Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский государственный экономический университет

Ю. Б. Мельников, К. С. Ефимов

Основные понятия и теоремы линейной алгебры

Рекомендовано
Учебно-методическим советом
Уральского государственного экономического университета
в качестве учебного пособия

Екатеринбург
2016

УДК 512(075.8)
ББК 22.143
М47

Рецензенты:

кафедра вычислительных методов
и управлений математической физики
Уральского федерального университета
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
(протокол № 3 от 28 января 2016 г.)

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой физико-математических дисциплин
ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования»
Ю. Ю. Циовкин

Мельников, Ю. Б.

М47 Основные понятия и теоремы линейной алгебры [Текст] : учеб. пособие / Ю. Б. Мельников, К. С. Ефимов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. гос. экон. ун-т. – Екатеринбург : [Изд-во Урал. гос. экон. ун-та], 2016. – 57 с.

Пособие содержит теоретический материал и примеры решений задач по высшей алгебре. Дополнительно рассматриваются общие понятия математики: множества, функции, алгебраические операции, правила работы с символами суммирования и произведения.

Пособие ориентировано на студентов и преподавателей экономических и технических университетов, научных работников и инженеров.

УДК 512(075.8)
ББК 22.143

Оглавление

Глава 1

Множества, функции, некоторые алгебры

1.1. Множество

1.1.1. Основные понятия

Понятия *множество* и *элемент множества* являются основными неопределяемыми понятиями математики.

Мы будем называть **множеством** любую совокупность M некоторых *попарно различных* «объектов». «Попарно различных» означает, что для любых «объектов» x и y мы можем сказать, различны эти «объекты» или нет.

«Объекты» из M называются **элементами** множества M, и про элементы из M говорят, что они **содержатся** в множестве M.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют **пустым** и обозначают символом $\emptyset$. Множество A называется **подмножеством** множества B, если всякий элемент множества A содержится в множестве B. В этом случае говорят, что множество A **включается** в множество B, обозначается это так: $A \subseteq B$. Иными словами, $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B. \tag{1.1}$$

Множества A и B называются **равными**, если A включается в B и множество B включается в множество A, т.е. A и B состоят из одних и тех же элементов. Иными словами,

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in A \ \Rightarrow \ x \in B, \\ x \in B \ \Rightarrow \ x \in A. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то пишут так: $A \subset B$.

1.1.2. Алгебра подмножеств

Определение 1.1.1. Пересечением *множества A с множеством B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые являются элементами и множества A, и множества B.*

Определение 1.1.2. Объединением *множества A с множеством B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые содержатся или в A, или в B, или в $A \cap B$ ($A \cup B$ состоит из тех элементов, которые попали хотя бы в одно из множеств: в A или в B).*

Определение 1.1.3. *Пусть* **У** *— некоторое фиксированное множество («универсум»), A — его подмножество. Тогда* **дополнением** *множества A до* **У** *называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех тех элементов универсума, которые не являются элементами множества A.*

Определение 1.1.4. *Пусть A, B — некоторые множества. Тогда* **разностью** *множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \backslash B$ или $A - B$, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не входят в множество B.*

Определение 1.1.5. Декартовым произведением *множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, состоящее из упорядоченных* **кортежей** *вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где a_1 — элемент из A_1, a_2 — элемент из A_2 и т.д. Такие кортежи называют еще n-ками.*

1.2. Функция

Функцией называется однозначное отображение одного множества в другое множество. Если каждому элементу из множества A соответствует *только один* элемент из B, то это отображение — функция. Если при этом каждому элементу из B соответствует только один элемент из A, то эта функция называется **взаимно однозначной**.

Если функция f отображает множество A во множество B, то множество A называется **областью определения** функции f, а множество

$\Big\{ f(x) \,\Big|\, x \in A \Big\}$ — **областью значений** (иногда говорят *«область допустимых значений функции»*). Область определения функции f обычно обозначается через $D(f)$, а область допустимых значений — через $E(f)$. Если $y = f(x)$,то y называется **образом элемента** x, а x — **прообразом элемента** y. Множество всех прообразов элемента y называется **полным прообразом** элемента y.

1.2.1. Задание функции выражением. Формула

Фраза *«функция f задана выражением $f(x) = x^2 - x$»* означает, что мы явно указываем способ вычисления *значения функции f* на произвольном элементе области определения: надо этот элемент подставить вместо аргумента функции, в данном примере — вместо буквы x.

Определение 1.2.1. *Преобразование алгебраического выражения назовем* **тождественным**, *если преобразованное алгебраическое выражение задает ту же функцию, что и исходное алгебраическое выражение.*

1.2.2. Взаимно однозначные функции

Определение 1.2.2. *Функция f называется* **взаимно однозначной функцией**, *если*

$$\forall x \quad \forall y \quad \begin{cases} x \in D(f) \\ y \in D(f) \end{cases} \Rightarrow \Big(x = y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y) \Big). \tag{1.3}$$

Теорема 1.2.1 (критерий взаимной однозначности). *Функция f является взаимно однозначной тогда и только тогда, когда для любого y из $E(f)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение.*

Определение 1.2.3. Суперпозицией *функций f и g называется функция h, заданная формулой $h(x) = g(f(x))$.*

1.2.3. Обратная функция

Определение 1.2.4. *Функция g называется* **обратной** *к функции f в области D, если для любого x из D и любого $y = f(x)$ имеют место тождества $g \circ f(x) = x, \quad f \circ g(y) = y$.*

Обычно функцию, обратную к функции f, обозначают f^{-1}.

Таблицу значений обратной функции легко получить из таблицы значений исходной функции. Действительно, то, что было *значением функции* f, для функции f^{-1} является *значением аргумента*, и наоборот.

Не всякая функция имеет обратную во всей области определения.

1.2.4. Теоремы об обратной функции

Теорема 1.2.2 (о взаимной обратности). *Если функция f имеет на множестве D обратную функцию f^{-1}, то функция f^{-1} имеет обратную на множестве*[1] $\Big\{f(x)\,\Big|\,x\in D\Big\}$, *причем* $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$.

Теорема 1.2.3 (о функции, обратной к суперпозиции). *Если $h(x)=f\left(g(x)\right)$, причем функция g имеет на множестве D обратную функцию g^{-1}, и функция f имеет обратную на множестве*

$$\Big\{g(x)\,\Big|\,x\in D\Big\},$$

то функция h имеет обратную h^{-1} на множестве D, причем $h^{-1}(y)=g^{-1}\left(f^{-1}(y)\right)$.

Теорема 1.2.4 (критерий существования обратной функции). *Функция f имеет обратную на множестве D тогда и только тогда, когда f является взаимно однозначной на множестве D.*

1.3. Алгебраические операции

Определение 1.3.1. *n-местной или n-арной* **алгебраической операцией** *на множестве Ω называется функция с областью определения* $\underbrace{\Omega\times\Omega\times\ldots\times\Omega}_{n\ \text{множителей}}$, *область значений которой включается в Ω.*

Если $n=1$, то алгебраическая операция называется **унарной**, если $n=2$ — **бинарной** алгебраической операцией. Особую роль играют 0-арные операции, т.е. константы.

[1] Точнее, обратная функция имеется у *ограничения* функции f на это множество.

1.3.1. Некоторые типы алгебраических операций

Бинарная алгебраическая операция $*$ называется:

коммутативной, если выполняется тождество $x * y = y * x$;

ассоциативной, если выполняется тождество $(x * y) * z = x * (y * z)$.

1.3.2. Некоторые классические алгебры

Определение 1.3.2. Алгеброй *(в широком смысле) называется упорядоченная пара $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F} \rangle$, где A — некоторое непустое множество, называемое* **носителем** *алгебры $\mathcal{A}$, и $\mathcal{F}$ — множество операций алгебры $\mathcal{A}$, определенных на A.*

Определение 1.3.3. *Пусть A — некоторое непустое множество; $*$ — бинарная операция на этом множестве. Тогда алгебра $\langle A, \{*\} \rangle$ называется* **группоидом***.*

Определение 1.3.4. *Группоид $\langle A, \{*\} \rangle$ называется* **полугруппой***, если $*$ — ассоциативная операция, т.е. выполняется тождество $(x * y) * z = x * (y * z)$.*

Иногда говорят, что A — полугруппа **относительно операции** $*$. При этом равенство $(x * y) * z = x * (y * z)$ называют **аксиомой полугруппы**.

Определение 1.3.5. *Пусть A — некоторое непустое множество; $*$ — бинарная операция, определенная на этом множестве, e — 0-местная операция на A, т.е. e — некоторый элемент из A. Алгебра $\langle A, \{*, e\} \rangle$ называется* **группой***, если выполняются следующие утверждения (***аксиомы группы***):*

$(x * y) * z = x * (y * z)$, т.е. $*$ — ассоциативная операция.

$x * e = e * x = x$ (аксиома существования единичного элемента);

для каждого элемента $x \in A$ существует такой элемент $\tilde{x}$, что $x * \tilde{x} = \tilde{x} * x = e$ (аксиома существования обратного элемента).

При этом операция $*$ называется **групповой операцией***.*

Определение 1.3.6. *Группа с коммутативной групповой операцией называется* **коммутативной группой** *или* **абелевой группой***.*

Определение 1.3.7. *Пусть A — непустое множество; $+, \cdot$ — операции на множестве A;* $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ *— элементы множества A. Тогда алгебра $\langle A, \{+, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}\rangle$ называется* **полем** *в тех и только тех случаях, когда выполняются следующие утверждения (аксиомы поля):*

1) $\langle A, \{+, \mathbf{0}\}\rangle$ — абелева группа;

2) $\langle A \backslash \{\mathbf{0}\}, \{\cdot, \mathbf{1}\}\rangle$ — абелева группа;

3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

При этом группа $\langle A, \{+, \mathbf{0}\}\rangle$ называется **аддитивной группой поля***, а группа $\langle A \backslash \{\mathbf{0}\}, \{\cdot, \mathbf{1}\}\rangle$ называется* **мультипликативной группой поля***. Следуя физической традиции, элементы поля будем называть* **скалярами***.*

Определение 1.3.8. Кольцом *или* **ассоциативным кольцом** *называется алгебра $\langle K, \{+, \cdot, 0\}\rangle$, для которой выполняются следующие утверждения (***аксиомы кольца***) (здесь x, y, z — произвольные элементы кольца K):*

1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения);

3) в K существует элемент, который мы обозначим 0, такой, что для любого x из K выполняется соотношение $x + 0 = x$ (наличие нулевого элемента);

4) для любого x из K существует такой элемент $-x$, что $(-x) + x = 0$ (наличие обратного относительно $+$ элемента);

5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ассоциативность умножения);

6) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (дистрибутивность).

Часто это определение формулируют следующим образом: *кольцом* называется непустое множество K с операциями, которые мы обозначим $+$ и $\cdot$, в котором имеется элемент, который мы обозначим символом 0, причем выполняются приведенные выше аксиомы кольца.

