INSTITUT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR DE PROMOTION SOCIALE

MARCHE-EN-FAMENNE

MATHEMATIQUES FINANCIERES

DENIS CLARINVAL

2010-2011

Les concepts d'utilité et de consommation.

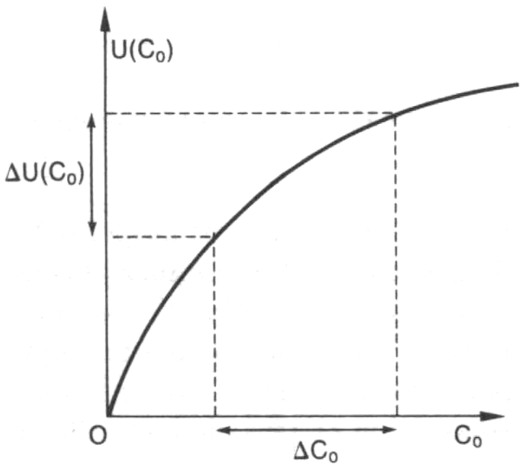


FIG. 1.1

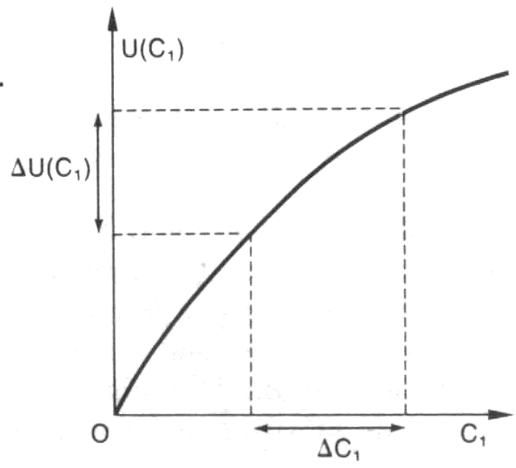


FIG. 1.2

C_0 et C_1 = la consommation en période 0 et la consommation en période 1 ;
$U(C_0)$ et $U(C_1)$ = l'utilité retirée des consommations respectives C_0 et C_1.

On remarque sur les courbes que l'utilité à consommer est une fonction décroissante ; à mesure que notre consommation s'accroît, son utilité diminue forcément.

Des courbes d'utilité intertemporelle à la carte d'indifférence.

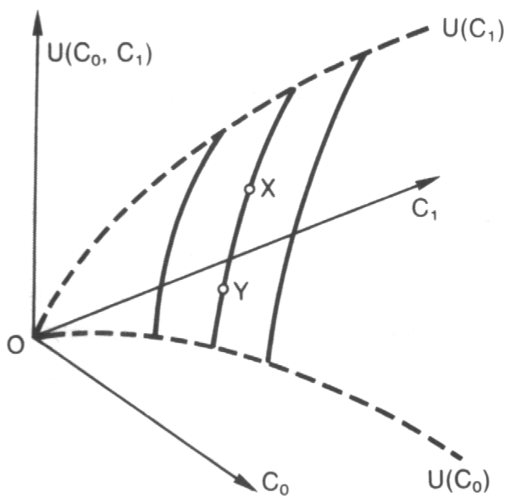


FIG. 1.3

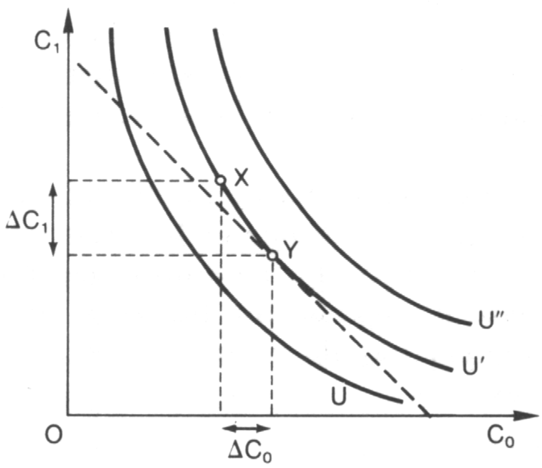


FIG. 1.4

$U(C_0, C_1)$ = l'utilité totale retirée d'une combinaison de consommations en période 0 et en période 1.

Le graphique de gauche nous présente les courbes d'indifférence dans un espace tridimensionnel ; le graphique de droite nous est familier puisqu'il nous présente le point d'équilibre comme point de tangence de la droite du budget avec la courbe d'utilité la plus élevée.

Consommation et investissement.

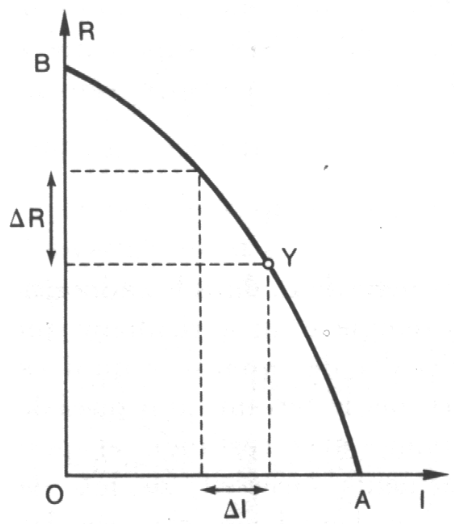


FIG. 1.5
où I est le montant à investir
où R est le montant de l'investissement

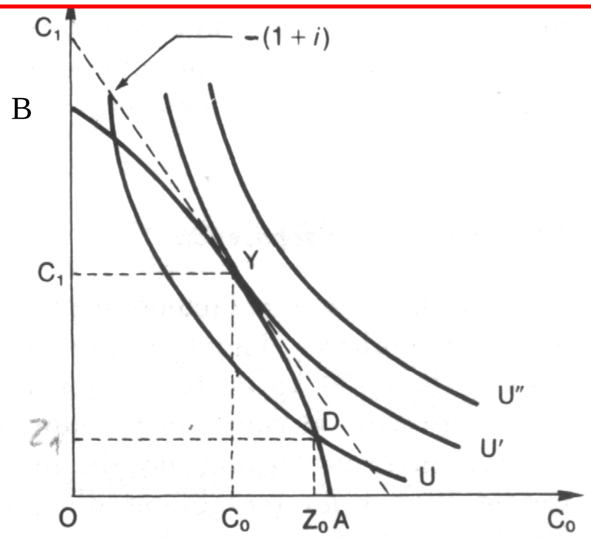


FIG. 1.6
où Z_0 et Z_1 désignent les richesses respectivement en période 0 et en période 1.

Le graphique 1.5 nous présente la courbe d'investissement ; cette courbe est décroissante en raison notamment de la courbe spécifique du CTL et des rendements d'échelle généralement croissants puis décroissants.
Sur le graphique 1.6, l'investisseur réserve une partie de son budget pour le consacrer à l'investissement productif (point D) ; toutefois à ce point D, la pente de la courbe d'investissement est plus forte que celle de la courbe d'utilité ; l'investisseur a tout intérêt à accroître son investissement jusqu'au point Y ; en ce point de tangence des 2 courbes, celles-ci sont de même pente ; en outre l'investisseur atteint en ce point une courbe d'utilité plus élevée.

Les principes de l'économie financière : le marché des capitaux, le taux d'intérêt et l'investissement.

Aux facultés de consommer et de réaliser des investissements productifs, s'ajoute à présent, pour le consommateur, la faculté d'effectuer des placements sur le marché des capitaux.
Sur le graphique ci-dessous, la droite Z_0'Z_1' représente la droite du marché des capitaux ; sa pente exprime le taux de rendement, c'est-à-dire le coût des capitaux sur ces marchés.
Le consommateur qui a réservé une partie de son budget va d'abord placer jusqu'au point D ; toutefois, à ce point,la pente de la droite de marché est plus forte que la pente de sa courbe d'utilité (TMS) : il a donc tout intérêt à placer jusqu'au point Y, là où les pentes sont

identiques ; remarquons qu'en ce point Y, point de tangence de la droite de marché avec la courbe d'utilité, le consommateur atteint sa courbe d'utilité la plus élevée.

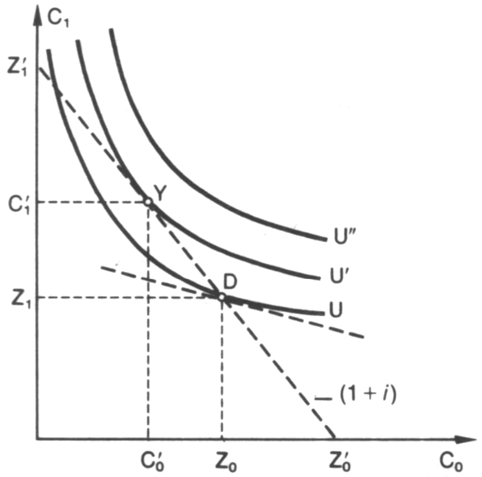


FIG. 1.8

Sur le graphique ci-dessous, les 3 fonctions de consommation, d'investissement productif et de placement sont représentées.

Le problème de l'investissement sur un marché de biens et de capitaux se résout en deux temps :

- *Tout d'abord le consommateur cherche à optimiser son investissement productif en progressant le long de la courbe d'investissement du point B au point D, puis au point Y ; en Y, la pente de la courbe d'investissement est cependant plus forte que celle de la droite de marché : en d'autres termes, l'investissement a un taux de rendement supérieur au taux d'intérêt : l'investisseur emprunte donc sur le marché des capitaux pour financer un investissement supplémentaire et se hisser au point X : c'est en ce point que le rendement de l'investissement est identique au taux d'intérêt.*
- *Dans un second temps, le consommateur cherche à optimiser sa fonction de consommation : au point X, si la droite de marché et la courbe d'investissement sont de même pente, la courbe d'utilité à consommer est plus forte ; le consommateur choisit donc d'emprunter au taux du marché pour financer un surcroît de consommation et atteindre, au point E, une courbe d'utilité plus élevée.*

*Comme on le remarque, les décisions d'investir et de consommer sont prises séparément et indépendamment l'une de l'autre ; tel est l'objet du célèbre « **théorème de séparation économique de FISCHER** ».*
Ce théorème est au fondement même de la réalité économique puisqu'il signifie qu'en raison de la séparation des décisions d'investir et de consommer, des individus peuvent diverger par leurs préférences de consommation tout en partageant les mêmes préférences d'investissement, ce qui leur permet naturellement de créer des entreprises.

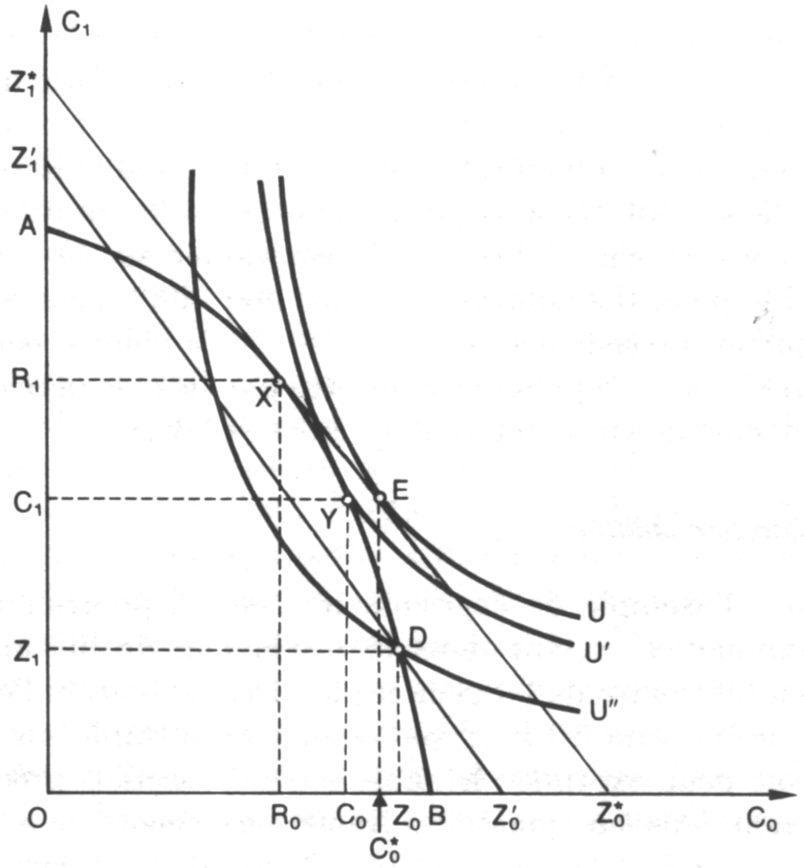


FIG. 1.9

Mathématiques financières : synthèse des formules.

Les valeurs futures : l'accumulation.

Combien vaut dans t années 1 € dont on dispose aujourd'hui (temps 0) et que l'on peut placer au taux d'intérêt annuel i ?

$$\mathbf{VF_t = VA \cdot (1 + i)^t}$$

Si $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \ldots \neq i_t$, $VF_t = VA \cdot (1 + i_1)^1 (1 + i_2)^1 \cdot \ldots \cdot (1 + i_t)^1$

Les valeurs actuelles: l'actualisation.

Combien vaut aujourd'hui (temps 0) 1 € à recevoir dans t années et que l'on ne peut donc pas placer aujourd'hui au taux d'intérêt annuel i ?

$$\mathbf{VA = VF_t \cdot \frac{1}{(1 + i)^t}}$$

Si $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \ldots \neq i_t$, $VA = VF_t \cdot \dfrac{1}{(1 + i_i)^1 \cdot (1 + i_2)^1 \cdot \ldots \cdot (1 + i_t)^1}$

Le cas des annuités constants: l'accumulation.

Quelle est la valeur dans t années de 1 € à recevoir à chaque fin d'année (= annuité A) jusqu'à l'année t sachant que le taux d'intérêt annuel i est constant ?

$$\mathbf{VF_t = A \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i}}$$

Le cas des annuités constants: l'actualisation.

Quelle est la valeur aujourd'hui de 1 € à recevoir à chaque fin d'année (= annuité A) jusqu'à l'année t, sachant que le taux d'intérêt annuel i est constant ?

$$\mathbf{VA = A \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i \cdot (1 + i)^t}}$$

Le cas des remboursements d'emprunts : le remboursement fractionné.

Pour un emprunt de 1 € contracté aujourd'hui (temps 0), quel montant constant faut-il verser au prêteur à chaque fin d'année pendant t années pour rembourser totalement cet emprunt au terme de ces t années, sachant que le taux annuel d'intérêt i est constant ?

$$\mathbf{A = VA \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}$$

Le cas des remboursements d'emprunts : le remboursement en bloc par capitalisation.

Pour un emprunt contracté aujourd'hui (temps 0), quel montant constant faut-il verser à chaque fin d'année pendant t années à un fonds de capitalisation productif d'un taux d'intérêt annuel i constant, pour rembourser 1 € au terme de l'année t ?

$$\mathbf{A = VF_t \cdot \frac{i}{(1+i)^t - 1}}$$

Applications.

- Combien vaudront dans 10 ans 1.000 € dont on dispose aujourd'hui et que l'on peut placer au taux d'intérêt annuel de 8 % ?

- Combien valent aujourd'hui 10.000 € à recevoir dans 10 ans et que l'on ne peut donc pas placer aujourd'hui au taux d'intérêt annuel de 10 % ?

- Quelle sera la valeur dans 8 ans de 2.000 € à recevoir à chaque fin d'année sachant que le taux d'intérêt annuel constant est de 6 % ?

- Quelle est la valeur aujourd'hui de 2.000 € à recevoir à chaque fin d'année pendant 8 ans, sachant que le taux d'intérêt annuel constant est de 6 % ?

- Si j'emprunte aujourd'hui 10.000 € ; quel montant constant devrai-je verser à mon banquier à chaque fin d'année durant 10 ans, sachant que le taux d'intérêt annuel constant est de 8 % ? Etablir le tableau d'amortissement (feuille suivante !)

- Je souhaite contracter aujourd'hui un emprunt aux conditions suivantes : je souhaite rembourser, en un seul bloc 20.000 € dans 10 ans ; quel montant dois-je verser à chaque fin d'année à un fonds de capitalisation dont le taux d'intérêt annuel constant est de 6 %.

Tableau d'amortissement.

Année	Annuité	Capital	Intérêts	Solde restant dû
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Totaux	**-**			**-**

RESOLUTION.

Exercice n° 1.

Combien vaudront dans 10 ans 1.000 € dont on dispose aujourd'hui et que l'on peut placer au taux d'intérêt annuel de 8 % ?

$$\boxed{\mathbf{VF_t = VA \,.\, (1 + i)^t}}$$

$VF_{10} = 1000 \times (1 + 0{,}08)^{10} = 1000 \times 2{,}158924997 = 2.158{,}9250$

Exercice n° 2.

Combien valent aujourd'hui 10.000 € à recevoir dans 10 ans et que l'on ne peut donc pas placer aujourd'hui au taux d'intérêt annuel de 10 % ?

$$\boxed{\mathbf{VA = VF_t \,.\, \frac{1}{(1 + i)^t}}}$$

$VA = 10.000 \times [1 / (1 + 0{,}10)^{10}] = 10.000 \times [1 / 2{,}59374246] = 3.855{,}43$

Exercice n° 3.

Quelle sera la valeur dans 8 ans de 2.000 € à recevoir à chaque fin d'année sachant que le taux d'intérêt annuel constant est de 6 % ?

$$\boxed{\mathbf{VF_t = A \,.\, \frac{(1 + i)^t - 1}{i}}}$$

$$VF_8 = 2000 \times \frac{(1 + 0{,}06)^8 - 1}{0{,}06} = 2000 \times (0{,}593848074 / 0{,}06) = 19.794{,}9358$$

Exercice n° 4.

Quelle est la valeur aujourd'hui de 2.000 € à recevoir à chaque fin d'année pendant 8 ans, sachant que le taux d'intérêt annuel constant est de 6 % ?

$$\boxed{\mathbf{VA = A \,.\, \frac{(1 + i)^t - 1}{i \,.\, (1 + i)^t}}}$$

$$VA = 2000 \times \frac{(1 + 0{,}06)^8 - 1}{0{,}06 \times (1 + 0{,}06)^8} = 2000 \times (0{,}5938 / 0{,}0956) = 12.419{,}5876$$

Exercice n° 5.

Si j'emprunte aujourd'hui 10.000 € ; quel montant constant devrai-je verser à mon banquier à chaque fin d'année durant 10 ans, sachant que le taux d'intérêt annuel constant est de 8 % ? Etablir le tableau d'amortissement (feuille suivante !)

$$\mathbf{A = VA \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}$$

$$A = 10.000 \times \frac{0{,}08 \times (1 + 0{,}08)^{10}}{(1 + 0{,}08)^{10} - 1} = 10.000 \times (0{,}172713999 / 1{,}158924997) = 1490{,}294887$$

Tableau d'amortissement.

Capital	10 000,0000 €			
Taux	0,0800 €			
Années	**Annuité**	**Intérêts**	**Capital**	**Solde dû**
1	1 490,2949 €	800,0000 €	690,2949 €	9 309,7051 €
2	1 490,2949 €	744,7764 €	745,5185 €	8 564,1866 €
3	1 490,2949 €	685,1349 €	805,1600 €	7 759,0266 €
4	1 490,2949 €	620,7221 €	869,5728 €	6 889,4539 €
5	1 490,2949 €	551,1563 €	939,1386 €	5 950,3153 €
6	1 490,2949 €	476,0252 €	1 014,2697 €	4 936,0456 €
7	1 490,2949 €	394,8836 €	1 095,4113 €	3 840,6343 €
8	1 490,2949 €	307,2507 €	1 183,0442 €	2 657,5902 €
9	1 490,2949 €	212,6072 €	1 277,6877 €	1 379,9025 €
10	1 490,2949 €	110,3922 €	1 379,9027 €	-0,0002 €
Totaux	14 902,9490 €	4 902,9488 €	10 000,0002 €	-
Coût de l'emprunt : 14902,95 - 10000 = 4902,95				

Exercice n° 6.

Je souhaite contracter aujourd'hui un emprunt aux conditions suivantes : je souhaite rembourser, en un seul bloc 20.000 € dans 10 ans ; quel montant dois-je verser à chaque fin d'année à un fonds de capitalisation dont le taux d'intérêt annuel constant est de 6 %.

$$\mathbf{A = VF_t \cdot \frac{i}{(1 + i)^t - 1}}$$

$$A = 20.000 \times \frac{0{,}06}{(1 + 0{,}06)^{10} - 1} = 20.000 \times (0{,}06 / 0{,}790847696) = 1517{,}359165$$

Application de la formule utilisée pour l'exercice n° 3:

$$VF_{10} = 1517{,}359165 \times \frac{(1 + 0{,}06)^{10} - 1}{0{,}06} = 20.000$$

MATHEMATIQUES FINANCIERES (CHAPITRE I et IV) EXERCICES

Exercice n° 1.

Monsieur Dupont a gagné 100.000 € à un jeu de hasard ; il décide de placer cet argent sur un livret d'épargne durant 10 ans ; le taux d'intérêt annuel est de 8 %. Chaque année les intérêts perçus sont versés sur le livret et produisent à leur tour un intérêt.

- Combien percevra-t-il au terme de la $10^{ème}$ année ?

- Sur la base du résultat obtenu à la question précédente et des données de l'énoncé, retrouver la durée du placement.

Exercice n°2.

Monsieur Durand contracte auprès de sa banque préférée un emprunt de 100.000 € remboursable en 10 annuités constantes ; le taux mensuel de chargement est de 0,5 %.

- Déterminer, en utilisant la méthode légale, le taux d'intérêt annuel approximatif.

- Calculer, à partir de ce taux approximatif, le montant de l'annuité.

- Etablir le tableau d'amortissement sur 10 ans (voir feuille annexe).

- Calculer, à partir du taux mensuel de chargement, le montant de l'annuité (et comparer avec le résultat obtenu au moyen du taux approximatif).

- Etablir le tableau d'amortissement sur 10 ans (voir feuille annexe).

Exercice n° 3.

Monsieur Patience recevra, dans 8 ans, la somme de 50.000 € ; il est désespéré à l'idée que s'il disposait actuellement de cet argent, il pourrait le placer au taux d'intérêt annuel (très préférentiel) de 10 %.

- Combien valent actuellement les 50.000 € à recevoir dans 8 ans ?

- Sur la base du résultat obtenu à la question précédente et des données de l'énoncé, retrouver le nombre d'années à attendre avant de percevoir enfin les 50.000 €.

Exercice n° 4.

Capucine a décidé de verser à son neveu Grégoire, chaque année et durant 20 ans, une rente de 5.000 € ; le taux d'intérêt annuel constant est de 8%. Grégoire souhaite connaître, en valeur actuelle, le montant total de la rente.

Exercice n° 5.

Monsieur Léon souhaite prendre sa retraite (dans 20 ans) sous des cieux plus cléments. Il décide en conséquence de verser chaque année la somme de 2.000 € à un fonds de capitalisation ; ce dernier produit un intérêt annuel constant de 6 %. De combien disposera Monsieur Léon au moment de sa retraite ?

Exercice n° 6.

Mademoiselle Lucie souhaite contracter un emprunt aux conditions suivantes : elle veut rembourser 100.000 € en un seul bloc dans 10 ans ; elle décide en conséquence de verser, chaque année, une certaine somme d'argent à un fonds de capitalisation dont le taux d'intérêt annuel constant est de 9 %.

- Quel montant devra-t-elle verser chaque année ?

- Vérifier qu'en versant chaque année cette somme à ce fonds de capitalisation, elle disposera bien au terme de son épargne de la somme souhaitée.

- Quelle est, pour la banque, la valeur actuelle de la somme qui sera encaissée dans 10 ans ?

Exercice n° 7.

Madame Irma souhaite contracter un emprunt auprès de la société Assurfinance aux conditions suivantes : emprunt de 10.000 € remboursables en 36 mensualités avec un TAEG de 7 %.

- Déterminer le montant de la mensualité.
- Déterminer le taux mensuel de chargement et vérifier qu'il s'agit bien d'un taux de chargement.
- A partir de ce taux de chargement, déterminer, selon la méthode légale d'approximation, le taux annuel.
- Calculer la mensualité à l'aide de ce taux approximatif et vérifier la concordance avec la mensualité annoncée.

Exercice n° 8.

- Pour l'exercice n°2, retrouver, au moyen de l'interpolation linéaire, le taux d'intérêt approximatif (légal).

- Pour l'exercice n°3, retrouver, au moyen de l'interpolation linéaire, le taux d'intérêt approximatif (légal).

- Pour l'exercice n°4, retrouver, au moyen de l'interpolation linéaire, le taux d'intérêt approximatif (légal).

- Pour l'exercice n°5, retrouver, au moyen de l'interpolation linéaire, le taux d'intérêt approximatif (légal).

- Pour l'exercice n°6, retrouver, au moyen de l'interpolation linéaire, le taux d'intérêt approximatif (légal).

Tableau d'amortissement : taux approximatif.

Année	Annuité	Capital	Intérêts	Solde restant dû
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Totaux	**-**			**-**

Tableau d'amortissement : taux mensuel de chargement .

Année	Annuité	Capital	Intérêts	Solde restant dû
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Totaux	**-**			**-**

RESOLUTION DES EXERCICES DU CHAPITRE I.

Exercice n° 1.

$$\mathbf{VF_t = VA \cdot (1 + i)^t}$$

$VF_t = 100.000 \times (1 + 0{,}08)^{10} = 100.000 \times (1{,}08)^{10} = 215.892{,}50$ €.

$215.892{,}50 = 100.000 \times (1{,}08)^t$

$(1{,}08)^t = 215.892{,}50 / 100.000 = 2{,}158925$

$\log [(1{,}08)^t] = \log 2{,}158925$

$t \times \log (1{,}08) = \log 2{,}158925$

$$t = \frac{\log 2{,}158925}{\log 1{,}08} = \frac{0{,}334237555}{0{,}033423755} = 10$$

Exercice n° 2.

$$\mathbf{i_A = \frac{r \cdot 24 \cdot n}{n + 1}}$$

$$i_A = \frac{0{,}005 \times 24 \times 10}{10 + 1} = \frac{1{,}2}{11} = 0{,}1091 = 10{,}91\ \%$$

$$\mathbf{A = VA \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}$$

$$A = 100.000 \times \frac{0{,}11 \times (1 + 0{,}11)^{10}}{(1 + 0{,}11)^{10} - 1} = 100.000 \times \frac{0{,}11 \times (1{,}11)^{10}}{(1{,}11)^{10} - 1}$$

$$A = 100.000 \times \frac{0{,}312336308}{1{,}8394200986} = 100.000 \times 0{,}169801508 = 16.980{,}15\ €$$

Tableau d'amortissement en utilisant le taux de chargement.

