AC ITEC STI2D EE SIN	1ère / COURS	STATIQUE	LYCEE POLYVALENT PAUL EMILE VICTOR CHAMPAGNOLE

1. ISOLEMENT D'UN SYSTEME MATERIEL

On appelle **Système Matériel** une quantité de matière dont la masse reste constante pendant qu'on l'étudie.

Un système matériel peut être :
- un solide (ex : mors mobile de l'étau)
- un ensemble de solides (ex : l'étau complet)
- une masse de fluide (ex : l'eau d'un barrage E.D.F.)
- des solides et des fluides (ex : un vérin hydraulique)

Isoler un système matériel consiste à « diviser » l'univers en 2 parties :
- le système matériel considéré, noté S.
- le milieu extérieur à S, c'est à dire tout ce qui n'est pas S et qui est susceptible d'agir sur lui, que l'on note $\overline{S}$ (« S barre »).

On distingue alors :
- les A.M. **intérieures** à S, qui agissent entre les éléments de S.
- les A.M. **extérieures** à S, qui sont exercées par $\overline{S}$ sur S.

L'ensemble des A.M. extérieures peut être modélisé par un unique torseur :

$$\left\{ \tau_{\overline{S}\to S} \right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\overline{S}/S}} \\ \overrightarrow{M_{A\,\overline{S}/S}} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{R_{\overline{S}/S}} \left| \begin{array}{l} \Sigma X_{\overline{S}/S} \\ \Sigma Y_{\overline{S}/S} \\ \Sigma Z_{\overline{S}/S} \end{array} \right. \text{ et } \quad \overrightarrow{M_{A\,\overline{S}/S}} \left| \begin{array}{l} \Sigma L_{\overline{S}/S} \\ \Sigma M_{\overline{S}/S} \\ \Sigma N_{\overline{S}/S} \end{array} \right.$$

2. EQUILIBRE D'UN SYSTEME MATERIEL DANS UN REPERE GALILEEN

Un système matériel est en **équilibre** par rapport à un repère s'il est **immobile** dans ce repère.

Un repère est dit **galiléen** s'il est **fixe** ou en mouvement de **translation rectiligne à vitesse constante** dans l'univers.

Pour nos études de mécanique, les repères liés à la terre ou en translation rectiligne à vitesse constante par rapport à la Terre seront considérés comme galiléens.

Ex :
- Un repère lié à un véhicule qui roule en ligne droite à vitesse constante sera considéré comme galiléen.
- Un repère lié à un véhicule qui prend un virage, qui freine ou qui accélère ne pourra pas être considéré comme galiléen.

3. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

Si un système matériel S est en équilibre dans un repère galiléen, **alors** le torseur des A.M. extérieures est égal au torseur nul :

$$\left\{ \tau_{\bar{S} \rightarrow S} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

Ce qui se traduit par 2 théorèmes :

→ Théorème de la résultante statique :
Si le système est en équilibre alors la somme des résultantes des A.M. extérieures est nulle :

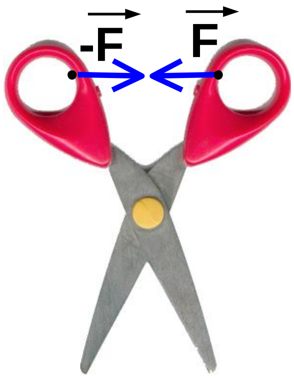
$$\overrightarrow{R_{\bar{S}/S}} = \vec{0}$$

→ Théorème du moment résultant statique :
Si le système est en équilibre alors la somme des moments des A.M. extérieures par rapport à un même point est nulle :

$$\overrightarrow{M_{A\,\bar{S}/S}} = \vec{0}$$

Attention !
Si le torseur des A.M. extérieures à un système est nul, le système n'est pas forcément en équilibre.

Ex : une paire de ciseaux
Si l'utilisateur exerce 2 forces opposées sur les ciseaux, le torseur des A.M. extérieures aux ciseaux est nul, mais le système n'est pas en équilibre (les ciseaux vont se fermer)



4. RESOLUTION ANALYTIQUE D'UN PROBLEME DE STATIQUE

4.1 Principe

L'application du P.F.S. fournit au maximum 6 équations :

théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{R_{\bar{S}/S}} = \vec{0}$

$$\Sigma X_{\bar{S}/S} = 0 \qquad \Sigma Y_{\bar{S}/S} = 0 \qquad \Sigma Z_{\bar{S}/S} = 0$$

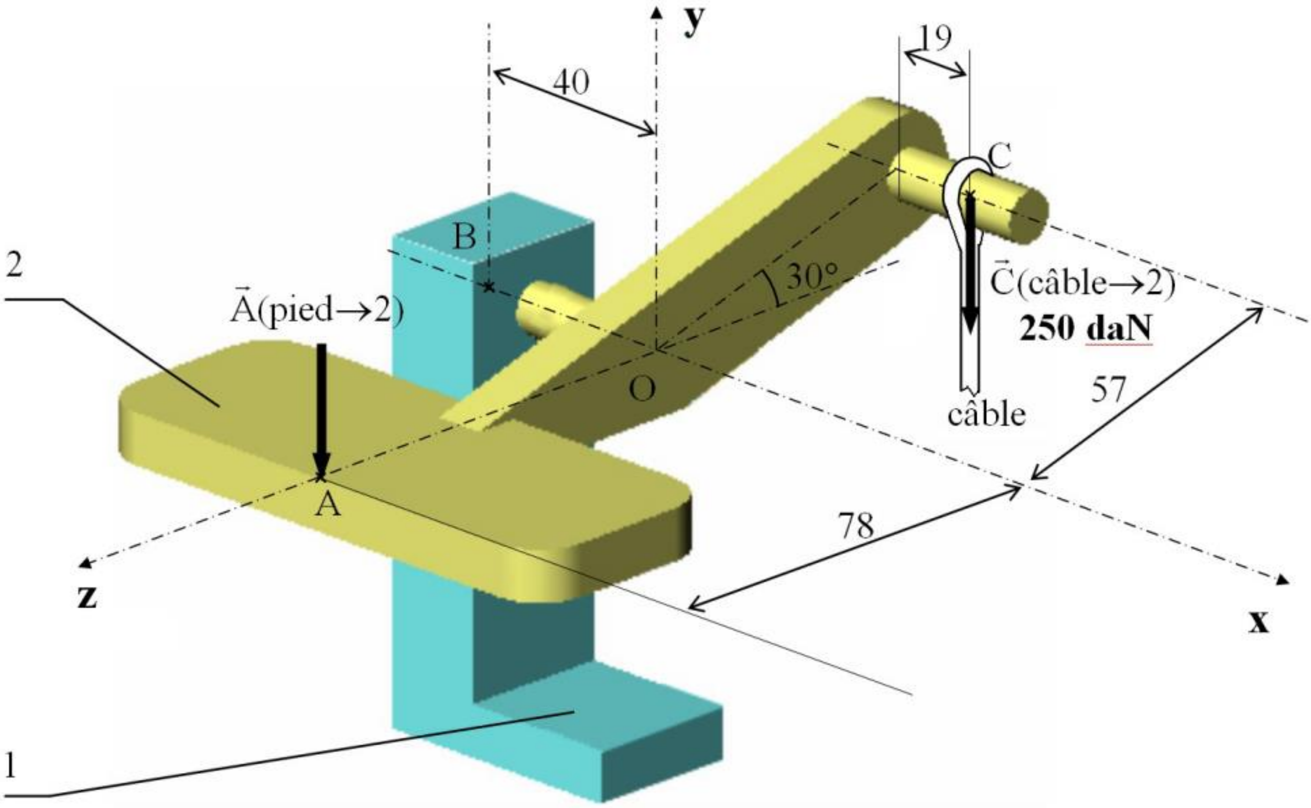
théorème du moment résultant statique : $\overrightarrow{M_{A\,\bar{S}/S}} = \vec{0}$

$$\Sigma L_{\bar{S}/S} = 0 \qquad \Sigma M_{\bar{S}/S} = 0 \qquad \Sigma N_{\bar{S}/S} = 0$$

Si le nombre d'inconnus est inférieur ou égal au nombre d'équations alors la résolution est possible. On dit que le problème est isostatique.