1.4. Поле комплексных чисел

1.4.1. Формы записи комплексного числа

Алгебраическая: $a + bi$.

Тригонометрическая: $\rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Показательная: $\rho \cdot e^{\varphi i} = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Здесь $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ — **модуль** комплексного числа $a + bi$, т.е. модуль вектора $a\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + b\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$. Модуль ρ и аргумент φ комплексного числа $a + bi$ связаны с его вещественной и мнимой частями системами равенств:

$$\begin{cases} a = \rho\cos\varphi \\ b = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} \end{cases}. \tag{1.4}$$

При возведении в степень и извлечении корней из комплексных чисел важную роль играет так называемая **формула Муавра**:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \text{ т.е. } \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Из этой формулы можно вывести следующую формулу для извлечения корней из комплексных чисел:

$$\left(\rho e^{i(\varphi + 2k\pi)}\right)^{1/n} = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Глава 2

Основы теории матриц

2.1. Определение матрицы, операции алгебры матриц

Обычно говорят, что **матрица** — *это прямоугольная таблица чисел.*

Определение 2.1.1. Матрицей *с компонентами (говорят еще «с элементами») из кольца K* **размерности** *$m \times n$ называется функция F с областью определения $D(F) = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ и областью значений, включающейся в K, т.е. $E(F) \subseteq K$. При этом для любого элемента $(i, j) \in D(F)$ число i называется* **номером строки матрицы***, а число j —* **номером столбца матрицы***. Элементы основного кольца K часто называют* **скалярами***.*

Матрица обозначается заглавной латинской буквой, причем часто напечатанной «жирным» шрифтом. Элементы матрицы $\mathbf{M}$ обозначаются той же буквой, что и вся матрица, но, во-первых, строчной, а не заглавной, и, во-вторых, снабженной индексами. Таким образом, элемент матрицы $\mathbf{M}$ обозначается через m_{ij}, где первый индекс (в данном случае это i) обозначает *номер строки*, а второй — *номер столбца*.

Матрица размерности $1 \times n$ называется **матрицей-строкой** или просто **строкой**. Матрица размерности $m \times 1$ называется **матрицей-столбцом** или просто **столбцом**. Матрица размерности $n \times n$ называется **квадратной матрицей**. Таким образом, матрица является квадратной тогда и только тогда, когда число ее строк равно числу столбцов. Квадратная матрица $\mathbf{T}_{n\times n}$ с компонентами из поля K называется **верхней треугольной** тогда и только тогда, когда для любых номеров i, j, таких, что $\left\{ \begin{array}{l} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le i \end{array} \right.$, имеем $t_{ij} = 0$. Квадратная матрица $\mathbf{T}'_{n\times n}$ с компонентами из поля K называется **нижней треугольной** тогда

и только тогда, когда для любых номеров i, j таких, что $\begin{cases} 1 \le j \le n \\ 1 \le i \le j \end{cases}$,
имеем $t_{ij} = 0$. Верхняя или нижняя треугольная матрица $\mathbf{A}_{n\times n}$, такая, что $1 = a_{11} = \ldots = a_{nn}$, называется **верхней унитреугольной** или соответственно **нижней унитреугольной**. Квадратная матрица $\mathbf{D}_{n\times n}$ называется **диагональной** тогда и только тогда, когда для любых номеров i, j, таких, что $\begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \\ i \ne j \end{cases}$, имеем $d_{ij} = 0$.

Единичной матрицей размерности $n \times n$ называется квадратная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, имеющая n строк и n столбцов.

Нулевой матрицей размерности $m \times n$ называется матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, имеющая m строк и n столбцов.

Клеточно-диагональной называется матрица, представимая в виде $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{p\times p} & \mathbf{0}_{p\times q} & \ldots & \mathbf{0}_{p\times r} \\ \mathbf{0}_{q\times p} & \mathbf{B}_{q\times q} & \ldots & \mathbf{0}_{q\times r} \\ & & \ldots & \\ \mathbf{0}_{r\times p} & \mathbf{0}_{r\times q} & \ldots & \mathbf{C}_{r\times r} \end{pmatrix}$, где $\{\mathbf{A}_{p\times p}, \mathbf{B}_{q\times q}, \ldots, \mathbf{C}_{r\times r}\}$ — множество квадратных матриц. Матрицы $\mathbf{A}_{p\times p}, \mathbf{B}_{q\times q}, \mathbf{C}_{r\times r}$ называются **диагональными клетками**.

Определение 2.1.2. Главной диагональю *квадратной матрицы A называется упорядоченная n-ка (кортеж из n элементов) $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.*

Определение 2.1.3. *Матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, они имеют одинаковую размерность и, во-вторых, для любого номера $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, где m — число строк матрицы* $\mathbf{A}$, *и любого номера $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, где n — число столбцов матрицы* $\mathbf{A}$, *имеем $a_{ij} = b_{ij}$. Тот факт, что матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *равны,* *обозначается, естественно, как* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

2.1.1. Определения и свойства матричных операций

Определение 2.1.4. Суммой матриц A *и* **B** *размерности* $m \times n$ *называется матрица* $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ *той же размерности, компоненты которой определяются равенствами* $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$, *где* $i \in \{1, 2, \ldots m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 2.1.5. Произведением *матрицы* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *на скаляр* $\lambda \in K$ *называется матрица* $\mathbf{B}_{m\times n} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{m\times n}$, *элементы которой имеют вид* $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Свойства операций «сложения и умножения на число»:

1) $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{A}_{m\times n}$ (коммутативность сложения матриц);
2) $(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) + \mathbf{C}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} + (\mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n})$ (ассоциативность сложения матриц);
3) $\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$ (существование нулевого элемента в алгебре матриц);
4) $\mathbf{A}_{m\times n} + (-\mathbf{A}_{m\times n}) = \mathbf{0}_{m\times n}$ (существование противоположного элемента в алгебре матриц);
5) $\lambda(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n}) = \lambda\mathbf{A}_{m\times n} + \lambda\mathbf{B}_{m\times n}$;
6) $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
7) $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$;
8) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9) $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Определение 2.1.6. *Пусть* **A** *— матрица размерности* $p \times n$, **B** *— матрица размерности* $n \times q$. *Тогда* **произведением матриц A** *и* **B** *называется матрица* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, *компоненты которой определяются равенствами*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \tag{2.1}$$

где $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\quad j \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

Свойства операции «произведение матриц»:

1) вообще говоря, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, т.е. умножение матриц **некоммутативно**;
2) вообще говоря, из того, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, **не следует**, что $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (существование делителей нуля);
3) $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;
4) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность);
5) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$; $\quad(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$ (дистрибутивность);
6) $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_{n\times n} = \mathbf{E}_{m\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$, где $\mathbf{E}_{k\times k} = (\delta_{ij})_{k\times k}$ (существование единичного элемента в алгебре матриц);
7) $\mathbf{0}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Определение 2.1.7. *Матрица* $\mathbf{B}$ *называется* **транспонированной** *к матрице* $\mathbf{A}$*, т.е.* $\mathbf{A}^t = \mathbf{B}$*, тогда и только тогда, когда* $b_{ij} = a_{ji}$*.*

Свойства операции «транспонирование»:

1) $(\lambda\mathbf{A})^t = \lambda\left(\mathbf{A}^t\right)$;
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$;
3) $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$ — транспонирование «меняет местами» порядок сомножителей.

2.2. Детерминант (определитель) матрицы

2.2.1. Линейная комбинация. Линейная функция

Определение 2.2.1. **Линейной комбинацией** *матриц* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **с коэффициентами** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *называется матрица*

$$\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 + \ldots + \lambda_n \cdot X_n.$$

Пусть в множествах A' и A'' каким-то образом определены операции соответственно $+'$ и $+''$ и для любого элемента λ из поля K определены операции λ' и λ'' («умножения» на λ элементов из A' и A'').

Функция $f : A' \to A''$ называется **линейной функцией**, *если для любых элементов $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$ и любых элементов $a_1; a_2; \ldots; a_n$ множества A' имеет место равенство*

$$f(\lambda_1' a_1 +' \lambda_2' a_2 +' \ldots +' \lambda_n' a_n') = \lambda_1'' f(a_1) +'' \lambda_2'' f(a_2) +'' \ldots +'' \lambda_n'' f(a_n). \quad (2.2)$$

Теорема 2.2.1 (критерии линейности функции). *Если для любых элементов $a_1; a_2; a_3$ из A и $b_1; b_2; b_3$ из B выполняются тождества:*

1) $(a_1 +' a_2) +' a_3 = a_1 +' (a_2 +' a_3)$ *(операция $+'$ на множестве A ассоциативна);*

2) $(b_1 +'' b_2) +'' b_3 = b_1 +'' (b_2 +'' b_3)$ *(операция $+''$ на множестве B ассоциативна),*

и для каждого элемента α поля K на множествах A и B определены одноместные операции α' и соответственно α'' («умножение» на α элементов из множеств A и соответственно B), то следующие условия эквивалентны:

1) *функция $f :\ A \to B$ является линейной;*

2) *для функции f выполняется тождество*
$$f(\lambda' a_1 +' \mu' a_2) = \lambda'' f(a_1) +'' \mu'' f(a_2); \quad (2.3)$$

3) *для функции f выполняются тождества*
$$f(a_1 +' a_2) = f(a_1) +'' f(a_2) \quad \text{и} \quad f(\alpha' a) = \alpha'' f(a). \quad (2.4)$$

2.2.2. Инвариантное определение детерминанта

Определение 2.2.2. **Перестановкой** *или* **подстановкой** *на множестве Ω называется взаимнооднозначное отображение множества Ω на*[1] *себя.*

Определение 2.2.3. *Если f — перестановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и u, v — такие элементы множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что $u < v$ и $f(u) > f(v)$, то пара $\Big(f(u); f(v)\Big)$ называется* **инверсией** *перестановки f.*

[1] Предлог «на» означает, что всякий элемент из Ω имеет прообраз в Ω относительно данной перестановки.