Année	Annuité	Capital	Intérêts	Solde restant dû
1	16.000	10.000	6.000	90.000
2	16.000	10.000	6.000	80.000
3	16.000	10.000	6.000	70.000
4	16.000	10.000	6.000	60.000
5	16.000	10.000	6.000	50.000
6	16.000	10.000	6.000	40.000
7	16.000	10.000	6.000	30.000
8	16.000	10.000	6.000	20.000
9	16.000	10.000	6.000	10.000
10	16.000	10.000	6.000	0
Totaux	**-**	**100.000**	**60.000**	**-**

Calcul du taux avec la fonction TAUX dans MS EXCEl.

i = TAUX (10 ;-16000 ;100000) = 9,60585641 = 9,61 %.

Avec ce taux, la mensualité devient :

$$A = VA \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

$$A = 100.000 \times \frac{0,096 \times (1+0,096)^{10}}{(1+0,096)^{10} - 1} = 100.000 \times \frac{0,096 \times 2,500953065}{2,500953065 - 1}$$

$$A = 100.000 \times \frac{0,240091494}{1,500953065} = 100.000 \times 0,1599559361 = 15.995,94\ €$$

Tableau d'amortissement en utilisant le taux calculé à l'aide de MS EXCEL.

Année	Annuité	Capital	Intérêts (9,6 %)	Solde restant dû
1	16.000	6.400	9600	93.600
2	16.000			
3	16.000			
4	16.000			
5	16.000			
6	16.000			
7	16.000			
8	16.000			
9	16.000			
10	16.000			
Totaux	**-**			**-**

<u>Calcul du taux d'intérêt réel en utilisant l'interpolation linéaire.</u>

On sait que le taux est compris entre 9,5 % et 11 %.

Calcul de l'annuité A avec un taux de 9,5 %.

$$A_{9,5} = 100.000 \times \frac{0,095 \times (1 + 0,095)^{10}}{(1 + 0,095)^{10} - 1} = 100.000 \times \frac{0,235431623}{1,478227613} = 15.926,62 \text{ €}$$

calcul de l'annuité A avec un taux de 11 %.

$$A_{11} = 100.000 \times \frac{0,11 \times (1 + 0,11)^{10}}{(1 + 0,11)^{10} - 1} = 100.000 \times \frac{0,312336308}{1,839420986} = 16.980,14 \text{ €}$$

$$\mathbf{\frac{Y - Y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{X - X_2}{X_1 - X_2}}$$

X	Inconnue
X_1	9,5 %
X_2	11 %
Y	16.000
Y_1	15.926,62 €
Y_2	16.980,14 €

$$\frac{16.000 - 16.980,14}{15926,62 - 16.980,14} = \frac{X - 0,11}{0,095 - 0,11}$$

$$\frac{-980,14}{-1053,52} = \frac{X - 0,11}{-0,015}$$

0,930347786 x (– 0,015) = X – 0,11 $\Rightarrow$ X = 0,11 – 0,013955 $\Rightarrow$ X = 0,096044784 = 9,6 %

Exercice n° 3.

$$\mathbf{VA = VF_t \cdot \frac{1}{(1 + i)^t}}$$

$$VA = 50.000 \times \frac{1}{(1 + 0,10)^{10}} = 50.000 / 2,59374246 = 19.277,16\ €$$

$$\mathbf{(1 + i)^t = VF_t / VA}$$

$(1,10)^t = 50.000 / 19277,16 = 2,593743062$

$\text{Log}\ [(1,10)^t] = \log 2,593743062$

$t \cdot \log 1,10 = \log 2,593743062$

$$t = \frac{\log 2,593743062}{\log 1,10} = \frac{0,413926952}{0,041392685} = 10 \text{ ans}$$

Exercice n° 4.

$$\mathbf{VA = A \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i \cdot (1 + i)^t}}$$

$$VA = 5.000 \times \frac{(1 + 0,08)^{20} - 1}{0,08 \times (1 + 0,08)^{20}} = 5.000 \times \frac{3,660957144}{0,372876571} = 5.000 \times 9,818147421$$

VA = 49.090,74 €

Exercice n° 5.

$$\mathbf{VF_t = A \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i}}$$

$$VF_{20} = 2.000 \times \frac{(1 + 0,06)^{20} - 1}{0,06} = 2.000 \times \frac{2,207135472}{0,06} = 2.000 \times 36,7855912$$

VF_{20} = = 73.571,18 €

Exercice n° 6.

$$\mathbf{A = VF_t \cdot \frac{i}{(1+i)^t - 1}}$$

$$A = 100.000 \text{ x } \frac{0{,}09}{(1+0{,}09)^{10} - 1} = 100.000 \text{ x } \frac{0{,}09}{1{,}367363675} = 100.000 \text{ x } 0{,}065820089$$

A = 6.582,01 €

$$\mathbf{VF_t = A \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}}$$

$$VF_{10} = 6.582{,}01 \text{ x } \frac{(1+0{,}09)^{10} - 1}{0{,}09} = 6.582{,}01 \text{ x } \frac{1{,}367363675}{0{,}09} = 6.582{,}01 \text{ x } 15{,}19292972$$

VF_{10} = 100.000, 02 €

$$VA = VF_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$$

VA = 100.000 x [1 / (1 + 0,09)^{10}] = 100.000 x (1 / 2,367363675) = 100.000 x 0,422410806
VA = 42.241,08 €

Exercice n° 7.

Mensualité = 10 x 30,77 € = 307,70 €

Taux mensuel de chargement = 0,30 %

Mensualité = 10.000 / 36 + 10.000 x 0,003 = 277,7777778 + 30 = 307,78 €

$$\mathbf{i_A = \frac{r \cdot 24 \cdot n}{n + 1}}$$

$$i_A = \frac{0{,}003 \times 24 \times 36}{36 + 1} = 2{,}592 / 37 = 0{,}070054054 = 7{,}01\ \%$$

$$\mathbf{A = VA \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}$$

$$A = 10.000 \times \frac{0{,}0058 \times (1{,}0058)^{36}}{(1{,}0058)^{36} - 1} = 10.000 \times \frac{0{,}007142441957}{0{,}23145551} = 308{,}59\ €$$

<u>Avec MS EXCEL</u> : taux mensuel réel = 0,565071 % = 0,57 %, soit un taux annuel de 6,84 %.

Exercice n° 8.

<u>Exercice 8-1.</u>

$VF_t = Y$	215.892,50 €
VA	100.000 €
i = X	Inconnue (8 %)
$i_1 = X_1$	7,5 %
$i_2 = X_2$	8,5 %
$VF_1 = Y_1$	$VF_1 = 100.000 \times (1 + 0{,}075)^{10} = 100.000 \times 2{,}061031562 = 206.103{,}16$ €
$VF_2 = Y_2$	$VF_2 = 100.000 \times (1 + 0{,}085)^{10} = 100.000 \times 2{,}260983442 = 226.098{,}34$ €

$$\frac{Y - Y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{X - X_2}{X_1 - X_2}$$

$$\frac{215.892,50 - 226.098,34}{206.103,16 - 226.098,34} = \frac{X - 0,085}{0,075 - 0,085}$$

(– 10.205,84) / (– 19.995,18) = (X – 0,085) / (– 0,010)
⇒ X – 0,085 = (0,51041501) x (– 0,010)
⇒ X – 0,085 = – 0,0051041501
⇒ X = 0,079895849 = 7,99 %

<u>Et si on prend des valeurs de i_1 et i_2 plus proche de i = 8 %...</u>

$VF_t = Y$	215.892,50 €
VA	100.000 €
i = X	Inconnue (8 %)
$i_1 = X_1$	7,9 %
$i_2 = X_2$	8,1 %
$VF_1 = Y_1$	VF_1 = 100.000 x $(1 + 0,078)^{10}$ = 100.000 x 2,119276432 = 211.927,64 €
$VF_2 = Y_2$	VF_2 = 100.000 x $(1 + 0,081)^{10}$ = 100.000 x 2,178998541 = 217.899,85 €

$$\frac{215.892,50 - 217.899,85}{211.927,64 - 217.899,85} = \frac{X - 0,081}{0,079 - 0,081}$$

⇒ (– 2.007,35)/ (– 5.972,21) = (X – 0,081) / (–0,002)
⇒ X – 0,081 = (0,336115106) x (– 0,002)
⇒ X – 0,081 = –0,0006722302129
⇒ X = 0,081 – 0,0006722302129 = 0,08032777 = 8,03 %

LE PRINCIPE DE L'EVALUATION FINANCIERE PAR LA VALEUR ACTUELLE.

1. **Le taux d'intérêt comme taux d'échange dans le temps ou taux de transformation de richesse.**

Le taux d'intérêt est un taux d'échange entre des valeurs monétaires actuelles et des valeurs monétaires futures.

Le taux d'intérêt est un taux de transformation :

- **De valeurs actuelles en valeurs futures :**
  principe de l'accumulation à intérêts composés ou de la capitalisation sur un horizon fini.

  $$\boxed{VF_t = VA_0\,(1 + i)^t \quad \text{si i constant de 1 à t}}$$

- **De valeurs futures en valeurs actuelles :**

  Principe de l'actualisation à intérêts composés sur un horizon fini.

  $$VA_0 = VF_t \frac{1}{(1 + i)^t} \text{, si i est constant de 1 à t}$$

  Principe de l'actualisation à intérêts composés à l'infini ou capitalisation d'une rente perpétuelle.

  $$VA_0 = \frac{VF}{i} \text{, avec VF et i constants de 1 à } \infty$$

2. **Les mathématiques financières ou le mécanisme de l'intérêt composé dans le temps.**

A. Les valeurs futures : l'accumulation.

- Combien vaut dans un an (au temps = 1) 1 Franc dont on dispose aujourd'hui (au temps = 0) et que l'on peut placer au taux d'intérêt i ?

  $$VF_1 = VA\,(1 + i)^t$$

  si i_1 = 10 %, $VF_1 = (1 + 0{,}10)^1 = 1{,}10$ Francs

- Combien vaut dans 2 ans 1 Franc d'aujourd'hui ?

  $$\text{Si } i_1 \neq i_2 \text{ , } VF_2 = VA\,(1 + i_1)^1\,(1 + i_2)^1$$

si i_1 = 10 % et i_2 = 15 % , $VF_2 = 1\ (1 + 0{,}10)^1\ (1 + 0{,}15)^1 = 1{,}265$

Si $i_1 = i_2$, $VF_2 = VA\ (1 + i)^2$

si i = 10 % , $VF_2 = 1\ (1 + 0{,}10)^2 = 1{,}21$

- Combien vaut dans t années 1 Franc d'aujourd'hui ?

Si $i_1 \neq i_2 \ldots \neq i_t$, $VF_t = VA\ (1 + i_1)^1\ (1 + i_2)^1 \ldots\ (1 + i_t)^1$

Si i est constant, $VF_t = VA\ (1 + i)^t$; $(1 + i)^t$ = facteur de composition ou d'accumulation

B. Les valeurs actuelles : l'actualisation.

- Combien vaut aujourd'hui (au temps = 0) 1 Franc à recevoir dans 1 an (au temps = 1) et qu'on ne peut donc pas placer aujourd'hui au taux d'intérêt i ?

$$VA = VF_1 \frac{1}{(1 + i)^1}$$

si i_1 = 10 %, $VA = 1 / (1 + 0{,}10)^1 = 0{,}909$

- Combien vaut aujourd'hui 1 Franc à recevoir dans 2 ans ?

$$\text{Si } i_1 \neq i_2 \text{ , } VA = VF_2 \frac{1}{(1 + i_1)^1\ (1 + i_2)^1}$$

si i_1 = 10 % et i_2 = 15 %, $VA = 1 / (1 + 0{,}10)^1\ (1 + 0{,}15)^1 = 0{,}791$

$$\text{Si } i_1 = i_2 \text{ , } VA = VF_t \frac{1}{(1 + i)^t}$$

si i = 10 %, $VA = 1 / (1 + 0{,}10)^2 = 0{,}826$

- Combien vaut aujourd'hui 1 Franc à recevoir dans t années ?

Si $i_1 \neq i_2 \ldots \neq i_t$, $VA = VF_t \times [\ 1 / (1 + i_1)\ (1 + i_2) \ldots (1 + i_t)]$

Si i est constant , $VA = VF_t \times [\ 1 / (1 + i)^t]$; $1 / (1 + i)^t$ est le facteur d'actualisation

C. Le cas des annuités constantes.

<u>1°. L'accumulation.</u>

Quelle est la valeur dans t années de 1 Franc à recevoir à chaque fin d'année (= annuité A) jusqu'à l'année t, sachant que le taux d'intérêt i est constant ?

$$\boldsymbol{VF_t = A \frac{(1+i)^t - 1}{i}}$$

<u>2°. L'actualisation.</u>

Quelle est la valeur aujourd'hui de 1 Franc à recevoir à chaque fin d'année (= annuité A) jusqu'à l'année t, sachant que le taux d'intérêt i est constant ?

$$\boldsymbol{VA = A \frac{(1+i)^t - 1}{i\,(1+i)^t}}$$

D. Le cas des remboursements d'emprunts.

<u>1°. Le remboursement fractionné.</u>

Pour un emprunt de 1 Franc contracté aujourd'hui (au temps = 0), quel montant constant faut-il verser au prêteur à chaque fin d'année pendant t années pour rembourser totalement cet emprunt au terme de ces t années, sachant que le taux d'intérêt i est constant ?

→ Le problème désigne l'inverse de la formule de l'actualisation d'une annuité constante.

$$\boldsymbol{A = VA \frac{i\,(1+i)^t}{(1+i)^t - 1}}$$

<u>2°. Le remboursement en bloc par capitalisation.</u>

Pour un emprunt contracté aujourd'hui (au temps = 0), quel montant constant faut-il verser à chaque fin d'année pendant t années à un fonds de capitalisation productif d'un taux d'intérêt i constant pour rembourser 1 franc au terme de l'année t ?

→ Le problème désigne l'inverse de la formule de l'accumulation d'une annuité constante.

$$\boldsymbol{A = VF_t \frac{i}{(1+i)^t - 1}}$$

a. L'évaluation financière de la rentabilité.

A. Les principes généraux.

- L'évaluation économico – financière de toute décision (investissement, désinvestissement, placement, financement, …) et l'évaluation économique de tout actif financier (action, obligation, projet d'investissement, entreprise, …) <u>doivent s'effectuer (selon le théorème du capital – valeur de FISHER)</u> :
  a) en termes de valeurs actuelles
  b) OU en termes de valeurs futures.

- <u>Tout agent économique rationnel doit avoir pour objectif de maximiser la valeur actuelle ou la valeur future</u> :
  a) de ses choix (investissement par exemple)
  b) de ses actifs (entreprise par exemple)

- C'est par simple commodité ou préférence individuelle que le raisonnement est communément conduit en termes de valeur actuelle.

B. Le choix des investissements.

B.1. Le critère de la valeur actuelle nette (VAN).

$$\mathbf{VAN} = \sum_{t=0 \rightarrow n} \frac{F_t}{(1+i)^t} = -i_0 + \sum_{t=1 \rightarrow n} \frac{F_t}{(1+i)^t}$$

n	durée de vie prévisible
F_t	montant du flux au temps t ; quand t = 0, le flux, négatif, représente le coût de l'investissement initial
i	taux d'intérêt (conçu comme taux d'actualisation)

→ IL FAUT ACCEPTER UN INVESTISSEMENT DONT LA VAN ≥ 0

<u>En effet une VAN positive signifie</u> :

- tous les capitaux investis seront, d'après les prévisions, récupérés par les flux de revenus qui surviendront pendant la durée de vie
- les fournisseurs de fonds seront rémunérés selon leurs exigences de rendement puisque tous les flux sont actualisés au coût du capital
- il restera un surplus (qui est la VAN elle-même) au profit de l'entreprise

B.2. Le critère du taux de rentabilité interne (TRI).

$$\sum_{t=0\to n} \frac{F_t}{(1+r)^t} = 0$$

r est la solution de l'équation, c'est-à-dire le TRI ; les autres notations littérales ont la même signification que dans la formulation de la VAN.

- Le TRI est un taux d'actualisation pour lequel la VAN est nulle
- Le TRI est un taux de rentabilité perçu en moyenne sur la durée de vie
- **IL FAUT ACCEPTER UN INVESTISSEMENT DONT LE TRI EST ≥ I** .

C. Le choix des financements.

C.1. Le critère du coût actuariel (TRI).

$$\sum_{t=0\to n} \frac{F_t}{(1+r)^t} = 0$$

r	solution de l'équation, c'est-à-dire le coût actuariel
F_t	montant du flux, négatif, de paiement (intérêt et remboursement de capital) ; quand t = 0, le flux désigne le montant du financement perçu
n	durée du financement

- Le coût actuariel se détermine comme le TRI
- **Le coût actuariel véhicule le même concept que le TRI, à une nuance près ⇒** :
  a) le coût actuariel est l'optique d'un demandeur de fonds
  b) le TRI (ou taux actuariel de rentabilité) est l'optique d'un offreur de fonds

C.2. Le critère de la valeur actuelle nette (VAN).

$$VAN = \sum_{t=0\to n} \frac{F_t}{(1+i)^t}$$

i est le taux d'emprunt de référence.

LA RENTABILITE DES PROJETS D'INVESTISSEMENT

PARAMETRES	
Capitaux investis	19.000.000,00 €
Taux d'actualisation	0,0750
Durée (en années)	5
Valeur résiduelle (VR)	0,00 €
BFR cumulés	0,00 €

CALCUL DE LA VAN :
5.275.309,41 €

Année	flux	Actualisation	Flux actualisé
1	6.000.000,00 €	0,930232558	5.581.395,35 €
2	6.000.000,00 €	0,865332612	5.191.995,67 €
3	6.000.000,00 €	0,80496057	4.829.763,42 €
4	6.000.000,00 €	0,74880053	4.492.803,18 €
5	6.000.000,00 €	0,696558632	4.179.351,79 €
VR + BFR	0,00 €	0,696558632	0,00 €
		Somme :	**24.275.309,41 €**

CALCUL DU TAUX DE RENDEMENT INTERNE (TRI)

PARAMETRES	
Capitaux investis	19.000.000,00 €
Taux d'actualisation	**0,174486**
Durée (en années)	0,17
Valeur résiduelle (VR)	0,00 €
BFR cumulés	0,00 €

VALIDER X1 ET Y1

VALIDER X2 ET Y2

ALCUL DE LA VAN
-198,0360 €

	TRI	CIBLE
X1-Y1	0,17	196.076,9764 €
X2-Y2	0,1750	-22.476,5870 €
X-Y	**0,174486**	0,0000 €

Interpolation linéaire :
(Y - Y2) / (Y1 - Y2) = (X - X2) / (X1 - X2)

Année	flux	Actualisation	Flux actualisé
1	6.000.000,00 €	0,851436288	5.108.617,73 €
2	6.000.000,00 €	0,724943752	4.349.662,51 €
3	6.000.000,00 €	0,617243417	3.703.460,50 €
4	6.000.000,00 €	0,525543444	3.153.260,66 €
5	6.000.000,00 €	0,447466759	2.684.800,55 €
VR + BFR	0,00 €	0,447466759	0,00 €
		Somme :	**18.999.801,96 €**

LA RENTABILITE DES PROJETS D'INVESTISSEMENT

<u>Conditions de l'emprunt</u> :

PARAMETRES	
Capitaux investis	160.000,00 €
Taux d'actualisation	0,05
Durée (en années)	5
Valeur résiduelle (VR)	60.000,00 €
BFR cumulés	0,00 €

CALCUL DE LA VAN :
9.648,27 €

Montant emprunté	160.000,00 €
Taux annuel constant	0,055
Durée (années)	4
Annuité	45.647,12 €

Année	flux	Actualisation	Flux actualisé
1	15.200,00 €	0,952380952	14.476,19 €
2	21.226,59 €	0,907029478	19.253,14 €
3	27.364,65 €	0,863837599	23.638,61 €
4	33.620,29 €	0,822702475	27.659,50 €
5	48.000,00 €	0,783526166	37.609,26 €
VR + BFR	60.000,00 €	0,783526166	47.011,57 €
		Somme :	169.648,27 €

	Tableau de remboursements : intérêts			Capital	Intérêts	Solde dû
	Flux +	Flux -	flux	36.847,12 €	**8.800,00 €**	123.152,88 €
1	24.000,00 €	**8.800,00 €**	15.200,00 €	38.873,71 €	**6.773,41 €**	84.279,17 €
2	28.000,00 €	**6.773,41 €**	21.226,59 €	41.011,76 €	**4.635,35 €**	43.267,41 €
3	32.000,00 €	**4.635,35 €**	27.364,65 €	43.267,41 €	**2.379,71 €**	0,00 €
4	36.000,00 €	**2.379,71 €**	33.620,29 €	***160.000,00 €***		
5	48.000,00 €	0,00 €	48.000,00 €			

Soit un projet d'investissement dont le capital investi de 160,000,00 € est financé au moyen d'un emprunt remboursable en 4 ans au taux annuel constant de 5,5 % ; les flux successifs attendus du projet sont :

Année	*Flux*
1	***24.000,00 €***
2	***28.000,00 €***
3	***32.000,00 €***
4	***36.000,00 €***
5	***48.000,00 €***
VR	***60.000,00 €***

CALCUL DU TAUX DE RENDEMENT INTERNE (TRI)

PARAMETRES	
Capitaux investis	160.000,00 €
Taux d'actualisation	**0,066049**
Durée (en années)	5
Valeur résiduelle (VR)	60.000,00 €
BFR cumulés	0,00 €

CALCUL DE LA VAN :
-5,7676 €

VALIDER X1 ET Y1

VALIDER X2 ET Y2

	TRI	CIBLE
X1-Y1	0,07	-2.265,2954 €
X2-Y2	0,0650	601,6793 €
X-Y	**0,066049**	0,0000 €

Année	flux	Actualisation	Flux actualisé
1	15.200,00 €	0,938043186	14.258,26 €
2	21.226,59 €	0,879925018	18.677,81 €
3	27.364,65 €	0,825407667	22.586,99 €
4	33.620,29 €	0,774268037	26.031,12 €
5	48.000,00 €	0,726296856	34.862,25 €
VR + BFR	60.000,00 €	0,726296856	43.577,81 €
		Somme :	159.994,23 €

Interpolation linéaire :
(Y - Y2) / (Y1 - Y2) = (X - X2) / (X1 - X2)

CALCUL DE L'ANNUITE & TABLEAU DES REMBOURSEMENTS

Capital	**160.000,00 €**
Durée	**4**
Taux	**0,055**

Annuité	**45.647,12 €**

Année	Annuité	Capital	Intérêts	Solde
1	45.647,12 €	36.847,12 €	8.800,00 €	123.152,88 €
2	45.647,12 €	38.873,71 €	6.773,41 €	84.279,17 €
3	45.647,12 €	41.011,76 €	4.635,35 €	43.267,41 €
4	45.647,12 €	43.267,41 €	2.379,71 €	-0,00 €

CHAPITRE II
INTERÊT SIMPLE ET ESCOMPTE SIMPLE

1. Définition et notation de l'intérêt simple.

La théorie de l'intérêt simple a pour objectif la description de l'évolution d'un capital dans le temps. L'existence d'un marché de capitaux jointe à l'érosion monétaire (l'argent perd de sa valeur d'échange) fait que la disposition pendant une certaine durée d'un capital doit être rémunérée. On dit alors que le capital produit un intérêt.

Il découle de cela que la valeur d'un capital sera toujours fonction de la période considérée ; par convention, on désignera la valeur actuelle d'un capital par la notation C_0. L'indice « 0 » indique simplement le présent, ou encore, en langage mathématique, le point t = 0.
Dans ce contexte, t = a (avec a positif) désignera le futur et t = -a (a positif) désignera le passé.

On conviendra encore que l'unité de temps peut être choisie arbitrairement, quel que soit le problème posé ; une fois cette unité choisie, tous les paramètres intervenant dans le problème devront être exprimés relativement à l'unité choisie. Selon les problèmes à envisager, on se référera tantôt à l'année comme unité de temps, tantôt au semestre, au mois, à la semaine, voire au jour.

Considérons à présent un nombre entier de période ; soit n ce nombre. La question qui se pose est la suivante : quelle sera la valeur du capital C_0 (le capital initial) après n périodes ? Cette valeur, notée C_n, sera en fait égale à C_0 augmenté de la valeur des intérêts produits ; on notera ces intérêts I_n.
En langage mathématique, on peut donc écrire : $C_n = C_0 + I_n$

La théorie de l'intérêt simple nous permet de déterminer I_n en fonction de 3 paramètres :

- Le capital initial, à savoir C_0
- La durée, notée n
- Un paramètre de proportionnalité, appelé taux d'intérêt, dont la notation classique est i. Par définition, i est défini pour la période de temps unité choisie ; si le temps est mesuré en années, i sera le taux annuel ; si le temps est mesuré en mois, i sera le taux mensuel,…

Ces éléments étant posés, on peut, en langage mathématique, définir l'intérêt de la manière suivante : $I_n = C_0 . n . i$

A partir de cette relation, on peut calculer C_n pour tout valeur naturelle de n ; on a :

$C_n = C_0 + I_n = C_0 . (1 + n.i)$

<u>Remarque.</u>

Le calcul de l'intérêt dans le cadre de la théorie de l'intérêt simple doit s'effectuer en une seule fois à la fin de la durée à prendre en considération. Il n'est pas légitime de calculer la valeur acquise (V_n) à une date intermédiaire et de recommencer le calcul à partir de cette date et sur la base de cette valeur acquise : ce cas de figure est précisément celui de l'intérêt composé.