4.2 Exemple de résolution analytique spaciale (dans l'espace)

L'assemblage ci-après est le modèle simplifié d'une pédale 2 d'un palonnier d'hélicoptère. L'action mécanique exercée par le pied sur la pédale 2 est équivalente pour notre étude à une force appliquée au point A. Le cahier des charges de ce dispositif indique que la valeur maximale de l'effort transmis au câble est égale à 250 daN (valeur maximale admissible).
L'objectif de l'étude est de déterminer les actions mécaniques extérieures appliquées sur la pédale de commande 2.



- J'isole la pédale de commande 2
- B.A.E (bilan des actions extérieures)

$\{\tau_{câble\to2}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{C_{câble\to2}}\\ \overrightarrow{M_C câble\to2}\end{matrix}\right\}_C = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -2500 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_C$ Énoncé

$\{\tau_{pied\to2}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{A_{pied\to2}}\\ \overrightarrow{M_A pied\to2}\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -\|\overrightarrow{A_{pied\to2}}\| & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_A$ Énoncé

$\{\tau_{1\to2}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{B_{1\to2}}\\ \overrightarrow{M_B 1\to2}\end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix}X_{1/2} & 0\\ Y_{1/2} & M_{1/2}\\ Z_{1/2} & N_{1/2}\end{matrix}\right\}_B$ Liaison pivot d'axe X

6 inconnus pour 6 équations possibles : problème isostatique

- J'applique le P.F.S (principe fondamental de la statique)

$\{\tau_{câble\to2}\}_B + \{\tau_{pied\to2}\}_B + \{\tau_{1\to2}\}_B = \{\vec{0}\}$

- Théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{C_{câble\to2}} + \overrightarrow{A_{pied\to2}} + \overrightarrow{B_{1\to2}} = \vec{0}$

  En projection sur X : $X_{1/2} = 0$ (1)
  En projection sur Y : $-2500 - \|\overrightarrow{A_{pied\to2}}\| + Y_{1/2} = 0$ (2)
  En projection sur Z : $Z_{1/2} = 0$ (3)

- Théorème du moment résultant statique : $\overrightarrow{M_B câble \rightarrow 2} + \overrightarrow{M_B pied \rightarrow 2} + \overrightarrow{M_B 1 \rightarrow 2} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{M_B câble \rightarrow 2} = \overrightarrow{M_C câble \rightarrow 2} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{C_{câble\rightarrow 2}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 59 \\ 57\sin 30 \\ -57\cos 30 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -2500 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -142500\cos 30 \\ 0 \\ -147500 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B pied \rightarrow 2} = \overrightarrow{M_A pied \rightarrow 2} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 40 \\ 0 \\ 78 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -\|\overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}}\| \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 78\|\overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}}\| \\ 0 \\ -40\|\overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}}\| \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B 1 \rightarrow 2} = \begin{vmatrix} 0 \\ M_{1/2} \\ N_{1/2} \end{vmatrix}$$

En projection sur X : $-142500\cos 30 + 78\|\overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}}\| = 0$ (4)
En projection sur Y : $M_{1/2} = 0$ (5)
En projection sur Z : $-147500 - 40\|\overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}}\| + N_{1/2} = 0$ (6)

- Résolution

(1), (3) et (5) : $X_{1/2} = Z_{1/2} = M_{1/2} = 0$

(4) : $\|\overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}}\| = 142500\cos 30\ /78 = 1582{,}16\ \mathrm{N}$

(2) : $Y_{1/2} = 2500 + \|\overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}}\| = 4082{,}16\ \mathrm{N}$

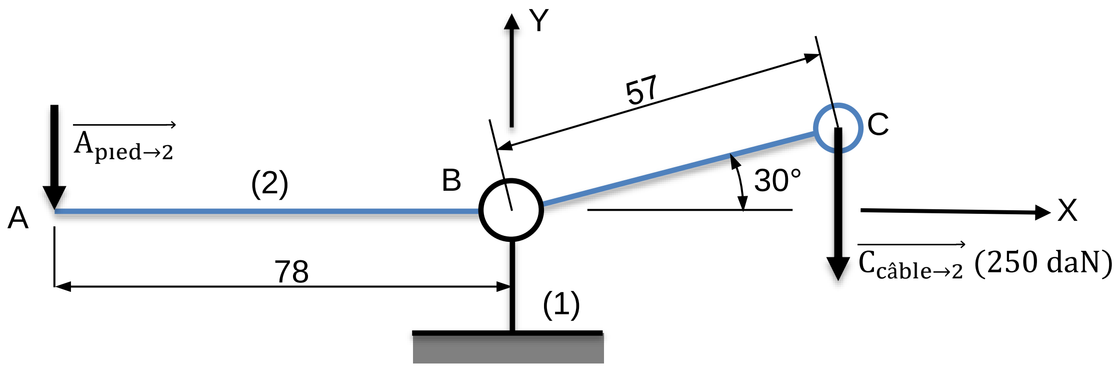
(6) : $N_{1/2} = 147500 + 40\|\overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}}\| = 310786\ \mathrm{N.mm} = 310{,}79\ \mathrm{N.m}$

- Résultats

$$\{\tau_{pied\rightarrow 2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{pied\rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_A pied \rightarrow 2} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1582{,}16 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\tau_{1\rightarrow 2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{1\rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_B 1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 4082{,}16 & 0 \\ 0 & 310{,}79 \end{Bmatrix}$$

4.3 Exemple de résolution analytique plane



- J'isole la pédale de commande 2
- B.A.E (bilan des actions extérieures)

$\{\tau_{câble\to2}\} = {}_C\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{C_{câble\to2}}\\ \hline \overrightarrow{M_C câble \to 2}\end{matrix}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -2500 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}$ Énoncé

$\{\tau_{pied\to2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{A_{pied\to2}}\\ \hline \overrightarrow{M_A pied \to 2}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -\left\|\overrightarrow{A_{pied\to2}}\right\| & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}$ Énoncé

$\{\tau_{1\to2}\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{B_{1\to2}}\\ \hline \overrightarrow{M_B 1 \to 2}\end{matrix}\right\} = {}_B\left\{\begin{matrix}X_{1/2} & 0\\ Y_{1/2} & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}$ Liaison pivot d'axe Z

