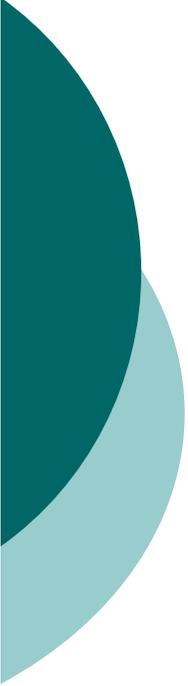


# CHAPITRE 1

---

## **LOIS DISCRETES USUELLES**



## loi de Bernoulli

---

- o Définition : nous dirons qu'une variable aléatoire discrète est une indicatrice ou suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  si elle ne prend que deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités :  $p$  et  $(1-p)$ .
- o Cette définition est issue d'une expérience qu'on appelle expérience ou épreuve de Bernoulli.

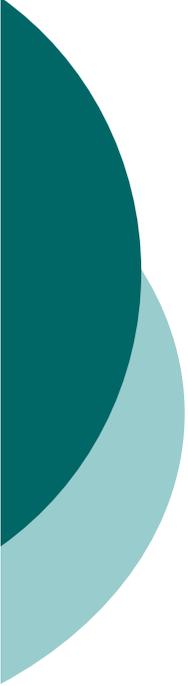


# loi de Bernouilli

---

- o Une épreuve de Bernouilli est une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats peut se résumer à deux états:
  - 1) un succès
  - 2) un échec.
- o Nous noterons la probabilité d'un succès  $p$  et celle d'un échec  $q = 1-p$ .
- o On dit que  $X$  suit la loi de Bernouilli ssi:

$$\begin{cases} P[X = 1] = p \\ P[X = 0] = 1 - p \end{cases}$$



## Exemples:

---

- 1- On lance une pièce de monnaie et on définit un succès par « pile » et un échec par « face »:

$$p = 1/2 \text{ et } q = 1/2.$$

- 2- Un jeu de roulette contient 38 cases, 18 sont rouges, 18 sont noirs et 2 sont vertes. Les cases gagnantes sont les cases rouges:

$$p = 18/38 (= 9/19) \text{ et } q = 20/38 (= 10/19).$$

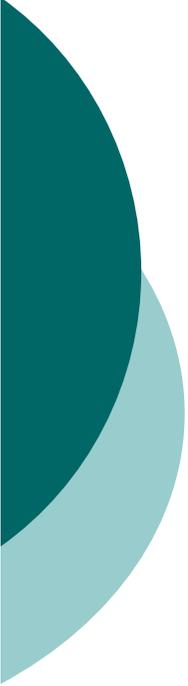


## Exemple d'application:

---

- On effectue un sondage auprès de 2500 électeurs en vue de connaître leur intention de vote pour le candidat M. LM.
- Les réponses sont oui pour M. LM ou non pour M. LM
- Supposons que la proportion des oui dans l'échantillon est égale à 55%.
- Si on considère « obtenir oui » est un succès alors la variable aléatoire de Bernouilli est définie par:

$$\begin{cases} P[X = 1] = 0,55 \\ P[X = 0] = 0,45 \end{cases}$$



# Loi de probabilité binômiale

---

- Définition:
- Considérons une expérience aléatoire qui consiste à répéter **n** fois de suite, et de façon indépendante, une même épreuve de Bernouilli.
- Définissons **X** = le nombre de succès obtenus au cours de ces **n** épreuves.



---

○ Alors,  $\mathbf{X}$  est une variable aléatoire discrète avec une loi de probabilité que l'on appelle **binômiale** de paramètres **n** et **p**, où

**n** = le nombre d'épreuves (d'essais)

**p** = probabilité de succès à chaque épreuve

○ Notation:  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{n} ; \mathbf{p})$ .



## Exemple:

---

- On lance 10 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité de voir le côté « Pile » apparaître trois fois?

- Les cas possibles sont:

(P,P,P,F,F,F,F,F,F,F);

(P,F,P,F,P,F,F,F,F,F)....

Il y'a  $C_{10}^3$  possibilités.

## Exemple:

---

On applique la propriété de l'intersection  
Des événements indépendants pour  
calculer la probabilité de voir le côté  
« Pile » apparaître trois fois:

$$P = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7$$



## Fonction de probabilité d'une variable soumise à une loi binômiale

---

- Dans notre exemple, **X** peut prendre les valeurs suivantes:  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$
- Nous voulons maintenant établir le tableau de la distribution de probabilités de cette variable, soit:

<b><math>x_i</math></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>.....</b>	<b>10</b>
<b><math>p(x_i) = P[X = x_i]</math></b>						

# Dénombrements

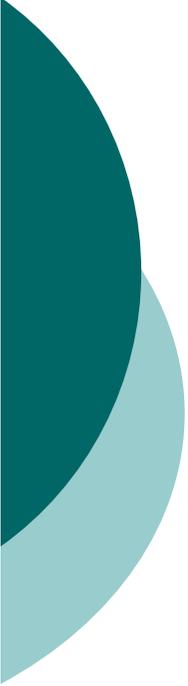
- Si  $X=0$ , alors aucun succès, i.e. 10 échecs:

E	E	.....	E
---	---	-------	---

- Si  $X=1$ , alors 1 succès et 9 échecs:

S	E	.....	E
E	S	.....	E
E	E	S	E
.....	.....	.....	.....
E	E	.....	S

- Et ainsi de suite pour  $X=2$ ,  $X=3...$  et  $X=10$ .