2. Temps réel et temps fictif.

On estime que l'unité de temps choisie peut être fractionnée en un nombre fini de périodes plus courtes. Ces périodes ne sont cependant pas toujours de durée égale, même si elles sont exprimées par les mêmes unités. Si la période considérée est l'année, le mois sera représenté par la fraction 1/12, quel que soit le mois ; le jour sera, quant à lui, représenté par la fraction 1/360 ou 1/365 selon que l'on prend pour référence respectivement l'année commerciale ou l'année civile.
En temps réel (correspondant à l'année civile), les jours sont comptés conformément au calendrier ; en temps fictif (correspondant à l'année commerciale), l'année de 360 jours comprend 12 mois de 30 jours. Le travail par jours nous offre donc 4 possibilités.

Application.

Calculer l'intérêt rapporté par 2000 € placés à 6 % l'an du 20 avril au 1er juillet de la même année.

Calcul du temps réel (nombre de jours).

avril	Mai	juin	juillet	Total
10	31	30	1	72

Calcul du temps fictif (nombre de jours).

avril	Mai	juin	juillet	Total
10	30	30	1	71

Calcul de l'intérêt en temps réel dans une année réelle.

I = 2000 . 0,06 . (72/365) = 23,67

Calcul de l'intérêt en temps réel dans une année fictive.

I = 2000 . 0,06 . (72/360) = 24

Calcul de l'intérêt en temps fictif dans une année fictive.

I = 2000 . 0,06 . (71/360) = 23,67

Calcul de l'intérêt en temps fictif dans une année réelle.

I = 2000 . 0,06 . (71/365) = 23,34

Curieusement la 1ère méthode, bien qu'elle soit la plus rationnelle, n'est pas la plus utilisée ; les organismes financiers ont coutume pour le calcul de l'intérêt qui leur est dû, d'utiliser le calcul du temps réel dans une année de référence fictive. Cette méthode est évidemment celle qui leur garantit la plus grande rémunération du capital.

Il n'est pas rare que des organismes financiers travaillent par quinzaine pour calculer l'intérêt dû aux épargnants. Dans ce cas, on enregistre les versements le 1er et le 16 de chaque mois ; chaque quinzaine représente u/24ème d'année.
Dans notre exemple, on calcule les quinzaines de la façon suivante :

avril	Mai	juin	juillet	Total
0	2	2	0	4

L'intérêt devient : I = 2000 € . 0,06 . (4/24) = 20.

On remarque que, à taux égal de 6 % l'an, la rémunération du capital est sensiblement plus basse.

3. L'utilisation de la table donnant le numéro de chaque jour à partir du 1er janvier.

Il n'est pas nécessaire de sommer les jours de chaque mois pour calculer la durée réelle. On peut en effet utiliser une table particulière. L'exemple 1 traite du cas où les 2 dates de référence appartiennent à la même année ; l'exemple 2 traite du cas où l'intervalle de temps considéré est à cheval sur 2 ans.

Exemple 1.

Calculer le nombre de jours écoulés entre le 25 février et le 20 août de la même année.

La table donne : 20 août = n° 232 et 25 février = n° 56
La différence 232 – 56 = 176 donne le nombre jours cherchés.

Exemple 2.

Calculer le nombre de jours écoulés entre le 15 novembre et le 16 mai de l'année suivante.

La table donne : 16 mai = n° 136 + 365 = 501 (il faut ajouter une année entière !) et 15 novembre = n° 319
La différence 501 – 319 = 182 donne le nombre de jours cherchés.

Remarque.

Lorsque l'année est bissextile, il convient d'ajouter un jour à la différence lorsque le 29 février est compris dans l'intervalle de temps qui nous intéresse.

<u>Tableau permettant de déterminant le n° de chaque jour de l'année à partir du 1er janvier.</u>

Jour du mois	**Numéro de chaque jour de l'année**												**Jour du mois**
	JAN	**FEV**	**MAR**	**AVR**	**MAI**	**JUN**	**JUL**	**AOU**	**SEP**	**OCT**	**NOV**	**DEC**	
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	…	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30	…	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31	…	90	…	151	…	212	243	…	304	…	365	31

4. L'escompte simple.

L'escompte est une forme très particulière de prêt. Il s'agit en réalité de la négociation de promesses de paiement ou traites (ou encore lettres de change) avant leur échéance. L'organisme financier qui acquiert les promesses de paiement les règles comptant mais retient un certain intérêt que l'on appelle l'escompte.
La théorie de l'intérêt simple permet aisément de calculer cet intérêt. La seule différence est que le capital à prendre en considération n'est pas le capital présent, ou la valeur actuelle de la traite, mais bien son nominal, sa valeur future.

Par définition, l'escompte sera donné par la formule : $E = C_n \,.\, n \,.\, e$

C_n représente la valeur nominale de la traite à négocier, donc sa valeur future ; n représente sa durée. Généralement l'unité choisie est l'année ; dans ce cas, si n est un nombre de jours, il sera exprimé en 1/360.
Le symbole e représente le coefficient de proportionnalité utilisé et porte le nom de taux d'escompte ; ce taux est généralement annuel. Ce dernier est toujours différent du taux d'intérêt, comme on va pouvoir le vérifier à l'aide d'un exemple.

Exemple 1.

Considérons une traite de 100.000 € échéant dans deux mois ; le taux d'escompte est de 9 % (il s'agit d'un taux annuel).

Valeur de l'escompte : E = 100.000 € . (2/12) . 0,09 = 1.500 € (chaque mois compte pour 1/12).

La valeur payée par la banque pour la traite est donc : 100.000 € - 1.500 € = 98.500 €.

Calculons à présent le taux d'intérêt réellement exigé par la banque : on sait que le capital de 98.500 € placé pendant 2 mois va rapporter 1.500 € ; on a :

I = 98.500 € . (2/12) . i = 1.500 €

On en tire : i = (1.500 € . 12) / (98.500 € . 2) = 0,0913

Le taux d'intérêt est donc de 9,13 %. Celui-ci dépend non seulement du taux d'escompte mais aussi de la durée.

Exemple 2.

Considérons à présent la même traite en ne modifiant que la date d'échéance. Soit donc une traite de 100.000 € échéant dans 8 mois ; le taux d'escompte est toujours de 9 %.

E = 100.000 € . (8/12) . 0,09 = 6.000 €

C_0 = 100.000 € - 6.000 € = 94.000 €

Du point de vue de la banque, un placement de 94.000 € va rapporter 6.000 € d'intérêts en 8 mois ; on a donc :

94.000 € . (8/12) . i = 6.000 € et i = 0,0957

Le taux d'intérêt est à présent de 9,57 %.

On remarque donc que le taux d'intérêt croît lorsque la période à considérer devient plus grande. Ce phénomène est dû au fait que l'on considère pour le calcul de l'escompte une valeur future plus éloignée dans le temps et donc plus éloignée de la valeur actuelle qui sert de base au calcul du taux d'intérêt.

Relation entre le taux d'escompte et le taux d'intérêt.

Les relations générales de l'escompte simple sont :

$E = C_n \,.\, n \,.\, e$
$C_0 = C_n - E = C_n - C_n \,.\, n \,.\, e = C_n \,.\, (1 - n \,.\, e)$

La relation de l'intérêt simple à utiliser est: $I = C_0 \,.\, n \,.\, i$

Il reste à constater que l'escompte payé par le client est l'intérêt perçu par la banque : I = E

La dernière relation devient alors : $E = C_0 \,.\, n \,.\, i$

En remplaçant E et C_0 par leurs valeurs, on obtient :

$C_n \,.\, n \,.\, e = C_n \,.\, (1 - n \,.\, e)$

Après simplification par C_n et par n, on a :

$i = e / (1 - n \,.\, e)$

Lorsque n tend vers 0 , i tend vers e ; lorsque n tend vers 1/e, i tend vers l'infini puisque le dénominateur tend vers 0 (ce qui suppose une grande valeur de n).
Lorsque n est supérieur à 1/n, le taux d'intérêt devient négatif, l'escompte est supérieur au nominal de la traite et, avec ce cas de figure, on entre totalement dans le domaine de l'absurde.

Utilisation du temps réel et du temps fictif.

On a supposé précédemment que le calcul de la durée peut se faire dans les 2 cas, escompte et intérêt, avec la même valeur. On va voir à présent que ce n'est pas toujours le cas si du moins on entend rester le plus près possible de la réalité.

Lorsque la durée se calcule en jours, on travaille toujours en temps réel dans une année fictive ; ce procédé permet un accroissement des revenus de l'organisme financier sans augmentation de taux. Prenons un exemple.

Une banque escompte le 22 septembre au taux annuel de 12 %, une traite de nominal 350.000 € échéant fin décembre.

Calcul du temps réel : 31 décembre = n° 365 et 22 septembre = n° 265 ; 365 – 265 = 100 jours

E = 350.000 € . 0,12 . (100/360) = 11.667 € (100 pour le temps réel et 360 pour l'année fictive !)

La traite est donc payée : 350.000 € - 11.667 € = 338.333 €

Calcul du taux d'intérêt : on a placé 338.333 € pendant 100 jours et l'intérêt est de 11.667 €.

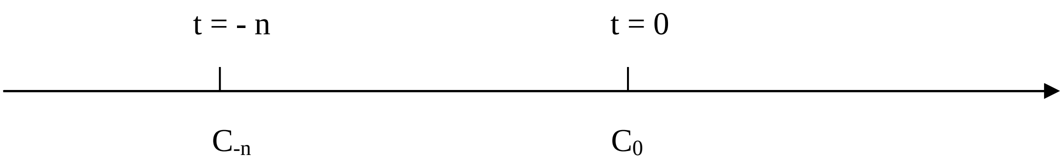
338.333 € . (100/365) . i = 11.667 $\Rightarrow$ i = 0,126 soit un taux de 12,6 %.

Pour le calcul du taux d'intérêt et afin de respecter au maximum la réalité, il est préférable de travailler dans une année réelle (d'où 100/365 : chaque jour est représenté par 1/365).

5. Notion d'actualisation.

Soit C_0 un capital en t = 0 ; soit i le taux d'intérêt du marché. Quelle était la valeur de ce capital il y a n périodes ?

L'actualisation rationnelle.



On peut considérer que le capital C_{-n} a été placé pendant n périodes au taux i ; il a alors acquis la valeur C_0. On peut appliquer les relations d'intérêt simple et on a :

$C_{-n} \cdot (1 + n \cdot i) = C_0$

$C_{-n} = C_0 / (1 + n \cdot i)$

Remarque : dans ce qui précède, n est toujours supposé positif et (-n) représente donc le passé.

L'actualisation commerciale.

t = - n   t = 0   t = n

$C_{-n} = C_0 - I$ C_0 $C_n = C_0 + I$

On peut considérer que le capital C_0 va produire pendant n périodes au taux i, un intérêt
$I = C_0 \,.\, n \,.\, i$.

On généralise la pratique de l'escompte et l'on considère que la valeur en t = -n est donnée par :

$C_{-n} = C_0 - I$
$C_{-n} = C_0 - C_0 \,.\, n \,.\, i$
$C_{-n} = C_0 \,.\, (1 - n \,.\, i) \Rightarrow C_0 = C_{-n} / (1 - n \,.\, i)$

Cette dernière relation est, aux notations près, la relation qui donne la valeur actuelle d'une traite escomptée.

Résumé et synthèse.

Pour des valeurs futures d'un capital, seule la formule d'intérêt simple est d'application. En résumé on a le tableau suivant :

	Actualisation rationnelle	Actualisation commerciale
Passé	$C_{-n} = C_0 / (1 + n \,.\, i)$	$C_{-n} = C_0 \,.\, (1 - n.\, i)$
Futur	$C_n = C_0 \,.\, (1 + n \,.\, i)$	$C_n = C_0 \,.\, (1 + n \,.\, i)$

Application.

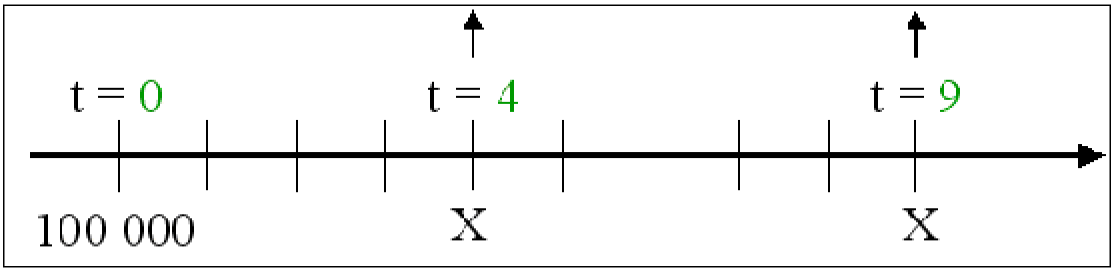
Un individu a contracté un emprunt de 100 000 € remboursable dans 10 mois; le taux annuel est de 12 %.

n	10 mois
i	12 % l'an $\Rightarrow$ 1 % / mois
C_{-10}	100.000 €
Actualisation rationnelle	$100.000 = C_0 / (1 + 10 \text{ x } 0,01) \Rightarrow C_0 = 100.000 \text{ x } (1,10) = 110.000$
Actualisation commerciale	$100.000 = C_0 \,.\, (1 - 10 \text{ x } 0,01) \Rightarrow C_0 = 100.000 / (0,90) = 111.111$

Seule l'actualisation commerciale, directement dérivée du calcul de l'escompte, est utilisée par les organismes financiers; si par rapport au futur, elle se confond avec la méthode rationnelle, il va de soi que, par rapport au passé (la question se pose alors selon les termes suivants : comment maximiser dans 10 mois un prêt consenti aujourd'hui à un client à un taux d’intérêt donné ?), c’est elle qui garantit la meilleure rentabilité des placements sous forme de prêt…

Utilisation des méthodes d'actualisation pour le calcul de remboursement d'emprunt.

Exemple.
Soit un emprunt de 100 000 contracté en t = 0. Il doit être remboursé en deux versements de même montant effectués respectivement à l'issue du 4^e et du 9^e mois et calculés sur base d'un intérêt simple de 0,8% par mois.



Principe de base : égalité des montants perçus et payés actualisés.

Dans le cadre de la théorie de l'intérêt simple, les résultats diffèrent si on change la méthode d'actualisation et aussi si on modifie le moment de l'actualisation.

Calcul par actualisation rationnelle en *t* = 0

$$\begin{aligned}100000 &= \frac{X}{1+4i}+\frac{X}{1+9i}\\ &= \frac{X}{1{,}032}+\frac{X}{1{,}072}\\ &= X\left(\frac{1}{1{,}032}+\frac{1}{1{,}072}\right)\end{aligned}$$

$$X=\frac{100000}{\frac{1}{1{,}032}+\frac{1}{1{,}072}}=52580{,}99$$

Calcul par actualisation commerciale en *t* = 0

$$\begin{aligned}100000 &= X(1-4i)+X(1-9i)\\ &= X(2-13i)\\ &= X(2-13\cdot 0{,}008)\\ &= X\cdot 1{,}896\end{aligned}$$

$$X=\frac{100000}{1{,}896}=52742{,}62$$

Calcul par actualisation en $t = 9$
Dans le futur, les deux méthodes se confondent

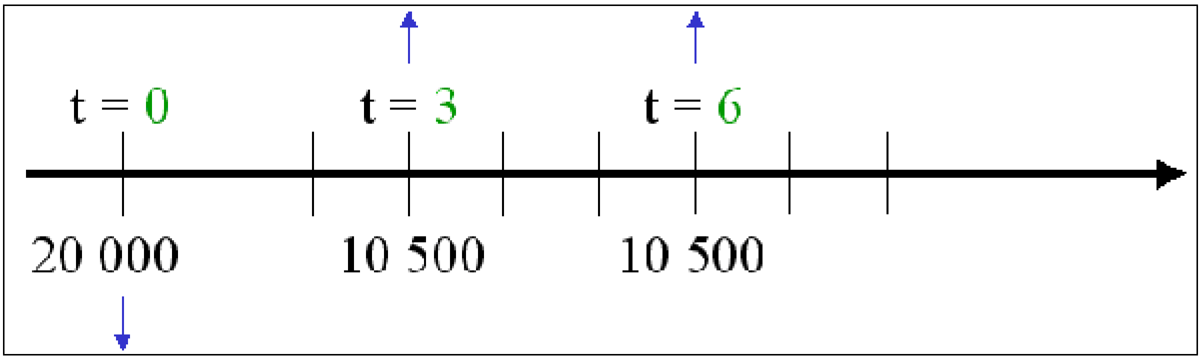
$$100000(1+9i) = X(1+5i) + X$$
$$= X(2+5I)$$
$$X = \frac{100000(1+9i)}{2+5i}$$
$$X = 52549{,}02$$

Calcul du taux de remboursement.

Ce calcul dépendra du type d'actualisation choisi et du moment d'actualisation.

Exemple.

Soit un emprunt de 20.000 € remboursable en deux versements de 10 500 échéant respectivement à l'issue des troisième et sixième mois.



- Mise en équation par actualisation commerciale en $t = 0$

$$20000 = 10500(1-3i) + 10500(1-6i)$$
$$1000 = 9 \cdot 10500 \cdot i$$
$$i = \frac{1000}{94500} = 0{,}010582$$

Il s'agit d'un taux mensuel !

- Mise en équation en fin de contrat

$$20000(1+6i) = 10500(1+3i) + 10500$$
$$(20000 \cdot 6 - 10500 \cdot 3)i = 1000$$
$$i = \frac{1000}{88500} = 0{,}0112994$$

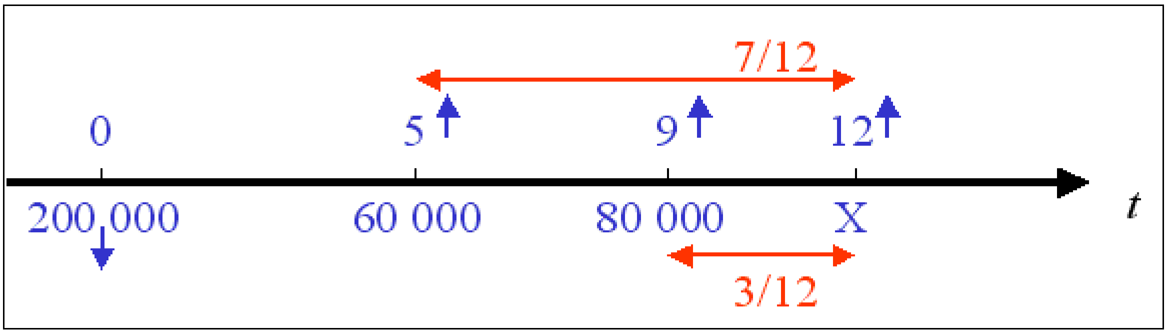
<u>Remboursements partiels d'une dette.</u>

Deux procédés sont possibles : ils sont illustrés par un exemple.

Soit une dette de 200 000 avec un intérêt de 5% l'an remboursable après un an. Le débiteur rembourse 60000 après 5 mois et 80 000 après 9 mois. Quelle est la somme due à l'échéance de la dette ?

<u>Première méthode.</u>

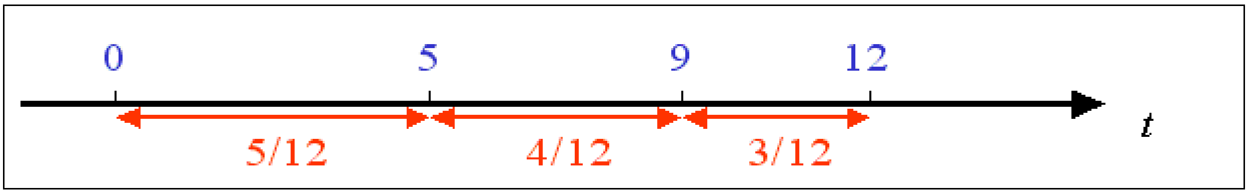
On capitalise, d'un côté le capital prêté et de l'autre, au même taux les versements anticipés.



$$200000(1+0{,}05) = 60000(1+0{,}05 \cdot 7/12) + 80000(1+0{,}05 \cdot 3/12) + X$$
$$X = 210000 - 142750 = 67250$$

<u>Deuxième méthode.</u>

A chaque paiement, l'intérêt dû est calculé. On déduit successivement les remboursements ; les intervalles de temps utiles sont les inter-versements.



Dette originale		200.000	
Intérêts après 5 mois	+	4.167,67	200.000 x 0,05 x (5/12)
Somme due après 5 mois	=	204.167,67	
Premier remboursement	-	60.000	
Solde restant dû	=	144.167,67	
Intérêts après 4 mois	+	2.402,79	144.167,67 x 0,05 x (4/12)
Somme due après 9 mois	=	146.570,46	
Second remboursement	-	80.000	
Solde restant dû	=	66.570,46	
Intérêts après 3 mois	+	832,13	66570,46 x 0,05 x (3/12)
Somme due après 12 mois	=	67.402,59	

Ce résultat est supérieur au premier. La 1ère méthode est plus avantageuse pour l'emprunteur ; elle est plus proche de la conception « intérêts simples » (ils sont calculés en une fois).

6. Equivalence des taux et des effets.

Notion de taux équivalents.

Soient des capitaux égaux placés pendant le même temps, mais avec périodes et des taux correspondants différents. Si ces capitaux donnent des valeurs acquises égales, on dit qu'ils sont placés à des taux équivalents.

Exemple :

Soient i = 6% un taux annuel, *im* le taux mensuel équivalent et *it* le taux trimestriel équivalent

$$C_0(1+0{,}06) = C_0(1+12i_m) = C_0(1+4i_t)$$

On en tire :

$0{,}06 = 12\ i_m = 4\ i_t$	
$i_m = 0{,}06/12 = 0{,}005$	$i_t = 0{,}06/4 = 0{,}015$

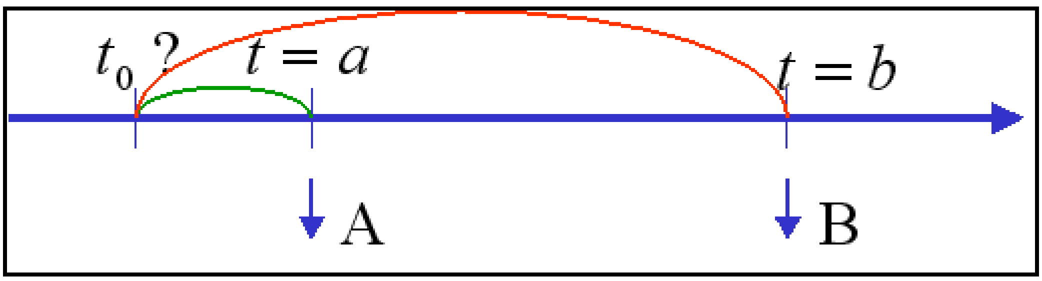
On observe que ces taux sont proportionnels à la durée des périodes.

$$\frac{i}{i_m} = \frac{12}{1} \qquad \frac{i}{i_t} = \frac{4}{1}$$

Dans le cas de l'intérêt simple, des taux équivalents sont proportionnels. Ce ne sera pas le cas lorsqu'on utilisera l'intérêt composé.

Equivalence de deux effets.

Soient deux capitaux A et B échéant respectivement en $t = a$ et $t = b$, placés au même taux i. Existe-t-il un moment t_0 où les valeurs actuelles des deux capitaux sont égales ?



$$A_{t_0} = A(1 - i(a - t_0))$$
$$B_{t_0} = B(1 - i(b - t_0))$$

<u>Egalons ces deux valeurs</u> :

$$A(1 - i(a - t_0)) = B(1 - i(b - t_0))$$
$$A - Aia + \underbrace{Ait_0} = B - Bib + \underbrace{Bit_0}$$

$$Bit_0 - Ait_0 = A - B + Bib - Aia$$
$$(B - A) \cdot i \cdot t_0 = A - B + i(Bb - Aa)$$

$$t_0 = \frac{A - B + i(Bb - Aa)}{i(B - A)}$$

Le moment t_0 est univoquement déterminé à condition que A et B soient différents. Au moment t_0, on dit que les <u>effets ou les capitaux sont équivalents</u>.

CHAPITRE II
INTERÊT SIMPLE ET ESCOMPTE SIMPLE

1. Définition et notation de l'intérêt simple.

La théorie de l'intérêt simple a pour objectif la description de l'évolution d'un capital dans le temps. L'existence d'un marché de capitaux jointe à l'érosion monétaire (l'argent perd de sa valeur d'échange) fait que la disposition pendant une certaine durée d'un capital doit être rémunérée. On dit alors que le capital produit un intérêt.

Il découle de cela que la valeur d'un capital sera toujours fonction de la période considérée ; par convention, on désignera la valeur actuelle d'un capital par la notation C_0. L'indice « 0 » indique simplement le présent, ou encore, en langage mathématique, le point t = 0.
Dans ce contexte, t = a (avec a positif) désignera le futur et t = -a (a positif) désignera le passé.

On conviendra encore que l'unité de temps peut être choisie arbitrairement, quel que soit le problème posé ; une fois cette unité choisie, tous les paramètres intervenant dans le problème devront être exprimés relativement à l'unité choisie. Selon les problèmes à envisager, on se référera tantôt à l'année comme unité de temps, tantôt au semestre, au mois, à la semaine, voire au jour.

Considérons à présent un nombre entier de période ; soit n ce nombre. La question qui se pose est la suivante : quelle sera la valeur du capital C_0 (le capital initial) après n périodes ? Cette valeur, notée C_n, sera en fait égale à C_0 augmenté de la valeur des intérêts produits ; on notera ces intérêts I_n.
En langage mathématique, on peut donc écrire : $C_n = C_0 + I_n$

La théorie de l'intérêt simple nous permet de déterminer I_n en fonction de 3 paramètres :

- Le capital initial, à savoir C_0
- La durée, notée n
- Un paramètre de proportionnalité, appelé taux d'intérêt, dont la notation classique est i. Par définition, i est défini pour la période de temps unité choisie ; si le temps est mesuré en années, i sera le taux annuel ; si le temps est mesuré en mois, i sera le taux mensuel,…

Ces éléments étant posés, on peut, en langage mathématique, définir l'intérêt de la manière suivante : $I_n = C_0 \cdot n \cdot i$

A partir de cette relation, on peut calculer C_n pour tout valeur naturelle de n ; on a :

$C_n = C_0 + I_n = C_0 \cdot (1 + n.i)$

<u>Remarque.</u>

Le calcul de l'intérêt dans le cadre de la théorie de l'intérêt simple doit s'effectuer en une seule fois à la fin de la durée à prendre en considération. Il n'est pas légitime de calculer la valeur acquise (V_n) à une date intermédiaire et de recommencer le calcul à partir de cette date et sur la base de cette valeur acquise : ce cas de figure est précisément celui de l'intérêt composé.