3 inconnus pour 3 équations possibles : problème isostatique

- J'applique le P.F.S (principe fondamental de la statique)

$\{\tau_{câble\to2}\}_B + \{\tau_{pied\to2}\}_B + \{\tau_{1\to2}\}_B = \{\vec{0}\}$

- Théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{C_{câble\to2}} + \overrightarrow{A_{pied\to2}} + \overrightarrow{B_{1\to2}} = \vec{0}$

  En projection sur X : $X_{1/2} = 0$ (1)
  En projection sur Y : $-2500 - \left\|\overrightarrow{A_{pied\to2}}\right\| + Y_{1/2} = 0$ (2)

- Théorème du moment résultant statique : $\overrightarrow{M_B câble \to 2} + \overrightarrow{M_B pied \to 2} + \overrightarrow{M_B 1 \to 2} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{M_B câble \to 2} = \overrightarrow{M_C câble \to 2} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{C_{câble\to2}} = \left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix}57\cos30\\57\sin30\\0\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}0\\-2500\\0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}0\\0\\-142500\cos30\end{matrix}\right.$$

$$\overrightarrow{M_B pied \to 2} = \overrightarrow{M_A pied \to 2} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{A_{pied\to2}} = \left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix}-78\\0\\0\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}0\\-\left\|\overrightarrow{A_{pied\to2}}\right\|\\0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}0\\0\\+78\left\|\overrightarrow{A_{pied\to2}}\right\|\end{matrix}\right.$$

$$\overrightarrow{M_B 1 \to 2} = \left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$$

  En projection sur Z : $-142500\cos30 + 78\left\|\overrightarrow{A_{pied\to2}}\right\| = 0$ (3)

- Résolution

(1): $X_{1/2} = 0$

(3) : $\left\|\overrightarrow{A_{pied\to2}}\right\| = 142500\cos30 / 78 = 1582{,}16$ N

(2) : $Y_{1/2} = 2500 + \left\|\overrightarrow{A_{pied\to2}}\right\| = 4082{,}16$ N

- Résultats

$\{\tau_{pied\to2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{A_{pied\to2}}\\ \hline \overrightarrow{M_A pied \to 2}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 1582{,}16 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}$ et $\{\tau_{1\to2}\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{B_{1\to2}}\\ \hline \overrightarrow{M_B 1 \to 2}\end{matrix}\right\} = {}_B\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 4082{,}16 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}$

5. RESOLUTION GRAPHIQUE D'UN PROBLEME DE STATIQUE

5.1 Système soumis à 2 forces extérieures

Soit un système S en équilibre sous l'action de 2 forces $\overrightarrow{A_{ext/S}}$ et $\overrightarrow{B_{ext/S}}$ appliquées en **A** et en **B**.

L'application du P.F.S. se traduit par :

→ Le théorème de la résultante statique :

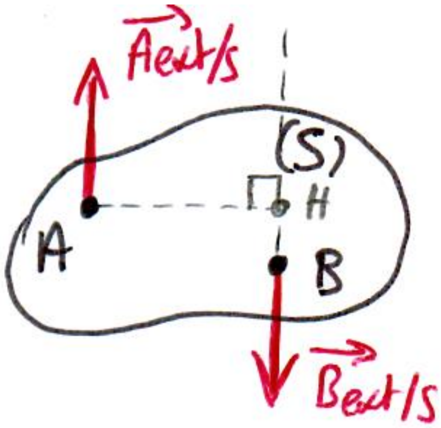
$$\overrightarrow{A_{ext/S}} + \overrightarrow{B_{ext/S}} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{A_{ext/S}} = -\overrightarrow{B_{ext/S}}$$

Conclusion : **Les 2 forces sont opposées** (même norme, même direction, sens contraire)

→ Le théorème du moment résultant statique :

La somme des moments de chacune de ces forces par rapport à un point quelconque est nulle.

ex :



On doit avoir :

$$\overrightarrow{M_A \overrightarrow{A_{ext/S}}} + \overrightarrow{M_A \overrightarrow{B_{ext/S}}} = \vec{0}$$

or $\overrightarrow{M_A \overrightarrow{A_{ext/S}}} = \vec{0}$ car A est le point d'application de la force

donc $\overrightarrow{M_A \overrightarrow{B_{ext/S}}} = 0$

or $\left\| \overrightarrow{M_A \overrightarrow{B_{ext/S}}} \right\| = AH \cdot \left\| \overrightarrow{B_{ext/S}} \right\|$

comme $\left\| \overrightarrow{B_{ext/S}} \right\| \neq 0$ alors $AH = 0$

Conclusion : Les 2 forces ont **même droite d'action**.

En résumé : Si un système est en équilibre sous l'action de 2 forces extérieures, alors ces 2 forces sont **opposées** et ont **même droite d'action**.

5.2 Système soumis à 3 forces extérieures

Soit un système S en équilibre sous l'action de 3 forces $\overrightarrow{A_{ext/S}}$; $\overrightarrow{B_{ext/S}}$; et $\overrightarrow{C_{ext/S}}$ appliquées aux points **A**, **B** et **C**.

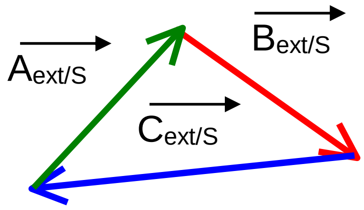
5.2.1 - 1^er Cas : 3 forces extérieures concourantes en un même point

Le P.F.S. se traduit alors par :

→ Le théorème de la résultante statique :

$$\overrightarrow{A_{ext/S}} + \overrightarrow{B_{ext/S}} + \overrightarrow{C_{ext/S}} = \vec{0}$$

Ceci se traduit graphiquement par le fait que le triangle formé par les 3 vecteurs mis bout à bout est fermé.

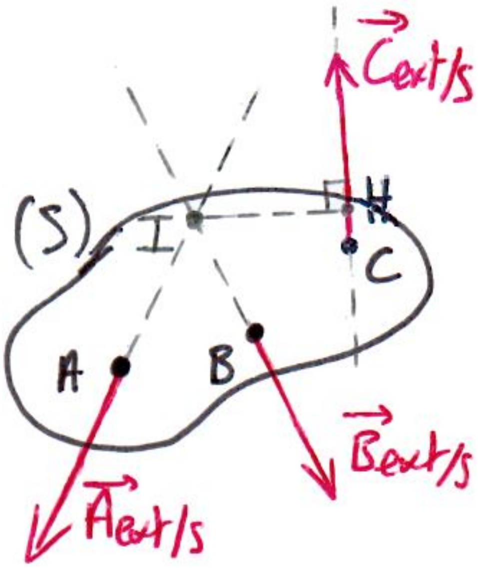


Conclusion : La **somme *vectorielle*** des 3 vecteurs est **nulle**

→ Le théorème du moment résultant statique :
La somme des moments de chacune des 3 forces par rapport à un point quelconque est nulle.

$$\overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{A_{ext/S}}} + \overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{B_{ext/S}}} + \overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{C_{ext/S}}} = \overrightarrow{0}$$

ex :



Soit I le point d'intersection des droites d'action de $\overrightarrow{A_{ext/S}}$ et $\overrightarrow{B_{ext/S}}$

