

Estadística – Contador Público Nacional –

PRIMER EXAMEN PARCIAL

12%

10 de setiembre de 2015 – Tema 2 –

Nombre y Apellido: Noguera, Martin Reg.Nº: 28451

✓ **Ejercicio 1. (15 puntos)** Sean A y B dos eventos de un espacio de probabilidad (S, P) . Si $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ Calcule las siguientes probabilidades.

- (15)
- a. $P(B)$
 - b. $P(A \cap \bar{B})$
 - c. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

✓ **Ejercicio 2. (15 puntos)** Sea (S, P) un espacio de probabilidad y A y B sucesos en este espacio tales que $P(B) \neq 0$. Demuestre: $P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B)$

✓ **Ejercicio 3. (15 puntos)** Se supone que 25 de cada 100 hombres y 600 de cada 1000 mujeres usan anteojos. Si el número de mujeres es cuatro veces superior al de hombres, se pide la probabilidad de encontrarnos:

- (10)
- 5
2
3
- a. Con una mujer con anteojos
 - b. Con una persona sin anteojos
 - c. Si la persona usa anteojos, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

✓ **Ejercicio 4. (40 puntos)** Se está haciendo un control de materiales que se adquieren de uno de los proveedores de cables en la Empresa Cablevisión. La Compañía ha detectado que en promedio se producen cuatro imperfecciones cada 50 metros de cables.

- 9
- 8
- 38
- 2
- 5
- a. Considere la variable aleatoria que representa el número de imperfecciones detectadas cada 50 metros de cable. ¿Pertenece la densidad de probabilidad a una de las familias estudiadas en el curso? Si la respuesta es afirmativa indique a cual y justifique su elección. Determine el/los valor/res de su/s parámetro/s. (9p)
 - b. Determine el cuantil 0,20 de la distribución e interprete en términos del problema. Escriba también el comando en R que le permite realizar dicho cálculo. Defina un cuantil de orden q en general de una variable aleatoria discreta. (8p)
 - c. Cuántas imperfecciones se espera detectar en 200 metros de cable? (2p)
 - d. La Compañía ha determinado que buscará otro productor de cables si en los próximos 25 metros que instale observa más de dos imperfecciones. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa busque otro productor de cables? Escriba también el comando en R que le permite calcular esta probabilidad. Escriba las propiedades fundamentales de la función utilizada. (6p)
- claros

- 4 e. ¿Cuál es la probabilidad de que la Empresa busque otro productor de cables si se sabe que ya se produjo al menos una imperfección en 25 metros observados al azar? (4p)
- 5 f. Considere ahora que a la Empresa le interesa descartar de 5 proveedores seleccionados al azar, un número de proveedores para obtener el /los proveedores adecuados. Y que un proveedor sea descartado o no, tiene la misma probabilidad de ocurrencia. Identifique la variable aleatoria bajo estudio y analice si puede asociarla a alguno de los modelos estudiados. Especifique los supuestos que debe realizar para considerar la distribución mencionada y determine el o los parámetros. (6p)
- 2 g. Obtenga la probabilidad que entre los cinco proveedores deba descartar exactamente 3. Exprese también los comandos en R que utilizaría para obtener esta probabilidad. (2p)
- 3 h. Si considera que sus cinco proveedores históricos no son apropiados como para seguirlos contratando, y abre su demanda al mercado global. Cuál es la probabilidad de que eligiendo al azar proveedores, deba descartar los 3 primeros hasta seleccionar recién el cuarto? Considere que ser descartado o no sin conocimiento previo de los proveedores tiene la misma probabilidad y que existe independencia en dicha selección. Describa la variable aleatoria. Identifique el modelo de distribución elegido y exprese el/los valor/es de su/s parámetro/s. (3p)

6 ✓ **Ejercicio 5. (15 puntos)** Pruebe que dada una variable aleatoria discreta X definida en un espacio de probabilidad (S, P) se cumple que:

$$VAR(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Ejercicio 5) $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Demostración: $Var(X) = E[(X - M_x)]^2$ *def*