2. Temps réel et temps fictif.

On estime que l'unité de temps choisie peut être fractionnée en un nombre fini de périodes plus courtes. Ces périodes ne sont cependant pas toujours de durée égale, même si elles sont exprimées par les mêmes unités. Si la période considérée est l'année, le mois sera représenté par la fraction 1/12, quel que soit le mois ; le jour sera, quant à lui, représenté par la fraction 1/360 ou 1/365 selon que l'on prend pour référence respectivement l'année commerciale ou l'année civile.
En temps réel (correspondant à l'année civile), les jours sont comptés conformément au calendrier ; en temps fictif (correspondant à l'année commerciale), l'année de 360 jours comprend 12 mois de 30 jours. Le travail par jours nous offre donc 4 possibilités.

<u>Application.</u>

Calculer l'intérêt rapporté par 2000 € placés à 6 % l'an du 20 avril au 1er juillet de la même année.

<u>Calcul du temps réel (nombre de jours).</u>

avril	Mai	juin	juillet	Total
10	31	30	1	72

<u>Calcul du temps fictif (nombre de jours).</u>

avril	Mai	juin	juillet	Total
10	30	30	1	71

<u>Calcul de l'intérêt en temps réel dans une année réelle.</u>

I = 2000 . 0,06 . (72/365) = 23,67

<u>Calcul de l'intérêt en temps réel dans une année fictive.</u>

I = 2000 . 0,06 . (72/360) = 24

<u>Calcul de l'intérêt en temps fictif dans une année fictive.</u>

I = 2000 . 0,06 . (71/360) = 23,67

<u>Calcul de l'intérêt en temps fictif dans une année réelle.</u>

I = 2000 . 0,06 . (71/365) = 23,34

Curieusement la 1ère méthode, bien qu'elle soit la plus rationnelle, n'est pas la plus utilisée ; les organismes financiers ont coutume pour le calcul de l'intérêt qui leur est dû, d'utiliser le calcul du temps réel dans une année de référence fictive. Cette méthode est évidemment celle qui leur garantit la plus grande rémunération du capital.

Il n'est pas rare que des organismes financiers travaillent par quinzaine pour calculer l'intérêt dû aux épargnants. Dans ce cas, on enregistre les versements le 1er et le 16 de chaque mois ; chaque quinzaine représente u/24ème d'année.
Dans notre exemple, on calcule les quinzaines de la façon suivante :

avril	Mai	juin	juillet	Total
0	2	2	0	4

L'intérêt devient : I = 2000 € . 0,06 . (4/24) = 20.

On remarque que, à taux égal de 6 % l'an, la rémunération du capital est sensiblement plus basse.

3. L'utilisation de la table donnant le numéro de chaque jour à partir du 1er janvier.

Il n'est pas nécessaire de sommer les jours de chaque mois pour calculer la durée réelle. On peut en effet utiliser une table particulière. L'exemple 1 traite du cas où les 2 dates de référence appartiennent à la même année ; l'exemple 2 traite du cas où l'intervalle de temps considéré est à cheval sur 2 ans.

Exemple 1.

Calculer le nombre de jours écoulés entre le 25 février et le 20 août de la même année.

La table donne : 20 août = n° 232 et 25 février = n° 56
La différence 232 – 56 = 176 donne le nombre jours cherchés.

Exemple 2.

Calculer le nombre de jours écoulés entre le 15 novembre et le 16 mai de l'année suivante.

La table donne : 16 mai = n° 136 + 365 = 501 (il faut ajouter une année entière !) et 15 novembre = n° 319
La différence 501 – 319 = 182 donne le nombre de jours cherchés.

Remarque.

Lorsque l'année est bissextile, il convient d'ajouter un jour à la différence lorsque le 29 février est compris dans l'intervalle de temps qui nous intéresse.

Tableau permettant de déterminant le n° de chaque jour de l’année à partir du 1er janvier.

Jour du mois	**Numéro de chaque jour de l’année**												**Jour du mois**
	JAN	**FEV**	**MAR**	**AVR**	**MAI**	**JUN**	**JUL**	**AOU**	**SEP**	**OCT**	**NOV**	**DEC**	
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	…	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30	…	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31	…	90	…	151	…	212	243	…	304	…	365	31

L’escompte commercial.

L’escompte d’effets de commerce (lettres de change ou « traite », billets à ordre) consiste en une cession d’une créance à un établissement bancaire, cession qui sera opposable aux autres créanciers en cas d’ouverture d’une procédure collective.

Afin de bénéficier de cette possibilité, l’entreprise doit négocier avec ses banques des lignes d’escompte qui déterminent, pour chaque établissement, le montant maximum d’escompte autorisé. Ces lignes sont attribuées en fonction de l’activité, du risque global de l’entreprise, de la nature de son crédit client (durées de règlement, modes de règlement, risques), …

Procédure : l’entreprise remet à sa banque un bordereau accompagné des effets cédés ; la banque, après vérification, crédite le compte de l’entreprise du montant de la remise diminué des frais facturés. Si les effets ne sont pas impayés, l’opération est alors achevée. Sinon la banque débitera, après l’échéance, le compte de l’entreprise du montant des impayés.

Le coût de l’escompte se décompose en 2 parties : les agios et les commissions.

- Les agios sont calculés en fonction du montant de la remise, de la durée de chaque effet et du taux d’intérêt appliqué par la banque à l’entreprise. Par ailleurs les agios sont calculés sur la base d’une année de 360 jours. Ainsi, par exemple, si le taux facturé est de 30 %, pour une durée de 30 jours et un effet de 10.000 €, les agios s’élèvent à : 10.000 x 30 x (0,12 / 360) = 100 €.
- Aux agios, s’ajoutent diverses commissions : commission de service dont le montant dépend du support utilisé (le papier est plus onéreux que le magnétique) et, éventuellement, commission d’acceptation. Ces commissions sont soumises à la TVA.

Il n’est pas rare que les banques facturent un montant minimum forfaitaire d’agios par effet, afin de décourager les opérations portant sur des montants unitaires trop petits.

Aspects comptables.

1. **La création et l’acceptation d’une lettre de change.**

L’entreprise A tire une lettre de change de 5.000 € sur l’entreprise B qui l’accepte et la lui renvoie.

Chez le tireur A (tirage de la lettre de change), on écrit :

401	Effets à recevoir	5.000	
	A		
400	Clients		5.000

Chez le tiré B (acceptation de la lettre de change), on écrit :

440	Fournisseurs	5.000	
	A		
441	Effets à payer		5.000

2. **tirage au profit d’une troisième personne.**

L’entreprise A tire une lettre de change de 5.000 € sur l’entreprise B au profit de l’entreprise C ; B accepte la lettre de change, la remet à A qui, à son tour, la transfère à C.

Chez le tireur A, on écrit :

Tirage de la lettre de change.

401	Effets à recevoir	5.000	
	A		
400	Clients		5.000

Remise de la traite à C.

440	Fournisseurs	5.000	
	A		
401	Effets à recevoir		5.000

Risque d’encours-cédant (hors bilan).

010	Débiteurs pour engagements sur effets	5.000	
	A		
011	Créanciers d’engagements sur effets		5.000

Chez le tiré B (acceptation de la lettre de change), on écrit :

440	Fournisseurs	5.000	
	A		
441	Effets à payer		5.000

Chez le bénéficiaire C (réception de la traite) :

401	Effets à recevoir	5.000	
	A		
400	Clients		5.000

3. Endossement en règlement de dettes.

A, disposant d'une traite de 5.000 € en portefeuille, l'endosse au profit de l'entreprise B.

Chez l'endosseur A, on écrit :

Endossement de la traite.

440	Fournisseurs	5.000	
	A		
401	Effets à recevoir		5.000

Risque d'encours-cédant.

010	Débiteurs pour engagements sur effets	5.000	
	A		
011	Créanciers d'engagements sur effets		5.000

Chez l'endossataire B, on écrit :

401	Effets à recevoir	5.000	
	A		
400	Clients		5.000

4. Remise d'effet à l'escompte.

L'entreprise A, détentrice d'une traite de 20.000 €, la remet à l'escompte auprès de sa banque ; l'avis de crédit relatif à l'escompte est de 19.100 €. Il comprend une TVA sur frais d'encaissement de 20 €.

Chez l'endosseur A, on écrit :

Au moment de la facturation.

400	Clients	20.000	
	A		
700	Ventes		20.000

Au moment du tirage de la traite.

401	Effet à recevoir	20.000	
	A		
400	Clients		20.000

Remise à l'escompte.

4012	Effets à l'escompte	20.000	
	A		
401	Effets à recevoir		20.000

Avis de crédit.

550 411 653	Banques TVA à récupérer Charges d'escompte	19.100 20 880	
	A		
4012	Effets à l'escompte		20.000

Risque d'encours-cédant.

010	Débiteurs pour engagements sur effets	20.000	
	A		
011	Créanciers d'engagements sur effets		20.000

5. **Protêt d'un effet refusé à l'encaissement.**

L'entreprise A a tiré une traite de 20.000 € sur son client B qui l'a acceptée ; l'entreprise A a remis la traite à l'escompte auprès de sa banque. A l'échéance, la banque présente la traite au tiré qui refuse de payer : les frais bancaires et de protêt s'élèvent à 800 €.

Chez le tireur A :

Retour de l'effet impayé.

400 653	Clients Charges d'escompte	20.880 800	
	A		
550 759	Banques Produits financiers divers		20.800 880

400	Clients	800	
	A		
759	Produits financiers divers		800

Annulation du risque d'encours-cédant.

011	Créanciers d'engagements sur effets		20.000
	A		
010	Débiteurs pour engagements sur effets	20.000	

Chez le tiré :

441 659	Effets à payer Charges financières diverses	20.000 1.680*	
	A		
440	Fournisseurs		21.680

1680* = charges d'escompte supportées par le tireur + charges de protêt facturées par la banque au tireur.

A ce stade, le tireur peut soit passer la créance en créances douteuses (407) soit tirer une nouvelle traite.

Tirage d'une nouvelle traite.

Chez le tireur :

401	Effet à recevoir	21.680	
	A		
400	Clients		21.680

Chez le tiré :

440	Fournisseurs	21.680	
	A		
441	Effets à payer		21.680

ESCOMPTE RATIONNEL (OU « VRAI » ou « EN DEDANS »)
ET
ESCOMPTE COMMERCIAL (OU « EN DEHORS »)

L'ESCOMPTE RATIONNEL.

Quelle est la valeur actuelle C_0 du montant C_n arrivant à échéance au temps n (ou, en d'autres termes, quelle est la valeur escomptée de C_n le jour de la signature, soit au temps 0) ?

$$\mathbf{E_R = C_n - C_0}$$

$$\mathbf{C_n = C_0 \,.\, (1 + i.n) \Rightarrow C_0 = C_n / (1 + i.n)}$$

Application.

Déterminer la valeur actuelle rationnelle au taux d'actualisation simple de 8 % d'un effet de 250.000 €, échéant dans 6 mois, sachant que l'effet est remis à l'escompte le jour de sa signature. Quel est montant de l'escompte rationnel ?

C_n	250.000 €
n	6 / 12
i	0,08

C_0 = 250.000 / (1 + 0,08 x 6 / 12) = 250.000 / 1,04 = 240.384,62 €

E_R = 250.000 – 240.384,62 = 9615,38 €

L'ESCOMPTE COMMERCIAL.

Si d = taux d'escompte, l'escompte payé est égal au produit du montant de l'effet (sur lequel est calculé le taux d'escompte annuel) par le taux annuel d'escompte et par la durée jusqu'à l'échéance n.

$$\mathbf{E_C = C_n \,.\, d \,.\, n}$$

$$\mathbf{C_0 = C_n - E_c = C_n - C_n \,.\, d \,.\, n = C_n \,.\, (1 - d \,.\, n)}$$

Application.

Déterminer la valeur actuelle commerciale d'un effet de 250.000 €, échéant dans 6 mois, sachant que l'effet est remis à l'escompte le jour de sa signature et que le taux d'escompte est de 8 %. Quel est montant de l'escompte commercial ?

C_n	250.000 €
n	6 / 12
d	0,08

E_C = 250.000 x (0,08) x (6 / 12) = 10.000 €

C_0 = 250.000 – 10000 = 240.000 €

COMPTABILISATION.

Si on considère que dans l'un et l'autre cas les frais de commission s'élèvent à 1000 € HTVA de 21 % (210 €), on obtient les écritures suivantes :

Escompte rationnel :

550 411 653	Banques TVA à récupérer Charges d'escompte	239.174,62 210 10.615,38	
4012	Effets à l'escompte		250.000

Escompte commercial :

550 411 653	Banques TVA à récupérer Charges d'escompte	238.790 210 11.000	
4012	Effets à l'escompte		250.000

On comprend naturellement que les banques, quand elles escomptent des effets, utilisent l'escompte commercial plus avantageux en ce qui les concerne.

Remarque : depuis fin 1998, le taux d'escompte des banques centrales des pays membres ayant adopté la monnaie unique est remplacé par un taux d'intérêt qui est celui des dépôts pratiqué par la Banque Centrale Européenne ; pour la Belgique, ce taux est à majorer de 0,75 %. Le taux de la BCE était, fin 2003, de 1 %.

TAUX D'ESCOMPTE ET INTERET REEL.

Dans notre second exemple, on sait que la banque escompte une traite d'une valeur nominale de 250.000 E échéant dans 6 mois ; le taux d'escompte pratiqué est de 8 %. Compte tenu des agios payés et des frais de commission, quel est l'intérêt réel pratiqué par la banque.

Le client qui escompte la traite reçoit 238.790 € ; par ailleurs et abstraction faite de la TVA, il verse des agios et commissions pour un montant total de 11.000 €.

L'intérêt réel I perçu par la banque est : I = 238.790 . (6/12) . i = 11.000 €

On obtient : i = 11.000 / (238.790 x 6 / 12) = 11.000 / 119.395 = 0,09213 = 9,21 %

On remarque que le taux d'intérêt réel est plus élevé que le taux d'escompte.

EXERCICE.

Une entreprise escompte auprès de sa banque un effet de commerce d'une valeur nominale de 300.000 € ; la traite vient à échéance dans 6 mois. La banque pratique un taux d'escompte de 2 % ; les divers frais de commission s'élèvent à 2.000 € HTVA de 21 %.
Calculer, selon les méthodes de l'escompte rationnel et de l'escompte commercial, le montant de l'escompte et la valeur actuelle.
Dans le cas de l'escompte commercial, calculer le taux d'intérêt effectivement pratiqué par la banque.

Résolution.

Escompte rationnel.

C_0 = 300.000 / [1 + 0,02 x (6/12)] = 300.000 / (1 + 0,01) = 300.000 / 1,01 = 297.029,70 €

ER = 300.000 – 297.029,70 = 2.970,30

Escompte commercial.

EC =300.000 x [0,02 x (6/12)] = 3.000

C_0 = C_n – EC – TVA – frais = 300.000 – 3.000 – 420 – 2.000 = 294.580

Taux d'intérêt effectif pour l'escompte commercial.

294.580 x (6 / 12) x i = EC + frais

294.580 x 0,5 x i = 3.000 + 2.000 = 5.000

i = 5.000 / (294.580 x 0,5) = 5.000 / 147.290 = 0,0337 = 3,38 %

L'écriture comptable à passer par celui qui escompte la traite est la suivante :

550 411 653	Banques TVA à récupérer Charges d'escompte	294.580 420 5.000	
4012	Effets à l'escompte		300.000

APPLICATION METTANT EN ŒUVRE LES NOTIONS DE TEMPS REEL ET DE TEMPS FICTIF.

Soit une entreprise qui escompte, le 01 juillet 2004, auprès de sa banque une traite d'une valeur nominale de 20.000 € ; la traite vient à échéance le 28 décembre 2004. La banque pratique un taux d'escompte de 5 %. Les frais de commission s'élèvent à 1.000 € et sont soumis à une TVA de 21 %.
Calculer, selon les méthodes de l'escompte rationnel et de l'escompte commercial, le montant de l'escompte et la valeur actuelle.
Dans le cas de l'escompte commercial, calculer le taux d'intérêt effectivement pratiqué par la banque.
Utiliser dans les deux cas :

- Un temps réel dans une année réelle de 365 jours
- Un temps réel dans une année fictive de 360 jours.

<u>Temps réel dans une année réelle de 365 jours.</u>

Escompte rationnel.

$\mathbf{E_R = C_n - C_0}$

$\mathbf{C_n = C_0 \cdot (1 + i.n) \Rightarrow C_0 = C_n / (1 + i.n)}$

C_0 = 20.000 / [1 + (181/365)*0,05] = 20.000 / 1,024794521 = 19.516,11 €

E_R = 20.000 – 19.516,11 = 483,89 €

Escompte commercial.

$\mathbf{E_C = C_n \cdot d \cdot n}$

$\mathbf{C_0 = C_n - E_c = C_n - C_n \cdot d \cdot n = C_n \cdot (1 - d \cdot n)}$

E_c = 20.000 * 0,05 * (181/365) = 495,89 €

C_0 = 20.000 * [1 – 0,05 * (181/365)] – 1000 – 210 = 18.294,11 €

Taux d'intérêt effectif pour l'escompte commercial.

18.294,11 * (181/365) * i = 495,89 + 1000
i = 1495,89 / 9.573,082219 = 0,15626 = 15,63 %.

<u>Temps réel dans une année réelle de 360 jours.</u>

Escompte rationnel.

$$\mathbf{E_R = C_n - C_0}$$

$$\mathbf{C_n = C_0 \, . \, (1 + i.n) \Rightarrow C_0 = C_n \, / \, (1 + i.n)}$$

C_0 = 20.000 / [1 + (181/360)*0,05] = 20.000 / 1,025138889 = 19.509,55 €

E_R = 20.000 – 19.509,55 = 490,45 €

Escompte commercial.

$$\mathbf{E_C = C_n \, . \, d \, . \, n}$$

$$\mathbf{C_0 = C_n - E_c = C_n - C_n \, . \, d \, . \, n = C_n \, . \, (1 - d \, . \, n)}$$

E_c = 20.000 * 0,05 * (181/360) = 502,78 €

C_0 = 20.000 * [1 – 0,05 * (181/360)] – 1000 – 210 = 18.287,22 €

Taux d'intérêt effectif pour l'escompte commercial.

18.287,22 * (181/360) * i = 502,78 + 1000
i = 1502,78 / 9194,407833 = 0,163445 = 16,34 %.

SYNTHESE.

	Temps réel & année réelle	**Temps réel & année fictive**
	Escompte rationnel	
Escompte rationnel	483,89 €	490,45 €
Valeur actuelle	19.516,11 €	19.509,55 €
	Escompte commercial	
Escompte commercial	495,89 €	502,78 €
Valeur actuelle	18.294,11 €	18.287,22 €
Intérêt effectif	15,63 %	16,34 %

EXERCICE.

Soit une entreprise qui escompte, le 20 avril 2004, auprès de sa banque une traite d'une valeur nominale de 40.000 € ; la traite vient à échéance le 26 novembre 2004. La banque pratique un taux d'escompte de 4 %. Les frais de commission s'élèvent à 2.000 € et sont soumis à une TVA de 21 %.
Calculer, selon les méthodes de l'escompte rationnel et de l'escompte commercial, le montant de l'escompte et la valeur actuelle.
Dans le cas de l'escompte commercial, calculer le taux d'intérêt effectivement pratiqué par la banque.
<u>Utiliser dans les deux cas</u> :

- Un temps réel dans une année réelle de 365 jours
- Un temps réel dans une année fictive de 360 jours.

LES TAUX D'INTERÊT EQUIVALENTS.

LA CAPITALISATION A INTERÊT SIMPLE.

Soit i le taux d'intérêt annuel simple versé sur un capital C_0. On remplace cet intérêt simple annuel par un intérêt simple calculé au taux $j_{(m)}$ / m à la fin des m sous-périodes égales comprises dans une année ; les taux sont équivalents si au terme de n années :

$$\mathbf{C_0 \cdot (1 + i \cdot n) = C_0 \cdot [\, 1 + (j_{(m)} \cdot n \cdot m) / m] \Rightarrow j_{(m)} / m = i / m}$$

<u>Exemple.</u>

Quel est le taux quadrimestriel équivalent au taux annuel de 6 %. La capitalisation se réalise à intérêt simple à la fin de chaque quadrimestre.

J(3) / 3 = i / 3 = 0,06 / 3 = 0,02 ou 2 %.

LA CAPITALISATION A INTERÊT COMPOSE.

Si i est le taux annuel d'intérêt composé versé sur un capital C_0 et si on remplace cet intérêt par un intérêt capitalisé au taux $j_{(m)}$ / m à la fin de chacune des m sous-périodes égales comprises dans une année, on obtient l'égalité :

$$\mathbf{C_0 \cdot (1 + i)^n = C_0 \cdot [\, 1 + j_{(m)} ./ m]^{n \cdot m} \Rightarrow 1 + i = (1 + j_{(m)} / m)^m \Rightarrow i = (1 + j_{(m)} / m)^m - 1}$$

<u>Exemple 1.</u>

Déterminer la valeur acquise au bout d'une année par 200.000 € au taux de :

- 8 % capitalisé trimestriellement
- 8,243 % capitalisé annuellement

(a) : C1 = 200.000 x $(1{,}02)^4$ = 216.486 €
(b) : C1 = 200.000 x (1 + 0,08243) = 216.486 €

<u>Exemple 2.</u>

Déterminer le taux annuel i équivalent au taux nominal annuel de 7 % capitalisé

- Semestriellement
- Mensuellement
- Bimensuellement
- Quotidiennement (1 année = 360 jours)

$$\mathbf{i = (1 + j_{(m)} / m)^m - 1 \text{ et } j_{(m)} = 0{,}07}$$

	m	i
(a)	2	7,123
(b)	12	7,229
(c)	24	7,240
(d)	360	7,250

Exemple 3.

Calculer le taux d'intérêt nominal $j_{(m)}$ capitalisé

- Semestriellement
- Mensuellement
- Bimensuellement
- Quotidiennement (1 année = 360 jours)

Qui est équivalent au taux annuel réel de 7 %.

$$\mathbf{j_{(m)} = m \, . \, [\, (1 + i)^{1/m} - 1 \,]}$$

	m	**i**
(a)	2	6,882 %
(b)	12	6,785 %
(c)	24	6,775 %
(d)	360	6,767 %

EXERCICES.

Déterminer le taux annuel i équivalent au taux nominal annuel de 8 % capitalisé

- Semestriellement
- Mensuellement
- Bimensuellement
- Quotidiennement (1 année = 360 jours)

Calculer le taux d'intérêt nominal $j_{(m)}$ capitalisé

- Semestriellement
- Mensuellement
- Bimensuellement
- Quotidiennement (1 année = 360 jours)

Qui est équivalent au taux annuel réel de 8 %.

L'UTILISATION DES LOGARITHMES.

Le recours aux logarithmes permet de donner la valeur d'une inconnue figurant en exposant dans une formule de mathématiques financières ; cette inconnue exprime le plus généralement une durée.
Le principe de calcul repose sur une propriété essentielle des logarithmes :

$$\mathbf{Log\ X^T = T\ .\ Log\ X}$$

Application n° 1.

Pendant combien d'années faut-il placer 10.000 € au taux annuel constant de 5 % pour obtenir, à la fin du placement, la somme de 15.000 €.

$$VA = VF_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \Rightarrow (1+i)^t = VF_t / VA \Rightarrow \text{Log}\ [(1+i)^t] = \text{Log}\ [VF_t / VA]$$

$$t * \text{Log}\ (1+i) = \text{Log}\ (VF_t / VA) \Rightarrow t = \text{Log}\ (VF_t / VA) / \text{Log}\ (1+i)$$

$$t = \text{Log}\ (15.000 / 10.000) / \text{Log}\ (1 + 0,05) = \text{Log}\ (1,5) / \text{Log}\ (1,05)$$

$$t = 0,176091259 / 0,021189299 = 8,31 \text{ années.}$$

<u>Vérification</u> : $VF_t = VA\ (1+i)^t \Rightarrow VF_t = 10.000 * (1 + 0,05)^{8,31} = 14.999,71$ €

Application n° 2.

Pendant combien d'années faut-il placer 10.000 € chaque année au taux annuel constant de 5 % pour obtenir, au terme du placement, la somme de 50.000 € ?

$$VF_t = A \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \Rightarrow (1+i)^t - 1 = (VF_t * i) / A \Rightarrow (1+i)^t = [(VF_t * i) / A] + 1$$

$$\text{Log}\ (1+i)^t = \text{Log}\ [(VF_t * i) / A + 1] \Rightarrow t * \text{Log}\ (1+i) = \text{Log}\ [(VF_t * i) / A + 1]$$

$$t = \frac{\text{Log}\ [(VF_t * i) / A + 1]}{\text{Log}\ (1+i)}$$

$$t = \text{Log}\ [\ (50.000 * 0,05) / 10.000 + 1] / \text{Log}\ (1 + 0,05)$$

$$t = \text{Log}\ (1,25) / \text{Log}\ (1,05) = 0,096910013 / 0,021189299 = 4,574 \text{ années.}$$

<u>Vérification</u> : $VF_t = A \cdot \frac{(1+i)^t}{i} \Rightarrow 10.000 * [(1 + 0,05)^{4,574} - 1] / 0,05 = 50.005,66$ €

EXERCICES.

Exercice n° 1.

Pendant combien d'années faut-il placer, au taux annuel constant de 4 %, une somme de 5.000 € pour disposer, au terme du placement, d'une somme de 20.000 € ?

Exercice n° 2.

Pendant combien d'années faut-il placer chaque année la somme de 5.000 €, au taux annuel constant de 4 %, pour disposer, au terme du placement, d'une somme de 20.000 € ?

Application n° 3.

