CHAPITRE 1

LOIS DISCRETES USUELLES

loi de Bernouilli

- Définition : nous dirons qu’une variable aléatoire discrète est une indicatrice ou suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle ne prend que deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités : p et (1-p).
- Cette définition est issue d’une expérience qu’on appelle expérience ou épreuve de Bernouilli.

loi de Bernouilli

- Une épreuve de Bernouilli est une expérience aléatoire dont l 'ensemble des résultats peut se résumer à deux états:
  1) un succès
  2) un échec.
- Nous noterons la probabilité d 'un succès p et celle d 'un échec q = 1-p.
- On dit que X suit la loi de Bernouilli ssi:

$$\begin{cases} P[X=1]=p \\ P[X=0]=1-p \end{cases}$$

Exemples:

- 1- On lance une pièce de monnaie et on définit un succès par « pile » et un échec par « face »:

$$p = 1/2 \text{ et } q = 1/2.$$

- 2- Un jeu de roulette contient 38 cases, 18 sont rouges, 18 sont noirs et 2 sont vertes. Les cases gagnantes sont les cases rouges:

$$p = 18/38 \; (= 9/19) \text{ et } q = 20/38 \; (= 10/19).$$

Exemple d'application:

- On effectue un sondage auprès de 2500 électeurs en vue de connaître leur intention de vote pour le candidat M. LM.
- Les réponses sont oui pour M. LM ou non pour M. LM
- Supposons que la proportion des oui dans l'échantillon est égale à 55%.
- Si on considère « obtenir oui » est un succès alors la variable aléatoire de Bernouilli est définie par:

$$\begin{cases} P[X=1]=0{,}55 \\ P[X=0]=0{,}45 \end{cases}$$

Loi de probabilité binômiale

- Définition:
- Considérons une expérience aléatoire qui consiste à répéter **n** fois de suite, et de façon indépendante, une même épreuve de Bernouilli.
- Définissons **X** = le nombre de succès obtenus au cours de ces **n** épreuves.

- Alors, **X** est une variable aléatoire discrète avec une loi de probabilité que l 'on appelle **binômiale** de paramètres **n** et **p**, où

  n = le nombre d'épreuves (d'essais)

  p = probabilité de succès à chaque épreuve

- Notation: **X** $\rightarrow$ B(**n** ; **p**).

Exemple:

- On lance 10 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité de voir le côté « Pile » apparaître trois fois?
- Les cas possibles sont:

(P,P,P,F,F,F,F,F,F,F); (P,F,P,F,P,F,F,F,F,F)….

Il y'a C_{10}^{3} possibilités.

Exemple:

On applique la propriété de l'intersection Des événements indépendants pour calculer la probabilité de voir le côté « Pile » apparaître trois fois:

$$P = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$$

Fonction de probabilité d 'une variable soumise à une loi binômiale

- Dans notre exemple, **X** peut prendre les valeurs suivantes: S = {0, 1, 2, 3, 4,…,10}
- Nous voulons maintenant établir le tableau de la distribution de probabilités de cette variable, soit:

x_i	0	1	2	3	…..	10
$p(x_i) = P[X = x_i]$						

Dénombrements

- Si X=0, alors aucun succès, i.e. 10 échecs:

E	E	…..	E

- Si X=1, alors 1 succès et 9 échecs:

S	E	…..	E
E	S	…..	E
E	E	S	E
……	…..	……	……
E	E	……	S

- Et ainsi de suite pour X=2, X=3… et X=10.

Formule générale de p(k) pour une loi binômiale

- Soit **X** une variable aléatoire discrète avec une loi de probabilité **binômiale** de paramètres **n** et **p**, c.-à-d. **X**→ B(**n** ; **p**), alors,
- S = {0, 1, 2, 3, …, n}

$$p(k) = P[X = k] = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \quad \forall\, k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$$

Exemple

- Dans une urne il y a 3 boules blanches et 2 noires.

On tire au hasard 1 boule et on la remet. On répète 4 fois cette épreuve. Considérons X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues.

Justifions que X suit la loi binomiale dont on donnera les paramètres.

- On répète 4 fois la même épreuve de manière identique et indépendante.

