort coser lute

$R = (0,24 + 1,2 + 0,8) = 2,2$ hs.
$P = (0,5 + 2,4 + 1,2) = 4,1$ hs
$B = (0,4 + 3,2 + 1,2) = 4,8$ hs

} Sumo horas x Producto

Necesito total de horas x Producto pedido

$A . X = B$
$[\,] \cdot [\,] = [\,]$

ii. Suponga que la fábrica de ropa tiene un pedido de 1000 remeras, 420 pantalones y 250 buzos. Exprese estas cantidades en una matriz P y mediante otro cálculo matricial determine cuántas horas de trabajo deberá pagar el dueño de la fábrica por cada una de las tareas para poder afrontar su pedido.

$R = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 1,2 \\ 0,8 \end{bmatrix}_{3\times1} \cdot [1000]_{1} = 2020$

$P = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 2,4 \\ 1,2 \end{bmatrix}_{3\times1} \cdot [420]_{1} =$

$B = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 3,2 \\ 1,2 \end{bmatrix} \cdot [250] =$

$R = [2,2] \cdot [1000] = \underline{2200}$
$P = [4,1] \cdot [420] = \underline{1.722}$
$B = [4,8] \cdot [250] = \underline{1200}$

El total de horas que deberá pagar x Producto será

5. Los vectores $u = (-1,0,1), v = (1,0,1)$ conforman dos de las columnas de la matriz A. Complete, de ser posible, la matriz A de forma tal que se cumpla la condición requerida en cada ítem. Si su respuesta es afirmativa, muestre A y sus cálculos auxiliares. Si su respuesta es negativa, proporcione una razón.

	No / Si (A)	Razón/Cálculos
i. A es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales $A.X = B$ compatible y determinado, para todo B.	Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ u v w $w = (1,2,0)$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$ $F_1: -1F_1$, $F_3 \leftrightarrow F_2$; $F_2: F_2 - F_1$; $F_2: \frac{1}{2}F_2$ $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ SCD. $F_1: F_1 + F_2$ $F_3: \frac{1}{2}F_3$ vector ind. ?
ii. Las columnas de A conforman un conjunto de 3 vectores linealmente dependiente de R^3.	Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ Mi vector $w = (0,0,2)$ Es combinación lineal de algún vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ son dependientes si son múltiplos o hay c.l.
iii. Los vectores columna de la matriz A generan una recta de R^3.	NO	$\left[\begin{array}{ccc\|c} -1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & -1 & -x \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & -1 & -x \\ 0 & 2 & 1 & z + x \\ 0 & 0 & 2 & y \end{array}\right]$ $F_1: -1F_1$, $F_3 \leftrightarrow F_2$; $F_2: F_2 - F_1$ $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & -1 & -x \\ 0 & 1 & 1/2 & \frac{1}{2}(z+x) \\ 0 & 0 & 2 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & -1/2 & -1/2x + 1/2z \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2z + 1/2x \\ 0 & 0 & 1 & 1/2y \end{array}\right]$ Me genera todo R^3 $F_2: \frac{1}{2}F_2$; $F_1: F_1 + F_2$; $F_3: \frac{1}{2}F_3$ *
iv. Los vectores fila de la matriz A son vectores de R^3, no nulos ortogonales dos a dos.	Si u v w $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $w = (0,1,0)$	$(-1,1,0) \cdot (1,1,0) = 0$ $(0,0,1) \cdot (1,1,0) = 0$ $(-1,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$ Los multiplico dos a 2 (vectores) x Fila. y son ortogonales

Ratón mal! no me genera una recta ej: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

f2. F2-F1
$1-(-1) =$
$1+1 = 2$
$0-(-1)$
$+1$
$\frac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ columna

Ej: iii) operación realizada
* $\frac{1}{2}.F_3 = 0$

$F_1 + F_2$
$-x + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x$

6. Argumente la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

es igual a su traspuesta

i. Si A y B matrices de igual orden, invertibles y simétricas, entonces $(A^T B^{-1})^{-1} = (A^{-1} B)^T$. $B = B^T$ $A = A^T$ Verdadero A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$ Si A, B es invertible $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ $(B^{-1})^{-1} = B^T$ B^{-1} inversible y $(B^{-1})^{-1} = B$ simetrica $B = B^T \Rightarrow (B^{-1})^{-1} = B^T$?
ii. Si $z \in gen\{v, v, w\}$, entonces $gen\{u, v, w, z\} = gen\{u, v, w\}$ Falso $\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^3$ $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $gen\{u, v, w\} = R^3$ $\left[\begin{array}{cccc\|c} 1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0 \end{array}\right] \Rightarrow$ $x + w = 0 \Rightarrow$ $z = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $gen\{u, v, w, z\}$ $\to$ x q puede ser multiplo de alguno o una combinacion de algún vector. Si me genera R^3 pero no son Iguales   tiene una columna libre   ?
iii. Es suficiente que $\det(AB) \neq 0$ para que A y B sean invertibles. CN y CS $\det \neq 0 \to$ Inversible   Verdadero $\det(A.B) = \det(A) . \det(B)$ Por definición y condicion de determinante $\det(A.B) \neq 0 \Rightarrow \det(A) . \det(B) \neq 0$ A invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$ $\det(A.B) \neq 0 \Rightarrow [(\det(A) \neq 0) . (\det(B) \neq 0)]$ invertible, invertible, invertible   ?
iv. Es necesario que el sistema $A.X = 0$ tenga infinitas soluciones para asegurar que las columnas de A sean linealmente dependientes.   verdadero ✓ porque si tiene columnas dependientes (la matriz A) si y solo si hay alguna combinacion lineal, es decir hay columna libre o paramétrica (al menos) y tengo infinitas soluciones o al menos una.   reg   * En el sistema Homogeneo (SELH) hay mas (+ de 1) solución que la trivial   si hay vectores dependientes → ej: $\left[\begin{array}{cc\|c} 1&2&0 \\ 2&4&0 \\ 0&0&0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc\|c} 1&2&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{array}\right]$ $F_2: F_2 - 2F_1$ → libre

$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1&0&4&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right]$ → libre

Sist $\begin{cases} \text{unica solucion} \to \text{Comp. Determi} \\ \text{infinitas soluciones} \to \text{Comp. Ind.} \\ \text{Incompatible} \to \text{No tiene solución} \end{cases}$