Pendant combien d'années devrai-je rembourser, par annuité constante de 10.000 €, un emprunt de 80.000 € au taux d'emprunt annuel constant de 5 % ?

$$A = VA \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

$$\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t} = \frac{VA}{A} \cdot i \Rightarrow \frac{(1+i)^t}{(1+i)^t} - \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{VA}{A} \cdot i \Rightarrow 1 - \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{VA}{A} \cdot i$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(1+i)^t} = \frac{VA}{A} \cdot i - 1 \Rightarrow \frac{1}{(1+i)^t} = 1 - \frac{VA}{A} \cdot i$$

$\text{Log}\,[1 / (1+i)^t] = \text{Log}\,[1 - (VA/A) \cdot i] \Rightarrow \text{Log}\,1 - \text{Log}\,(1+i)^t = \text{Log}\,[1 - (VA/A) \cdot i]$

$0 - t \cdot \text{Log}\,(1 + 0{,}05) = \text{Log}\,[1 - (80.000 / 10.000) \cdot 0{,}05]$

$- t \cdot \text{Log}\,(1{,}05) = \text{Log}\,(1 - 0{,}4) \Rightarrow -t \cdot (0{,}021189299) = -0{,}221848749$

$t = 0{,}221848749 / 0{,}021189299 = 10{,}4698$ années.

<u>**Vérification**</u> **:**

$$A = VA \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1} \Rightarrow 80.000 \cdot \frac{0{,}05 \cdot (1{,}05)^{10{,}4698}}{(1{,}05)^{10{,}4698} - 1} = 80.000 \cdot \frac{0{,}083333136}{0{,}666662728}$$

A = 10.000, 04 €.

<u>Remarque</u> : *la durée pourrait également être déterminée en utilisant l'interpolation linéaire.*

TAUX EQUIVALENTS : RESOLUTION DES EXERCICES.

Exercice n° 1.

$i = (1 + j_{(m)} / m)^m - 1$ et $j_{(m)} = 0,08$

	m	i
(a)	2	$[1 + (0,08 / 2)]^2 - 1 = 0,0816 = 8,16$ %
(b)	12	$[1 + (0,08 / 12)]^{12} - 1 = 0,08299950 = 8,30$ %
(c)	24	$[1 + (0,08 / 24)]^{24} - 1 = 0,0831422958 = 8,31$ %
(d)	360	$[1 + (0,08 / 360)]^{360} - 1 = 0,083277431 = 8,33$ %

Exercice n° 2.

$j_{(m)} = m \, . \, [(1 + i)^{1/m} - 1]$, $i = 0,08$

	m	i
(a)	2	$2 \times [(1 + 0,08)^{1/2} - 1] = 2 \times [(1 + 0,08)^{0,5} - 1] = 0,078460 = 7,85$ %
(b)	12	$12 \times [(1 + 0,08)^{1/12} - 1] = 12 \times [(1 + 0,08)^{0,08333} - 1] = 0,07720 = 7,72$ %
(c)	24	$24 \times [(1 + 0,08)^{1/24} - 1] = 24 \times [(1 + 0,08)^{0,041666} - 1] = 0,07708 = 7,71$ %
(d)	360	$360 \times [(1 + 0,08)^{1/360} - 1] = 360 \times [(1 + 0,08)^{0,00277} - 1] = 0,07694 = 7,69$ %

ASSURFINANCE.COM

Sur le site Internet « assurfinance.com », on trouve les informations suivantes :

Le **Taux Annuel Effectif Global** est le taux auquel se réfère la loi.

- Il doit impérativement comprendre non seulement le taux mensuel mais en **plus tout autre frais** qui se grèverait par obligation sur le crédit... c'est donc le seul point de comparaison objectif entre 2 offres de crédit.
- Pour calculer une mensualité avec le TAEG, on doit disposer de la table correspondante...
- Hors du TAEG, les frais de dossiers sont interdits par la loi en Belgique.

Coefficient à appliquer pour 1.000 EUR empruntés

TAEG	30 mois	36 mois	42 mois	48 mois	60 mois
5.0 %	35.48 €	29.92 €	25.95 €	22.97 €	18.82 €
5.5 %	35.69 €	30.13 €	26.16 €	23.19 €	19.03 €
6.0 %	35.90 €	30.35 €	26.38 €	23.41 €	19.25 €
6.5 %	36.12 €	30.56 €	26.60 €	23.62 €	19.47 €
7.0 %	36.33 €	30.77 €	26.81 €	23.84 €	19.70 €
8.0 %	36.76 €	31.20 €	27.24 €	24.28 €	20.14 €
9.0 %	37.18 €	31.63 €	27.68 €	24.70 €	20.58 €
10 %	37.61 €	32.06 €	28.11 €	25.15 €	21.03 €

exemple : un financement de 14.500 EUR se remboursera en 60 mois
en 19.03 X 14.5 = **275.94** EUR avec un TAEG de **5.50** %.

Exemple de correspondance taux mensuel / TAEG.

(approximation)

Taux/mois	24 mois	30 mois	36 mois	48 mois	60 mois
0.23	5.25	5.25	5.25	5.25	5.25
0.27	6.28	6.28	6.30	6.27	6.25
0.30	6.98	6.99	7.00	6.96	6.93
0.36	8.40	8.39	8.40	8.33	8.28
0.46	10.76	10.75	10.73	10.62	10.52

Si on se sert de notre formule d'actualisation pour le remboursement, en 36 mensualités, d'un emprunt de 1000 € par annuités (ou mensualités) constantes, on obtient une mensualité sensiblement différente :

$$\mathbf{A = VA \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}}$$

$$\text{Mensualité} = 1000\,€ \cdot \frac{0{,}003 \cdot (1+0{,}003)^{36}}{(1+0{,}003)^{36} - 1} = 29{,}35\,€$$

Cette mensualité est légèrement inférieure à la mensualité annoncée de 30,77 €. L'impact pour des montants empruntés nettement supérieurs est évidemment directement proportionnel.

Le taux mensuel présenté dans la table de conversion est en réalité un taux de chargement calculé sur base du montant total de l'emprunt. Ainsi on obtient pour notre exemple :

$$\mathbf{A = \frac{VA}{T} + VA \cdot R_M}$$

A	Annuité
VA	Montant emprunté
T	Nombre de périodes
R_M	Taux de chargement annuel

$$\text{Mensualité} = \frac{1000}{36} + 1000 \times (0{,}003) = 27{,}77 + 3 = 30{,}77\,€$$

Le taux annuel réel est de 6,77 % ; soit un taux mensuel de 0,5642 %.

<u>Vérification.</u>

$$\text{Mensualité} = 1000 \times \frac{0{,}005642 \cdot (1+0{,}005642)^{36}}{(1+0{,}005642)^{36} - 1} = 30{,}77\,€$$

Tableau comparatif.

Echéances	Taux de chargement mensuel de 0,3 %			Taux mensuel de 0,5642 %		
	Mensualité	Capital	Intérêts	Mensualité	Capital	Intérêts
1	30,77	27,77	3	30,77	25,13	5,64
2	30,77	27,77	3	30,77	25,27	5,50
3	30,77	27,77	3	30,77	25,41	5,36
4	30,77	27,77	3	30,77	25,56	5,21
5	30,77	27,77	3	30,77	25,70	5,07
6	30,77	27,77	3	30,77	25,85	4,92
7	30,77	27,77	3	30,77	25,99	4,78
8	30,77	27,77	3	30,77	26,14	4,63
9	30,77	27,77	3	30,77	26,29	4,48
10	30,77	27,77	3	30,77	26,44	4,34
11	30,77	27,77	3	30,77	26,58	4,19
12	30,77	27,77	3	30,77	26,73	4,04
13	30,77	27,77	3	30,77	26,89	3,89
14	30,77	27,77	3	30,77	27,04	3,73
15	30,77	27,77	3	30,77	27,19	3,58
16	30,77	27,77	3	30,77	27,34	3,43
17	30,77	27,77	3	30,77	27,50	3,27
18	30,77	27,77	3	30,77	27,65	3,12
19	30,77	27,77	3	30,77	27,81	2,96
20	30,77	27,77	3	30,77	27,97	2,81
21	30,77	27,77	3	30,77	28,12	2,65
22	30,77	27,77	3	30,77	28,28	2,49
23	30,77	27,77	3	30,77	28,44	2,33
24	30,77	27,77	3	30,77	28,60	2,17
25	30,77	27,77	3	30,77	28,76	2,01
26	30,77	27,77	3	30,77	28,93	1,85
27	30,77	27,77	3	30,77	29,09	1,68
28	30,77	27,77	3	30,77	29,25	1,52
29	30,77	27,77	3	30,77	29,42	1,35
30	30,77	27,77	3	30,77	29,58	1,19
31	30,77	27,77	3	30,77	29,75	1,02
32	30,77	27,77	3	30,77	29,92	0,85
33	30,77	27,77	3	30,77	30,09	0,68
34	30,77	27,77	3	30,77	30,26	0,51
35	30,77	27,77	3	30,77	30,43	0,34
36	30,77	27,77	3	30,77	30,60	0,17

On perçoit d'emblée l'importance du taux d'intérêt retenu pour la comptabilisation des charges financières au débit du compte de résultats ; il convient en outre d'apprécier cette importance à la lumière de la possibilité offerte par le législateur aux entreprises d'incorporer sous certaines conditions les charges financières au coût de l'immobilisation (in)corporelle acquise au moyen du financement. Les normes comptables internationales (norme IAS23), qui devraient être en vigueur chez dans les prochaines années, prévoient en outre une extension de ces conditions ainsi que la possibilité d'incorporer les autres frais liés à l'emprunt.

Les écritures comptables.

Acquisition, le 01/01/2002, d'une machine pour un montant de 1.000.000 € ; l'acquisition est financée au moyen d'un emprunt remboursable en 4 annuités payables le 31/12 ; le taux d'intérêt est de 8 %.

Calcul de l'annuité constante.

$$A = VA \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}$$

$$A = 1.000.000 \times \frac{0,08 \times (1 + 0,08)^4}{(1 + 0,08)^4 - 1} = 301.920,80\ €$$

Année	Annuité	Capital	Intérêts	Solde dû
1	301.920,80	221.920,80	80.000	778.079,20
2	301.920,80	239.674,46	62.246,34	538.404,74
3	301.920,80	258.848,42	43.072,38	279.556,32
4	301.920,80	279.556,32	22.364,51	0

01/01/2002	**Acquisition d'une machine pour 1.000.000 €**		
230	I.M.O.	1.000.000	
	A		
173 430	Etablissements de crédit (LT) Etablissements de crédit (CT)		778.079,20 221.920,80

31/12/2002	**Remboursement du capital pour 221.920,80 € et paiement d'intérêts pour 80.000 €**		
430 650	Etablissements de crédit (CT) Charges financières	221.920,80 80.000	
	A		
550	Banques		301.920,80

31/12/2002	**Reclassement de la dette LT en dette CT pour 239.674,46 €**		
173	Etablissements de crédit (LT)	239.674,46	
	A		
430	Etablissements de crédit (CT)		239.674,46

En prenant le taux de chargement comme base pour le calcul des intérêts.

Année	Annuité	Capital	Intérêts	Solde dû
1	301.920,80	250.000	51.920,80	750.000
2	301.920,80	250.000	51.920,80	500.000
3	301.920,80	250.000	51.920,80	250.000
4	301.920,80	250.000	51.920,80	0

On obtient un taux annuel de chargement de 5,1921 %, largement inférieur évidemment aux taux annuel initial de 8 %.
On remarque en outre que les charges financières (650) portées au débit du compte de résultats sont largement inférieures durant les deux premières années ; la méthode contribue naturellement à « l'embellissement » provisoire du bénéfice comptable.
Le législateur recommande d'utiliser le taux légal ; si le TAEG comprend, outre les intérêts, toutes les charges afférentes aux dettes financières (lesquelles doivent être portées au débit du compte 650), le recours au TAEG soulève néanmoins, au regard du droit belge, une difficulté puisque le droit belge autorise les entreprises à incorporer, sous certaines conditions, les intérêts dans le coût de l'immobilisation mais pas les frais afférents.

On trouve par ailleurs sur ce même site les informations suivantes :

Le taux mensuel était utilisé avant l'entrée en vigueur de la loi sur le crédit à la consommation...

C' est le taux appliqué mensuellement au crédit.

L'avantage du taux mensuel est qu'il permettait de calculer facilement la mensualité. Ce calcul est le même pour toutes les banques...

Malheureusement, maintenant, la loi oblige de parler en Taux Annuel Effectif Global ou TAEG qui ne peut être calculer qu' avec des tables de conversion...

Calcul de la mensualité au départ du taux mensuel.

((montant emprunté x nombre de mois x taux mensuel) /100) = intérêts
(intérêts + montant emprunté) / nombre de mois = montant à rembourser par mois

Les indépendants ne sont pas nécessairement soumis à la loi sur le crédit à la consommation... nous avons donc laissé la calculette du site sans contrôle... mais attention:

- ne jamais introduire en dessous de 100.000frs.
- ne pas dépasser les limites en nombre de mois autorisé (sauf indépendant).

Cette annonce confirme bien que le taux mensuel utilisé dans les tables de conversion est un taux de chargement. Cette annonce nous indique par ailleurs l'une des principales limites du TAEG : les indépendants ne sont pas nécessairement soumis à cette loi sur le crédit à la consommation. Cette restriction autorise naturellement l'organisme financier concerné à laisser « sans contrôle » sa calculette à la disposition de tous les consommateurs.

Taux de chargement, taux réel et approximation légale.

Le législateur fournit une formule qui permet de déterminer, par approximation, le taux réel quand on dispose du taux mensuel de chargement et du nombre de remboursements.

$$\mathbf{i = \frac{r \,.\, 24 \,.\, n}{n + 1}}$$

i	Taux réel
r	Taux mensuel de chargement
n	Durée ou nombre d'échéances

Il existe une autre formule qui permet de déterminer le taux réel à partir du taux mensuel de chargement et du nombre d'échéances ; les résultats, légèrement différents de ceux obtenus par la méthode légale, sont naturellement plus corrects.

$$\mathbf{i = \left(\frac{1}{n} + r\right) . \left(1 - (1 + i)^{-n}\right)}$$

les valeurs de i, n et r sont les mêmes que pour la formule légale d'approximation. Les conversions entre les différents taux font l'objet de tables dont un exemple est donné en annexe.

Application.

Calculer le taux réel et le taux approximatif d'un emprunt de 10.000 € remboursables en 36 annuités constantes au taux de chargement mensuel de 0,5 %.

<u>Taux approximatif.</u>

$$I = \frac{0{,}005 \text{ x } 24 \text{ x } 36}{36 + 1} = 0{,}1168 \text{ , soit } 11{,}68\ \%.$$

<u>Taux réel.</u>

$$i = \left(\frac{1}{36} + 0{,}005\right) \text{ x } \left(1 - \frac{1}{(1 + i)^{36}}\right) = 0{,}0328 \text{ x } \left(1 - \frac{1}{(1 + i)^{36}}\right)$$

$\Rightarrow \quad 0{,}0328 \text{ x } \left(1 - \frac{1}{(1 + i)^{36}}\right) - i = 0$ $\quad \Rightarrow$ <u>solution par interpolation linéaire</u> !!!

ASSURFINANCE.COM

Type de financement :	**Achat voiture neuve**
Montant à financer :	**24.000,00 €**

# remboursements :	**24**	**36**	**48**	**60**
Mensualité	1049,66	716,04	549,43	449,59
Taux mensuel chargem.	0,21	0,21	0,21	0,21
TAEG (AssurFinance)	4,8	4,8	4,8	4,8
TAEG (méthode légale)	4,84	4,9	4,94	4,96
Taux annuel	4,70%	4,70%	4,70%	4,70%

Utilisation de la fonction TAUX dans MS EXCEL

Application : remboursement en 24 mensualités

	Mensuel	**Annuel**
Taux :	0,0039	0,0468

Méthode du coût actuariel

Termes	**Mens. Act.**
1	1.045,58 €
2	1.041,52 €
3	1.037,47 €
4	1.033,44 €
5	1.029,43 €
6	1.025,43 €
7	1.021,45 €
8	1.017,48 €
9	1.013,53 €
10	1.009,59 €
11	1.005,67 €
12	1.001,76 €
13	997,87 €
14	993,99 €
15	990,13 €
16	986,28 €
17	982,45 €
18	978,63 €
19	974,83 €
20	971,05 €
21	967,27 €
22	963,52 €
23	959,77 €
24	956,04 €
Total :	**24.004,18 €**

Total : **24.004,18 €**

Méthode rigoureuse

Données

i (mensuel !)	0,0039
n	24
r	0,0021

i = ((1 / n) + r) * (1 - (1 + i)exp - n)

((1 / n) + r) * (1 - (1 + i)exp - n) - i = 0

0,000003

la valeur obtenue en faisant varier i (F23) doit être la plus proche possible de 0

La somme des mensualités actualisées en utilisant le taux mensuel (E15) comme taux d'actualisation doit être égale au montant emprunté de 24000 €

Calcul du taux de chargement mensuel :

Montant de la mensualité	**Capital**	**Intérêts**
1.049,66 €	1.000,00 €	49,66 €

49,66 = 0,21 % du montant emprunté de 24000 €

TAUX MENSUEL DE CHARGEMENT & TAUX ANNUEL REEL

Sur le site Internet « assurfinance.com », on trouve les informations suivantes :

Le **Taux Annuel Effectif Global** est le taux auquel se réfère la loi.

- Il doit impérativement comprendre non seulement le taux mensuel mais en **plus tout autre frais** qui se grèverait par obligation sur le crédit... c'est donc le seul point de comparaison objectif entre 2 offres de crédit.
- Pour calculer une mensualité avec le TAEG, on doit disposer de la table correspondante...
- Hors du TAEG, les frais de dossiers sont interdits par la loi en Belgique.

Coefficient à appliquer pour 1.000 EUR empruntés

TAEG	30 mois	36 mois	42 mois	48 mois	60 mois
5.0 %	35.48 €	29.92 €	25.95 €	22.97 €	18.82 €
5.5 %	35.69 €	30.13 €	26.16 €	23.19 €	19.03 €
6.0 %	35.90 €	30.35 €	26.38 €	23.41 €	19.25 €
6.5 %	36.12 €	30.56 €	26.60 €	23.62 €	19.47 €
7.0 %	36.33 €	30.77 €	26.81 €	23.84 €	19.70 €
8.0 %	36.76 €	31.20 €	27.24 €	24.28 €	20.14 €
9.0 %	37.18 €	31.63 €	27.68 €	24.70 €	20.58 €
10 %	37.61 €	32.06 €	28.11 €	25.15 €	21.03 €

exemple : un financement de 14.500 EUR se remboursera en 60 mois
en 19.03 X 14.5 = **275.94** EUR avec un TAEG de **5.50** %.

Exemple de correspondance taux mensuel / TAEG.

(approximation)

Taux/mois	24 mois	30 mois	36 mois	48 mois	60 mois
0.23	5.25	5.25	5.25	5.25	5.25
0.27	6.28	6.28	6.30	6.27	6.25
0.30	6.98	6.99	7.00	6.96	6.93
0.36	8.40	8.39	8.40	8.33	8.28
0.46	10.76	10.75	10.73	10.62	10.52

Si on se sert de notre formule d'actualisation pour le remboursement, en 36 mensualités, d'un emprunt de 1000 € par annuités (ou mensualités) constantes, on obtient une mensualité sensiblement différente :

$$\mathbf{A = VA \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}$$

$$\text{Mensualité} = 1000\ € \cdot \frac{0{,}003 \cdot (1 + 0{,}003)^{36}}{(1 + 0{,}003)^{36} - 1} = 29{,}35\ €$$

Cette mensualité est légèrement inférieure à la mensualité annoncée de 30,77 €. L'impact pour des montants empruntés nettement supérieurs est évidemment directement proportionnel.

Le taux mensuel présenté dans la table de conversion est en réalité un taux de chargement calculé sur base du montant total de l'emprunt. Ainsi on obtient pour notre exemple :

$$\mathbf{A = \frac{VA}{T} + VA \cdot R_M}$$

A	Annuité
VA	Montant emprunté
T	Nombre de périodes
R_M	Taux de chargement annuel

$$\text{Mensualité} = \frac{1000}{36} + 1000 \times (0{,}003) = 27{,}77 + 3 = 30{,}77\ €$$

Le taux annuel réel est de 6,77 % ; soit un taux mensuel de 0,5642 %.

<u>Vérification.</u>

$$\text{Mensualité} = 1000 \times \frac{0{,}005642 \cdot (1 + 0{,}005642)^{36}}{(1 + 0{,}005642)^{36} - 1} = 30{,}77\ €$$

<u>Crédits de financement et problèmes de comptabilisation.</u>

« (…) les montants respectifs des intérêts et chargements courus à prendre en résultats et des intérêts et chargements non courus à reporter sont déterminés par application du taux réel au solde restant dû en début de chaque période ; ce taux réel est calculé compte tenu de l'échelonnement et de la périodicité des versements. Une autre méthode ne peut être appliquée que pour autant qu'elle donne, par exercice social, des résultats équivalents.
Les intérêts et chargements ne peuvent être compensés avec les frais, charges et commissions exposés à l'occasion de ces opérations ».

(Art. 67, § 2, 3ème al. Suite + 4ème al., AR / Code des Sociétés)

En d'autres termes les crédits de financement avec taux de chargement mensuel (interdit par la loi en ce qui concerne les particuliers mais pas en ce qui concerne les entreprises) imposent aux entreprises, pour la comptabilisation des charges financières, de convertir le taux de chargement mensuel en taux réel.
On utilise, à cette fin, la formule suivante :

Taux annuel réel = (taux mensuel de chargement x 24 x durée) / (durée + 1)

<u>Application.</u>

Une entreprise acquiert du matériel informatique pour un montant de 16.000,00 € HTVA de 21 % ; l'acquisition est financée au moyen d'un crédit de financement aux conditions suivantes : remboursement en 60 mensualités par tranches égales de capital avec un taux de chargement mensuel forfaitaire de 0,60 %.

Calcul du taux annuel réel.

$$\text{Taux annuel réel} = \frac{0{,}006 \times 24 \times 60}{60 + 1} = 0{,}141639344 = 14\ \%$$

La feuille suivante reprend, à gauche, le tableau des remboursements présenté par le prêteur ; les paiements échelonnés seront naturellement effectués sur cette base. La comptabilisation se fera sur la base du tableau de droite en appliquant au solde restant dû un taux d'intérêt réel (puisqu'il s'agit de mensualités, le taux applicable au solde restant dû est divisé par 12).

Montant financé	16.000,00 €
Taux mensuel de chargement	0,006
Durée (mois)	60

Taux annuel réel =
(taux de chargement x durée x 24) / (durée + 1)

0,14

Avec taux de chargment mensuel de 0,60 % — **Avec taux annuel réel**

Échéance	Mensualité	Capital	Intérêts	Capital	Intérêts	Solde dû
1	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	188,85 €	15.733,33 €
2	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	185,70 €	15.466,67 €
3	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	182,56 €	15.200,00 €
4	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	179,41 €	14.933,33 €
5	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	176,26 €	14.666,67 €
6	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	173,11 €	14.400,00 €
7	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	169,97 €	14.133,33 €
8	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	166,82 €	13.866,67 €
9	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	163,67 €	13.600,00 €
10	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	160,52 €	13.333,33 €
11	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	157,38 €	13.066,67 €
12	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	154,23 €	12.800,00 €
13	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	151,08 €	12.533,33 €
14	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	147,93 €	12.266,67 €
15	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	144,79 €	12.000,00 €
16	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	141,64 €	11.733,33 €
17	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	138,49 €	11.466,67 €
18	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	135,34 €	11.200,00 €
19	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	132,20 €	10.933,33 €
20	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	129,05 €	10.666,67 €
21	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	125,90 €	10.400,00 €
22	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	122,75 €	10.133,33 €
23	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	119,61 €	9.866,67 €
24	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	116,46 €	9.600,00 €
25	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	113,31 €	9.333,33 €
26	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	110,16 €	9.066,67 €
27	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	107,02 €	8.800,00 €
28	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	103,87 €	8.533,33 €
29	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	100,72 €	8.266,67 €
30	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	97,57 €	8.000,00 €
31	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	94,43 €	7.733,33 €
32	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	91,28 €	7.466,67 €
33	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	88,13 €	7.200,00 €
34	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	84,98 €	6.933,33 €
35	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	81,84 €	6.666,67 €
36	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	78,69 €	6.400,00 €
37	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	75,54 €	6.133,33 €
38	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	72,39 €	5.866,67 €
39	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	69,25 €	5.600,00 €
40	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	66,10 €	5.333,33 €
41	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	62,95 €	5.066,67 €
42	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	59,80 €	4.800,00 €
43	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	56,66 €	4.533,33 €
44	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	53,51 €	4.266,67 €
45	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	50,36 €	4.000,00 €
46	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	47,21 €	3.733,33 €
47	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	44,07 €	3.466,67 €
48	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	40,92 €	3.200,00 €
49	362,67 €	266,67 €	96,00 €	266,67 €	37,77 €	2.933,33 €

Échéance	Mensualité	Capital	Intérêts		Capital	Intérêts	Solde dû
50	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	34,62 €	2.666,67 €
51	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	31,48 €	2.400,00 €
52	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	28,33 €	2.133,33 €
53	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	25,18 €	1.866,67 €
54	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	22,03 €	1.600,00 €
55	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	18,89 €	1.333,33 €
56	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	15,74 €	1.066,67 €
57	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	12,59 €	800,00 €
58	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	9,44 €	533,33 €
59	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	6,30 €	266,67 €
60	362,67 €	266,67 €	96,00 €		266,67 €	3,15 €	0,00 €

On trouve par ailleurs sur ce même site les informations suivantes :

Le taux mensuel était utilisé avant l'entrée en vigueur de la loi sur le crédit à la consommation...

C' est le taux appliqué mensuellement au crédit.

L'avantage du taux mensuel est qu'il permettait de calculer facilement la mensualité. Ce calcul est le même pour toutes les banques...

Malheureusement, maintenant, la loi oblige de parler en Taux Annuel Effectif Global ou TAEG qui ne peut être calculer qu' avec des tables de conversion...

Calcul de la mensualité au départ du taux mensuel.

((montant emprunté x nombre de mois x taux mensuel) /100) = intérêts
(intérêts + montant emprunté) / nombre de mois = montant à rembourser par mois

Les indépendants ne sont pas nécessairement soumis à la loi sur le crédit à la consommation... nous avons donc laissé la calculette du site sans contrôle... mais attention:

- ne jamais introduire en dessous de 100.000frs.
- ne pas dépasser les limites en nombre de mois autorisé (sauf indépendant).