Exemple

- Chaque épreuve a deux éventualités :
  - Le succès : « on a tiré une boule blanche » avec la probabilité $p=3/5$.
  - L'échec : « on a une boule noir » avec la probabilité $q=1-p=2/5$.
- X suit la loi binomiale $B(4,3/5)$.

Exemple

$$P(X=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$P(X=4)=\left(\frac{3}{5}\right)^4$$

Espérance et variance d 'une variable soumise à une loi binômiale

- Théorème:

  Si **X**$\rightarrow$ B(**n** ; **p**) alors,

  E [**X**] = **np**

  V [**X**] = **npq**
- Revenons à l'exemple précédent
- E [**X**] = 4 x 3/5 =12/5
- V [**X**] = 4 x 2/5 x 3/5 = 24/5

Somme de variables soumises à des lois binômiales

- Théorème:

  Soit $X_1 \rightarrow B(n_1;p)$, $X_2 \rightarrow B(n_2;p)$, …, $X_n \rightarrow B(n_n;p)$,

  n variables aléatoires discrètes binômiales indépendantes les unes des autres.

  Soit $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, alors

  $Y \rightarrow B(n_1 + n_2 + \ldots + n_n\,;\,p)$.

Loi de probabilité de Poisson

- Soit $\lambda > 0$ et **X** une variable aléatoire telle que S={0, 1, 2, 3, …} , c.-à-d. S est l 'ensemble des nombres entiers, et

$$p(k) = P[X = k] = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} & \forall\ k \in N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- alors **X** est une variable aléatoire discrète soumise à une loi de Poisson de paramètre λ, et noté **X**$\rightarrow$ P(λ).

Espérance et variance d 'une variable soumise à une loi de Poisson

- Théorème:

  Si $\mathbf{X} \rightarrow P(\lambda)$ alors,

  $$E\,[\mathbf{X}] = \lambda \quad \text{et} \quad V\,[\mathbf{X}] = \lambda\ .$$

- **Exemple**: Une compagnie d 'assurances reçoit, en moyenne, 4,5 réclamations par jour. Déterminer la probabilité que, durant une certaine journée, le nombre de réclamations reçues soit inférieur ou égale à 2.

Exemple (suite) :

- Soit **X** = nombre de réclamations reçues dans une journée.
- On suppose que **X** $\rightarrow$ P(λ = 4,5).
- P[**X** $\leq$ 2] = p(0) + p(1) + p(2)

$$= \frac{e^{-4,5}(4,5)^0}{0!} + \frac{e^{-4,5}(4,5)^1}{1!} + \frac{e^{-4,5}(4,5)^2}{2!}$$

$$= 0,0111 + 0,0500 + 0,1125 = 0,1736$$

EXEMPLE

- Un standard téléphonique reçoit en moyenne 0,7 appel à la minute. Quelle est la probabilité pour que, entre 09 h 59 et 10 h, il reçoive :
  a) 0 appel
  b) 1 appel
  c) plus d'un appel

EXEMPLE

- Soit X la loi de survenance des appels qui suit la loi de Poisson P(0,7).

a) P("0 appel") = P(X=0) = e-0,7 *0,7^0 /0! =0,4966

b) P("1 appel") = P(X=1) = e-0,7* 0,7^1 /1! = 0,3476

c) P("plus d'un appel ") = 1 - P(X ≤ 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 0,1558

Théorème: approximation d 'une loi binômiale par une loi de Poisson

- Soit $\mathbf{X} \rightarrow B(n\ ;\ p)$,
- si $n \rightarrow \infty$ (c 'est-à-dire si n est grand)
- et si $p \rightarrow 0$ (c 'est-à-dire si p est petit)
- alors $\mathbf{X} \rightarrow \approx P(\lambda)$ où $\lambda = np$.
- Plus n est grand et p petit, plus cette approximation est juste.
- En pratique, nous considérons qu 'elle est valable lorsque $n \geq 50$ et $np \leq 10$.

EXEMPLE

- Dans une chaîne de fabrication, 5% des pièces sont défectueuses ; on prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la replace parmi les autres. On répète 120 fois cette expérience. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 120 pièces associe le nombre des pièces défectueuses.
- 1° X suit la loi binomiale, précisez ses paramètres.
- 2° Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit égale à 5?
- 3° Peut-on approximer cette loi par une loi poissonnienne? Calculer dans ce cas la probabilité ci-dessus.