



Segunda evaluación - Tema 2

La duración estimada es de 120 minutos

La evaluación se aprueba con al menos 60 puntos y el detalle de puntajes de cada uno de los ejercicios es:

1				2			3				4				5				total
I	II	III		I	II	III	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	
4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	7	7	8	8	8	8	100
4	4	4	0	4	4	4	5	1	5	5	5	5	5	0	2	2	2	0	56

1. Escriba:

i. La definición de norma de un vector de R^3 .

La norma o longitud de un vector del espacio tridimensional $v = (v_1, v_2, v_3)$ es el número $\|v\|$ y se calcula como:
Indicado $\rightarrow \|v\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$

ii. La definición de vectores paralelos.

Dos vectores son paralelos si uno es múltiplo escalar del otro cuando se cumple $u = k \cdot v$ $k \in \mathbb{R}$. siendo u y v vectores

iii. Una propiedad de producto punto de vectores de R^3 .

$$\begin{aligned} 1) u \cdot v &= v \cdot u \\ 2) u \cdot (v + w) &= u \cdot v + u \cdot w \\ 3) k \cdot (u \cdot v) &= (k \cdot u) \cdot v = u \cdot (k \cdot v) \end{aligned}$$

2. Complete con alguna de las expresiones "es necesario y suficiente", "es necesario pero no suficiente", "es suficiente pero no necesario", "no es suficiente ni necesario" a modo de obtener proposición verdadera:

i. Que A y B sean matrices invertibles de igual orden $\dots$ suficiente pero no necesario $\dots$ para que $\det(A + B) \neq 0$. X

ii. Sea u un vector de R^3 . Que $u \neq 0$ $\dots$ suficiente y necesario $\dots$ para que $\frac{1}{\|u\|} u$ sea un vector unitario. Es necesario y suficiente ✓

iii. Sean u y v vectores de R^3 . Que w sea combinación lineal de u y v $\dots$ Es necesario pero no suficiente $\dots$ para que w sea paralelo a u . ✓

3. Sean los vectores $v = (0, 0, 1)$ y $w = (0, 2, -1)$ de $\mathbb{R}^3$. Indique, si es posible, encontrar un vector $u \neq 0$ de forma tal que se cumplan las condiciones requeridas en cada ítem. Si su respuesta es afirmativa muestre u y justifique su elección con los cálculos adecuados. De lo contrario dé una razón:

	Es/no es posible	u	Cálculo/Razón
i. $3u - v = 2w$	Si es Posible	$u = (0, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$	$3u - v = 2w$ $u = (u_1, u_2, u_3)$ $3 \cdot (u_1, u_2, u_3) - (0, 0, 1) = 2 \cdot (0, 2, -1)$ $(3u_1, 3u_2, 3u_3) - (0, 0, 1) = (0, 4, -2)$ $3u_1 - 0 = 0$ $u_1 = 0$ $3u_2 - 0 = 4$ $u_2 = \frac{4}{3}$ $3u_3 - 1 = -2$ $u_3 = -\frac{1}{3}$ $u = (0, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$
ii. La matriz cuyas filas son los vectores v, w y u es no invertible.	Si es Posible	$u = (0, 0, 0)$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 2 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$ $(0, 0, 0) - (0, 0, 0)$ $0 - 0 = 0$ $\det A = 0$ $\det(A) = 0$ Es No invertible o singular.
iii. $u \cdot v = 0$ y u paralelo a w	NO es Posible		$u \cdot v = 0$ $u \parallel w$ $u \parallel w (0, 2, -1)$ $u \parallel w (0, 2, -1)$
iv. u un vector unitario perpendicular a w .	Si	$u = (1, 0, 0)$	$u = (1, 0, 0)$ $\ u\ = \sqrt{1^2} = 1$ $u \perp w = u \cdot w = 0$ $u \cdot v = (1, 0, 0) \cdot (0, 2, -1) = 0$

* Deben ser un múltiplo escalar

4. Sea A una matriz de orden n , tal que $a_{ij} \geq 0$ para todo i, j y $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = 2$, para toda fila i .

Responda cada ítem justificando.

- i. Analice si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$ es una matriz en las condiciones del enunciado.

si cumple -

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2 \\ 0 + 2 + 0 = 2 \\ 0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$$

Todos los elementos $a_{ij} \geq 0$ y como son positivos la suma de sus componentes es $= 2$

- ii. Proponga usted una matriz de orden 2 en las condiciones del enunciado.

$$2 \times 2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 1 = 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$$

si cumple enunciado

- iii. Diga por qué si o por qué no:

Si A es una matriz en las condiciones del enunciado, entonces A es invertible.

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$1+1=2$ c.c.en.
 $0+2=2$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2$

$\det(A) = 2$ es invertible

No $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$0 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 0$

$\det(A) = 0$ es no invertible o singular

$\begin{cases} 0+2=2 \\ 0+2=2 \end{cases}$ c.c.en.

$\det(A) \neq 0$ es invertible

- iv. Diga por qué:

Si A es una matriz en las condiciones del enunciado, entonces el sistema $A \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es compatible.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

c.c.en.
 $1+1=2$
 $0+2+0=2$
 $0+2+0=2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$

$F_2 = \frac{1}{2} F_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$

$F_3 = F_3 - 2F_2$
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x + z = 2 \\ y = 1/2 \end{cases}$

SCI

5. Argumente la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

- i. Es suficiente que A y B sean matrices invertibles para que $A \cdot B$ también sea invertible.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (\checkmark)$$

Verdadero

considero A y B diferentes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 23 & 27 \end{bmatrix} \quad (\checkmark)$$

no argumenta

- ii. Si $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$.

Verdadero

Por Propiedad

$$(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$$

$$= \left[(u_1, u_2) + (v_1, v_2) \right] \cdot (w_1, w_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \cdot (w_1, w_2)$$

$$= \left[(u_1, u_2) \cdot w_1 + (v_1, v_2) \cdot w_2 \right]$$

$$(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$$

- iii. Si los vectores u y v de $\mathbb{R}^3$ son unitarios y paralelos, entonces $|u \cdot v| = 1$

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

Verdadero

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$u \cdot v = 1$$

$$u \cdot v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1$$

no argumenta

- iv. Es necesario que A sea una matriz invertible para que el sistema $A \cdot X = 0$ sea compatible determinado.

Verdadero

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

A^{-1} Existe

X