Определение 2.2.4 (инвариантное определение детерминанта). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица размерности* $n \times n$*, то ее* ***детерминантом*** *или* ***определителем*** *называется число*

$$\sum_{p_1 \in \{1;\ldots;n\}} \sum_{p_2 \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1\}} \cdots \sum_{p_n \in \{1;\ldots;n\} \setminus \{p_1;p_2;\ldots;p_{n-1}\}} (-1)^{\mu(p_1;\ldots;p_n)} a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}, \tag{2.5}$$

где $\mu(p_1; \ldots; p_n)$ *равно числу всех различных инверсий перестановки* $(p_1, \ldots, p_n)$*. Детерминант матрицы* $\mathbf{A}$ *обычно обозначается через* $|\mathbf{A}|$ *или* $\det(\mathbf{A})$*.*

2.2.3. Свойства детерминанта

Теорема 2.2.2 (о равноправии строк и столбцов). *Для любой квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *справедливо равенство* $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A})$*.*

Теорема 2.2.3 (о перестановке строк и столбцов). *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *перестановкой двух строк или двух столбцов, то* $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$*.*

Следствие 2.2.1. *Если в матрице* $\mathbf{A}$ *есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$*.*

Теорема 2.2.4 (об умножении строки (столбца) на число). *Если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *умножением одной из строк или одного из столбцов на число* λ*, то* $\det(\mathbf{B}) = \lambda \cdot \det(\mathbf{A})$*.*

Следствие 2.2.2. *Если в матрице* $\mathbf{A}$ *есть две пропорциональные строки, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$*.*

Теорема 2.2.5 (о линейности детерминанта по строке). *Пусть матрицы* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$ *совпадают, кроме* i*-й строки, причем* $w = \lambda u + \mu v$*, где* u, v, w *—* i*-е строки матриц соответственно* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$*. Тогда* $\det(\mathbf{C}) = \lambda \det(\mathbf{A}) + \mu \det(\mathbf{B})$*.*

Определение 2.2.5. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— матрица размерности* $m \times n$*,* k *— натуральное число и фиксированы номера* $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m$*,* $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$*. Тогда* **матрицей-минором***, построенной на строках с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *и столбцах с номерами* $j_1, j_2, \ldots, j_k$*, называется матрица* $\mathbf{B}$*, полученная из матрицы* $\mathbf{A}$ *вычеркиванием всех* *строк с номерами, отличными от номеров $i_1, i_2, \ldots, i_k$, и столбцов с номерами, отличными от номеров $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Детерминант матрицы-минора* $\mathbf{B}$ *называется* **минором** *матрицы* $\mathbf{A}$*, построенным на строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.*

Определение 2.2.6. *Для квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ **дополнительным минором** *элемента a_{ij} в матрице* $\mathbf{A}$ *называется детерминант матрицы, полученной из матрицы* $\mathbf{A}$ *вычеркиванием строки под номером i и столбца под номером j.*

Определение 2.2.7. *Для квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ **алгебраическим дополнением** *элемента a_{ij} в матрице* $\mathbf{A}$ *называется произведение числа $(-1)^{i+j}$ на дополнительный минор элемента a_{ij} в матрице* $\mathbf{A}$*.*

Теорема 2.2.6 (о разложении по строке или столбцу).

$$|A| = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cdot A_{km} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot A_{mk}, \tag{2.6}$$

где A_{km} — алгебраическое дополнение элемента a_{km} в матрице $\mathbf{A}$*.*

Теорема 2.2.7 (о комбинации строк и столбцов). *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *совпадают, кроме i-й строки, причем i-я строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является суммой i-й строки матрицы* $\mathbf{A}$ *и линейной комбинации остальных строк матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$*.*

Теорема 2.2.8 (признак вырожденности матрицы). *Если одна из строк матрицы* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных строк или один из столбцов* $\mathbf{A}$ *является линейной комбинацией остальных столбцов, то* $\det(\mathbf{A}) = 0$*.*

Следствие 2.2.3 (о детерминанте треугольной матрицы). *Детерминант треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Теорема 2.2.9 (о детерминанте произведения матриц). *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *квадратные матрицы. Тогда* $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$*.*

Теорема 2.2.10 (о разложении по «чужой» строке). *Если $p \neq q$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ip}A_{iq} = 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{pj}A_{qj} = 0$.*

2.2.4. Аксиоматическое определение детерминанта

Теорема 2.2.11 (об аксиоматическом определении). *Пусть функция* $\det^*$ *каждой квадратной матрице ставит в соответствие число, причем выполняются следующие утверждения:*

1) *если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *умножением* i*-й строки на число* λ*, то* $\det^*(\mathbf{B}) = \lambda \cdot \det^*(\mathbf{A})$*;*

2) *если матрица* $\mathbf{B}$ *получена из матрицы* $\mathbf{A}$ *прибавлением к* i*-й строке другой строки матрицы* $\mathbf{A}$*, то* $\det^*(\mathbf{B}) = \det^*(\mathbf{A})$*;*

3) *если* $\mathbf{E}$ *— единичная матрица, то* $\det^*(\mathbf{E}) = 1$*.*

Тогда $\det^*(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$*.*

2.3. Обратная матрица

2.3.1. Определение и критерий существования

Определение 2.3.1. *Матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *называется* **обратной** *к квадратной матрице* $\mathbf{A}$*, если выполняются равенства* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$*.*

Теорема 2.3.1 (об однозначности обратной матрицы). *Если существует матрица, обратная к матрице* $\mathbf{A}$*, то эта обратная матрица определяется однозначно.*

Теорема 2.3.2 (об условии обратимости квадратной матрицы). *Если* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица и* $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ *или* $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$*, то* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$*.*

Теорема 2.3.3 (критерий обратимости матрицы). *Матрица, обратная к матрице* $\mathbf{A}$*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *— квадратная матрица и* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$*.*

Определение 2.3.2. *Квадратная матрица называется* **невырожденной** *тогда и только тогда, когда ее детерминант отличен от 0.*

2.3.2. Свойства операции обращения матрицы

1. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$.
2. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

4. $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^t = \left(\mathbf{A}^t\right)^{-1}$.

2.3.3. Методы нахождения обратной матрицы

Первый способ: с помощью присоединенной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & \dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Второй способ: метод Гаусса.

2.4. Некоторые понятия теории систем линейных уравнений

2.4.1. Основные определения теории СЛУ

Определение 2.4.1. Системой линейных уравнений *относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется система уравнений вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.7}$$

где a_{ij} — некоторые числа, называемые **коэффициентами** *этой системы, и b_j — также числа*[2]*, называемые* **свободными членами** *системы. Если при этом $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система линейных уравнений называется* **однородной системой линейных уравнений** *(сокращенно* **ОСЛУ***). В противном случае (если хотя бы один из свободных членов отличен от 0) система линейных уравнений называется* **неоднородной системой линейных уравнений** *(сокращенно* **НСЛУ***).*

Определение 2.4.2. Решением *(или* **частным решением***) системы называется такой набор значений $u_1, u_2, \dots, u_n$ неизвестных*

[2]В общем случае a_{ij} и b_j являются элементами некоторого кольца.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, *что при подстановке этих значений вместо соответствующих переменных в* *<u>каждое</u>* *уравнение системы получается верное высказывание.*

Определение 2.4.3. *Если система (2.7) имеет хотя бы одно решение, она называется* **совместной** *системой, если же у этой системы решений нет, то* **несовместной**.

Система уравнений может иметь не одно решение. Система линейных уравнений либо несовместна (не имеет решений), либо имеет единственное решение, либо имеет *бесконечно много* решений.

Определение 2.4.4. *Система функций*

$$\varphi_1(C_1, C_2, \ldots, C_k), \varphi_2(C_1, C_2, \ldots, C_k), \ldots, \varphi_n(C_1, C_2, \ldots, C_k)$$

называется **общим решением** *системы уравнений, если:*

во-первых, *при любых значениях* $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *переменных* $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *набор*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(P_1, P_2, \ldots, P_k) \\ x_2 = \varphi_2(P_1, P_2, \ldots, P_k) \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_k) \end{cases}$$

является решением системы;

во-вторых, *для любого решения* $\begin{cases} x_1 = u_1 \\ x_2 = u_2 \\ \ldots \\ x_n = u_n \end{cases}$ *системы найдется такой набор чисел* $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *что* $u_i = \varphi_i(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ *для всех* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2.4.2. Формулы Крамера

Теорема 2.4.1 (Крамера). *Пусть матрица A коэффициентов системы линейных уравнений — квадратная, т.е. $m = n$, причем* $\det A \neq 0$. *Положим* $\Delta = \det A$ *и для* $k\{1, 2, \ldots, n\}$ *обозначим через* Δ_{x_k} *детерминант матрицы, полученной из A заменой k-го столбца столбцом свободных членов, т.е.*

$$\Delta_{x_k} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие формулы, называемые **формулами Крамера**: $x_k = \dfrac{\Delta_{x_k}}{\Delta}$.

2.4.3. Метод Гаусса: случай единственного решения

Метод Гаусса для СЛУ (единственное решение)

Метод Гаусса решения СЛУ называют еще *методом исключения неизвестных*. Метод Гаусса основан на преобразованиях системы уравнений, приводящих эту систему к максимально простому, в некотором смысле, виду.

Определение 2.4.5. *Две системы уравнений называются* **равносильными**, *если множество решений первой системы равно множеству решений второй системы уравнений.*

Для решения систем линейных уравнений достаточно ограничиться следующими преобразованиями системы уравнений:

- перестановка уравнений системы;
- умножение левой и правой частей любого уравнения системы на <u>ненулевое</u> число;
- замена одного из уравнений системы суммой этого уравнения с линейной комбинацией других уравнений.

Теорема 2.4.2 (о равносильных преобразованиях СЛУ). *Пусть система A линейных уравнений получена из системы B линейных уравнений с помощью серии последовательных преобразований одного из следующих видов:*

1) *перестановка уравнений системы;*

2) *умножение левой и правой частей одного из уравнений на некоторое ненулевое число λ;*

3) замена одного из уравнений системы суммой этого уравнения с линейной комбинацией остальных уравнений;

4) удаление из системы уравнений тождества $0 = 0$*;*

5) добавление в систему уравнений линейной комбинации уравнений системы B*,*

то системы A *и* B *равносильны.*

Метод Гаусса состоит из двух этапов: *прямой ход* и *обратный ход*. Во время *прямого хода* мы последовательно переходим к равносильным системам вида (здесь символы $*$ обозначают некоторые числа, не обязательно равные друг другу):

$$\begin{cases} *x+*y+*z=* \\ *x+*y+*z=* \\ *x+*y+*z=* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+*y+*z=* \\ *x+*y+*z=* \\ *x+*y+*z=* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+*y+*z=* \\ *y+*z=* \\ *y+*z=* \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x+*y+*z=* \\ y+*z=* \\ *z=* \end{cases}.$$

Обратный ход метода Гаусса состоит в том, что мы последовательно переходим к системам вида

$$\begin{cases} x+*y+*z=* \\ y+*z=* \\ z=* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+*y \;\; =* \\ y \;\; =* \\ z=* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=* \\ y=* \\ z=* \end{cases},$$

последняя из которых представляет собой утверждение об искомых значениях переменных.

Матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называется **расширенной матрицей** коэффициентов этой системы уравнений. В левой (относительно вертикальной черты) части этой матрицы находятся коэффициенты перед неизвестными, а в правой части — столбец свободных членов.

Преобразования метода Гаусса:

- перестановка уравнений;
- умножение уравнения на ненулевое число;
- замена уравнения суммой этого уравнения с линейной комбинацией остальных уравнений,

равносильны соответствующим преобразованиям строк матрицы:

- перестановка строк;
- умножение строки на ненулевое число;
- замена строки суммой этой строки с линейной комбинацией остальных строк.

Такие преобразования строк матрицы называются **элементарными преобразованиями**.

Итак, поиск решения системы линейных уравнений (СЛУ) осуществляется в 2 этапа, называемых *прямым* и *обратным* ходом метода Гаусса.