On doit avoir :

$$\overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{A_{ext/S}}} + \overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{B_{ext/S}}} + \overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{C_{ext/S}}} = \overrightarrow{0}$$

or $\overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{A_{ext/S}}} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{B_{ext/S}}} = \overrightarrow{0}$ car I est sur les droites d'action de $\overrightarrow{A_{ext/S}}$ et $\overrightarrow{B_{ext/S}}$

donc $\overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{C_{ext/S}}} = \overrightarrow{0}$

donc $||\overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{C_{ext/S}}}|| = IH \,.\, ||\overrightarrow{C_{ext/S}}||$

comme $||\overrightarrow{C_{ext/S}}|| \neq 0$ alors $IH = 0$

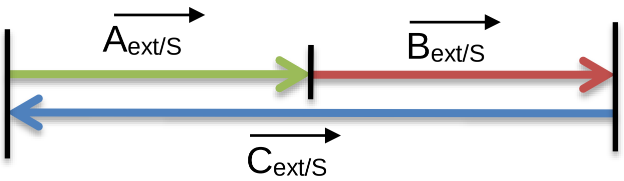
Conclusion : Les droites d'action des 3 forces sont **concourantes en un même point**.

En résumé : Si un système est en équilibre sous l'action de 3 forces extérieures, alors ces 3 forces peuvent-être **concourantes en un même point** et de **somme vectorielle nulle**.

5.2.2 – 2ème Cas : 3 forces extérieures colinéaires

→ Le théorème de la résultante statique :

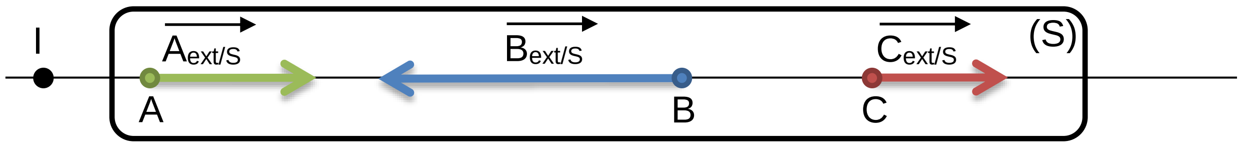
$$\overrightarrow{A_{ext/S}} + \overrightarrow{B_{ext/S}} + \overrightarrow{C_{ext/S}} = \overrightarrow{0}$$



Conclusion : La **somme *vectorielle*** des 3 vecteurs est **nulle**

→ Le théorème du moment résultant statique :
La somme des moments de chacune des 3 forces par rapport à un point quelconque est nulle.

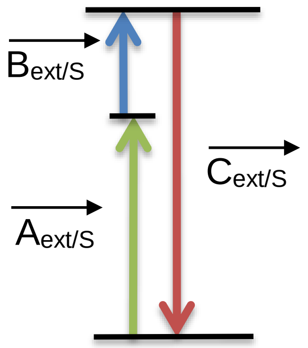
$$\overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{A_{ext/S}}} + \overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{B_{ext/S}}} + \overrightarrow{M_I\,\overrightarrow{C_{ext/S}}} = \overrightarrow{0}$$



Conclusion : Les droites d'action des 3 forces sont **colinéaires**.

En résumé : **Si un système est en équilibre sous l'action de 3 forces extérieures, alors ces 3 forces peuvent-être colinéaires et de somme vectorielle nulle.**

5.2.3 – 3ème Cas : 3 forces extérieures parallèles



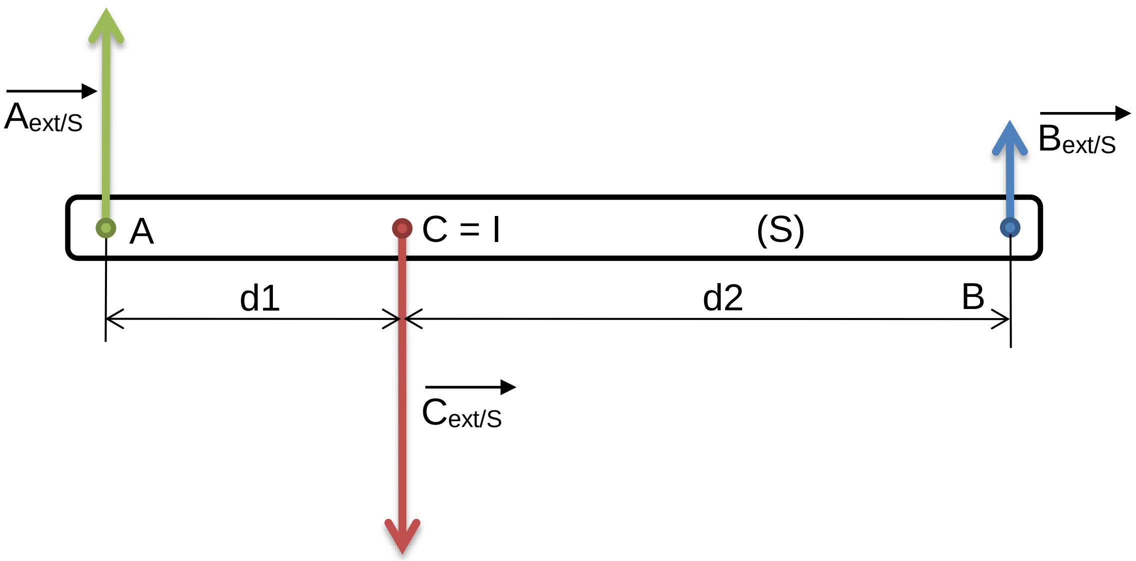
→ Le théorème de la résultante statique :

$$\overrightarrow{A_{ext/S}} + \overrightarrow{B_{ext/S}} + \overrightarrow{C_{ext/S}} = \overrightarrow{0}$$

Conclusion :

La **somme *vectorielle*** des 3 vecteurs est **nulle**

→ Le théorème du moment résultant statique :
La somme des moments de chacune des 3 forces par rapport à un point quelconque est nulle.



On doit avoir : $\overrightarrow{M_I \overrightarrow{A_{ext/S}}} + \overrightarrow{M_I \overrightarrow{B_{ext/S}}} + \overrightarrow{M_I \overrightarrow{C_{ext/S}}} = \overrightarrow{0}$

or $\overrightarrow{M_I \overrightarrow{C_{ext/S}}} = \overrightarrow{0}$ car I est confondu avec C.

donc $\overrightarrow{M_I \overrightarrow{A_{ext/S}}} = - \overrightarrow{M_I \overrightarrow{B_{ext/S}}}$

$||\overrightarrow{M_I \overrightarrow{A_{ext/S}}}|| = ||\overrightarrow{M_I \overrightarrow{B_{ext/S}}}||$