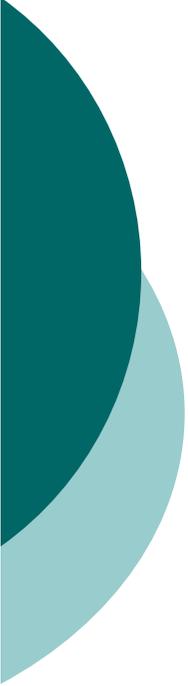
## Formule générale de $p(k)$ pour une loi binômiale

---

○ Soit  $\mathbf{X}$  une variable aléatoire discrète avec une loi de probabilité **binômiale** de paramètres  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{p}$ , c.-à-d.  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{n} ; \mathbf{p})$ , alors,

○  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$

$$p(k) = P[X = k] = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \forall k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$$



## Exemple

---

- Dans une urne il y a 3 boules blanches et 2 noires.

On tire au hasard 1 boule et on la remet.

On répète 4 fois cette épreuve.

Considérons  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues.

Justifions que  $X$  suit la loi binomiale dont on donnera les paramètres.

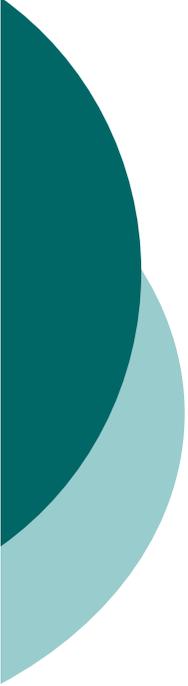
- On répète 4 fois la même épreuve de manière identique et indépendante.



# Exemple

---

- Chaque épreuve a deux éventualités :
  - Le succès : « on a tiré une boule blanche » avec la probabilité  $p=3/5$ .
  - L'échec : « on a une boule noir » avec la probabilité  $q=1-p=2/5$ .
- $X$  suit la loi binomiale  $B(4,3/5)$ .



# Exemple

---

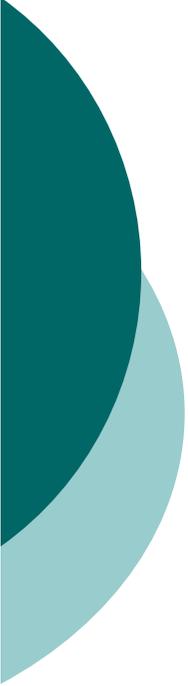
$$P(X = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$P(X = 1) = C_4^1 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$P(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$P(X = 3) = C_4^3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{3}{5}\right)^4$$



# Espérance et variance d'une variable soumise à une loi binômiale

---

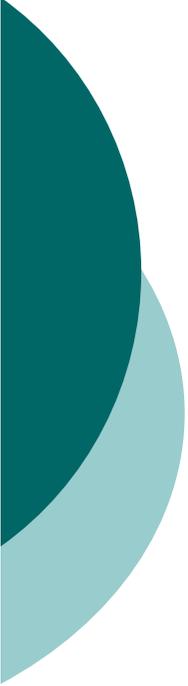
- Théorème:

Si  $\mathbf{X} \rightarrow B(\mathbf{n} ; \mathbf{p})$  alors,

$$E[\mathbf{X}] = \mathbf{np}$$

$$V[\mathbf{X}] = \mathbf{npq}$$

- Revenons à l'exemple précédent
- $E[\mathbf{X}] = 4 \times 3/5 = 12/5$
- $V[\mathbf{X}] = 4 \times 2/5 \times 3/5 = 24/5$



# Somme de variables soumises à des lois binômiales

---

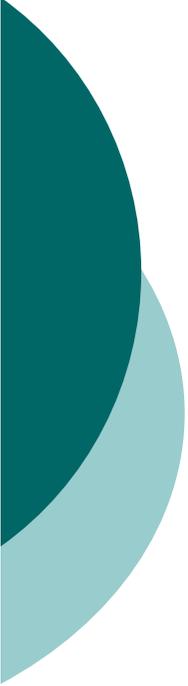
- **Théorème:**

Soit  $X_1 \rightarrow B(n_1; p)$ ,  $X_2 \rightarrow B(n_2; p)$ , ...,  $X_n \rightarrow B(n_n; p)$ ,

$n$  variables aléatoires discrètes binômiales indépendantes les unes des autres.