- Во время прямого хода метода Гаусса постепенно получают единицы на главной диагонали матрицы, начиная с левого верхнего угла, потом полученной «инструментальной строкой» с 1 на главной диагонали получаем нули ниже этой единички (слева-сверху — вправо-вниз):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \ldots & * & * \\ * & * & * & \ldots & * & * \\ * & * & * & \ldots & * & * \\ & & \ldots & & & * \\ * & * & * & \ldots & * & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & * & * & \ldots & * & * \\ & & \ldots & & & * \\ 0 & * & * & \ldots & * & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 1 & * & \ldots & * & * \\ 0 & * & * & \ldots & * & * \\ & & \ldots & & & * \\ 0 & * & * & \ldots & * & * \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 1 & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & * & \ldots & * & * \\ & & \ldots & & & * \\ 0 & 0 & * & \ldots & * & * \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 1 & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & * & * \\ & & \ldots & & & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & * \end{array}\right),$$

  где $*$ вместо элементов матрицы обозначают произвольные (не обязательно одинаковые) числа.

- Во время обратного хода метода Гаусса мы получаем нули выше главной диагонали начиная с правого края матрицы коэффициентов (справа-снизу — влево-вверх):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & 1 & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & * & * \\ & & \ldots & & & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \ldots & 0 & * \\ 0 & 1 & * & \ldots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & * \\ & & \ldots & & & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & * \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & * \\ & & \ldots & & & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & * \end{array}\right).$$

2.4.4. Фундаментальная система решений (ФСР). Фундаментальная матрица

Для того чтобы записать общее решение системы уравнений в соответствии с определением общего решения, достаточно положить $c = C_1$, $d = C_2$, $\quad e = C_3$. Тогда общее решение исходной системы можно представить в виде

$$\begin{cases} a = 2 + -11C_1 + 8C_2 + 5C_3 \\ b = 1 + -6C_1 + 5C_2 + 3C_3 \\ c = C_1 \\ d = C_2 \\ e = C_3 \end{cases}.$$

Последнюю систему уравнений часто записывают в матричной форме: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, что с помощью «умножения на макроуровне» представляется в виде

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 8 & 5 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений $\begin{cases} 2a - 3b + 4c - d - e = 0 \\ a - 2b - c + 2d + e = 0 \\ 4a - 7b + 2c + 3d + e = 0 \\ 3a - 5b + 3c + d = 0 \\ 5a - 8b + 7c - e = 0 \end{cases}$ называется *однородной системой уравнений*, **соответствующей** исходной системе

$$\begin{cases} 2a - 3b + 4c - d - e = 1 \\ a - 2b - c + 2d + e = 0 \\ 4a - 7b + 2c + 3d + e = 1 \\ 3a - 5b + 3c + d = 1 \\ 5a - 8b + 7c - e = 2 \end{cases}.$$

Матрица $\Phi = \begin{pmatrix} -11 & 8 & 5 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется **фундаментальной матрицей** однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} 2a - 3b + 4c - d - e = 0 \\ a - 2b - c + 2d + e = 0 \\ 4a - 7b + 2c + 3d + e = 0 \\ 3a - 5b + 3c + d = 0 \\ 5a - 8b + 7c - e = 0 \end{cases}$, а система матриц-столбцов $\begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — **фундаментальной системой решений** этой однородной системы линейных уравнений.

Глава 3

Кольцо многочленов

3.1. Определения

Определение, естественное для математического анализа: **многочлен** или **полином** над кольцом K — это функция $K \mapsto K$, задаваемая выражением $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы кольца K.

Определение, применяющееся в алгебре: многочленом или **полиномом** называется выражение вида $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

Будем считать, что $x^0 = 1$ для любого x, в том числе для $x = 0$.

Таким образом, многочлен — это «линейная комбинация переменной x в различных степенях». Элементы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются **коэффициентами многочлена** $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$.

3.1.1. Кольцо многочленов

Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ многочлена $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ могут быть не только действительными числами. Вообще говоря, если эти коэффициенты являются элементами поля K, то говорят, что $f(x)$ — это **многочлен над полем** K. Множество всех многочленов от переменной x над полем K обозначается через $K[x]$.

3.1.2. Степень многочлена

Определение 3.1.1. Степенью многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$$

называется наибольшее такое число m, что $a_m \neq 0$, если такое m найдется. Если все коэффициенты этого многочлена равны 0, то, согласно некоторым источникам, степень такого многочлена не определяется. Другие авторы определяют степень такого многочлена как $-\infty$ («минус-бесконечность»).

Степень многочлена $f(x)$ обычно обозначается через $\deg(f(x))$ или даже через $\deg(f)$.

3.1.3. Равенство многочленов

Определение 3.1.2. *Многочлены (полиномы)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

степени n и m соответственно называются **равными** *тогда и только тогда, когда, во-первых, $n = m$ и, во-вторых, для любого i имеют место равенства $a_i = b_i$.*

Теорема 3.1.1 (критерий равенства многочленов). *Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны тогда и только тогда, когда тождественно равны функции f и g, задаваемые этими многочленами.*

3.1.4. Операции алгебры многочленов

Сложение:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n) + (b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_n \cdot x^n) =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot x + \ldots + (a_n + b_n) \cdot x^n,$$

где n — максимум степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Умножение на элемент λ из K:

$$\lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot (a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n) = (\lambda \cdot a_0) + (\lambda \cdot a_1) \cdot x + \ldots + (\lambda \cdot a_n) \cdot x^n.$$

Произведение многочленов:

$$\left(\sum_{s=0}^{n} a_s x^s\right) \cdot \left(\sum_{t=0}^{m} b_t x^t\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{s+t=k} a_s \cdot b_t\right) \cdot x^k.$$

3.1.5. Свойства некоторых операций алгебры многочленов

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.
2. $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$.
3. $f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x)$, где $\mathbf{0}(x) = 0x^0$.
4. $f(x) + (-f(x)) = \mathbf{0}(x)$, где $-f(x) = -\sum_{m=0}^{n} a_m x^m = \sum_{m=0}^{n} (-a_m)\, x^m$.
5. $\lambda\,(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$.
6. $(\lambda + \mu)\, f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)$.
7. $(\lambda\mu)\ f(x) = \lambda\,(\mu f(x))$.
8. $1 \cdot f(x) = f(x)$.

3.2. Делимость многочленов

3.2.1. Алгоритм Евклида

Теорема 3.2.1 (о делении с остатком). *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с коэффициентами из поля K, где степень многочлена $g(x)$ не равна $-\infty$, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $r(x)$, что* $\deg(r) < \deg(g)$ *и $f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x)$.*

3.2.2. Н.О.Д. и Н.О.К. многочленов

Теорема 3.2.2 (о Н.О.Д. делителя и остатка от деления). *Если $r(x)$ — ненулевой остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, то* **Н.О.Д.** $(f(x), g(x)) =$ **Н.О.Д.** $(g(x), r(x))$.

3.3. Корни многочленов

Определение 3.3.1. *Пусть $f(x)$ — многочлен над кольцом K. Элемент a кольца K называется* **корнем** *многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(a) = 0$, где 0 — нулевой элемент кольца K.*

3.3.1. Теоремы Безу и Виета

Теорема 3.3.1 (Безу). *Элемент a поля K является корнем многочлена $f(x)$ ненулевой степени ($f(a) = 0$) тогда и только тогда, когда $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$. Иными словами, a является корнем многочлена в том и только том случае, когда этот многочлен делится нацело на многочлен $x - a$.*

Следствие 3.3.1 (из теоремы Безу). *Если a и b — различные корни многочлена $f(x)$ над полем K, то $f(x) = (x - a)(x - b)g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$.*

Определение 3.3.2. *Если a — корень многочлена $f(x)$, то* **кратностью корня** *называется такое натуральное число k, что*

$$f(x) = (x - a)^k \, g(x), \tag{3.1}$$

где $g(x)$ — такой многочлен, что a не является его корнем.

Теорема 3.3.2 (Виета). *Если многочлен $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ разложим над полем K в произведение многочленов первой степени:*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) = \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k) \, ,$$

где $\alpha_i \in K$, то

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, \\ a_1 = (-1)^{n-1} \left(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} + \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2} \alpha_n + \ldots + \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \right), \\ \ldots \\ a_{n-2} = \alpha_1 \alpha_2 + \ldots + \alpha_1 \alpha_{n-1} + \alpha_2 \alpha_3 + \ldots + \alpha_2 \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} \alpha_n, \\ a_{n-1} = -\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \right), \end{array} \right. \tag{3.2}$$

т.е.

$$a_j = (-1)^{n-j} \sum_{k_1=1}^{n-j} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-j+1} \ldots \sum_{k_{j-1}=k_{j-2}+1}^{n-1} \sum_{k_j=k_{j-1}+1}^{n} \left(\prod_{m \in \{1;\, \ldots;\, n\} \setminus \{k_1; \ldots;\, k_j\}} \alpha_m \right).$$

3.3.2. Производная многочлена

Теорема 3.3.3 (о кратных корнях и производной). *Если α — корень многочлена $p(x)$ кратности k, то α является корнем его производной $p'(x)$ кратности $(k-1)$.*

Теорема 3.3.4 (об избавлении от кратных корней). *Если $q(x)$ — наибольший общий делитель многочленов $p(x)$ и $p'(x)$, то справедливы следующие утверждения:*

1) *всякий корень многочлена $p(x)$ является корнем многочлена $\dfrac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x);p'(x))}$;*

2) *все корни многочлена $\dfrac{p(x)}{\textbf{Н.О.Д.}\,(p(x);p'(x))}$ имеют кратность 1.*

3.3.3. Разложимые и неразложимые многочлены

Определение 3.3.3. *Многочлен $f(x)$ называется* **разложимым** *над полем K, если существуют такие многочлены $p(x)$ и $q(x)$ из $K[x]$, что,* **во-первых**, $\deg(p) < \deg(f)$ *и* $\deg(q) < \deg(f)$; **во-вторых**, $f(x) = p(x) \cdot q(x)$. *В противном случае многочлен $f(x)$ называется* **неразложимым** *или* **неприводимым** *над полем K.*

Иными словами, $f(x)$ неразложим над полем K тогда и только тогда, когда равенство $f(x) = p(x) \cdot q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены с коэффициентами из K, выполняется только в случае $\deg(p) = 0$ или $\deg(q) = 0$.

Определение 3.3.4. *Многочлен (полином) $f(x)$ называется* **вполне приводимым** *над полем K тогда и только тогда, когда*

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m}.$$

Теорема 3.3.5 (о многочленах, неразложимых над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$). *Над полем действительных чисел неразложимыми являются только многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Над полем комплексных чисел неразложимыми являются только многочлены первой степени.*

Следствие 3.3.2 (о количестве комплексных корней). *Всякий многочлен над полем комплексных чисел степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности.*

Следствие 3.3.3 (о вещественном корне многочлена нечетной степени). *Всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Теорема 3.3.6 (о корнях многочлена с веществ. коэффициентами). *Если все коэффициенты многочлена $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ являются вещественными и z_0 — корень этого многочлена кратности k, то $\overline{z_0}$ также является корнем этого многочлена кратности k.*

Замечание 3.3.1 (о получении многочлена с веществ. коэффициентами). *Если z_0 — комплексное число, то многочлен $f(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$ имеет вещественные коэффициенты.*

3.3.4. Схема Горнера

Вычисления по рекуррентным формулам

$$b_0 = \frac{a_0}{\alpha}, \quad b_k = \frac{a_k - b_{k-1}}{\alpha} \tag{3.3}$$

называются вычислениями по **схеме Горнера**.