$d1\,||\overrightarrow{A_{ext/S}}|| = d2\,||\overrightarrow{B_{ext/S}}||$

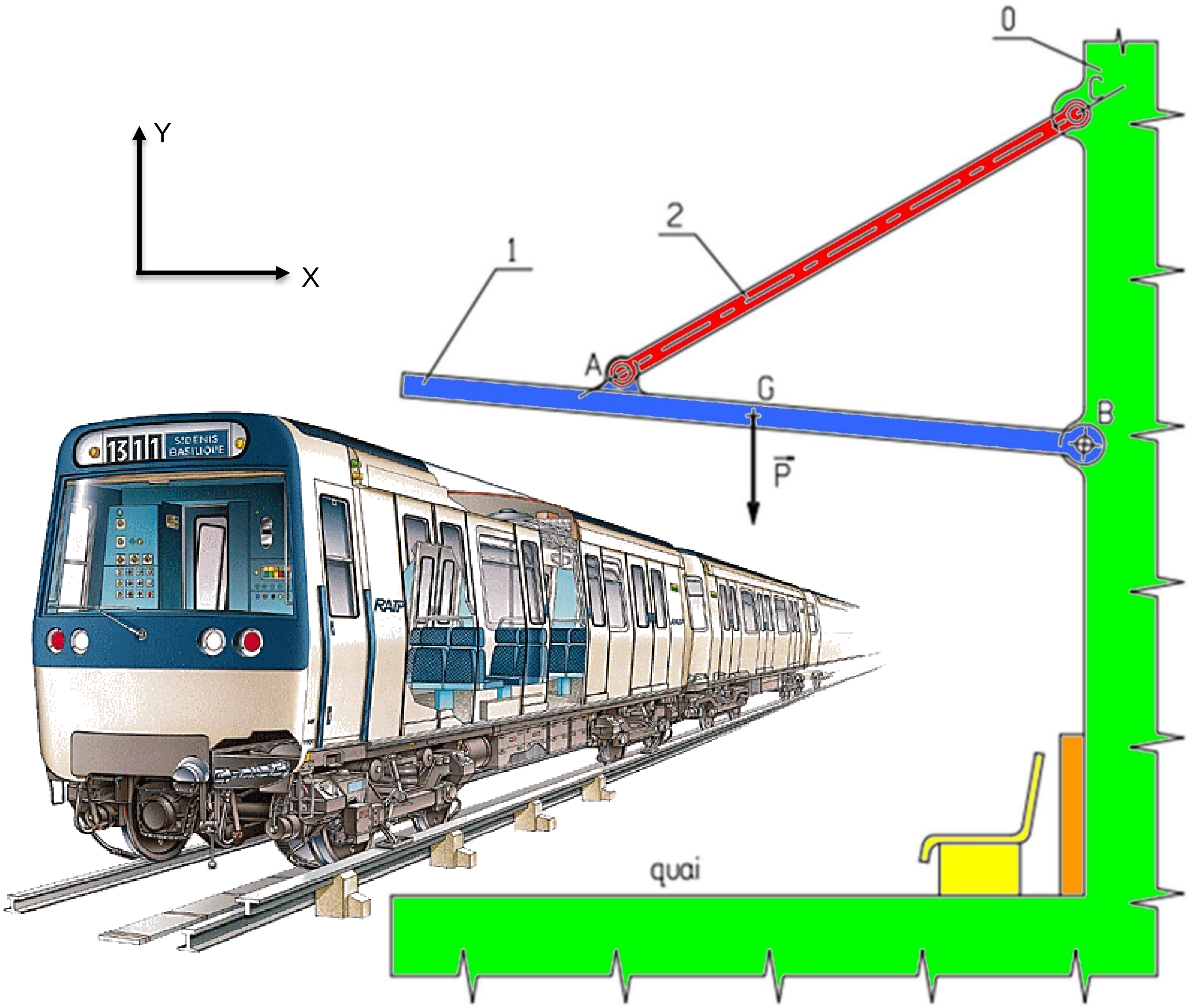
$||\overrightarrow{A_{ext/S}}|| = d2\,||\overrightarrow{B_{ext/S}}|| / d1$

Conclusion : Les droites d'action des 3 forces sont **parallèles**

En résumé : Si un système est en équilibre sous l'action de 3 forces extérieures, alors ces 3 forces peuvent-être **parallèles** et de **somme vectorielle nulle**.

5.2.4 – Exemple de résolution graphique (1er Cas)

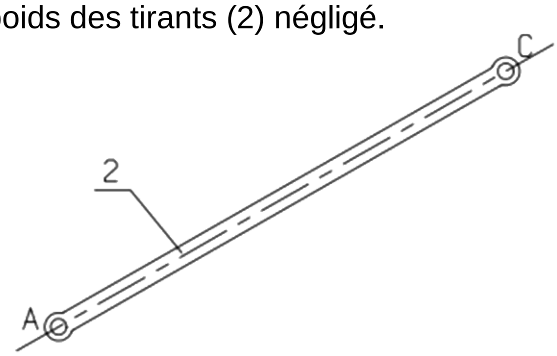
Certaines gares de RER sont équipées d'un quai abrité par une toiture (1) suspendue par des tirants (2). La masse de la toiture (1) est de 1000 kg.



<u>Hypothèses :</u> Problème plan ; frottement négligé ; poids des tirants (2) négligé.

<u>Etude de l'équilibre du tirant (2) :</u>

- B.A.E (bilan des actions extérieures)



Présentation N°1 :

$\{\tau_{1\to2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{A_{1\to2}} \\ \overrightarrow{M_A 1 \to 2} = \vec{0} \end{matrix}\right\}$ $\quad \overrightarrow{A_{1\to2}} \left| \begin{matrix} \text{Direction : ?} \\ \text{Sens : ?} \\ \text{Module : ?} \end{matrix} \right.$ Liaison pivot d'axe Z

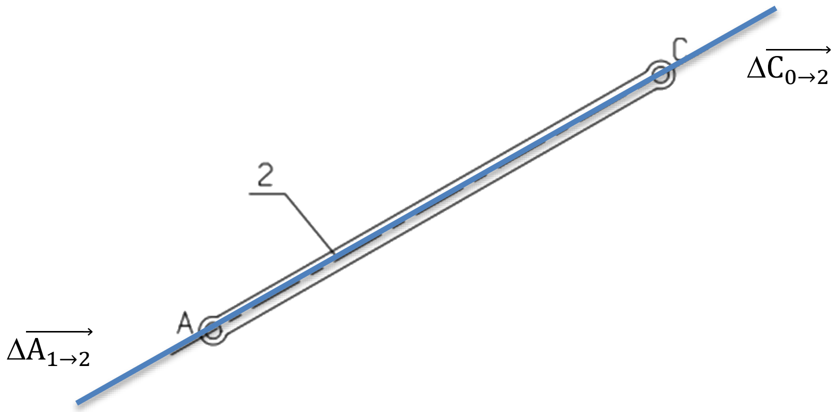
$\{\tau_{0\to2}\} = {}_C\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{C_{0\to2}} \\ \overrightarrow{M_C 0 \to 2} = \vec{0} \end{matrix}\right\}$ $\quad \overrightarrow{C_{0\to2}} \left| \begin{matrix} \text{Direction : ?} \\ \text{Sens : ?} \\ \text{Module : ?} \end{matrix} \right.$ Liaison pivot d'axe Z

Présentation N°2 :

