Facultad de Ciencias Económicas — legajo: [illegible]

1 de junio de 2016

Tercera evaluación - Tema 2

- La duración estimada es de 120 minutos
- La evaluación se aprueba con al menos 60 puntos y el detalle de puntajes de cada uno de los ejercicios es:

1			2			3					4				5				TOTAL
I	II	III	I	II	III	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	I	II	III	IV	
4	4	4	4	4	4	3	5	5	5	5	5	5	5	6	8	8	8	8	
						0	3				1	1			4		1	0	50

1. Escriba:

i. Las ecuaciones paramétricas de una recta en R^3.

La recta que pasa por el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $v = (a, b, c) \neq 0$ tiene la siguiente ecuación paramétrica:

$$\therefore \begin{cases} x = x_0 + t.a \\ y = y_0 + t.b \\ z = z_0 + t.c \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ii. La definición de conjunto generador de un espacio vectorial.

Si $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es un conjunto de vectores de un espacio vectorial V, al subespacio W de todas las combinaciones lineales de los vectores de S se llama espacio generado por $v_1, v_2 \dots v_n$

- El conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es un conjunto generador de W.

iii. Una propiedad de conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio vectorial

Un conjunto de dos vectores es linealmente independiente si ninguno es múltiplo escalar del otro.

2. Complete con alguna de las expresiones "es necesario y suficiente", "es necesario pero no suficiente", "es suficiente pero no necesario", "no es suficiente ni necesario" a modo de obtener proposición verdadera:

i. No es suficiente ni Necesario que T sea un conjunto generador de R^n para que T sea linealmente independiente.

ii. Siendo u y v vectores de R^3 Necesario Pero no suficiente que u y v sean paralelos para que $gen(\{u, v\})$ sea una recta de R^3.

iii. Es necesario y suficiente que $u = v + w$ para que el conjunto $\{u, v, w\}$ sea linealmente dependiente.

3. Sea R la recta de ecuación $(x,y,z) = t\,(1,-1,2)$, $t \in R$. Responda cada ítem justificando:

i. Defina R como un conjunto de puntos.

$S = \{1, -1, 2\}$ X

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z)\ t(1,-1,2)\ t \in \mathbb{R}\}$

ii. Pruebe que R un subespacio de R^3

1) C Necesaria $R \neq \phi$ ∧ $(0,0,0) \in R$, $t=0$

2) cierre la suma

$u = (x,y,z) = (t, -1t, 2t)$ ✓

$v = (x^1, y^1, z^1) = (t^1, -t^1, 2t^1)$ ✓

$u+v = (t, -1t, 2t) + (t^1 - t^1, 2t^1)$ ✓

$= (t+t^1, -t+t^1, 2t+t^1) \in R$ ✓ mal operado

$t+t_1 - t+t_1$ $u+v \in R$

cierre la multiplicación x escalar en R

$h.u$

$h.(t, -1t, 2t)$

$(ht, -ht, 2ht)$ $\in R$

$\in R$

Si es subespacio

iii. ¿Es R perpendicular al plano de ecuación $-2x + z = 1$?

Sí, es perpendicular al plano

$(-2,0,1)$

$(-1,0,1) = 1$

$n = t.(1,-1,2)$

$v = (-2,0,1)$

$(-2,0,1).(1,-1,2) = 0$ X

$-2+0+2=0$

$u.v=0$

iii. ¿Es R el conjunto solución del sistema $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

Si es solución al sistema X

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$x - y + 2z = 0$

No es solución al sistema

$F_2: F_2 + 2F_1$

$2+2.(-1)$

$-4+2.(2)$

$4-4$

iv. Proponga un conjunto de vectores $\{u,v\}$ que sea un conjunto de generadores de R. ✓

$u = (1,-1,2)$ $v = (2,-2,4)$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -1 & -2 & y \\ 2 & 4 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 2 & 4 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y-x \end{array}\right]$

$F_2: F_2 + F_1$ F_3:

F_3:

4. Siendo $T = \left\{ \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, u \right\}$ un subconjunto de R^3. Indique en cada caso si es posible determinar u de forma tal que se cumplan las condiciones requeridas en cada ítem. Si su respuesta es afirmativa muestre u y justifique su elección. De lo contrario dé una razón:

	Es/no es posible	u	Cálculo/Razón
i. $u \in gen \left\{ \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \right\}$	Si ✓	?	(2,0,2) $\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\0&2&2\end{bmatrix}$?
ii. $T \cup \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto de generadores de una recta de R^3.	NO ✓	$(1,0,0)$?	$\left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&x\\-1&1&0&y\\0&2&0&z\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&x\\0&2&1&y+x\\0&2&0&z\end{array}\right]$ $F_2: F_2+F_1$ $\left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&x\\0&1&1/2&\frac{1}{2}(y+x)\\0&2&0&z\end{array}\right]$ $F_2: \frac{1}{2}F_2$ $\left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&x\\0&1&1/2&\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x\\0&0&-1&z-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\end{array}\right]$ $F_3: F_3-2F_2$ mal justif. xq me da un plano $\boxed{-1 = z - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x}$ ✗
iii. T genera un plano de R^3.	Si ✓	$u = (0,0,0)$ ✓	$0 \in \mathbb{R}^3$ $\left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&0&x\\-1&1&0&y\\0&2&0&z\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&0&x\\0&2&0&y+x\\0&2&0&z\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&0&x\\0&1&0&\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x\\0&0&0&z-y\end{array}\right]$ $F_2: F_2+F_1$ $F_2: \frac{1}{2}F_2$ $F_3: F_3-F_2$ $0 = z - y + x$ $0 = x - y + z$
iv. Los vectores de T son las columnas de una matriz A, tal que $A.X = \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$ sea incompatible.	Si ✓	$u = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ ✓ $u = (1,0,1)$	$\left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&0&0\\-1&1&2&0\\0&2&2&2\end{array}\right]$ F_2+F_1 $\left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&0&0\\0&2&2&0\\0&2&2&2\end{array}\right]$ F_2 * $\left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{array}\right]$ ES SI $\neq 0$ ✓ *$F_2: \frac{1}{2}F_2$ $F_3: F_3 - F_2$ $\left[\begin{array}{ccc\|c}1&1&1&0\\-1&1&0&0\\0&2&1&2\end{array}\right] \to$

5. Argumente la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

i. Si v_1, v_2, v_3 son vectores distintos de un espacio vectorial V, entonces $gen(\{v_1, v_2\}) \neq gen(\{v_1, v_2, v_3\})$.

Falso

Porque puede haber un vector que genere ~~en R~~ en v_1, v_2 y puede ser igual al gen v_1, v_2, v_3

gen(v_1, v_2 = gen (v_1, v_2), v_3) → podría generar en R^2 y ser igual

P. ¿?

ii. Es suficiente que el conjunto de vectores $\{u, v\}$ sea linealmente independiente en R^n y A una matriz de orden n inversible para que el conjunto $\{Au, Av\}$ sea linealmente independiente.

Verdadero

$k_1 Au + k_2 Av = 0$

$A.k_1 u + A k_2.v = 0$

$A(k_1.u + k_2.v) = 0$

A es inversible → $k_1.u + k_2.v = 0$

$\Rightarrow k_1 = k_2 = 0$

por prop. $\{u.v\}$ li =

$\{A.u, Av\}$ li

iii. Si el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente dependiente, entonces algún vector del conjunto es combinación lineal de los restantes.

$u = (1, -1, 2)$ $v = (2, -2, 4)$ $w = (1, 0, 1)$

verdadero.

en este caso u es combinación lineal

Si puede haber combinación lineal con algún otro vector.

Dem

iv. Es necesario que el sistema $A.X = 0$ tenga infinitas soluciones para que las columnas de la matriz A sean vectores linealmente dependientes.

Falso: ✗

AX = 0 infinitas soluciones

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$F_2 = F_2 - 2F_1$

$4 - 2.2$

una matriz A puede tener vectores linealmente dependientes