3.3.5. Результант многочленов

Теорема 3.3.7 (о результанте многочленов). *Если многочлены $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ и $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ разложимы над полем K в произведение многочленов первой степени:*

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = a_n (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i), \\ b_0 + b_1 x + \ldots + a_m x^m = b_m (x - \beta_1) \ldots (x - \beta_n) = b_m \prod_{j=1}^{m} (x - \beta_j), \end{cases}$$

где $\{\alpha_i; \beta_j\} \subseteq K$, то выражение

$$R(f(x), g(x)) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j) \tag{3.4}$$

равно 0 тогда и только тогда, когда многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют хотя бы один общий корень.

Определение 3.3.5. *Выражение* $R(f(x), g(x))$ *называется* **результантом** *многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$.

Теорема 3.3.8 (о представлении результанта). *Если многочлены* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ *и* $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ *разложимы над полем* K *в произведение многочленов первой степени:*

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = a_n (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i), \\ b_0 + b_1x + \ldots + a_mx^m = b_m (x - \beta_1) \ldots (x - \beta_n) = b_m \prod_{j=1}^{m} (x - \beta_j), \end{cases}$$

где $\{\alpha_i; \beta_j\} \subseteq K$, *то результант* $R(f(x), g(x))$ *равен*

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccccccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n & \ldots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_{m-n} & b_{m-n-1} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_{m-n+1} & b_{m-n} & \ldots & b_1 & b_0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m & \ldots & b_{n-m} & b_{n-m-1} & \ldots & b_1 & b_0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a\\a\\a\\a\\a \end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} a\\a\\a\\a \end{array}}\right\} n \end{array} \end{array} \tag{3.5}$$

3.4. Интерполяция. Интерполяционный многочлен

Теорема 3.4.1 (об интерполяционном многочлене Лагранжа).

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{\prod\limits_{m \neq k} (x - x_m)}{\prod\limits_{m \neq k} (x_k - x_m)} = \\ = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) (x - x_n)}{(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) (x_k - x_n)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.5. Формы и симметрические многочлены

Определение 3.5.1. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называется выражение, представляющее собой сумму одночленов вида* $a \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, *где* α_i *— неотрицательное целое число.*

Определение 3.5.2. **Степенью одночлена** $Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_m^{k_m}$, *где* $a \neq 0$, *называется число* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$. **Степенью многочлена** *называется максимум степеней одночленов, являющихся слагаемыми этого многочлена.*

3.5.1. Формы (однородные многочлены)

Определение 3.5.3. **Однородным многочленом степени** k *или* **формой** *называется многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *все одночлены в котором имеют одну и ту же степень* k.

3.5.2. Симметрические многочлены

Определение 3.5.4. *Многочлен* $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *называется* **симметрическим**, *если для любой перестановки* σ *на множестве* $\{1; 2; \ldots; n\}$ *имеет место равенство*

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}; x_{\sigma(2)}; \ldots; x_{\sigma(n)}\right). \tag{3.7}$$

Теорема 3.5.1 (**о разложении в сумму симметрических форм**). *Любой симметрический полином может быть представлен в виде суммы симметрических форм, т.е. однородных многочленов*[1].

Определение 3.5.5. *Основными симметрическими многочленами называются*

$$s_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot \ldots \cdot x_{k_m}. \tag{3.8}$$

Теорема 3.5.2 (**о разложении симметр. многочлена по основным**). *Любой симметрический полином может быть представлен в виде полинома от основных симметрических полиномов. Коэффициенты в таком виде представляются целочисленными линейными комбинациями коэффициентов исходного полинома.*

[1] Все одночлены в однородных многочленах имеют одну и ту же степень.

3.6. Разложение дробно-рациональной функции на простейшие

3.6.1. Определения и теорема о разложении

Определение 3.6.1. *Функция, задаваемая выражением вида* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, *где* $p(x)$ *и* $q(x)$ *— многочлены с вещественными коэффициентами, называется* **дробно-рациональной функцией**. *Дробно-рациональная функция* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *называется* **правильной**, *если* $\deg(p) < \deg(q)$, *в противном случае она называется* **неправильной**. *Дробно-рациональные функции вида* $\dfrac{a}{(x-b)^n}$ *и* $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$, *где* $n \in \mathbb{N}$ *и многочлен* x^2+cx+d *не имеет вещественных корней, называются* **простейшими дробно-рациональными функциями**.

Теорема 3.6.1 (о разложении дробно-рациональной функции). *Всякая дробно-рациональная функция*

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-n_n)^{\alpha_n}\cdot s_1(x)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot s_m(x)^{\beta_m}},$$

где $s_1(x),\ldots,s_m(x)$ *— неразложимые над* $\mathbb{R}$ *многочлены второй степени, представима в виде*

$$q(x)+\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_{n\alpha_n}}{(x-a_n)^{\alpha_n}}+$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{s_1(x)}+\ldots+\frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{s_1(x)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{M_{m\beta_m}x+N_{m\beta_m}}{s_m(x)^{\beta_m}},$$

где $q(x)$ *— многочлен*[2].

[2]Многочлен $q(x)$ называется **целой частью** этой дробно-рациональной функции.

Глава 4

Теория линейных пространств

4.1. Линейное пространство

4.1.1. Определение

Определение 4.1.1. Линейным пространством над полем K *называется множество U (его элементы называются* **векторами***), на котором определена операция + и, для каждого λ из поля* **K***, операция умножения на λ. Причем выполняются следующие соотношения (аксиомы линейного пространства):*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность);*
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*
3) *существует такой вектор* $\mathbf{0}$*, что для любого вектора x из U выполняется равенство $x + \mathbf{0} = x$ (существование нулевого вектора);*
4) *для любого вектора x из U существует вектор $-x$ такой, что $x + (-x) = \mathbf{0}$;*
5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$*;*
6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$*;*
7) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$*;*
8) $1x = x$.

4.1.2. Элементарные теоремы теории линейных пространств

Теорема 4.1.1 (критерий нулевого вектора). $y = \mathbf{0} \Leftrightarrow x + y = x$.

Теорема 4.1.2 (об умножении на нуль). $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

Теорема 4.1.3 (**критерий обратного вектора**). $y = -x \Leftrightarrow x + y = \mathbf{0}$.

Теорема 4.1.4 (**об умножении на -1**). $(-1) \cdot x = -x$.

Теорема 4.1.5 (**об умножении на $-\lambda$**). $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

4.1.3. Линейная зависимость

Определение 4.1.2. *Пусть U — линейное пространство над полем K.* **Линейной комбинацией** *элементов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейного пространства U с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ из K называется выражение*

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m.$$

Определение 4.1.3. *Пусть U и V — линейные пространства над полем K и f — функция с $D(f) \subseteq U$, $E(f) \subseteq V$. Тогда f называется* **линейной функцией**, *если для любой линейной комбинации $\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m \in D(f)$, такой, что $u_i \in D(f)$, имеет место равенство*

$$f\left(\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_m \cdot u_m\right) = \lambda_1 \cdot f\left(u_1\right) + \ldots + \lambda_m \cdot f\left(u_m\right).$$

Определение 4.1.4. *Система векторов*[1] *$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейного пространства U над полем* $\mathbf{K}$ *называется* **линейно зависимой** *тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ поля* $\mathbf{K}$, *не все равные 0, что имеет место равенство*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

Определение 4.1.5. *Система векторов*[2] *$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейного пространства U над полем* $\mathbf{K}$ *называется* **линейно независимой** *(сокращенно* **ЛНС***) тогда и только тогда, когда из равенства*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \mathbf{0}$$

следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Теорема 4.1.6 (**критерий линейной зависимости векторов**). *Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных векторов этой системы.*

---

[1] В данном случае считается, что при задании множества списком элементов все элементы списка попарно различны, т.е. $\left\{\begin{array}{l}\{p, q\} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\} \\ p \neq q\end{array}\right. \Rightarrow a_p \neq a_q$.

[2] Все a_k попарно различны.

4.1.4. Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов

Свойство 1 (о линейной зависимости системы с нулем). Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.

Свойство 2 (о независимости подсистемы). Если система векторов является линейно независимой, то любая ее подсистема также линейно независима.

Свойство 3 (о зависимости надсистемы). Если подсистема векторов $\mathcal{B}$ системы векторов $\mathcal{A}$ является линейно зависимой, то и $\mathcal{A}$ — линейно зависимая система векторов.

Свойство 4 (об однозначности разложения по ЛНС). Если $\mathcal{A}$ — линейно независимая система векторов и $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, где $u_k \in \mathcal{A}$, — разложение вектора x в линейную комбинацию попарно различных[3] векторов из $\mathcal{A}$, то коэффициенты λ_k определяются однозначно[4].

4.1.5. Базис

Определение 4.1.6. *Система векторов* **B** *линейного пространства U называется* **системой порождающих векторов** *или* **системой порождающих** *линейного пространства U, если всякий вектор из U является линейной комбинацией векторов из* **B**.

Определение 4.1.7. *Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства U, если такая существует, называется* **базой** *линейного пространства U.*

Определение 4.1.8. *Упорядоченная база векторов линейного пространства U называется* **базисом** *линейного пространства U.*

Теорема 4.1.7 (**о линейных комбинациях базисных векторов**). *Конечная система векторов* **Б** *является базисом пространства U тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

---

[3]Это значит, что $1 \leq k < m \neq n \quad \Rightarrow \quad u_k \neq u_m$.

[4]Это значит, что $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \quad \Rightarrow \quad (\forall k \in \{1, 2, \ldots n\} \quad \lambda_k = \mu_k)$.

1) **Б** *— линейно независимая система;*

2) **Б** *является системой порождающих*[5] *для U, т.е. всякий вектор пространства U представим в виде линейной комбинации векторов системы* **Б**.