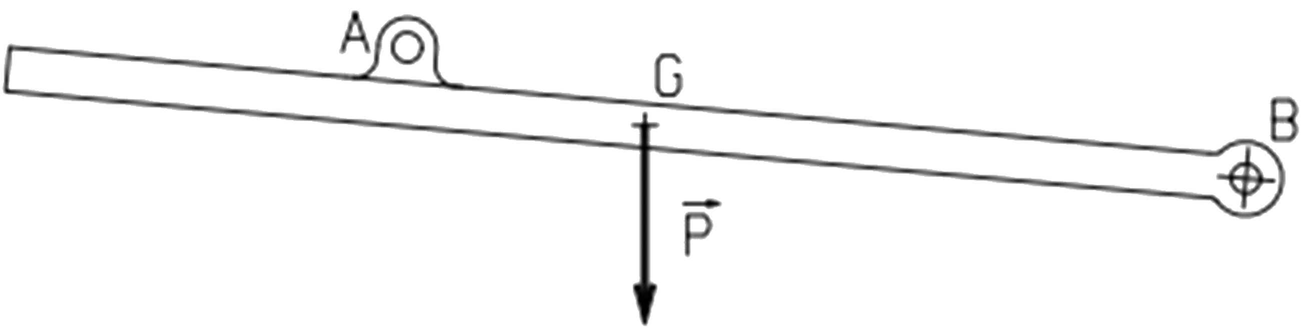
Action	Pt d'appli	Direction	Sens	Module	Justification
$\overrightarrow{A_{1\to2}}$	A	?	?	?	Liaison pivot d'axe Z
$\overrightarrow{C_{0\to2}}$	C	?	?	?	Liaison pivot d'axe Z

- Théorème : le tirant (2) est en équilibre sous l'action de 2 forces (glisseurs) extérieures :
$\Rightarrow$ les 2 forces sont directement opposées (même directio, même module, sens contraires).

- Conclusion : direction de $\overrightarrow{A_{1\to2}}$ et de $\overrightarrow{C_{0\to2}}$: droite AC



Etude de l'équilibre de la toiture (1) :



- B.A.E (bilan des actions extérieures)

Présentation N°1 :

$\{\tau_{pes\to1}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \overrightarrow{M_G pes \to 1} = \vec{0} \end{Bmatrix}$ $\quad \vec{P} \left| \begin{array}{c} \text{Direction : verticale} \\ \text{Sens : vers le bas} \\ \text{Module : } 1000 \cdot 9{,}81 = 10000 \text{ N} \end{array} \right.$ Enoncé

$\{\tau_{2\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_A 2 \to 1} = \vec{0} \end{Bmatrix}$ $\quad \overrightarrow{A_{2\to1}} \left| \begin{array}{c} \text{Direction : droite AC} \\ \text{Sens : ?} \\ \text{Module : ?} \end{array} \right.$ Principe des actions mutuelles : $\{\tau_{2\to1}\}$ = - $\{\tau_{1\to2}\}$ ou $\overrightarrow{A_{2\to1}}$ = - $\overrightarrow{A_{1\to2}}$

$\{\tau_{0\to1}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{0\to1}} \\ \overrightarrow{M_C 0 \to 1} = \vec{0} \end{Bmatrix}$ $\quad \overrightarrow{C_{0\to1}} \left| \begin{array}{c} \text{Direction : ?} \\ \text{Sens : ?} \\ \text{Module : ?} \end{array} \right.$ Liaison pivot d'axe Z

Présentation N°2 :

Action	Pt d'appli	Direction	Sens	Module	Justification
$\vec{P}$	G	Verticale	Vers le bas	10000 N	Enoncé
$\overrightarrow{A_{2\rightarrow1}}$	A	Droite AC	?	?	Principe des actions mutuelles : $\{\tau_{2\rightarrow1}\}$ = - $\{\tau_{1\rightarrow2}\}$ ou $\overrightarrow{A_{2\rightarrow1}}$ = - $\overrightarrow{A_{1\rightarrow2}}$
$\overrightarrow{B_{0\rightarrow1}}$	B	?	?	?	Liaison pivot d'axe Z

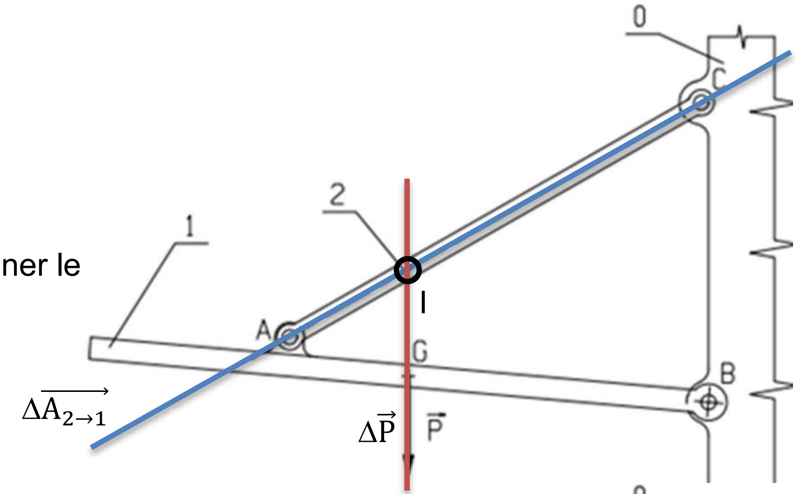
- Théorème : la toiture (1) est en équilibre sous l'action de 3 forces (glisseurs) extérieures dont 2 sont concurantes :

⇒ les 3 forces sont concourantes en un même point

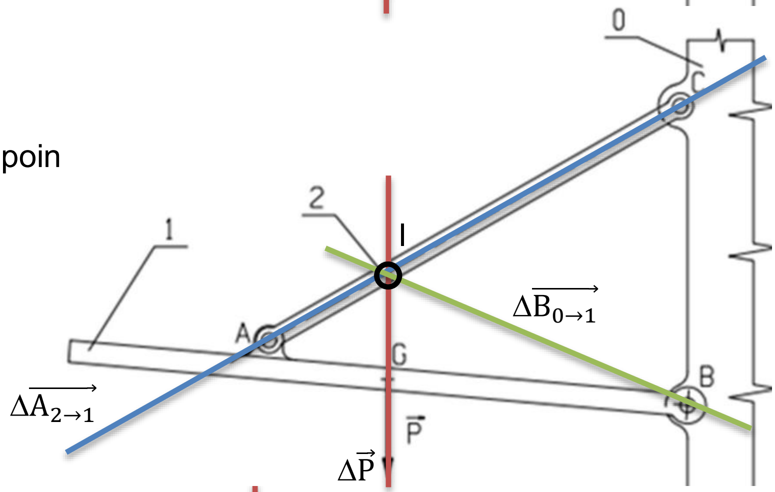
⇒ leur somme vectorielle est nulle ($\vec{P} + \overrightarrow{A_{2\rightarrow1}} + \overrightarrow{B_{0\rightarrow1}} = \vec{0}$)

- Résolution graphique :

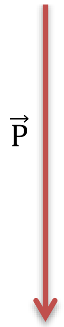
Etape 1 :
Tracer les directions connues et déterminer le



Etape 2 :
Tracer la direction manquante à l'aide du poin
force.



Etape 3 :
Tracer à l'échelle, la force complétement connue.