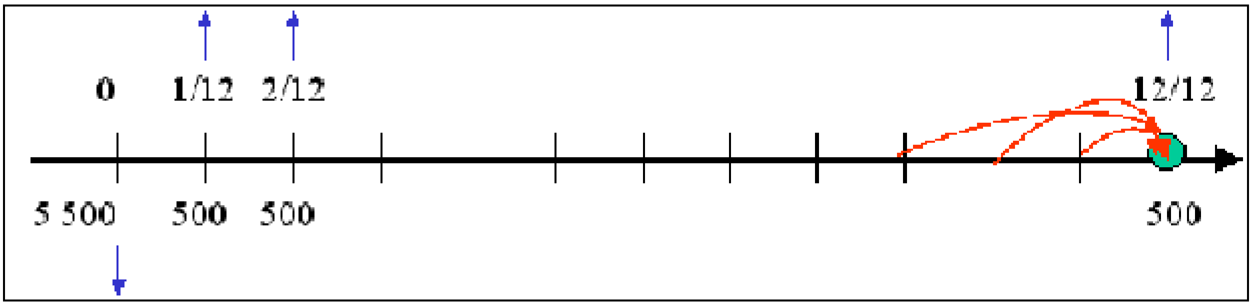
Cette annonce confirme bien que le taux mensuel utilisé dans les tables de conversion est un taux de chargement. Cette annonce nous indique par ailleurs l'une des principales limites du TAEG : les indépendants ne sont pas nécessairement soumis à cette loi sur le crédit à la consommation. Cette restriction autorise naturellement l'organisme financier concerné à laisser « sans contrôle » sa calculette à la disposition de tous les consommateurs.

Ventes à tempérament : calcul du taux.

Exemple.

Soit une télévision valant 6.300 € et vendue à crédit pour 800 € d'acompte et 12 versements mensuels de 500 €. Comment estimer le taux d'intérêt ?

a) Calcul lors du dernier remboursement.



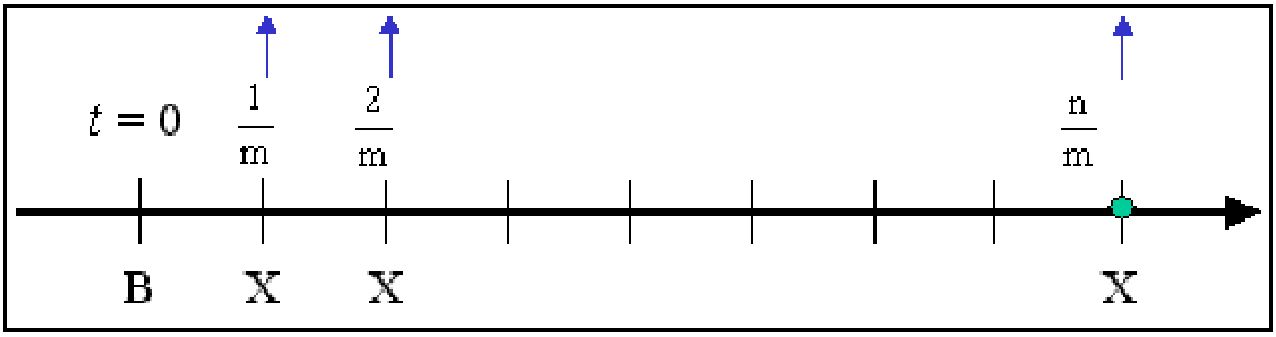
Valeur « empruntée » = prix de départ moins l'acompte = 6300 – 800 = 5500

On actualise tous les montants en t = 1 = 12/12

$$
\begin{aligned}
5500(1+i) &= 500(1+\frac{11}{12}i) + 500(1+\frac{10}{12}i) + \ldots\ldots + 500(1+\frac{1}{12}i) + 500 \\
&= (12 \cdot 500) + 500 \cdot \frac{i}{12}(11+10+\ldots\ldots+1) \\
5500 + 5500i &= 6000 + 500 \cdot \frac{i}{12} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2} \\
2750i &= 500 \\
i &= 0{,}1818 \qquad \text{taux annuel}
\end{aligned}
$$

Formule générale.

B	Capital réellement emprunté
m	Nombre de périodes annuelles ; remboursements mensuels : m = 12 ; remboursements hebdomadaires : m = 52
n	Nombre de paiements à effectuer
X	Montant de chaque remboursement



Actualisations au temps t = n/m

$$B\left(1+\frac{n}{m}\cdot i\right)=X\left(1+\frac{(n-1)}{m}\cdot i\right)+X\left(1+\frac{(n-2)}{m}\cdot i\right)+.....+X\left(1+\frac{1}{m}\cdot i\right)+X$$

$$B+B\cdot\frac{n}{m}\cdot i=nX+X\cdot\frac{i}{m}\cdot\left((n-1)+(n-2)+.....+1\right)$$

$$=nX+X\cdot\frac{i}{m}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

$$B\cdot\frac{n}{m}\cdot i-\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot X\cdot\frac{i}{m}=nX-B$$

Posons $nX-B=I$
C'est la différence entre la somme des remboursements (nX) et le montant emprunté. C'est la charge payée par le consommateur.

On peut remplacer X par (B + I)/n
Mettons (n/m).i en évidence à gauche

$$\frac{n}{m}\cdot i\left(B-\frac{(n-1)}{2}\cdot X\right)=I$$

$$\frac{n}{m}\cdot i\left(B-\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{B+I}{n}\right)=I$$

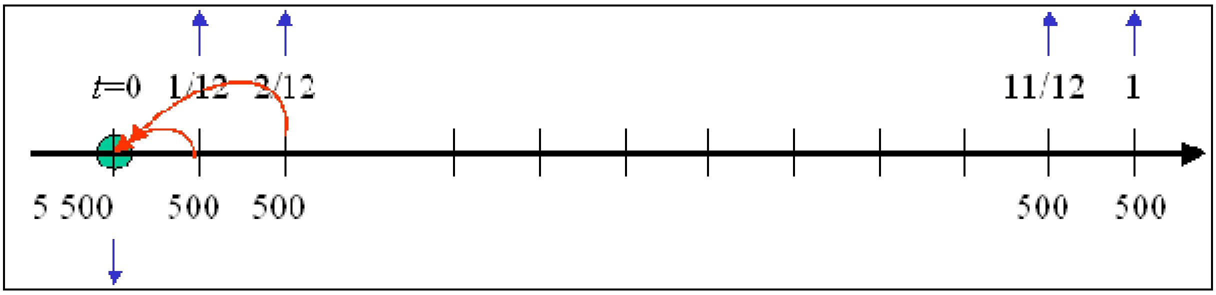
$$\frac{n}{m}\cdot i\left(\frac{2Bn-B(n-1)-I(n-1)}{2n}\right)=I$$

$$\frac{i}{2m}\cdot\left(B(n+1)-I(n-1)\right)=I$$

$$\boxed{i=\frac{2mI}{B(n+1)-I(n-1)}}$$

Dans le cas de l'exemple
B = 5 500, m = 12, n = 12, X = 500
$I = 12\times 500 - 5500 = 500$
on retrouve i = 0,1818

b) Actualisation commerciale en *t* = 0



$$5500 = 500\left(1-\frac{1}{12}i\right)+500\left(1-\frac{2}{12}i\right)+\ldots..+500\left(1-\frac{12}{12}i\right)$$

$$= 12\times 500 - 500\cdot\frac{1}{12}\cdot i(1+2+\ldots..+12)$$

$$= 6000 - 500\cdot\frac{1}{12}\cdot i\cdot\frac{13\times 12}{2}$$

$$250\times 13\times i = 500$$

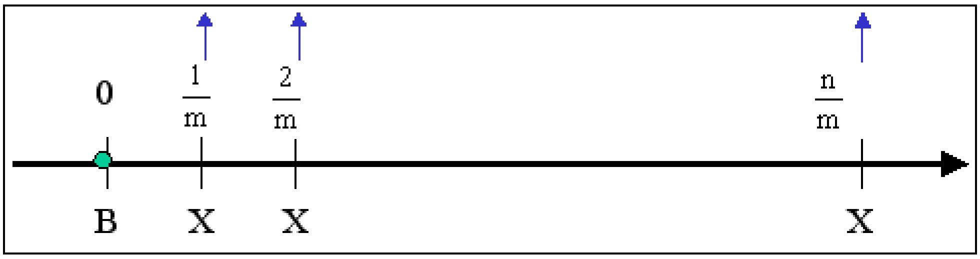
$$i=\frac{500}{250\times 13}=0{,}1538$$

Formule générale.

$$B = X\left(1-\frac{1}{m}\cdot i\right)+X\left(1-\frac{2}{m}\cdot i\right)+\ldots.+X\left(1-\frac{n}{m}\cdot i\right)$$

$$B = nX - X\cdot\frac{1}{m}\cdot i\cdot(1+2+\ldots.+n)$$

$$B = nX - X\cdot\frac{1}{m}\cdot i\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

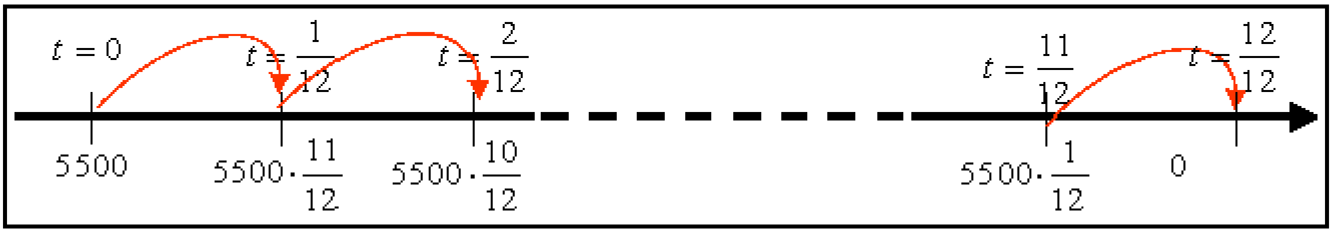


$$X\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2m}\cdot i = nX - B = I$$

$$\boxed{i = \frac{2mI}{X\cdot n\cdot(n+1)}}$$

c) Recomptabilisation après chaque versement

On fait l'hypothèse que le capital amorti après chaque versement est égal au nième du capital emprunté. Le graphique donne la succession des capitaux restant dus.



Ces capitaux produisent chacun de l'intérêt pendant une période (1 mois). On égale I et la somme des intérêts par périodes.

$$I = nX - B = 12 \times 500 - 5500 = 500$$

$$500 = 500 \cdot \frac{i}{12} \cdot \frac{12}{12} + \left(5500\frac{11}{12}\right)\frac{i}{12} + \ldots.. + \left(5500 \cdot \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{i}{12}$$

$$= 5500 \cdot \frac{i}{12} \cdot \frac{1}{12}(12 + 11 + \ldots.. + 1)$$

$$500 = 5500 \cdot \frac{i}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{13 \times 12}{2}$$

$$i = \frac{12 \cdot 2}{11 \cdot 13} = 0{,}1678$$

Formule générale.

On estime la suite des capitaux restant dus.

$t = 0$	$B \qquad = n\frac{B}{n}$
$t = \frac{1}{m}$	$B - \frac{B}{n} = (n-1)\frac{B}{n}$
$t = \frac{2}{m}$	$B - \frac{2B}{n} = (n-2)\frac{B}{n}$
.	
.	
.	
$t = \frac{n-1}{m}$	$B - (n-1)\frac{B}{n} = \frac{B}{n}$
$t = \frac{n}{m}$	0

On égale l'intérêt total et la somme des intérêts par période.

$$I = B \cdot \frac{i}{m} + \left(B - \frac{B}{n}\right) \cdot \frac{i}{m} + \ldots.. + \left(B - (n-1)\frac{B}{n}\right) \cdot \frac{i}{m}$$

$$= \frac{i}{m} \cdot \left[B \cdot \left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \ldots.. + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$I = \frac{i}{m} \cdot \frac{B}{n} \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

$$\boxed{i = \frac{2mI}{B \cdot (n+1)}}$$

Sur base de l'exemple, nous observons que *i* fin de contrat > *i* recomptabilisé > *i* début du contrat. Cette relation est toujours vérifiée.

$$\frac{2mI}{B(n+1)-I(n-1)} > \frac{2mI}{B(n+1)} > \frac{2mI}{X\cdot n\cdot(n+1)}$$

Car :

$$B(n+1)-I(n-1) < B(n+1)$$

>0   >0

Et :

$$B < nX$$

d) **<u>Notion de taux de chargement et calcul du TCAR (taux de chargement annuel réel)</u>**

On prend la même hypothèse qu'au point c : on considère que l'amortissement est identique à chaque remboursement : il vaut B/n.
La différence entre le montant X du remboursement et l'amortissement B/n représente la <u>charge financière</u>.
On appelle <u>taux de chargement par période</u> le rapport entre la charge financière par période et le montant emprunté. Ce taux est noté r_p.

$$r_p = \frac{X - B/n}{B} = \frac{X}{B} - \frac{1}{n}$$

Dans l'arrêté du 2 octobre 1974, le législateur belge a établi le lien entre le TCAR (taux de <u>c</u>hargement <u>a</u>nnuel <u>r</u>éel = taux d'intérêt i appliqué) et le taux de chargement mensuel r_m :

$$\mathrm{TCAR} = i = r_m \cdot 24 \cdot \frac{n}{n+1}$$

Si on généralise cette formule pour des périodes quelconques, elles devient :

$$i = r_p \cdot 2m \cdot \frac{n}{n+1}$$

(si la période est le mois, *m* = 12)

<u>Explication.</u>

Partons de la relation obtenue en c) :

$$i = \frac{2mI}{B\cdot(n+1)}$$

Nous voulons *y* introduire r_p ; tâchons d'exprimer *B* en fonction de r_p

$$r_p = \frac{X}{B} - \frac{1}{n} = \frac{nX - B}{nB} = \frac{I}{nB}$$

donc :

$$B = \frac{I}{nr_p}$$

Injectons cela dans l'expression de *i*

$$i = \frac{2mI}{\frac{I}{nr_p} \cdot n + 1} = r_p \cdot 2m \cdot \frac{n}{n+1}$$

Dans son arrêté du 8/9/1992, le législateur belge à défini le T.A.E.G. (taux annuel effectif global) conformément aux exigences européennes. Cette notion, plus élaborée, sera envisagée plus tard.

La plupart des contrats actuels à court terme sont basés sur la notion de taux de chargement (r_p). Le taux de chargement défini de manière unique (au contraire du taux d'intérêt)
Taux de chargement permet le calcul aisé des remboursements

$$r_p = \frac{X}{B} - \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{B}{n} + Br_p$$

Ne pas confondre le taux de chargement r_p et taux d'intérêt *i* ; en général $i_a \cong 2r_a$
Pour l'exemple :

$$r_m = \frac{500}{5500} - \frac{1}{12} \cong 0{,}0075;$$

<u>Donc</u> :

$$r_a = 12 \times r_m \cong 0{,}09$$

<u>Et nous avions</u> :

i fin de contrat	0,1818
i début de contrat	0,1538
i après chaque remboursement	0,1678

4 AOÛT 1992. - ARRÊTÉ ROYAL RELATIF AUX COÛTS, AUX TAUX, A LA DURÉE ET AUX MODALITÉS DE REMBOURSEMENT DU CRÉDIT A LA CONSOMMATION MODIFIE PAR LES ARRETES ROYAUX DES 29 AVRIL 1993, 15 AVRIL 1994, 23 SEPTEMBRE 1994, 22 FEVRIER 1995, 21 MARS 1996, 17 MARS 1997 ET 22 MAI 2000.

CHAPITRE 1er. - DÉFINITIONS

Article 1er. Pour l'application du présent arrêté, sont définis comme suit :

1° la loi : la loi du 12 juin 1991 relative au crédit à la consommation modifiée par les lois des 6 juillet 1992, **4 août 1992, 8 décembre 1992, 11 février 1994, 6 juillet 1994, 5 juillet 1998, 30 octobre 1998, 11 décembre 1998, 11 avril 1999, 7 février 2001 et 10 août 2001.**

2° le terme de paiement : la période comprise entre :

a) le moment où le prêteur a mis à la disposition du consommateur une somme d'argent ou un pouvoir d'achat, ou encore le moment où a débuté l'octroi de la jouissance d'un bien ou la fourniture d'un tel bien ou la prestation d'un service et le moment où le consommateur doit avoir effectué le premier paiement;

b) deux moments successifs où le consommateur doit avoir effectué un paiement;

3° le montant d'un terme : le montant d'un paiement que le consommateur doit avoir effectué à la fin de chaque terme de paiement;

4° les modalités de paiement : le montant ou les montants des termes et la durée des termes de paiement ainsi que leur nombre;

5° la valeur résiduelle : le prix d'achat lors de la levée de l'option d'achat ou du transfert de propriété, tel que visé par les articles 48, 2° et 49, § 2, de la loi;

6° le montant total à rembourser : soit le montant qui est obtenu en déduisant l'acompte du prix total à tempérament, visé à l'article 41, 2°, de la loi, soit le montant, visé à l'article 49, § 3, 5°, de la loi, soit le montant total des paiements, visé à l'article 56, 3°, de la loi, soit, en général, la somme de tous les paiements que le consommateur doit effectuer en vertu d'un contrat de crédit à l'exception de l'acompte.

Le premier paiement n'est pas compris dans le montant total à rembourser si ce paiement a lieu lors de la mise à la disposition de la somme d'argent, du bien ou du service qui fait l'objet du contrat de crédit;

7° le prélèvement de crédit : le montant mis à la disposition du consommateur sous forme d'un délai de paiement, d'un pouvoir d'achat, d'une somme d'argent ou tout moyen de paiement, y compris la valeur résiduelle.

8° le montant du crédit : la somme de tous les prélèvements de crédit susceptibles d'être consentis comme visée à l'article 14, § 3, 4° de la loi.

Le montant du crédit ne comprend pas le montant équivalent au premier paiement du consommateur si ce paiement a lieu lors de la mise à la disposition de la somme d'argent, du bien ou du service qui fait l'objet du contrat de crédit.

Art. 2. § 1er. Le coût total du crédit visé à l'article 1er, 5°, de la loi, est égal à la différence entre, d'une part, le montant total à rembourser, et d'autre part, le montant du crédit.
Le coût total du crédit comprend les intérêts débiteurs et les frais annexes. Par frais annexes on entend : les frais d'enquête, les frais de publicité, les frais de constitution du dossier, les frais de consultation de fichiers, les frais de gestion, d'administration et d'encaissement, les frais liés à une carte de crédit ou tout moyen de paiement ou de légitimation semblable visé à l'article 1er, 12°, de la loi, les commissions consenties à l'intermédiaire de crédit, la prime en matière d'assurance-crédit et généralement tous frais quelconques réclamés par le prêteur et, le cas échéant, par l'intermédiaire de crédit, au consommateur, à la caution ou à toute autre personne qui constitue une sûreté personnelle dans le cadre de la conclusion d'un contrat de crédit, y compris les frais visés à l'article 31 de la loi.
Conformément à l'article 58, § 2, de la loi, ces frais peuvent, selon leur nature, être qualifiés de récurrents ou non récurrents.
§ 2. Le coût total du crédit ne comprend toutefois pas :
1° les frais et indemnités convenus en cas d'inexécution du contrat de crédit;
2° les frais afférents aux sûretés réelles;
3° les frais qui dans tous les cas incombent au consommateur lors d'un achat de biens ou de services, que celui-ci soit effectué au comptant ou à crédit.
§ 3. Sans préjudice des dispositions de l'article 31 de la loi, et à condition que le consommateur dispose d'une liberté de choix raisonnable en la matière, le coût total du crédit ne comprend pas non plus : 1° les frais de transfert des fonds, ainsi que les frais relatifs au maintien d'un compte destiné à recevoir les montants débités au titre du remboursement du crédit, du paiement des intérêts et des autres charges;
2° les cotisations dues au titre de l'inscription à des associations ou à des groupes et qui découlent d'accords distincts du contrat de crédit;
3° les frais d'assurances;
4° les frais de cartes de paiement ou de légitimation en ce qui concerne les fonctions autres que celles relatives à l'octroi du crédit.

Toutefois, la condition que le consommateur dispose d'une liberté de choix raisonnable en la matière n'est pas requise pour les frais de l'assurance qui garantit le remplacement, la réparation ou la restitution du bien financé par un crédit-bail.

Art. 3. Le taux annuel effectif global visé à l'article 1er, 6°, de la loi est le taux à exprimer en pour cent qui rend égales, sur une base annuelle, les valeurs actuelles de l'ensemble des engagements existants ou futurs, pris par le prêteur et par le consommateur.

Sans préjudice des dispositions des articles 5, § 2, 42, 43 et 44, 50, 51 et 52, 55 et 57 de la loi, le taux annuel effectif global est calculé au moment de la remise de l'offre de crédit et lors de chaque modification des conditions de l'offre de crédit si, conformément aux articles 14, § 2 et 60 de la loi, le prêteur fait usage de la faculté de modifier le taux débiteur.

Art. 4. § 1er. L'équation de base qui, conformément à l'article 3, premier alinéa, du présent arrêté défini le taux annuel effectif global en exprimant l'égalité entre d'une part la somme des valeurs actualisées des prélèvements de crédit et d'autre part, la somme des valeurs actualisées des montants des termes, est la suivante :

$$\sum_{K=1}^{m} \frac{C_K}{(1+x)^{t_K}} = \sum_{L=1}^{m'} \frac{D_L}{(1+x)^{s_L}}$$

où :
m désigne le numéro d'ordre du dernier prélèvement de crédit;
K désigne le numéro d'ordre d'un prélèvement de crédit, soit $1 \leq K \leq m$;
C_k désigne le montant du prélèvement de crédit numéro K;
t_k désigne l'intervalle de temps, exprimé en années et fractions d'années, entre la date du prélèvement de crédit numéro 1 et celle du prélèvement de crédit numéro K;
S le signe de sommation
m' désigne le numéro d'ordre du dernier montant d'un terme;
L désigne le numéro d'ordre d'un montant d'un terme, soit $1 \leq L \leq m'$;
D désigne le montant du terme numéro L;
s_L désigne l'intervalle de temps, exprimé en années et fractions L d'années, entre la date du prélèvement de crédit numéro 1 et celle du montant d'un terme numéro L;
x désigne le taux annuel effectif global qui peut être calculé soit par l'algèbre, soit par approximations successives, le cas échéant, programmées sur ordinateur ou sur calculette, lorsque les autres termes de l'équation sont connus par le contrat ou autrement.

Le calcul du taux annuel effectif global doit s'effectuer sur base d'une année standard de 365 jours ou douze mois normalisés; un mois normalisé compte compte 30,41666 jours.

Les méthodes de résolution de l'équation applicables doivent donner un résultat égal à celui des exemples 1 à 12 repris dans l'annexe I du présent arrêté.

§1er bis. Le calcul des intérêts ou frais visés à l'article 59 §1er, de la loi doit s'effectuer sur base du taux débiteur et frais convenus; dans chaque période pour lesquelles les comptes sont arrêtés, il y a lieu d'établir un solde débiteur moyen en tenant compte aussi bien du nombre de jours exacts entre chaque opération que du nombre de jours exacts de la période.
Ce calcul ne peut donner un résultat supérieur à celui des exemples 13 et 14 repris dans l'annexe I du présent arrêté.

§ 2. Si, en cas de crédit-bail, la valeur résiduelle n'est pas

indiquée au moment de la remise de l'offre de crédit, celle-ci doit indiquer, conformément à l'article 49, § 2, de la loi, que le bien loué fait l'objet d'un amortissement linéaire rendant sa valeur égale à zéro au terme de la durée normale de location telle que fixée dans le contrat relatif au crédit précité.
§ 3. L'emploi d'hypothèses pour le calcul du taux annuel effectif global n'est autorisé que si le calcul exact est impossible parce qu'au moment où la publicité est diffusée ou lors de la remise de l'offre de crédit un ou plusieurs paramètres, nécessaires pour résoudre l'équation de base précisée au § 1er du présent article sont inconnus et que si, pour remplacer ces paramètres inconnus, il est fait exclusivement usage des hypothèses suivantes :
- si le contrat de crédit ne prévoit pas de limites au crédit, le montant de crédit octroyé est égal à **1250 euros**;
- pour les ouvertures de crédit et en général quand le contrat de crédit laisse au consommateur le libre choix quant au prélèvement de crédit, il est supposé que le crédit est entièrement et immédiatement prélevé;
- si aucune modalité de paiement n'a été fixée et qu'elle ne ressort pas des dispositions du contrat de crédit, la durée théorique du contrat de crédit est censée être d'un an;
- si le taux débiteur est variable en cours d'exécution du contrat de crédit ou pendant la période durant laquelle la publicité est diffusée seul le taux débiteur applicable au moment de la remise de l'offre de crédit ou au début de la période de diffusion de la publicité est pris en considération;
- si le contrat de crédit prévoit plusieurs modalités de paiement, le crédit est fourni et les paiements sont effectués au moment le plus rapproché prévu dans le contrat de crédit.

§ 4. **Lorsque l'ouverture de crédit prévoit des taux débiteurs différents en fonction des montants prélevés ou des termes de paiement, les dits taux ne peuvent en aucun cas supérieur au taux annuel effectif global maximum fixé en fonction du montant du crédit.**

De même, lorsque le crédit-bail prévoit plusieurs moments où l'option d'achat peut être levée, le taux annuel effectif global est calculé pour chacun des cas.

Art. 5. Le taux débiteur, visé à l'article 1er, 8°, de la loi, est le taux d'intérêt exprimé en pourcentage annuel et calculé selon la méthode actuarielle appliquée dans l'équation de base visée à l'article 4, § 1er, du présent arrêté, mais où n'entrent pas en compte les frais annexes visés à l'article 2, 1er, deuxième alinéa.

Art. 6. Le taux annuel effectif global et le taux débiteur doivent être exprimés en pourcentage et sont arrondis à la deuxième décimale. Si la troisième décimale est cinq ou plus, il y a lieu d'arrondir à la deuxième décimale supérieure. Dans les autres cas, il y a lieu de négliger la troisième décimale.