Soit  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , alors

$Y \rightarrow B(n_1 + n_2 + \dots + n_n; p)$ .



# Loi de probabilité de Poisson

---

- Soit  $\lambda > 0$  et  $\mathbf{X}$  une variable aléatoire telle que  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , c.-à-d.  $S$  est l'ensemble des nombres entiers, et

$$p(k) = P[\mathbf{X} = k] = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} & \forall k \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- alors  $\mathbf{X}$  est une variable aléatoire discrète soumise à une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , et noté  $\mathbf{X} \rightarrow P(\lambda)$ .



## Espérance et variance d'une variable soumise à une loi de Poisson

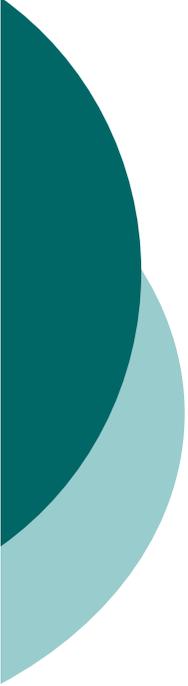
---

- **Théorème:**

Si  $\mathbf{X} \rightarrow P(\lambda)$  alors,

$$E[\mathbf{X}] = \lambda \quad \text{et} \quad V[\mathbf{X}] = \lambda .$$

- **Exemple:** Une compagnie d'assurances reçoit, en moyenne, 4,5 réclamations par jour. Déterminer la probabilité que, durant une certaine journée, le nombre de réclamations reçues soit inférieur ou égale à 2.



## Exemple (suite) :

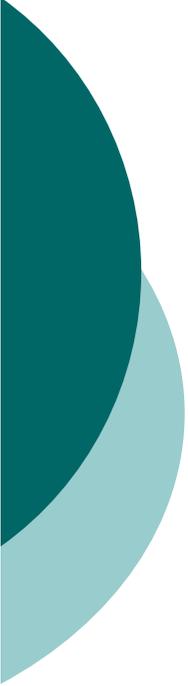
---

- Soit  $\mathbf{X}$  = nombre de réclamations reçues dans une journée.
- On suppose que  $\mathbf{X} \rightarrow P(\lambda = 4,5)$ .

- $P[\mathbf{X} \leq 2] = p(0) + p(1) + p(2)$

$$= \frac{e^{-4,5} (4,5)^0}{0!} + \frac{e^{-4,5} (4,5)^1}{1!} + \frac{e^{-4,5} (4,5)^2}{2!}$$

$$= 0,0111 + 0,0500 + 0,1125 = 0,1736$$



## EXEMPLE

---

- Un standard téléphonique reçoit en moyenne 0,7 appel à la minute. Quelle est la probabilité pour que, entre 09 h 59 et 10 h, il reçoive :
  - a) 0 appel
  - b) 1 appel
  - c) plus d'un appel

## EXEMPLE

---

Soit  $X$  la loi de survenance des appels qui suit la loi de Poisson  $P(0,7)$ .

a)  $P(\text{"0 appel"}) = P(X=0) = e^{-0,7} * 0,7^0 / 0!$   
 $= 0,4966$

b)  $P(\text{"1 appel"}) = P(X=1) = e^{-0,7} * 0,7^1 / 1!$   
 $= 0,3476$

c)  $P(\text{"plus d'un appel"}) = 1 - P(X \leq 1) = 1 -$   
 $(P(X=0) + P(X=1)) = 0,1558$



## **Théorème:** approximation d 'une loi binômiale par une loi de Poisson

---

- Soit  $\mathbf{X} \rightarrow B(n ; p)$  ,
- si  $n \rightarrow \infty$  (c 'est-à-dire si  $n$  est grand)
- et si  $p \rightarrow 0$  (c 'est-à-dire si  $p$  est petit)
- alors  $\mathbf{X} \rightarrow \approx P(\lambda)$  où  $\lambda = np$  .
- Plus  $n$  est grand et  $p$  petit, plus cette approximation est juste.
- En pratique, nous considérons qu 'elle est valable lorsque  $n \geq 50$  et  $np \leq 10$ .



# EXEMPLE

---

- Dans une chaîne de fabrication, 5% des pièces sont défectueuses ; on prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la replace parmi les autres. On répète 120 fois cette expérience. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage de 120 pièces associe le nombre des pièces défectueuses.
- 1°  $X$  suit la loi binomiale, précisez ses paramètres.
- 2° Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit égale à 5?
- 3° Peut-on approximer cette loi par une loi poissonnienne? Calculer dans ce cas la probabilité ci-dessus.