Определение 4.1.9. *Пусть V — подмножество носителя линейного пространства $\langle U, \mathcal{F} \rangle$, т.е. $V \subseteq U$. Тогда говорят, что система W векторов из V является* **полной в** *V тогда и только тогда, когда любой вектор из V является линейной комбинацией векторов системы W. Если $V = U$, то говорят, что система W полна (не уточняя, что во всем U).*

Теорема 4.1.8 (о единственности разложения по базису). *Коэффициенты перед базисными векторами в разложении вектора по базису определяются однозначно.*

Определение 4.1.10. *Если* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— базис линейного пространства U, то для любого вектора x из U коэффициенты λ_i разложения вектора x по базису* **Б** *называются* **координатами** *вектора x в базисе* **Б**. *При этом столбец координат вектора x в базисе* **Б** *будем обозначать через $[x]$.*

4.1.6. Размерность

Определение 4.1.11. *Говорят, что система векторов $\mathcal{A}$* **линейно выражается**[6] *через систему векторов $\mathcal{B}$, если всякий вектор из $\mathcal{A}$ представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathcal{B}$. Символически это записывается так: $\mathcal{A} \dashv \mathcal{B}$.*

Лемма 4.1.1 (о транзитивности отношения $\dashv$). *Если система $\mathcal{A}$ линейно выражается через $\mathcal{B}$, которая, в свою очередь, линейно выражается через $\mathcal{C}$, то система $\mathcal{A}$ линейно выражается через $\mathcal{C}$. Иными словами, из $\mathcal{A} \dashv \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \dashv \mathcal{C}$ следует, что $\mathcal{A} \dashv \mathcal{C}$.*

Теорема 4.1.9 (Штейница). *Если линейно независимая система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ линейно выражается через линейно независимую систему векторов $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, то $n \leq m$.*

[5] В этом случае говорят, что **Б** является **полной системой** в U.

[6] По поводу линейной алгебры выражайтесь, пожалуйста, линейно!

Теорема 4.1.10 (о количестве базисных векторов). *Пусть* $\mathbf{Б}_1$ *и* $\mathbf{Б}_2$ *— два базиса линейного пространства* U*, причем* $\mathbf{Б}_1$ *— конечное множество. Тогда* $\mathbf{Б}_2$ *— также конечное множество, и количество векторов в базисе* $\mathbf{Б}_1$ *равно количеству векторов в базисе* $\mathbf{Б}_2$*.*

Определение 4.1.12. *Если количество векторов в базисе линейного пространства* U *конечно, то это количество векторов называется* **размерностью** *линейного пространства* U*. В противном случае говорят, что* U *—* **бесконечномерное линейное пространство***.*

Теорема 4.1.11 (о дополняемости до базиса). *Любую линейно независимую систему векторов* $\mathbf{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ *конечномерного линейного пространства* U *можно дополнить до базиса* $\mathbf{B}' = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ *линейного пространства* U*.*

4.1.7. Подпространство

Определение 4.1.13. *Подмножество* U *линейного пространства* V *называется* **подпространством***, если* U *является линейным пространством относительно тех же операций.*

Теорема 4.1.12 (критерий подпространства). *Подмножество* V *линейного пространства* U *над полем* $\mathbf{K}$ *является подпространством тогда и только тогда, когда для любых векторов* $x, y \in V$ *вектор* $x + y$ *принадлежит* V *и для любого элемента* λ *поля* $\mathbf{K}$ *и любого вектора* x *из* V *вектор* λx *принадлежит* V*.*

Теорема 4.1.13 (критерий подпространства). *Подмножество* V *линейного пространства* U *над полем* $\mathbf{K}$ *является подпространством тогда и только тогда, когда для любых векторов* $x, y \in V$ *и любых элементов* $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ *вектор* $\lambda x + \mu y$ *принадлежит* V*.*

Теорема 4.1.14 (о размерности подпространства). *Пусть* V *— подпространство линейного пространства* U*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\dim(V) \leq \dim(U)$*;*

2) $\dim(V) < \dim(U)$ *тогда и только тогда, когда* $V < U$*, т.е.* $V \neq U$*.*

Определение 4.1.14. Линейная оболочка *$L(A)$ или $\langle A\rangle$ системы векторов A — это минимальное (по включению) такое подпространство пространства V, которое содержит все векторы из A.*

Теорема 4.1.15 (о внутренней характеризации линейной оболочки). *Линейная оболочка $\langle A\rangle$ системы векторов A линейного пространства V над полем $\mathbf{K}$ состоит из всевозможных линейных комбинаций векторов системы A с коэффициентами из поля $\mathbf{K}$:*

$$\langle A\rangle = \left\{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in A\right\}.$$

В частности, $L(A) \dashv A$.

Следствие 4.1.1 (о линейной оболочке подсистемы). *Если A — система векторов и B — такая ее подсистема, что $A \dashv B$, то $L(A) = L(B)$. В частности, если B — максимальная линейно независимая подсистема системы A, то $L(A) = L(B)$.*

4.1.8. Стандартные способы задания подпространств

Обычно применяется один из двух способов задания подпространств:

- в виде линейной оболочки системы векторов. Желательно, чтобы эта система векторов была линейно независимой, тогда она является *базисом* этой линейной оболочки, т.е. *базисом* этого подпространства;
- с помощью системы линейных уравнений. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U. Тогда однородная система линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ определяет подпространство V, состоящее из *всех* таких векторов $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, столбец координат которых в базисе $\mathbf{Б}$ является решением этой ОСЛУ.

4.2. Алгебра подпространств

4.2.1. Пересечение подпространств

Теорема 4.2.1 (**о пересечении подпространств**). *Пусть V, W — подпространства линейного пространства U над полем K. Тогда пересечение $V \cap W$ подпространств V и W является подпространством.*

4.2.2. Сумма подпространств

Определение 4.2.1. *Пусть V, W — подпространства линейного пространства U над полем K.* **Суммой подпространств** *V и W называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2.2 (**о сумме подпространств**). *Сумма подпространств является подпространством.*

Теорема 4.2.3 (**о размерности суммы подпространств**). *Пусть V, W — подпространства конечномерного линейного пространства U над полем K. Тогда*

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Теорема 4.2.4 (**о вычислении суммы и пересечения подпространств**). *Если $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U и*

$$V = \langle v_1, \ldots, v_k, \ldots \rangle = \left\{ x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \end{array} \right. \right\},$$

$$W = \langle w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle = \left\{ x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ b_{q1}x_1 + \ldots + b_{qn}x_n = 0 \end{array} \right. \right\}$$

— подпространства линейного пространства U, то

$$V + W = \langle v_1, \ldots, v_n, \ldots, w_1, \ldots, w_m, \ldots \rangle, \tag{4.2}$$

$$V \cap W = \left\{ x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ b_{q1}x_1 + \ldots + b_{qn}x_n = 0 \end{array} \right. \right\}. \tag{4.3}$$

4.2.3. Прямая сумма подпространств

Определение 4.2.2. *Если V, W — подпространства линейного пространства U над полем K и $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$, то сумма $V + W$ подпространств V и W называется* **прямой суммой**. *Прямая сумма подпространств обозначается через $V \oplus W$.*

Теорема 4.2.5 (критерий прямой суммы подпространств). *Пусть V, W — подпространства линейного пространства U над полем K. Тогда сумма $V + W$ является прямой суммой тогда и только тогда, когда всякий вектор из $V + W$ <u>однозначным</u> <u>образом</u> представляется в виде $v + w$, где $v \in V$, $w \in W$.*

Определение 4.2.3. *Сумма подпространств $V_1, \ldots, V_k$ называется* **прямой** *тогда и только тогда, когда пересечение любого из V_i с суммой остальных слагаемых является нулевым пространством:*

$$V_i \cap (V_1 + V_2 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = \{\mathbf{0}\}.$$

Подпространство, являющееся прямой суммой подпространств $V_1, \ldots, V_k$, записывают следующим образом:

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k.$$

Теорема 4.2.6 (о разложении в прямую сумму). *Конечномерное линейное пространство раскладывается в прямую сумму одномерных подпространств.*

4.3. Изоморфизм

Определение 4.3.1. **Изоморфизмом** *линейного пространства U в линейное пространство V называется <u>линейное</u> <u>взаимно</u> <u>однозначное</u> <u>отображение</u> пространства U в пространство V.*

Определение 4.3.2. *Линейные пространства U и V называются* **изоморфными** *тогда и только тогда, когда существует изоморфизм f линейного пространства U <u>на</u> линейное пространство V, иначе говоря, у всякого вектора $y \in V$ есть прообраз в U, т.е. такой вектор x в U, что $f(x) = y$.*

Лемма 4.3.1 (об образе нулевого вектора). *Если f — изоморфизм линейного пространства U в линейное пространство V, то*

$$f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V.$$

Лемма 4.3.2 (о транзитивности отношения изоморфности). *Если f — изоморфизм линейного пространства U в линейное пространство V и g — изоморфизм линейного пространства V в линейное пространство W, то суперпозиция $f \circ g$ функций f и g является изоморфизмом линейного пространства U в линейное пространство W.*

Теорема 4.3.1 (об образе системы векторов при изоморфизме). *Пусть f — изоморфизм линейного пространства U в линейное пространство V. Тогда система векторов $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ линейного пространства U линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независимой является система векторов $\mathcal{B} = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)\}$.*

Теорема 4.3.2 (критерий изоморфности конечномерных пространств). *Если U и V — конечномерные линейные пространства над полем $\mathbf{K}$, то U и V изоморфны тогда и только тогда, когда у них одинаковая размерность.*

Теорема 4.3.3 (о стандартном изомофизме в $\mathbb{R}^n$). *Отображение f, каждому вектору ставящее в соответствие столбец его координат в базисе U:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right]_{\mathbf{Б}}, \tag{4.4}$$

является изоморфизмом.

4.3.1. Матрица перехода в другой базис

Определение 4.3.3. *Пусть* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса линейного пространства* U. **Матрицей перехода** *из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$ *называется матрица* $T = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = (t_{ij})_{n\times n}$, *коэффициенты которой определяются равенствами*

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j. \tag{4.5}$$

Таким образом, *i-й столбец матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$ *представляет собой столбец координат вектора* e'_i *в базисе* $\mathbf{Б}$.