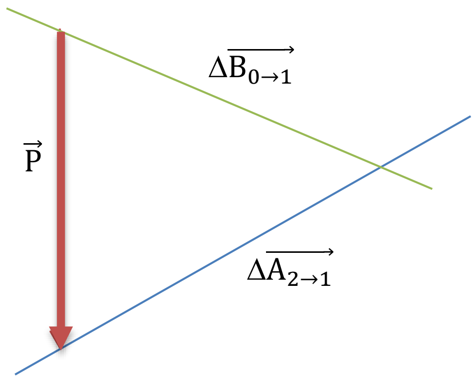


10000 N pour mm

N pour 1 mm

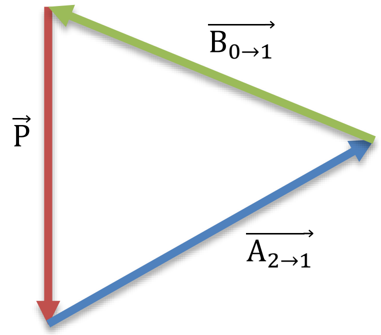
Etape 4 :
Reporter avec précision, les directions des deux autres forces : une à chaque extrémité de la force connue.

N pour 1 mm



Etape 5 :
Reporter avec précision, les directions des deux autres forces : une à chaque extrémité de la force connue.

N pour 1 mm



- Résultats

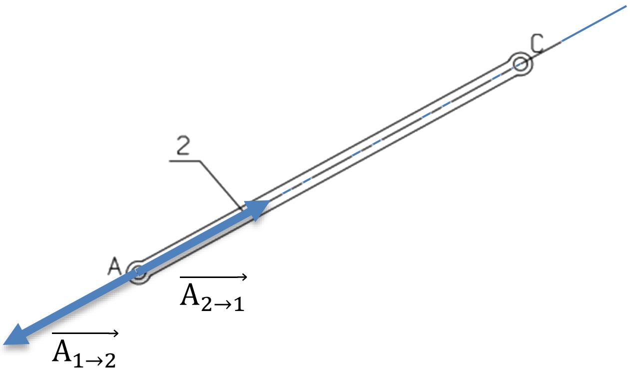
Action	Pt d'appli	Direction	Sens	Module
$\overrightarrow{A_{2\to1}}$	A	Droite AC	**A vers C**	**11 565 N**
$\overrightarrow{B_{0\to1}}$	B	**Droite BI**	**B vers I**	**11 045 N**

Retour à l'étude de l'équilibre du tirant (2) :

Principe des actions mutuelles (ou réciproques) :

$$\overrightarrow{A_{1\to2}} = -\ \overrightarrow{A_{2\to1}}$$

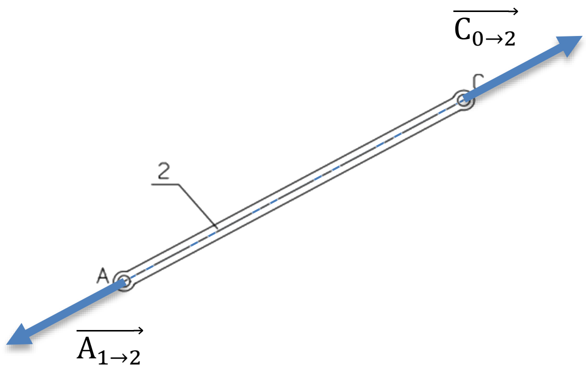
Action	Pt d'appli	Direction	Sens	Module
$\overrightarrow{A_{2\to1}}$	A	Droite AC	A vers C	11 565 N
$\overrightarrow{A_{1\to2}}$	A	Droite AC	**C vers A**	**11 565 N**



P.F.S appliqué à l'équilibre du tirant (2) :

$$\overrightarrow{A_{1\to2}} + \overrightarrow{C_{0\to2}} = \vec{0}$$

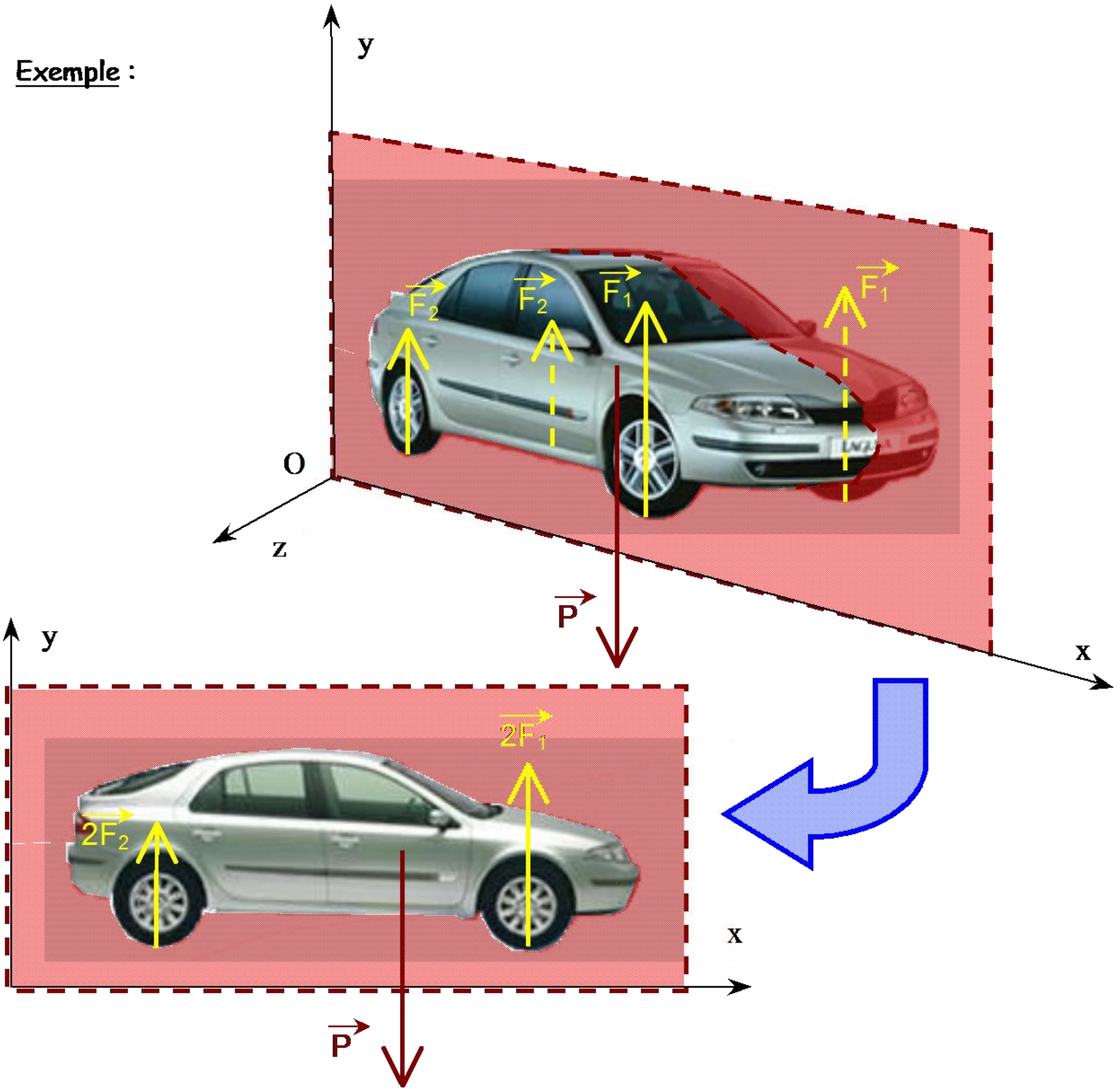
Action	Pt d'appli	Direction	Sens	Module
$\overrightarrow{A_{1\to2}}$	A	Droite AC	C vers A	11 565 N
$\overrightarrow{C_{0\to2}}$	A	Droite AC	**A vers C**	**11 565 N**



6. SIMPLIFICATION PLANE

Si la géométrie des liaisons d'un système matériel présente un **plan de symétrie** et que les A.M. extérieures exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan, alors on peut admettre que le mécanisme est **« plan »**, c'est à dire que :
- les **résultantes** des A.M. extérieures sont contenues **dans le plan de symétrie**
- les moments des A.M. extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie.