Art. 7. § 1er. Par exemple représentatif comme visé par les articles 5, § 2, et 14, § 3, 5E, de la loi il convient d'entendre l'exemple qui indique de manière apparente et dans des termes clairs et compréhensibles de quelles hypothèses reprises à l'article 4, § 3, du présent arrêté et, le cas échéant, de quelles dispositions particulières de l'offre de crédit il a été

fait usage pour déterminer le taux annuel effectif global.
L'exemple représentatif doit en tout état de cause indiquer le montant du crédit et les modalités de paiement.
§ 2. L'exemple représentatif doit être utilisé chaque fois qu'il a été fait usage des hypothèses pour le calcul du taux annuel effectif global conformément à l'article 4, § 3, du présent arrêté.
§ 3. L'indication dans la publicité du taux débiteur et des frais récurrents et non récurrents peut être effectuée en indiquant le taux annuel effectif global résultant des hypothèses visées à l'article 4, § 3, du présent arrêté, et conformément aux conditions prescrites par le § 1er du présent article.
§ 4. L'indication du taux annuel effectif global en pourcentage dans la publicité doit être accompagnée de la mention en toutes lettres des mots "taux annuel effectif global".

CHAPITRE II - DU CONTRAT DE CRÉDIT

Section 1. - Du taux annuel effectif global maximum.

Art. 7. bis. Pour la vente à tempérament, le prêt à tempérament et tous les contrats de crédit, à l'exception du crédit-bail, pour lesquels les termes de paiement et les montants des termes restent généralement identiques pendant la durée du contrat, les taux annuels effectifs globaux maxima sont fixés conformément à l'échelle reprise dans l'annexe II du présent arrêté.
Pour le crédit-bail les taux annuels effectifs globaux maxima sont fixés conformément à l'échelle reprise dans l'annexe III du présent arrêté.
Pour l'ouverture de crédit et tous les autres contrats de crédit, à l'exclusion de ceux visés aux alinéas précédents du présent article, les taux annuels effectifs globaux sont fixés conformément à l'échelle reprise dans l'annexe IV.
Section 2. Du délai maximum de remboursement.

Art. 8. Pour la vente à tempérament, le crédit-bail, le prêt à tempérament et tous les contrats de crédit pour lesquels les termes de paiement et le montant des termes restent généralement identiques pendant la durée du contrat, le montant à rembourser doit être payé dans sa totalité dans les délais maxima de remboursement suivants :

Montant du crédit	Délais maxima de remboursement exprimés en mois
200 à 500 euros	18
plus de 500 à 2500 euros	24
plus de 2500 à 3700 euros	30
plus de 3700 à 5600 euros	36
plus de 5600 à 7500 euros	42
plus de 7500 à 10.000 euros	48
plus de 10.000 à 15.000 euros	60
plus de 15.000 à 20.000 euros	84
plus de 20.000 à 37.000 euros	120
plus de 37.000 euros	240

Le délai maximum de remboursement commence à courir dans les deux mois qui suivent la conclusion du contrat de crédit sauf lorsque, conformément à l'article 19, de la loi, le contrat de crédit mentionne le bien financé ou la prestation de service financée que le montant du crédit est versé directement par le prêteur au vendeur ou prestataire de services, auquel cas le délai maximum de remboursement commence à courir dans les deux mois qui suivent la notification visée à l'article 19 de la loi.

Art. 9 § 1er. Pour tous les contrats de crédit pour lesquels les termes de paiement restent généralement identiques pendant la durée du contrat mais pour lesquels le montant des termes peut varier, y compris les ouvertures de crédit, il convient qu'au minimum les montants des termes suivants aient été payés:
- soit un montant de terme mensuel égal à 1/24e du solde restant dû quand le montant du crédit est égal ou inférieur à **10.000 euros**;
- soit un montant de terme mensuel égal à 1/36e du solde restant dû quand le montant du crédit est supérieur à **10.000 euros**;
- soit un montant de terme trimestriel égal à 1/8e du solde restant dû quand le montant du crédit est égal ou inférieur à **10.000 euros;**
- soit un montant de terme trimestriel égal à 1/12e du solde restant dû quand le montant du crédit est supérieur à **10.000 euros**;
- soit un montant de terme semestriel égal à 1/4 du solde restant dû quand le montant du crédit est égal ou inférieur à **10.000 euros**;
- soit un montant de terme semestriel égal à 1/6e du solde restant dû quand le montant du crédit est supérieur à **10.000 euros;**

sans que le montant d'un terme puisse être inférieur soit à **25 euros**, soit au solde restant dû si celui est inférieur à **25 euros.**
Le délai maximum de remboursement des montants des termes, visés à l'alinéa précédent, commence à courir dans les deux mois qui suivent le prélèvement du crédit sauf lorsque, conformément à l'article 19, de la loi, le contrat de crédit mentionne le bien financé ou la prestation de service financée ou que le montant du prélèvement de crédit est versé directement par le prêteur au vendeur ou prestataire de services, auquel cas le délai maximum de remboursement commence à courir dans les deux mois qui suivent la notification visée à l'article 19 de la loi.

§ 2. Pour l'application du présent article, il faut entendre par solde restant dû, le montant non encore remboursé des prélèvements de crédit consentis au consommateur y compris les intérêts débiteurs.
Le présent article ne s'applique pas aux contrats de crédit qui ne prévoient de paiements périodiques que pour les intérêts.

Section 3 - Du remboursement anticipé

Art. 10. § 1. Le montant de la réduction ou de la restitution du coût total du crédit ayant trait au remboursement intégral anticipé d'un contrat de crédit doit, en application de l'article 23, troisième alinéa, de la loi, être calculé selon les modalités reprises [dans l'annexe V] du présent arrêté.
§ 2. Seuls entrent en considération pour le calcul du montant de la réduction ou de la restitution :
1E les montants des termes à échoir au moment du remboursement intégral anticipé que le consommateur lui-même ou une tierce personne agissant pour son compte a manifesté l'intention d'effectuer;
2E les prélèvements de crédit à échoir au moment du remboursement intégral anticipé dans la mesure où le remboursement anticipé les rend sans objet.

Si le prêteur n'a pas été informé du moment exact du remboursement, seront pris en considération pour le calcul, les montants des termes et, le cas échéant, les prélèvements, de crédit qui ne sont pas encore échus un mois après la notification de l'intention du consommateur.
§ 3. En cas de crédit-bail, le montant de la valeur résiduelle au moment de la levée de l'option d'achat ou du transfert de propriété, lors du remboursement anticipé, est le montant de la valeur résiduelle au terme de la durée normale de location, tel qu'il est mentionné dans l'offre de crédit et actualisé au moment de la levée d'option. En l'absence d'une disposition contractuelle déterminant la valeur résiduelle, le montant de celle-ci est calculé conformément à l'article 4, § 2 du présent arrêté.
Si le crédit-bail prévoit explicitement plusieurs moments où l'option d'achat peut être levée, le montant de la valeur résiduelle prise en compte sera celui prévu pour la levée de l'option d'achat à la date la plus proche suivant celle du remboursement anticipé. Cette date sera considérée comme étant l'échéance normale du contrat.
§ 4. Après avoir pris connaissance de l'intention du consommateur, le prêteur lui communique sans délai le montant exact à verser anticipativement et le montant de la réduction ou, le cas échéant, de la restitution.
Les montants de la réduction ou de la restitution calculés conformément au présent article sont des montants minima auxquels il ne peut être dérogé en aucun cas, fût-ce sous la forme d'une indemnité de réemploi ou d'une indemnisation.
§ 5. Le présent article ne s'applique pas aux ouvertures de crédit et, en général, aux contrats de crédit qui, de par leur nature, donnent le droit au consommateur de satisfaire à ses obligations à la date de son choix. L'exercice de ce choix ne peut être assorti d'aucune indemnité qui aurait pour effet d'augmenter le coût total du crédit.

Section 4 - De la communication des renseignements

Art. 11. § 1er. Les renseignements visés à l'article 75, § 3, 4E, de la loi concernent notamment le taux annuel effectif global, le taux débiteur, les frais récurrents, les frais non récurrents, le délai de remboursement du crédit et les modalités de remboursement anticipé, tels qu'ils sont appliqués par le prêteur.
§ 2. Sans préjudice d'autres modalités de communication au Ministre des Affaires économiques, ces renseignements peuvent être récoltés sur première demande, tant par lettre que par télécopie. Le Ministre des Affaires économiques peut prévoir un système de télétransmission et en réglementer les modalités de traitement, y compris la communication des données recueillies.

CHAPITRE III - DISPOSITIONS FINALES

Art. 12. Le présent arrêté entre en vigueur le 1er janvier 1993.

Art. 13. Notre Ministre des Affaires économiques et Notre Ministre des Finances sont, chacun en ce qui le concerne, chargés de l'exécution du présent arrêté.

Bijlage I

De hierna vermelde voorbeelden worden gegeven in euro, maar dezelfde berekeningswijzen worden toegepast wanneer de kredietovereenkomst in frank werd afgesloten.

Bepaling van het jaarlijkse kostenpercentage.

De berekening van het jaarlijkse kostenpercentage gebeurt door uitwerking van de basisvergelijking bepaald in artikel 4, § 1, van dit besluit.

Deze berekening moet gebeuren op basis van een standaardjaar van 365 dagen of 12 genormaliseerde maanden (een genormaliseerde maand telt 30,4166 dagen of 365/12).

1. Berekeningsmethode.

De basisvergelijking die het jaarlijkse kostenpercentage definieert, kan opgelost worden, hetzij door de algebra, hetzij door opeenvolgende benaderingen, desgevallend, geprogrammeerd op een computer of op een rekenmachine, op voorwaarde dat een resultaat bekomen wordt dat gelijk is aan dat van de onderstaande voorbeelden .

Het resultaat van de berekening wordt uitgedrukt op twee decimalen, overeenkomstig de afrondingsregels bepaald door artikel 6.

Het jaarlijkse kostenpercentage, bekomen in de voorbeelden, wordt uitgedrukt in procent.

2. Toepassingsvoorbeelden.

Voorbeeld 1

Kredietovereenkomst voor een bedrag van 1000 euro terug te betalen in een termijnbedrag van 1200 euro, na 1,5 jaar.

Hetzij : 1,5 jaar = 1,5 * 365 = 547,5 dagen of 18 maanden.

De vergelijking is de volgende

$$1000 = \frac{1200}{(1+x)^{547,5/365}} = \frac{1200}{(1+x)^{18/12}}$$

of

$(1+x)^{1,5} = 1200/1000 = 1,2$

Annexe I

Les exemples ci-après sont donnés en euros, mais les mêmes principes de calcul sont d’application lorsque le contrat de crédit est conclu en francs.

Détermination du taux annuel effectif global.

Le calcul du taux annuel effectif global se fait en utilisant l’équation de base déterminée à l’article 4,
§ 1er, du présent arrêté.

Ce calcul doit s’effectuer sur base d’une année standard de 365 jours ou 12 mois normalisés (un mois normalisé compte 30,4166 jours ou 365/12).

1. Méthode de calcul.

L’équation de base qui définit le calcul du taux annuel effectif global, peut être résolue soit par l’algèbre, soit par approximations successives, le cas échéant, programmées sur ordinateur ou sur calculette, à condition d’obtenir un résultat égal à celui des exemples repris ci-dessous.

Le résultat du calcul est exprimé avec une exactitude de deux décimales, selon les règles d’arrondi fixées par l’article 6.

Le taux annuel effectif global obtenu dans les exemples est exprimé en pour cent.

2. Exemples d’application.

Exemple 1

Contrat de crédit pour un montant de 1000 euros, à rembourser en un montant terme de 1200 euros, après 1,5 an.

Soit : 1,5 an = 1,5 * 365 = 547,5 jours ou 18 mois.

L’équation est la suivante :

$$1000 = \frac{1200}{(1+x)^{547,5/365}} = \frac{1200}{(1+x)^{18/12}}$$

ou

$(1+x)^{1,5} = 1200/1000 = 1,2$

$1+x = \sqrt[1,5]{1,2} = 1,129243$

$x = 12,92\%$

Voorbeeld 2

Kredietovereenkomst voor een bedrag van 1000 euro en dossierkosten van 50 euro, terug te betalen in een termijnbedrag van 1200 euro, na 1,5 jaar.

Hetzij : 1,5 jaar = 1,5 * 365 = 547,5 dagen of 18 maanden.
Hetzij : een krediet van 1000 - 50 = 950 euro.

De vergelijking is de volgende :

$$950 = \frac{1200}{(1+x)^{547,5/365}} = \frac{1200}{(1+x)^{18/12}}$$

of

$(1+x)^{1,5} = 1200/950 = 1,263157$

$1+x = \sqrt[1,5]{1,263157} = 1,1685256$

$x = 16,85\%$

Voorbeeld 3

Lening op afbetaling voor een bedrag van 1000 euro terug te betalen in twee termijnbedragen van 600 euro, respectievelijk na 1 en 2 jaar.

Hetzij : 1 jaar = 1 * 365 dagen en 2 jaar = 2 * 365 = 730 dagen

De vergelijking is de volgende :

$$1000 = \frac{600}{(1+x)^{365/365}} + \frac{600}{(1+x)^{730/365}} =$$

$$1000 = \frac{600}{(1+x)^{1}} + \frac{600}{(1+x)^{2}}$$

$1+x = \sqrt[1,5]{1,2} = 1,129243$

$x = 12,92\%$

Exemple 2

Contrat de crédit pour un montant de 1000 euros et frais de dossier de 50 euros, à rembourser en un montant de terme de 1200 euros, après 1,5 an.

Soit : 1,5 an = 1,5 * 365 = 547,5 jours ou 18 mois.
Soit : un crédit de 1000 - 50 = 950 euros.

L'équation est la suivante :

$$950 = \frac{1200}{(1+x)^{547,5/365}} = \frac{1200}{(1+x)^{18/12}}$$

ou

$(1+x)^{1,5} = 1200/950 = 1,263157$

$1+x = \sqrt[1,5]{1,263157} = 1,1685256$

$x = 16,85\%$

Exemple 3

Prêt à tempérament pour un montant de 1000 euros à rembourser en deux montants de terme de 600 euros, respectivement après 1 an et 2 ans.

Soit : 1 an = 1 * 365 jours et 2 ans = 2 * 365 = 730 jours

L'équation est la suivante :

$$1000 = \frac{600}{(1+x)^{365/365}} + \frac{600}{(1+x)^{730/365}} =$$

$$1000 = \frac{600}{(1+x)^{1}} + \frac{600}{(1+x)^{2}}$$

Ze kan door de algebra worden opgelost en geeft :

x = 13,066% = 13,07%

Voorbeeld 4

Lening op afbetaling voor een bedrag van 1000 euro terug te betalen in drie termijnbedragen van respectievelijk 272 euro na 3 maanden, 272 euro na 6 maanden en 544 euro na 12 maanden.

Hetzij : 1 jaar = 1 * 365 dagen = 12 maanden; 3 maanden = 3 * 30,4166 of 365 * 0,25 = 91,25 dagen en 6 maanden = 6 * 30,4166 of 365 * 0,5 = 182,5 dagen.

De vergelijking is de volgende :

$$1000 = \frac{272}{(1+x)^{91,25/365}} + \frac{272}{(1+x)^{182,5/365}} + \frac{544}{(1+x)^{365/365}}$$

of

$$1000 = \frac{272}{(1+x)^{0,25}} + \frac{272}{(1+x)^{0,5}} + \frac{544}{(1+x)^{1}}$$

Ze kan worden opgelost door middel van opeenvolgende benaderingen en geeft :

x = 0,13186 = 13,19%

Voorbeeld 5

Verkoop op afbetaling van een goed met een waarde van 2500 euro; de overeenkomst voorziet een voorschot van 500 euro en 24 maandelijkse termijnbedragen van 100 euro.

Hetzij 1 maand = 30,41667 dagen of 365 * 0,083333 of 365 * 1/12.

Hetzij een kredietbedrag van 2500 - 500 = 2000 euro.

De vergelijking is de volgende :

100 100

Elle peut se résoudre par l’algèbre et donne:

x = 13,066% = 13,07%

Exemple 4

Prêt à tempérament pour un montant de 1000 euros à rembourser en trois montants de terme de respectivement 272 euros après 3 mois, 272 euros après 6 mois et 544 euros après 12 mois.

Soit : 1 an = 1 * 365 jours = 12 mois; 3 mois = 3 * 30,4166 ou 365 * 0,25 = 91,25 jours et 6 mois = 6 * 30,4166 ou 365 * 0,5 = 182,5 jours.

L’équation est la suivante :

$$1000 = \frac{272}{(1+x)^{91,25/365}} + \frac{272}{(1+x)^{182,5/365}} + \frac{544}{(1+x)^{365/365}}$$

ou

$$1000 = \frac{272}{(1+x)^{0,25}} + \frac{272}{(1+x)^{0,5}} + \frac{544}{(1+x)^{1}}$$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne:

x = 0,13186 = 13,19%

Exemple 5

Vente à tempérament d’un bien d’une valeur de 2500 euros; le contrat prévoit un acompte de 500 euros et 24 montants de terme mensuels de 100 euros.

Soit 1 mois = 30,41667 jours ou 365 * 0,083333 ou 365 * 1/12.

Soit un crédit d’ un montant de 2500 - 500 = 2000 euros.

L’équation est la suivante :

100 100

$$2000 = \frac{}{(1+x)^{30,4166/365}} + \frac{}{(1+x)^{60,8333/365}} + \ldots + \frac{100}{(1+x)^{730/365}}$$

of

$$2000 = \frac{100}{(1+x)^{1/12}} + \frac{100}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{100}{(1+x)^{24/12}}$$

Ze kan opgelost worden door middel van opeenvolgende benaderingen en geeft :

x = 0,1975 ou 19,75%

Voorbeeld 6

Financieringshuur van een goed met een waarde van 15000 euro; de overeenkomst voorziet 48 maandelijkse termijnbedragen van 350 euro; het eerste termijnbedrag wordt betaald op het moment van de terbeschikkingstelling van het goed; na 48 maanden kan de koopoptie gelicht worden tegen de betaling van een residuele waarde van 1250 euro.

Hetzij 1 maand = 30,41667 dagen of 365 * 0,083333 of 365 * 1/12.

Vermits het eerste termijnbedrag gebeurt op het moment van de terbeschikkingstelling van het goed, blijft er om te financieren een bedrag over van 15000 - 350 = 14650 euro.

De vergelijking is de volgende :

$$14650 = \frac{350}{(1+x)^{30,4166/365}} + \frac{350}{(1+x)^{60,8333/365}} + \ldots + \frac{1250}{(1+x)^{1460/365}}$$

of

$$2000 = \frac{}{(1+x)^{30,4166/365}} + \frac{}{(1+x)^{60,8333/365}} + \ldots + \frac{100}{(1+x)^{730/365}}$$

ou

$$2000 = \frac{100}{(1+x)^{1/12}} + \frac{100}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{100}{(1+x)^{24/12}}$$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne :

x = 0,1975 ou 19,75%

Exemple 6

Crédit-bail d’un bien d’une valeur de 15000 euros; le contrat prévoit 48 montants de terme mensuels de 350 euros; le premier montant de terme est payable dès la mise à disposition du bien; à l'issue des 48 mois, l’option d’achat peut être levée moyennant le paiement d’une valeur résiduelle de 1250 euros.

Soit 1 mois = 30,41667 jours ou 365 * 0,083333 ou 365 * 1/12

Comme le premier montant de terme est payable dès la mise à disposition du bien, il reste à financer : 15000 - 350 = 14650 euros.

L’équation est la suivante :

$$14650 = \frac{350}{(1+x)^{30,4166/365}} + \frac{350}{(1+x)^{60,8333/365}} + \ldots + \frac{1250}{(1+x)^{1460/365}}$$

ou

$$14650 = \frac{350}{(1+x)^{1/12}} + \frac{350}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{1250}{(1+x)^{48/12}}$$

Ze kan opgelost worden door middel van opeenvolgende benaderingen en geeft :
$x = 0{,}0954 = 9{,}54\%$.

Voorbeeld 7

Verkoop op afbetaling van een goed met een waarde van 2500 euro; de overeenkomst voorziet een voorschot van 500 euro en 24 maandelijkse termijnbedragen van 100 euro. De overeenkomst voorziet dat de eerste betalingstermijn 20 dagen bedraagt.

Hetzij 1 maand = 30,41667 dagen of 365 * 0,083333 of 365 * 1/12; de eerste betalingstermijn bedraagt 20 dagen

Hetzij een kredietbedrag van 2500 - 500 = 2000 euro.

De vergelijking is de volgende :

$$2000 = \frac{100}{(1+x)^{20/365}} + \frac{100}{(1+x)^{50{,}41667/365}} + \ldots + \frac{100}{(1+x)^{719{,}5833/365}}$$

of

$$2000 = \frac{100}{(1+x)^{0{,}05478}} + \frac{100}{(1+x)^{0{,}1381}} + \ldots + \frac{100}{(1+x)^{1{,}9715}}$$

Ze kan opgelost worden door middel van opeenvolgende

$$14650 = \frac{350}{(1+x)^{1/12}} + \frac{350}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{1250}{(1+x)^{48/12}}$$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne :

$x = 0{,}0954 = 9{,}54\%$.

Exemple 7

Vente à tempérament d’un bien d’une valeur de 2500 euros; le contrat prévoit un acompte de 500 euros et 24 montants de terme mensuels de 100 euros. Le contrat prévoit que le premier terme de paiement a un délai de 20 jours.

Soit 1 mois = 30,41667 jours ou 365 * 0,083333 ou 365 * 1/12; le premier terme de paiement est de 20 jours.

Soit un crédit d’ un montant de 2500 - 500 = 2000 euros.

L’équation est la suivante :

$$2000 = \frac{100}{(1+x)^{20/365}} + \frac{100}{(1+x)^{50{,}41667/365}} + \ldots + \frac{100}{(1+x)^{719{,}5833/365}}$$

ou

$$2000 = \frac{100}{(1+x)^{0{,}05478}} + \frac{100}{(1+x)^{0{,}1381}} + \ldots + \frac{100}{(1+x)^{1{,}9715}}$$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne :

benaderingen en geeft :

x = 0,2040 ou 20,40%.

Voorbeeld 8

Kredietopening van bepaalde duur van 6 maanden van een bedrag van 2500 euro; de overeenkomst voorziet een maandelijkse betaling van de totale kosten van het krediet en de terugbetaling van het kredietbedrag op het einde van de overeenkomst; de jaarlijkse debetrente is 8% en de kosten bedragen 0,25% per maand.

Hetzij 1 maand = 30,41667 dagen of 365 * 0,083333 of 365 * 1/12;

Hetzij de veronderstelling van een volledige en onmiddellijke kredietopname van 2500 euro;

Hetzij een maandelijkse debetrente van :
$(1+8\%)^{1/12}$ -1= 0,006434 ou 0,6434%
Hetzij maandelijkse kosten van 0,0025 of 0,25%;

Hetzij een maandelijkse totale kost van het krediet van 0,6434% + 0,25% = 0,8934%;

Hetzij 5 maandelijkse termijnbedragen van 22.34 euro (2500 * 0,8934%) en 1 laatste termijnbedrag van een maand van 2500 + 22,34 = 2522,34 euro

De vergelijking is de volgende :

$$2500 = \sum_{L=1}^{5} \frac{22,34}{(1+x)^{L/12}} + \frac{2522,34}{(1+x)^{6/12}}$$

of

$$2500 = \frac{22,34}{(1+x)^{1/12}} + \frac{22,34}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{2522,34}{(1+x)^{6/12}}$$

Ze kan opgelost worden door middel van opeenvolgende benaderingen en geeft :
x = 11,26%

Voorbeeld 9

x = 0,2040 ou 20,40%.

Exemple 8

Ouverture de crédit à durée déterminée de 6 mois, d'un montant de 2500 euros; le contrat prévoit le paiement du coût total du crédit tous les mois et le remboursement du montant du crédit à l'issue du contrat; le taux débiteur annuel est 8% et les frais s'élèvent à 0,25% par mois.

Soit 1 mois = 30,41667 jours ou 365 * 0,083333 ou 365 * 1/12;

Soit l'hypothèse d'un prélèvement de crédit entier et immédiat de 2500 euros;

Soit un taux débiteur mensuel de :
$(1+8\%)^{1/12}$ -1 = 0,006434 ou 0,6434%;
Soit des frais mensuels de 0,0025 ou 0,25%;

Soit un coût total du crédit mensuel de 0,6434% + 0,25% = 0,8934%;

Soit 5 montants de terme mensuels de 22.34 euros (2500 * 0,8934%) et 1 dernier montant de terme mensuel de 2500 + 22,34 = 2522,34 euros.

L'équation est la suivante :

$$2500 = \sum_{L=1}^{5} \frac{22,34}{(1+x)^{L/12}} + \frac{2522,34}{(1+x)^{6/12}}$$

ou

$$2500 = \frac{22,34}{(1+x)^{1/12}} + \frac{22,34}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{2522,34}{(1+x)^{6/12}}$$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne :

x = 11,26%

Exemple 9

Kredietopening van onbepaalde duur van een bedrag van 2500 euro; de overeenkomst voorziet een semesteriële minimale betalingsregeling van 25% van het verschuldigd blijvende saldo in kapitaal en debetinteresten; de jaarlijkse debetrente is 12% en de openingskosten van het dossier bedragen 50 euro onmiddellijk te betalen.

Hetzij 6 maanden = 365 * 6/12;

Hetzij de veronderstelling van een volledige en onmiddellijke kredietopname van 2500 euro;

Hetzij een kredietbedrag van 2500 - 50 = 2450 euro;
Hetzij een semestriële debetrente van :
$(1+12\%)^{6/12}$ -1= 0,0583 ou 5,83%;

Hetzij een minimale betalingsregeling van 25% van het verschuldigd blijvende saldo in kapitaal en debetinteresten, overeenkomstig artikel 9, § 2.
De 19 semesteriële termijnbedragen D_L kunnen verkregen worden op basis van een aflossingstabel waarbij:

D_1= 661,44;
D_2 = 525;
D_3 = 416,71;
D_4 = 330,75;
D_5 = 262,52;
D_6 = 208,37;
D_7 = 165,39;
D_8 = 131,27;
D_9 = 104,20;
D_{10} = 82,70;
D_{11} = 65,64;
D_{12} = 52,1;
D_{13} = 41,36;
D_{14} = 32,82;
D_{15} = 25;
D_{16} = 25;
D_{17} = 25;
D_{18} = 25;
D_{19} = 15,28.