$\Rightarrow E[X^2 - 2X \cdot M_x + M_x^2]$ *Cual b mono*

$\Rightarrow E X^2 - 2 M_x \cdot M_x - M_x^2$ *me' que?*

$\Rightarrow E X^2 - \cancel{2 M_x^2} - \cancel{M_x^2}$ *no me enfriar!*

no de! $\Rightarrow E(X^2) - M_x^2$ o' lo que es lo mismo $[E(X^2) - E(X)^2]$ ✓

Ej 1) $P(\bar{A}) = 1/3$ $P(A \cap B) = 1/4$ $P(A \cup B) = 2/3$

a) $P(B) = \boxed{1/4}$

a) (*) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $2/3 = 2/3 + ? - 1/4$ ✓

$\cancel{2/3} - \cancel{2/3} + 1/4 = P(B)$ ✓

$\boxed{1/4 = P(B)}$

b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ ✓

$P(A \cap B) = 2/3 - 1/4$ ✓

$P(A \cap B) = \boxed{5/12}$ ✓

c) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \boxed{1/3}$ ✓

b) (*) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - 2/3$

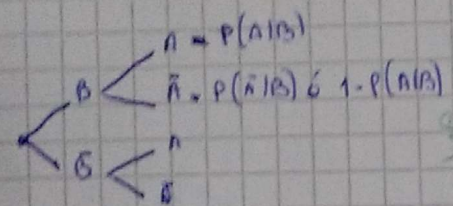
$= \boxed{1/3}$ ✓

2) $P(O) \neq 0$

$P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B)$

⊗ $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ por propiedad de condicional

donde $P(B) \neq 0$ entonces $\Rightarrow$



no es como aplica? por PP3

$\Rightarrow 1 - \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$

o lo que es lo mismo

$1 - P(\bar{A}/B)$

4) X n° de imperfecciones detectadas / 50 metros de cable

a) Si, la densidad de probabilidad pertenece a una distribución de Poisson, con parámetro λ (largo), donde:

$X \sim P(\lambda)$

$\lambda = 4$

4 imperfecciones 50 mts.

Se repite n veces un experimento Bernoulli "tiene imperfección" Si No

Constante, $\lambda = 4$ de 50 metros de cable

Existe independencia; que exista una imperfección en un metro de cable, no implica que el próximo metro de cable tenga o no imperfección

b) $X_{0,20} = 2$

$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, IG \{0, 1, 2, 3, 4\}$

x	$0 \leq x$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 4$
F_x	0	0,0183	0,0916	0,238	0,4332

$f(0) = \frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} = 0,0183$

$f(1) = \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} = 0,0733$

$f(2) = \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} = \frac{0,2928}{2} = 0,1464$

$f(3) = \frac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!} = \frac{1,1712}{6} = 0,1952$

$f(4) = \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} = \frac{4,6848}{24} = 0,1952$

Comando R

$\text{dpois}(0,2, 4) = 2$

Definición de Cuantil de orden q de una discreta: Se llama Cuantil de orden q , al Valor de x_q , que toma la variable aleatoria X , se denota:

$$P(X > x_q) \leq q \vee P(X \leq x_q) \geq q$$

c) $E(Y) = l = 16$

$l = 4 \text{ imp. } \underline{\hspace{2cm}} 50 \text{ metros}$

$l = 16 \text{ imp. } \underline{\hspace{2cm}} 200 \text{ metros}$

Y : "nº de imp. en 200 metros de cable"

$Y \sim P(l), l = 16$

En 200 metros de cable se espera detectar 16 imperfecciones

d) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$1 - F(2)$

$1 - 0,6766 = \boxed{0,3234}$

Z : "nº de imperfecciones en 25 metros de cable"

$4 \text{ imp. } \underline{\hspace{2cm}} 50 \text{ metros } X \sim P(l)$

$2 \text{ imp. } \underline{\hspace{2cm}} 25 \text{ metros } l = 2$

Comando R

$1 - \text{ppois}(2, 2)$

$f(0) + f(1) + f(2) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!}$

$\Rightarrow e^{-2} \left[\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right]$

$\Rightarrow e^{-2} \cdot [1 + 2 + 2]$

$e^{-2} \cdot 5 \Rightarrow 0,1353,5 \Rightarrow 0,6766$

Propiedades Fundamentales de la función de distribución Acumulada:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \vee \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