Теорема 4.3.4 (о координатах вектора в разных базисах). *Если* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *— матрица перехода из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$, *то для любого вектора* x *справедлива формула*

$$[x]_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}. \tag{4.6}$$

Глава 5

Теория линейных операторов

5.1. Линейные операторы

5.1.1. Определение и примеры

Определение 5.1.1. *Пусть U и V — линейные пространства над полем K.* **Линейным оператором** *линейного пространства U в линейное пространство V называется линейная функция $\hat{A}:\ U \to V$.*

Определение 5.1.2. Линейным оператором *линейного пространства U называется линейная функция $\hat{A}:\ U \to U$.*

5.1.2. Матрица линейного оператора

Определение 5.1.3. *Пусть U и V — линейные пространства над полем K, $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — базисы линейных пространств U и соответственно V, $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U в линейное пространство V. Тогда* **матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисах $\mathbf{Б}_U$-$\mathbf{Б}_V$** *называется матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} = (a_{ij})_{m\times n}$, коэффициенты которой определяются равенствами*

$$\hat{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j. \qquad (5.1)$$

Итак, *i-м столбцом матрицы оператора в базисах $\mathbf{Б}_U$-$\mathbf{Б}_V$ является столбец координат в базисе $\mathbf{Б}_V$* **образа** *i-го базисного вектора базиса $\mathbf{Б}_U$.*

В случае, когда $U = V$, т.е. когда $\hat{A}$ является линейным оператором линейного пространства U, «по умолчанию» полагают $\mathbf{Б}_U = \mathbf{Б}_V$. При этом говорят о *матрице оператора в базисе* $\mathbf{Б}_U$, и эта матрица определяется равенством

$$\hat{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1.1 (о координатах образа вектора). *Пусть U и V — линейные пространства над полем K, $\mathbf{Б}_U = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}_V = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — базисы этих пространств, $\mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V}$ — матрица в этих базисах линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U. Тогда для любого вектора $x \in U$ справедливо равенство*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}_V} = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}_V} \cdot [x]_{\mathbf{Б}_U}. \tag{5.3}$$

5.1.3. Алгебра линейных операторов

Определение 5.1.4. Суммой операторов $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *называется оператор* $\hat{A} + \hat{B}$, *определенный формулой*

$$\left(\hat{A} + \hat{B}\right)(x) = \hat{A}(x) + \hat{B}(x). \tag{5.4}$$

Определение 5.1.5. Произведением оператора $\hat{A}$ на скаляр λ *называется оператор* $\lambda\hat{A}$, *определенный формулой*

$$\left(\lambda\hat{A}\right)(x) = \lambda\left(\hat{A}(x)\right). \tag{5.5}$$

Определение 5.1.6. *Если* $U = V$, *то* **произведением операторов** $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *называется оператор* $\hat{A} \cdot \hat{B}$, *определенный формулой*

$$\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right)(x) = \hat{A}\left(\hat{B}(x)\right). \tag{5.6}$$

Теорема 5.1.2 (об алгебре линейных операторов). *Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — линейные операторы линейного пространства U в линейное пространство V. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *сумма $\hat{A} + \hat{B}$ линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ является линейным оператором;*

2) *произведение $\lambda\hat{A}$ линейного оператора на скаляр является линейным оператором;*

3) *если $U = V$, то произведение $\hat{A} \cdot \hat{B}$ линейных операторов является линейным оператором.*

Теорема 5.1.3 (о линейном пространстве линейных операторов). *Множество всех линейных операторов пространства U в линейное пространство V является линейным пространством относительно операций сложения операторов и умножения оператора на скаляр.*

Теорема 5.1.4 (об изоморфности л.п. операторов и л.п. матриц). *Пусть U, V — линейные пространства над полем K, $\mathbf{Б}_U$, $\mathbf{Б}_V$ — базисы этих пространств, W — линейное пространство линейных операторов пространства U в пространство V. Тогда отображение f, определенное формулой $f(\hat{A}) = \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V}$, является изоморфизмом линейного пространства W на линейное пространство всех матриц размерности $m \times n$ с коэффициентами из поля $\mathbf{K}$. Более того, если $U = V$, то $f\left(\hat{A} \cdot \hat{B}\right) = f\left(\hat{A}\right) \cdot f\left(\hat{B}\right)$.*

Следствие 5.1.1 (о размерности л.п. линейных операторов). *Размерность линейного пространства всех линейных операторов линейного пространства U в линейное пространство V равна $m \cdot n$, где $n = \dim U$, $m = \dim V$.*

Теорема 5.1.5 (о матрице оператора в другом базисе). *Пусть U, V — линейные пространства над полем K; $\mathbf{Б}_U, \mathbf{Б}'_U$ — базисы линейного пространства U; $\mathbf{Б}_V, \mathbf{Б}'_V$ — базисы линейного пространства V; $T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}$ — матрица перехода из базиса $\mathbf{Б}_U$ в базис $\mathbf{Б}'_U$; $T_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V}$ — матрица перехода из базиса $\mathbf{Б}_V$ в базис $\mathbf{Б}'_V$; $\hat{A}$ — линейный оператор, отображающий линейное пространство U в линейное пространство V. Тогда*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Б}'_U \to \mathbf{Б}'_V} = T^{-1}_{\mathbf{Б}_V \to \mathbf{Б}'_V} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{Б}_U,\mathbf{Б}_V} \cdot T_{\mathbf{Б}_U \to \mathbf{Б}'_U}. \tag{5.7}$$

5.1.4. Ядро линейного оператора

Определение 5.1.7. Ядром *линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U в линейное пространство V называется множество всех таких векторов x из U, образ которых под действием оператора $\hat{A}$ — нулевой вектор линейного пространства V.*

Ядро оператора обозначается через $\operatorname{Ker} \hat{A}$.

$$\operatorname{Ker} \hat{A} = \left\{ x \,\middle|\, \hat{A}(x) = \mathbf{0}_V \right\}.$$

Теорема 5.1.6 (**о ядре линейного оператора**).
Ядро линейного оператора $\hat{A}: \ U \mapsto V$ является подпространством линейного пространства U.

Определение 5.1.8. *Размерность ядра оператора $\hat{A}$ называется* **дефектом** *линейного оператора. Размерность подпространства $\hat{A}(U) = \left\{ \hat{A}(x) \,\middle|\, x \in U \right\}$, т.е. образа пространства U относительно действия $\hat{A}$, называется* **рангом** *линейного оператора $\hat{A}$.*

Ранг линейного оператора $\hat{A}$ обозначают через $\operatorname{Rg}\hat{A}$, а дефект — через $\mathrm{d}(\hat{A})$.

Теорема 5.1.7 (**о ранге линейного оператора**). *Если $A_{\mathbf{Б}}$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе* **Б** *линейного пространства U, то $\operatorname{Rg} A_{\mathbf{Б}} = \operatorname{Rg}\hat{A}$.*

Теорема 5.1.8 (**о сумме ранга и дефекта линейного оператора**). *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U в линейное пространство V имеет место равенство $\operatorname{Rg}\hat{A} + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.*

Замечание 5.1.1 (**о сумме ранга и дефекта линейного оператора**).
Даже при $U = V$ из этой теоремы **не следует***, что U является суммой подпространств $\operatorname{Ker}\hat{A}$ и $\hat{A}(U)$.*

Определение 5.1.9. *Линейный оператор $\hat{A}$ называется* **вырожденным** *тогда и только тогда, когда его ядро ненулевое, т.е. отлично от $\{\mathbf{0}\}$. В противном случае, т.е. при $\operatorname{Ker}\hat{A} = \{\mathbf{0}\}$, линейный оператор $\hat{A}$ называется* **невырожденным**.

Определение 5.1.10. *Линейный оператор $\hat{A}^{-1}$ называется* **обратным** *к оператору $\hat{A}$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$ и $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{E}$.*

Теорема 5.1.9 (**критерий невырожденности оператора**). *Линейный оператор $\hat{A}$ является невырожденным тогда и только тогда, когда он обратим.*

Теорема 5.1.10 (**критерии вырожденности оператора**). *Пусть $\hat{L}$ — линейный оператор линейного пространства U,* **Б** *— базис линейного пространства U. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\hat{L}$ — вырожденный оператор;

2) $\operatorname{Ker}\hat{L} \neq \{\mathbf{0}\}$*;*

3) $\mathrm{d}(\hat{L}) \neq 0$*;*

4) $\operatorname{Rg}\hat{L} < \dim U$*;*

5) $\operatorname{Rg}\left(\mathbf{L}_{\mathbf{Б}}\right) < \dim U$*;*

6) $\det\left(\mathbf{L}_{\mathbf{Б}}\right) = 0$*;*

7) существует линейно независимая система векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ *такая, что система векторов* $\left\{\hat{L}(u_1), \hat{L}(u_2), \ldots, \hat{L}(u_k)\right\}$ *линейно зависима;*

8) $\hat{L}(U) < U$*, т.е.* $\hat{L}(U) \neq U$*.*

5.1.5. Инвариантные подпространства

Определение 5.1.11. *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* U*. Подпространство* V *линейного пространства* U *называется* **$\hat{A}$-инвариантным подпространством** *тогда и только тогда, когда для любого вектора* $x \in V$ *имеет место включение* $\hat{A}(x) \in V$*.*

Теорема 5.1.11 (об алгебре инвариантных подпространств). *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* U*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) сумма $\hat{A}$*-инвариантных подпространств является* $\hat{A}$*-инвариантным подпространством;*

2) пересечение $\hat{A}$*-инвариантных подпространств является* $\hat{A}$*-инвариантным подпространством.*

Теорема 5.1.12 (критерий полураспавшейся матрицы оператора). *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор линейного пространства* U *с базисом* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$*. Тогда справедливы следующие утверждения (здесь* $\mathbf{0}_{p\times q}$ *— нулевая матрица размерности* $p \times q$*):*

1) $A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{k\times k} & \mathbf{Q}_{k\times(n-k)} \\ \mathbf{0}_{k\times(n-k)} & \mathbf{R}_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$ *тогда и только тогда, когда* $\langle e_1, e_2, \ldots, e_k\rangle$ *является* $\hat{A}$*-инвариантным подпространством;*

2) $A_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{k\times k} & \mathbf{0}_{(k\times(n-k)} \\ \mathbf{Q}_{k\times(n-k)} & \mathbf{R}_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$ *тогда и только тогда, когда* $\langle e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, \ldots, e_n\rangle$ *является* $\hat{A}$*-инвариантным подпространством.*

5.1.6. Собственные векторы

Определение и критерий

Определение 5.1.12. *Вектор* $x \in U$ *называется* **собственным вектором** *линейного оператора* $\hat{A}$*, отвечающим* **собственному значению** λ*, тогда и только тогда, когда, во-первых,* x *— ненулевой вектор и, во-вторых, имеет место равенство* $\hat{A}(x) = \lambda x$*.*

Определение 5.1.13. *Множество всех собственных значений линейного оператора* $\hat{A}$ *называется* **спектром** *линейного оператора* $\hat{A}$*.*

Спектр линейного оператора $\hat{A}$ обозначается $\operatorname{spec}\hat{A}$.

Теорема 5.1.13 (критерий собственного вектора). *Ненулевой вектор* $x \in U$ *является собственным вектором линейного оператора* $\hat{A}$ *тогда и только тогда, когда* $\langle x\rangle$ *— это* $\hat{A}$*-инвариантное подпространство.*

Вычисление собственного вектора с помощью матрицы оператора

Определение 5.1.14. *Выражение* $\det\left(\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda E\right)$ *называется* **характеристическим полиномом** *или* **характеристическим многочленом** *оператора.*

Для нахождения собственных векторов и собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ необходимо:

во-первых, из характеристического уравнения найти все собственные значения оператора $\hat{A}$, т.е. найти спектр линейного оператора $\hat{A}$;

во-вторых, для каждого из найденных собственных значений λ найти собственные векторы, как ФСР соответствующей ОСЛУ.

Диагонализация матрицы оператора. Оператор простой структуры

Под *диагонализацией* матрицы оператора понимается поиск базиса, в котором матрица оператора диагональна. Такой базис существует не всегда.