Exemple :



Le plan (O,x,y) est plan de symétrie de la géométrie et des A.M. extérieurs donc toutes les A.M. s'écrivent sous la forme suivante :

$$_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix} \quad \text{A quelconque}$$

L'application du PFS ne nécessite donc que la résolution de **3 équations** :

$$\left| \begin{array}{l} \Sigma X_{\bar{S}/S} = 0 \\ \Sigma Y_{\bar{S}/S} = 0 \\ \Sigma N_{\bar{S}/S} = 0 \end{array} \right.$$

7. EQUILIBRE ISOSTATIQUE OU HYPERSTATIQUE

7.1 Définition

Un système matériel est en **équilibre isostatique** si les composantes inconnues des torseurs des A.M. extérieures peuvent être déterminées uniquement avec les 6 équations fournies par le P.F.S. (3 équations dans le cas d'un système plan).
Dans le cas contraire (plus d'inconnues que d'équations fournies par le PFS), on dit que le système est en **équilibre hyperstatique**.

7.2 Comment reconnaitre un système en équilibre hyperstatique ?

Si le système que l'on isole possède plus de liaisons élémentaires avec l'extérieur que le strict minimum permettant d'assurer ses mobilités, alors il est en équilibre hyperstatique.

7.3 Exemples de systèmes en équilibre iso ou hyperstatique ?

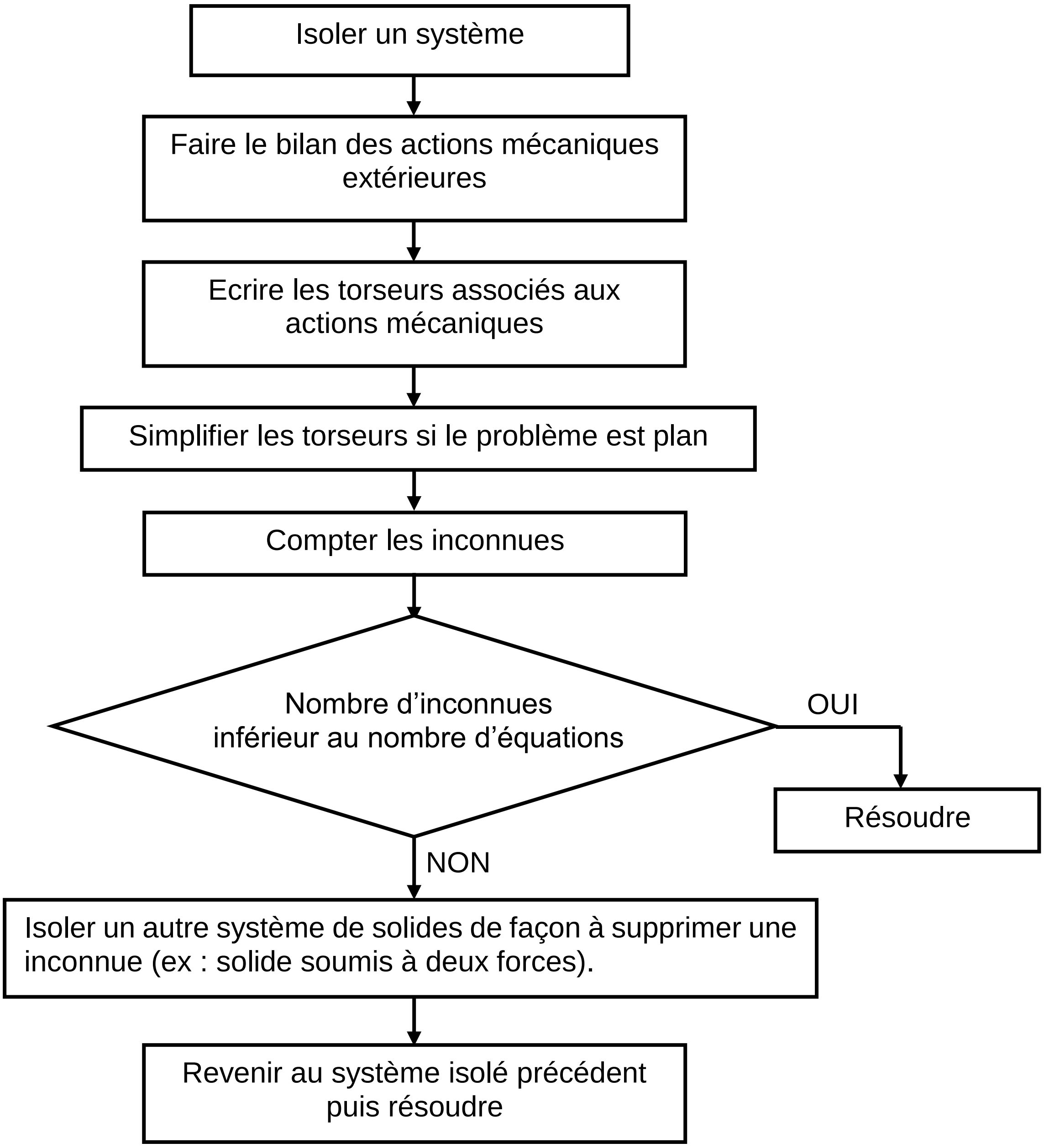
Systèmes isostatiques :
- la porte avec une seule charnière
- un tabouret en appui sur 3 pieds

Systèmes hyperstatiques :
- la porte avec plus d'une charnière
- un tabouret en appui sur 4 pieds

7.4 Avantages et inconvénients des systèmes iso ou hyperstatique ?

	Avantages	**Inconvénients**
Système Isostatique	• Calcul aisé des efforts ext. • Montage facile • Positionnement relatif peu précis des liaisons	• Solidité et rigidité réduites ou obtenues en apportant beaucoup de matière.
Système Hyperstatique	• Solidité et rigidité avec peu de matière	• Difficultés de calcul des efforts • Montage parfois délicat • Nécessité de réalisation des liaisons avec plus de précision.

8. DEMARCHE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME DE STATIQUE



<u>Remarques</u> :

❶ Pour simplifier la résolution il est conseillé d'appliquer le théorème du moment statique au centre d'une liaison dont le torseur associé comporte beaucoup d'inconnues. On limite ainsi le nombre d'inconnues dans les équations obtenues.

❷ Lorsqu'un système comporte beaucoup de pièces à isoler, il est conseillé de commencer par isoler les solides soumis à 2 forces.
Ceci permet de déterminer rapidement la direction de ces forces et simplifie les calculs par la suite.