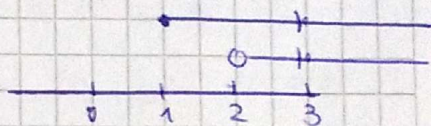
F_X es NO DECRECIENTE, o creciente en sentido amplio
 $x_1 < x_2, F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ para todo $x(s)$

F_X es Continuo por Derecha, $\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x)$ para todo $x(s)$

$$e) P(X > 2 / X \geq 1) = \frac{P(X > 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)}$$

$$= \frac{1 - F_X(2)}{1 - P(X < 1)} = \frac{1 - 0,6766}{1 - \underbrace{F(0)}_{0,1353}} = \frac{0,3234}{0,8647} = \boxed{0,3740}$$

$$X \sim P(\lambda) = \lambda = 2$$



entonces $P(X > 2 / X \geq 1) = \boxed{0,3740}$

$$f) \pi = \frac{1}{5} \quad n = 5$$

X : n° de proveedores seleccionados al azar, de 5 y así obtener el/los proveedores adecuados"

$$X \sim Bi(n, \pi)$$

$$n = 5$$

$$\pi = \frac{1}{5}$$

Supuestos:

- Se Realiza n veces un experimento Bernoulli: "es adecuado" $\begin{cases} \text{Si} \\ \text{No} \end{cases}$

- π Constante, en este caso $\pi = \frac{1}{5}$

- Existe independencia.

$$g) P(X = 3) = f(3) = \boxed{0,0392}$$

clara en π

$$f(x) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1 - \pi)^{n-x}$$

Como R:

$$d\text{binom}(3, 5, 0,2) = 0,0392$$

$$f(3) = \binom{5}{3} \cdot 0,2^3 \cdot (0,7)^{5-3} \rightarrow 0,8!$$

$$f(3) = 10 \cdot 0,008 \cdot 0,49 = \boxed{0,0392}$$

h)

X : n° de proveedores elegidos al azar, hasta encontrar el apropiado"

$$X \sim Ge(\pi) \quad \pi = 0,50$$

$$f(x) = \pi \cdot (1 - \pi)^{x-1} \cdot I(x)_{\{1, 2, 3, \dots\}}$$

$$P(\text{DDDA}) = f(3) = \boxed{0,0625}$$

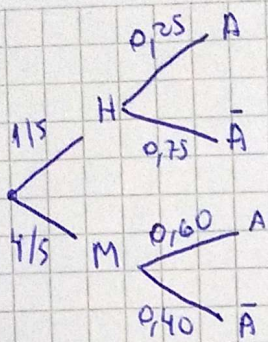
$$f(3) = 0,5 \cdot (0,5)^3$$

$$f(3) = 0,5 \cdot 0,125 = \boxed{0,0625}$$

La Prob de que eligiendo al azar proveedores, recién el 4° sea seleccionado es de

un 6%

Ej 3)



$$4 \cdot P(H) = P(M)$$

$$4 \cdot 1 - P(H) = P(M)$$

$$4 - 4P(H) = P(M)$$

$$4 = P(M) + 4P(H)$$

$$4 = 5P(M)$$

$$\boxed{4/5 = P(M)}$$

a) $P(M \cap A) = P(A|M) \cdot P(M)$

$$P(M \cap A) = 0,60 \cdot 0,80$$

$$\boxed{P(M \cap A) = 0,48}$$

b) $P(\bar{A}) = 0,53$

$P(\bar{A}) = 0,47$

b) $P(\bar{A}) = P(A|H) \cdot P(H) + P(A|M) \cdot P(M)$
 $0,25 \cdot 0,20 + 0,60 \cdot 0,80$

$$P(\bar{A}) = 0,05 + 0,48$$

$$\boxed{P(\bar{A}) = 0,53}$$

c) $P(H|A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H) \cdot P(H)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,20}{0,47} = \frac{0,05}{0,47} = \boxed{0,1063}$

$1 - P(\bar{A}) = 0,47$

correcto
also

d) $P(H|A) = \boxed{0,1063}$