Определение 5.1.15. *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U называется* **оператором простой структуры** *тогда и только тогда, когда U имеет базис, состоящий из собственных векторов оператора $\hat{A}$.*

Теорема 5.1.14 (критерий оператора простой структуры). *Линейный оператор $\hat{A}$ линейного пространства U является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица этого оператора диагональна.*

5.1.7. Инварианты линейного оператора

Определение 5.1.16. *Функция f от коэффициентов матрицы оператора в базисе* **Б** *называется* **инвариантом** *линейного оператора, если значения этой функции не зависят от выбора базиса* **Б**.

Теорема 5.1.15 (об инвариантности коэффициентов характ. полинома). *Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор линейного пространства U. Функция p_k, ставящая матрице $\mathbf{A}_{\text{Б}}$ в соответствие коэффициент при λ^k характеристического многочлена $\left|\mathbf{A}_{\text{Б}} - \lambda\mathbf{E}\right|$, является инвариантом линейного оператора $\hat{A}$.*

5.1.8. О характеристическом многочлене

Теорема 5.1.16 (Гамильтона, Кэли). *Если $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ — характеристический многочлен матрицы A, то $f(A)$ — нулевая матрица.*

5.2. Линейные операторы и скалярное произведение

5.2.1. Сопряженный оператор

Теорема 5.2.1 (о существовании сопряженного оператора). *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ конечномерного евклидова или унитарного пространства U существует, причем единственный, такой оператор $\hat{B}$, что для любых векторов $x, y \in U$ имеет место равенство*

$$\left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{B}(y)\right).$$

Определение 5.2.1. *Для линейного оператора $\hat{A}$ конечномерного евклидова или унитарного пространства U* **сопряженным оператором** *называется такой линейный оператор $\hat{A}^*$, что для любых векторов $x, y \in U$ имеет место равенство*

$$\left(\hat{A}(x), y\right) = \left(x, \hat{A}^*(y)\right). \tag{5.8}$$

Теорема 5.2.2 (о матрице сопряженного оператора). *Если $A_{\mathbf{Б}}$ — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе* **Б** *евклидова или унитарного пространства U, то матрица $A^*_{\mathbf{Б}}$ сопряженного оператора $\hat{A}^*$ имеет вид*

$$A^*_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}}}, \tag{5.9}$$

где $\overline{X}$ — операция покомпонентного комплексного сопряжения. В случае, когда U — евклидово пространство, в силу того, что комплексное сопряжение на множестве вещественных чисел является тождественным преобразованием, равенство несколько упрощается:

$$A^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}}.$$

5.2.2. Свойства сопряженного оператора

1. $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$.

2. $\left(\hat{A} + \hat{B}\right)^* = \hat{A}^* + \hat{B}^*$.

3. $\left(\lambda\hat{A}\right)^* = \overline{\lambda}\hat{A}^*$. Таким образом, для евклидовых пространств $\left(\lambda\hat{A}\right)^* = \lambda\hat{A}^*$.

4. **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^{\perp} = \operatorname{Ker} \hat{A}^*$.

5. $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$.

6. $\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^*\right)^{-1}$.

5.2.3. Нормальные операторы

Определение 5.2.2. *Линейный оператор $\hat{A}$ евклидова или унитарного пространства U называется* **нормальным оператором** *тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{A}^* = \hat{A}^*\hat{A}$.*

Свойства нормальных операторов

1. Линейный оператор $\hat{A}$ евклидова или унитарного пространства U является нормальным оператором тогда и только тогда, когда $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ — нормальный оператор.

2. Вектор $v \in U$ является собственным вектором нормального оператора $\hat{A}$, отвечающим собственному значению ρ, тогда и только тогда, когда v является собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^*$, отвечающим собственному значению $\overline{\rho}$.

3. Если $u, v \in U$ — собственные векторы нормального оператора $\hat{A}$, отвечающие разным собственным значениям, то u и v — ортогональны.

4. Если U — унитарное пространство, то существует ОНБ из собственных векторов нормального линейного оператора $\hat{A}$. Если U — евклидово пространство и характеристический полином нормального оператора $\hat{A}$ представим в виде $|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E| = (\lambda - \rho_1)^{n_1} \ldots (\lambda - \rho_m)^{n_m}$, где $\rho_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, то существует ОНБ евклидова пространства U, состоящий из собственных векторов линейного оператора $\hat{A}$.

5. Если $\hat{A}$ — нормальный оператор евклидова пространства U, то существует такой ОНБ **Б** пространства U, что матрица $A_{\mathbf{Б}}$ оператора $\hat{A}$ в базисе **Б** имеет клеточно-диагональный

вид $\left(A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 & \dots & \mathbf{0} \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & D_k \end{pmatrix}\right)$, причем диагональные клетки (матрицы D_i) либо имеют размерность 1×1, либо имеют вид $D_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$.

Самосопряженные и эрмитовы операторы

Определение 5.2.3. *Линейный оператор $\hat{A}$ евклидова (соответственно, унитарного) пространства U называется* **самосопряженным оператором** *(соответственно,* **эрмитовым оператором***) тогда и только тогда, когда $\hat{A}^* = \hat{A}$.*

Свойства самосопряженных и эрмитовых операторов

1. Самосопряженный (эрмитов) оператор является нормальным оператором.
2. Характеристический полином самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ представим в виде $|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E| = (\lambda - \rho_1)^{n_1} \dots (\lambda - \rho_m)^{n_m}$, где $\rho_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. В частности, **спектр** самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ включается в $\mathbb{R}$.
3. Если спектр самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ состоит только из неотрицательных чисел, то существует такой самосопряженный оператор $\hat{B}$, что $\hat{A} = \hat{B}\hat{B}$ (говорят еще, что в этом случае из $\hat{A}$ *извлекается квадратный корень*).
4. Если самосопряженный оператор $\hat{A}$ обладает свойством идемпотентности, т.е. $\hat{A}\hat{A} = \hat{A}$, то $\hat{A}$ — либо тождественный оператор ($\hat{A} = \hat{E}$), либо оператор ортогонального проецирования.

Ортогональные и унитарные операторы

Определение 5.2.4. *Линейный оператор $\hat{A}$ евклидова (соответственно, унитарного) пространства U называется* **ортогональным оператором** *(соответственно,* **унитарным оператором***) тогда и только тогда, когда $\hat{A}^* = \hat{A}^{-1}$.*

Свойства ортогональных и унитарных операторов

1. Ортогональный оператор является нормальным оператором.

2. **Критерий ортогональности нормального оператора.** Линейный оператор $\hat{A}$ евклидова пространства U является ортогональным тогда и только тогда, когда , во-первых, он нормальный и, во-вторых, существует такой ОНБ пространства U, в котором матрица оператора $\hat{A}$ клеточно-диагональна, где клетки — это (1), (−1) или $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

3. В любом базисе **Б** детерминант матрицы $A_{\mathbf{Б}}$ ортогонального оператора $\hat{A}$ равен 1 или (−1).

Определение 5.2.5. *Оператор $\hat{A}$ нормированного линейного пространства U называется* **изометрическим***, если $||x|| = ||\hat{A}(x)||$.*

Теорема 5.2.3 (об ортогональности изометрического оператора). *Линейный оператор $\hat{A}$ евклидова (унитарного) пространства U является изометрическим относительно нормы $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ тогда и только тогда, когда он ортогональный (унитарный).*

Теорема 5.2.4 (об ортогональном операторе и ОНБ). *Линейный оператор $\hat{A}$ евклидова пространства U является ортогональным тогда и только тогда, когда он переводит ОНБ в ОНБ. Точнее, эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\hat{A}$ является ортогональным оператором;

2) существует ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ такой, что система векторов $\left\{\hat{A}(e_1), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ является ортонормированным базисом;

3) для любого ОНБ $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ система векторов $\left\{\hat{A}(e_1), \ldots, \hat{A}(e_n)\right\}$ является ортонормированным базисом.

Определение 5.2.6. *Матрица A называется* **нормальной** *(соответственно,* **ортогональной***,* **унитарной** *или* **эрмитовой***) если и только если она является матрицей одноименного оператора в некотором ортонормированном базисе.*

Теорема 5.2.5 (об ортогональном преобразовании нормальной матрицы). *Для любой нормальной матрицы A с вещественным спектром (все корни характеристического полинома которой являются действительными числами) найдется такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная матрица.*

Библиографический список

1. *Мельников Ю.Б.* Алгебра и теория чисел. 4-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: изд-во УрГЭУ, 2010.
`http://lib.usue.ru/resource/free/12/MelnikovAlgebra4/index.html`

2. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Добросвет, Московский центр непрерывного математического образования. 2009.

3. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Лань, 2007.

4. Общая алгебра: в 2 т. /*О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др.;*/ под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. Т.1.

5. Общая алгебра: в 2 т./ *А.В. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков и др.;*/ под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. Т.2.

6. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1984.

7. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВУЗов. 15-е изд. М.: Наука, Физматлит, 1998.

8. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.

9. *Ван дер Варден Б.Л..* Алгебра. М.:Наука, 1979.

10. *Важенин Ю.М.* Лекции по аналитической геометрии и высшей алгебре. Екатеринбург: УрГУ, 1999.

11. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1972.

12. *Ершов Ю.Л.*, *Палютин Е.А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987.

13. *Кондратьев А.С., Махнев А.А.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Екатеринбург: УПИ, 1994.

14. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.

15. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.

16. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Векторный анализ. М.: Наука, 1978.

17. *Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б.* Лекции по алгебре: учеб. пособие по курсу «Математика». 3-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: Урал. изд-во, 2003.

18. *Мельников Ю.Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей. Екатеринбург: Урал. изд-во, 2004.

19. *Мельников Б.Н., Мельников Ю.Б.* Геотехногенные структуры: теория и практика. Екатеринбург: Урал. изд-во, 2004.

20. *Такеути Г.* Теория доказательств. М.: Мир, 1978.

21. *Федорчук В.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990.

22. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре: учеб. пособие для ВУЗов. М.: Наука, 1984.

23. *Чуркин В.А.* Жорданова классификация конечномерных линейных операторов: метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1991.

24. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1978.

Мельников Ю.Б., Ефимов К.С.
М 47 Основные понятия
и теоремы линейной алгебры: Учебное пособие для вузов по курсу «Высшая математика». — М.: Издательство УрГЭУ, 2016.— 59 с.

Пособие содержит теоретический материал и примеры решений задач по высшей алгебре. Дополнительно рассматриваются общие понятия математики: множества, функции, алгебраические операции, правила работы с символами суммирования и произведения.

Пособие ориентировано на студентов и преподавателей экономических и технических университетов, научных работников и инженеров.

ББК 22.143

Учебное издание

Мельников Юрий Борисович,
Ефимов Константин Сергеевич

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Редактор и корректор *Л. В. Матвеева*

Поз. 48. Подписано в печать 04.07.2016.
Формат бумаги $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Печать плоская.
Уч.-изд. л. 3,0. Усл. печ. л. 3,5. Заказ 373. Тираж 33 экз.
Издательство Уральского государственного экономического университета
620144, г. Екатеринбург, ул. 8 Марта/Народной Воли, 62/45

Отпечатано с готового оригинал-макета в подразделении оперативной полиграфии
Уральского государственного экономического университета