De vergelijking is de volgende :

$$2450 = \sum_{L=1}^{19} \frac{D_L}{(1+x)^{L*(6/12)}}$$

of

$$2450 = \frac{661,44}{(1+x)^{6/12}} + \frac{525}{(1+x)^{1}} + \ldots +$$

Ouverture de crédit à durée indéterminée, d'un montant de 2500 euros; le contrat prévoit une modalité de paiement semestriel minimum de 25% du solde restant dû en capital et intérêts débiteurs; le taux débiteur annuel est 12% et les frais d'ouverture du dossier s'élèvent à 50 euros payables immédiate-ment.

Soit 6 mois = 365 * 6/12;

Soit l'hypothèse d'un prélèvement de crédit entier et immédiat de 2500 euros;

Soit un montant de crédit de 2500 - 50 = 2450 euros;

Soit un taux débiteur semestriel de :
$(1+12\%)^{6/12}$ -1 = 0,0583 ou 5,83%;

Soit une modalité de paiement minimum de 25% du solde restant dû en capital et intérêts débiteurs, conformément à l'article 9, § 2.
Les 19 montants de terme semestriels D_L peuvent être obtenus par un tableau d'amortissement où :

D_1= 661,44;
D_2 = 525;
D_3 = 416,71;
D_4 = 330,75;
D_5 = 262,52;
D_6 = 208,37;
D_7 = 165,39;
D_8 = 131,27;
D_9 = 104,20;
D_{10} = 82,70;
D_{11} = 65,64;
D_{12} = 52,1;
D_{13} = 41,36;
D_{14} = 32,82;
D_{15} = 25;
D_{16} = 25;
D_{17} = 25;
D_{18} = 25;
D_{19} = 15,28.

L'équation est la suivante :

$$2450 = \sum_{L=1}^{19} \frac{D_L}{(1+x)^{L*(6/12)}}$$

ou

$$2450 = \frac{661,44}{(1+x)^{6/12}} + \frac{525}{(1+x)^{1}} + \ldots +$$

15,28

____

$(1+x)^{19*(6/12)}$

Ze kan opgelost worden door middel van opeenvolgende benaderingen en geeft :

x = 13,15%

Voorbeeld 10

Kredietopening van onbepaalde duur met een kaart die een functie bezit bij de kredietverlening, voor een bedrag van 700 euro; de overeenkomst voorziet een maandelijkse minimale betalingsregeling van 5% van het verschuldigde saldo in kapitaal en debetinteresten, zonder dat het termijnbedrag, verminderd met de kaartkosten, lager mag zijn dan 25 euro; jaarlijkse kaartkosten van een kaart opgelegd als kredietopnemingsmiddel ten belope van 20 euro; de jaarlijkse debetrente is 10%.

Hetzij 1 maand = 365 * 1/12.

Hetzij de veronderstelling van een volledige en onmiddellijke kredietopname van 700 euro;

Hetzij terugkerende kaartkosten van 20 euro per jaar;

Hetzij een maandelijkse debetrente van :
$(1+10)^{1/12}$ -1= 0,007974 ou 0,797 %;

Hetzij een minimale betalingsregeling van 5% van het verschuldigd blijvende saldo van het kapitaal en de debetinteresten, overeenkomstig artikel 9, § 2.

De 30 maandelijkse termijnbedragen D_L kunnen verkregen worden op basis van een aflossingstabel waarbij :

D_1 = 55,28;
D_2 = 33,78;
D_3 = 32,35;
D_4 = 30,98;
D_5 = 29,66;
D_6 = 28,40;
D_7 = 27,20;
D_8 = 26,05;
D_9 à D_{12} = 25,00;
D_{13} = 45;
D_{14} à D_{24} = 25,00;
D_{25} = 45;
D_{26} à D_{29} = 25,00;
D_{30} = 15,75.

De vergelijking is de volgende :

30 D_L

15,28

____

$(1+x)^{19*(6/12)}$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne :

x = 13,15%

Exemple 10

Ouverture de crédit à durée indéterminée, avec support carte ayant une fonction dans l'octroi du crédit, d'un montant de 700 euros; le contrat prévoit une modalité de paiement mensuel minimum de 5% du solde restant dû en capital et intérêts débiteurs, sans que le montant d'un terme, diminué des frais de carte, puisse être inférieur à 25 euros; les frais annuels de la carte utilisée comme moyen de prélèvement de crédit s'élèvent à 20 euros; le taux débiteur annuel est 10%.

Soit 1 mois = 365 * 1/12;

Soit l'hypothèse d'un prélèvement de crédit entier et immédiat de 700 euros;

Soit des frais de carte récurrents de 20 euros chaque année;

Soit un taux débiteur mensuel de :
$(1+10\%)^{1/12}$ -1 = 0,007974 ou 0,797 %;

Soit une modalité de paiement minimum de 5% du solde restant dû en capital et intérêts débiteurs, conformément à l'article 9, § 2.

Les 30 montants de terme mensuels D_L peuvent être obtenus par un tableau d'amortissement où :

D_1 = 55,28;
D_2 = 33,78;
D_3 = 32,35;
D_4 = 30,98;
D_5 = 29,66;
D_6 = 28,40;
D_7 = 27,20;
D_8 = 26,05;
D_9 à D_{12} = 25,00;
D_{13} = 45;
D_{14} à D_{24} = 25,00;
D_{25} = 45;
D_{26} à D_{30} = 25,00;
D_{30} = 15,75.

L'équation est la suivante :

30 D_L

$$700 = \sum_{L=1} \frac{}{(1+x)^{L*(1/12)}}$$

of

$$700 = \frac{55{,}28}{(1+x)^{1/12}} + \frac{33{,}78}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{15{,}75}{(1+x)^{30/12}}$$

Ze kan opgelost worden door middel van opeenvolgende benaderingen :

x = 17,44%

Voorbeeld 11

Kredietopening van onbepaalde duur met een kaart die een functie bezit bij de kredietverlening, voor een bedrag van 700 euro; de overeenkomst voorziet een maandelijkse minimale betalingsregeling van 5% van het verschuldigd blijvende saldo in kapitaal en debetinteresten, zonder dat het termijnbedrag, verminderd met de kaartkosten, lager mag zijn dan 25 euro; jaarlijkse kosten van een kaart opgelegd als kredietopnemingsmiddel ten belope van 20 euro; de jaarlijkse debetrente is 8% wanneer het verschuldigd blijvende saldo in kapitaal hoger is dan 500 euro en 12% wanneer dit saldo gelijk is aan 500 euro of minder.

Hetzij 1 maand = 365 * 1/12;

Hetzij de veronderstelling van een volledige en onmiddellijke kredietopname van 700 euro;

Hetzij terugkerende kaartkosten van 20 euro per jaar;

Hetzij een maandelijkse debetrente van :

$(1+8\%)^{1/12} -1 = 0{,}006434$ ou 0,6434%;
$(1+12\%)^{1/12} -1= 0{,}009488$ ou 0,95%

Hetzij een maandelijkse minimale betalingsregeling 5% van het verschuldigd blijvende saldo in kapitaal en debetinteresten, overeenkomstig artikel 9, § 2.

a) Hetzij een jaarlijkse debetrente berekend op het kredietbedrag = 10,07%. Dit percentage wordt bekomen op basis van een aflossingstabel met uitsluiting van de kosten.

b) De 30 maandelijkse termijnbedragen D_L kunnen verkregen worden op basis van een aflossingstabel waarbij :

$$700 = \sum_{L=1} \frac{}{(1+x)^{L*(1/12)}}$$

ou

$$700 = \frac{55{,}28}{(1+x)^{1/12}} + \frac{33{,}78}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{15{,}75}{(1+x)^{30/12}}$$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne :

x = 17,44%

Exemple 11

Ouverture de crédit à durée indéterminée, avec support carte ayant une fonction dans l’octroi du crédit, d'un montant de 700 euros; le contrat prévoit une modalité de paiement minimum mensuel de 5% du solde restant dû en capital et intérêts débiteurs, sans que le montant d’un terme, diminué des frais de carte, puisse être inférieur à 25 euros; les frais annuels de la carte utilisée comme moyen de prélèvement de crédit s'élèvent à 20 euros; le taux débiteur annuel est de 8% lorsque le solde restant dû en capital est supérieur à 500 euros et 12% lorsque ce solde est de 500 euros ou moins.

Soit 1 mois = 365 * 1/12;

Soit l'hypothèse d'un prélèvement de crédit entier et immédiat de 700 euros;

Soit des frais de carte récurrents de 20 euros chaque année;

Soit un taux débiteur mensuel de :

$(1+8\%)^{1/12} -1 = 0{,}006434$ ou 0,6434%;
$(1+12\%)^{1/12} -1 = 0{,}009488$ ou 0,95%;

Soit une modalité de paiement mensuel minimum de 5% du solde restant dû en capital et intérêts débiteurs conformément à l'article 9, § 2.

a) Soit un taux débiteur annuel calculé sur le montant du crédit = 10,07%. Ce taux est obtenu par un tableau d’amortissement en excluant les frais.

b) Les 30 montants de terme mensuels D_L peuvent être obtenus par un tableau d'amortissement où :

D_1= 55,23;
D_2 = 33,68;
D_3 = 32,20;
D_4 = 30,79;
D_5 = 29,44;
D_6 = 28,14;
D_7 = 26,91;
D_8 = 25,73;
D_9 à D_{12} = 25,00;
D_{13} = 45;
D_{14} à D_{24} = 25,00;
D_{25} = 45;
D_{26} à D_{29} = 25,00;
D_{30} = 18,31.

De vergelijking is de volgende :

$$700 = \sum_{L=1}^{30} \frac{D_L}{(1+x)^{L*(1/12)}}$$

of

$$700 = \frac{55,23}{(1+x)^{1/12}} + \frac{33,68}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{18,31}{(1+x)^{30*(1/12)}}$$

Ze kan opgelost worden door middel van opeenvolgende benaderingen en geeft :

x = 17,48 %

Voorbeeld 12

Kredietopening van onbepaalde duur met een kaart die een functie bezit bij de kredietverlening, voor een bedrag van 700 euro; de overeenkomst voorziet een maandelijkse minimale betalingsregeling van 5% van het verschuldigd blijvende saldo in kapitaal en debetinteresten, zonder dat het termijnbedrag, verminderd met de kaartkosten, lager mag zijn dan 25 euro; jaarlijkse kosten van een kaart opgelegd als kredietopnemingsmiddel van 20 euro; de jaarlijkse debetrente is 0% voor de eerste betalingstermijn en 12% voor de overige betalingstermijnen.

Hetzij 1 maand = 365 * 1/12.

D_1= 55,23;
D_2 = 33,68;
D_3 = 32,20;
D_4 = 30,79;
D_5 = 29,44;
D_6 = 28,14;
D_7 = 26,91;
D_8 = 25,73;
D_9 à D_{12} = 25,00;
D_{13} = 45;
D_{14} à D_{24} = 25,00;
D_{25} = 45;
D_{26} à D_{29} = 25,00;
D_{30} = 18,31.

L'équation est la suivante :

$$700 = \sum_{L=1}^{30} \frac{D_L}{(1+x)^{L*(1/12)}}$$

ou

$$700 = \frac{55,23}{(1+x)^{1/12}} + \frac{33,68}{(1+x)^{2/12}} + \ldots + \frac{18,31}{(1+x)^{30*(1/12)}}$$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne :

x = 17,48 %

Exemple 12

Ouverture de crédit à durée indéterminée, avec support carte ayant une fonction dans l'octroi du crédit, d'un montant de 700 euros; le contrat prévoit une modalité de paiement mensuel minimum de 5% du solde restant dû en capital et intérêts débiteurs, sans que le montant d'un terme, diminué des frais de carte, puisse être inférieur à 25 euros; les frais annuels de la carte utilisée comme moyen de prélèvement de crédit s'élèvent à 20 euros; le taux débiteur annuel est 0% pour le premier terme de paiement et 12% pour les autres termes de paiement.

Soit 1 mois = 365 * 1/12;

Hetzij de veronderstelling van een volledige en onmiddellijke kredietopneming van 700 euro;

Hetzij terugkerende kaartkosten van 20 euro per jaar;

Hetzij een maandelijkse debetrente van 0% voor de eerste betalingstermijn en $(1+12)^{1/12}$ -1= 0,009488 ou 0,95% voor de overige betalingstermijnen;

Hetzij een maandelijkse minimale betalingsregeling van 5% van het verschuldigd blijvende saldo in kapitaal en debetinteresten, overeenkomstig artikel 9, § 2.

a) Hetzij een jaarlijkse debetrente berekend op het kredietbedrag = 11,11%. Dit percentage wordt bekomen op basis van een aflossingstabel met uitsluiting van de kosten.

b) De 31 maandelijkse termijnbedragen D_L kunnen verkregen worden op basis van een aflossingstabel waarbij:

D_1= 55,00;
D_2 = 33,57;
D_3 = 32,19;
D_4 = 30,87;
D_5 = 29,61;
D_6= 28,39;
D_7 = 27,23;
D_8 = 26,11;
D_9 = 25,04;
D_{10} à D_{12} = 25,00;
D_{13} = 45;
D_{14} à D_{24} = 25,00;
D_{25} = 45;
D_{26} à D_{30} = 25,00;
D_{31} = 2,25.

De vergelijking is de volgende :

$$700 = \sum_{L=1}^{31} \frac{D_L}{(1+x)^{L*(1/12)}}$$

of

$$700 = \frac{55,00}{(1+x)^{1/12}} + \frac{33,57}{(1+x)^{2/12}} + \dots + \frac{2,25}{}$$

Soit l'hypothèse d'un prélèvement de crédit entier et immédiat de 700 euros;

Soit des frais de carte récurrents de 20 euros chaque année;

Soit un taux débiteur mensuel de 0% pour le premier terme de paiement et de $(1+12\%)^{1/12}$ -1 = 0,009488 ou 0,95% pour les autres termes de paiement;

Soit une modalité de paiement mensuel minimum de 5% du solde restant dû en capital et intérêts débiteurs conformément à l'article 9, § 2.

a) Soit un taux débiteur annuel calculé sur le montant du crédit = 11,11%. Ce taux est obtenu par un tableau d'amortissement en excluant les frais.

b) Les 31 montants de terme mensuels D_L peuvent être obtenus par un tableau d'amortissement où :

D_1= 55,00;
D_2 = 33,57;
D_3 = 32,19;
D_4 = 30,87;
D_5 = 29,61;
D_6= 28,39;
D_7 = 27,23;
D_8 = 26,11;
D_9 = 25,04;
D_{10} à D_{12} = 25,00;
D_{13} = 45;
D_{14} à D_{24} = 25,00;
D_{25} = 45;
D_{26} à D_{30} = 25,00;
D_{31} = 2,25.

L'équation est la suivante :

$$700 = \sum_{L=1}^{31} \frac{D_L}{(1+x)^{L*(1/12)}}$$

ou

$$700 = \frac{55,00}{(1+x)^{1/12}} + \frac{33,57}{(1+x)^{2/12}} + \dots + \frac{2,25}{}$$

$(1+x)^{31*(1/12)}$

Ze kan opgelost worden door middel van opeenvolgende benaderingen en geeft :

x = 18,47%

Voorbeeld 13

Kredietopening van onbepaalde duur in de vorm van een voorschot op rekeningcourant voor een bedrag van 2500 euro; de overeenkomst voorziet geen betalingsregeling voor het kapitaalgedeelte maar voorziet de maandelijkse betaling van de totale kosten van het krediet; de jaarlijkse debetrente is 8%; de maandelijkse kosten bedragen 2,5 euro.

a) Berekening van het jkp :

Hetzij 1 maand = 30,41667 dagen of 365 * 0,083333 of 365 * 1/12;

Hetzij de veronderstellingen van een volledige en onmiddellijke kredietopname van 2500 euro en van een theoretische terugbetaling na 1 jaar;

Hetzij een maandelijkse debetrente van :
$(1+8\%)^{1/12} - 1 = 0,006434$ ou 0,6434%;

Hetzij 11 theoretische maandelijkse termijnbedragen van 18,59 euro (2500 * 0,6434% + 2,5) en 1 theoretisch maandelijks termijnbedrag van 2500 + 18.59 = 2518,59 euro.

De vergelijking is de volgende :

$$2500 = \sum_{L=1}^{11} \frac{18.59}{(1+x)^{L/12}} + \frac{2518,59}{(1+x)^{1}}$$

of

$$2500 = \frac{18,59}{(1+x)^{1/12}} + \frac{18,59}{(1+x)^{2/12}} + \ldots +$$

$(1+x)^{31*(1/12)}$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne :

x = 18,47%

Exemple 13

Ouverture de crédit sous forme d’avance en compte courant à durée indéterminée, d'un montant de 2500 euros; le contrat n’impose pas de modalités de paiement en capital, mais prévoit le paiement mensuel du coût total du crédit; le taux débiteur annuel est 8%; les frais mensuels s’élèvent à 2,5 euros.

a) Calcul du taeg :

Soit 1 mois = 30,41667 jours ou 365 * 0,083333 ou 365 * 1/12;

Soit les hypothèses d'un prélèvement de crédit entier et immédiat de 2500 euros et d’un remboursement théorique au bout d’1 an;

Soit un taux débiteur mensuel de :
$(1+8\%)^{1/12} - 1 = 0,006434$ ou 0,6434%;

Soit 11 montants de terme mensuels théoriques de 18,59 euros (2500 * 0,6434% + 2,5) et 1 montant de terme mensuel théorique de 2500 + 18.59 = 2518,59 euros.

L’équation est la suivante :

$$2500 = \sum_{L=1}^{11} \frac{18.59}{(1+x)^{L/12}} + \frac{2518,59}{(1+x)^{1}}$$

ou

$$2500 = \frac{18,59}{(1+x)^{1/12}} + \frac{18,59}{(1+x)^{2/12}} + \ldots +$$

$$\frac{2518{,}59}{(1+x)^1}$$

Ze kan opgelost worden door middel van opeenvolgende benaderingen en geeft :

x = 9,3%

b) Berekening van de maandelijks verschuldigde rente of kosten bedoeld in artikel 59,§ 1 van de wet :

Hetzij een jaarlijks kostenpercentage van 9,3%;

Hetzij een jaarlijkse debetrente van 8%;

Hetzij een afgesloten rekening over een periode van 5 maart tot 5 april (31 dagen);

Hetzij maandelijkse kosten van 2,5 euro;

Hetzij een afrekening van de op 5 april verschuldigde rente of kosten;

Hetzij de boekingsdata van de verrichtingen:

- 5/3 voorafgaand debetsaldo : 200 euro;
- 7/3 debetboeking : 500 euro;
- 20/3 creditboeking : 300 euro;
- 25/3 creditboeking : 500 euro;
- 3/4 debetboeking : 1000 euro;
-5/4 verschuldigde rente of kosten : 5,31 euro :

Het gemiddelde debetsaldo wordt als volgt berekend op basis van 31 dagen (vanaf 5/3 tot 5/4) :

$$\frac{(200*2)+(700*13)+(400*5)+(900*2)}{31} = 429{,}03 \text{ euro;}$$

De verschuldigde rente of kosten worden als volgt berekend :

$((1+8\%)^{31/365} - 1) * 429{,}03 + 2{,}5 =$

$$\frac{2518{,}59}{(1+x)^1}$$

Elle peut se résoudre par approximations successives et donne :

X = 9,3%

b) Calcul des intérêts ou frais mensuels dus, visés à l'article 59, § 1er, de la loi :

Soit un taux annuel effectif global de 9,3%;

Soit un taux débiteur annuel de 8%;

Soit un compte arrêté sur une période allant du 5 mars au 5 avril (31 jours);

Soit des frais mensuels de 2,5 euros;

Soit un décompte d'intérêts ou frais dus au 5 avril;

Soit les dates comptables des opérations du compte :

- 5/3 solde débiteur précédent : 200 euros;
- 7/3 inscription au débit : 500 euros;
- 20/3 inscription au crédit : 300 euros;
- 25/3 inscription au crédit : 500 euros;
- 3/4 inscription au débit : 1000 euros;
- 5/4 intérêts ou frais dus : 5,31 euros :

Le solde débiteur moyen est calculé sur base de 31 jours (du 5/3 au 5/4) comme suit :

$$\frac{(200*2)+(700*13)+(400*5)+(900*2)}{31} = 429{,}03 \text{ euros;}$$

Les intérêts ou frais dus sont calculés comme suit :

2,81 + 2,5 = 5, 31 euro;

- 5/4 nieuw debetsaldo = 900 + 5,31
= 905,31 euro.

Voorbeeld 14

Kredietopening van onbepaalde duur voor een bedrag van 700 euro, met een kaart die een functie bezit bij de kredietverlening; de overeenkomst voorziet een maandelijkse minimale betalingsregeling van 5% van het verschuldigd blijvende saldo in kapitaal en debetintersten en jaarlijkse kosten van een kaart opgelegd als kredietopnemingsmiddel van 20 euro; de jaarlijkse debetrente is 10%.

a) Het jaarlijkse kostenpercentage = 17,44%, berekend zoals in voorbeeld 10.

b) Berekening van de maandelijks verschuldigde rente of kosten bedoeld in artikel 59, § 1 van de wet :

Hetzij een jaarlijkse debetrente van 10%;

Hetzij jaarlijkse kaartkosten van 20 euro, jaarlijks te betalen in maart;

Hetzij een minimale betalingsregeling vastgelegd op de 20ste dag van elke maand;

Hetzij een afgesloten rekening over een periode van 5 februari tot 5 maart (28 dagen);

Hetzij een afrekening van de op 5 maart verschuldigde rente of kosten;

Hetzij de boekingsdata van de verrichtingen in de rekening :

- 5/2 voorafgaand debetsaldo : 200 euro;
- 7/2 kredietopname : 50 euro;
- 20/2 terugbetaling : 10 euro;
- 25/2 : kredietopname : 25 euro;
- 3/3 : kredietopname : 40 euro;
- 5/3 verschuldigde rente of kosten :
1,85 + 20 = 21,85 euro :

Het gemiddelde debetsaldo wordt als volgt berekend op basis van 28 dagen (vanaf 5/2 tot 5/3) :

(200*2) + (250*13) + (240*5) + (265*6) + (305*2)

$((1+8\%)^{31/365} - 1) * 429{,}03 + 2{,}5 =$
2,81 + 2,5 = 5, 31 euros;

- 5/4 nouveau solde débiteur = 900 + 5,31
= 905,31 euros.

Exemple 14

Ouverture de crédit à durée indéterminée, d'un montant de 700 euros, avec support carte ayant une fonction dans l’octroi du crédit; le contrat prévoit une modalité de paiement mensuel minimum de 5% du solde restant dû en capital et intérêts débiteurs et des frais annuels de carte utilisée comme moyen de prélèvement s'élevant à 20 euros; le taux débiteur annuel est 10%.

a) Le taux annuel effectif global = 17,44%, calculé comme dans l’exemple 10.

b) Calcul des intérêts ou frais mensuels dus, visés à l’article 59, § 1er, de la loi :

Soit un taux débiteur annuel de 10%;

Soit des frais de carte annuels de 20 euros, à payer chaque année en mars;

Soit une modalité de paiement minimum fixée le 20 de chaque mois;

Soit un compte arrêté sur une période allant du 5 février au 5 mars (28 jours);

Soit un décompte d’intérêts ou frais dus au 5 mars;

Soit les dates comptables des opérations du compte :

- 5/2 solde débiteur précédent : 200 euros;
- 7/2 prélèvement de crédit : 50 euros;
- 20/2 remboursement : 10 euros;
- 25/2 prélèvement de crédit : 25 euros;
- 3/3 prélèvement de crédit : 40 euros;
- 5/3 intérêts ou frais dus :
1,85 +20 = 21,85 euros :

Le solde débiteur moyen est calculé sur base de 28 jours (du 5/2 au 5/3) comme suit :

(200*2) + (250*13) + (240*5) + (265*6) + (305*2)

28

= 251,79 euro;

De verschuldigde rente of kosten worden als volgt berekend :

a) verschuldigde rente :

$((1+10\%)^{28/365} - 1) * 251,79 =$
$0,007338 * 251,79 = 1,85$ euro;

b) verschuldigde kosten (jaarlijkse kaartkosten) : 20 euro;

c) verschuldigde totale kosten van het krediet :
1,85 + 20 = 21,85 euro;

- 5/3 nieuw debetsaldo = 305 + 21,85 = 326,85 euro.

28

= 251,79 euros ;

Les intérêts ou frais dus sont calculés comme suit :

a) intérêts dus :

$((1+10\%)^{28/365} - 1) * 251,79 =$
$0,007338 * 251,79 = 1,85$ euros;

b) frais dus (frais de carte annuels) : 20 euros;

c) coût total du crédit dû : 1,85 + 20 = 21,85 euros;

- 5/3 nouveau solde débiteur = 305 + 21,85 = 326,85 euro.

ANNEXE II

Taux annuels effectifs globaux maxima fixés pour la vente à tempérament,le prêt à tempérament,et tous les contrats de crédit sauf le crédit-bail.

A)Maxima valables à partir du 15 juillet 1993.
Termes de paiement exprimés en mois.

Montant du crédit.	*Jusqu'à 12 mois.*	*De 13 à 24 mois.*	*De 25 à 48 mois.*	*Plus de 48 mois.*
Jusqu'à 20.000frs	*28,50%*	*27,00%*	-	-
De 20.001 à 100.000frs	*25,00%*	*24,50%*	-	-
De 100.001 à 400.000frs	*21,00%*	*20,50%*	*19,50%*	-
Plus de 400.000frs	*18,00%*	*18,00%*	*17,00%*	*16,50%*

B)Maxima valables à partir du 15 novembre 1994.
Termes de paiement exprimés en mois.

Montant du crédit.	*Jusqu'à 12 mois.*	*De 13à 24 mois.*	*De 25 à 48 mois.*	*Plus de 48 mois.*
Jusqu'à 20.000frs	*27,50%*	*26%*	-	-
De 20.001 à 100.000frs	*24%*	*23,50%*	-	-
De 100.001 à 400.000frs	*19,75%*	*19,25%*	*18,25%*	-
Plus de 400.000frs	*16,50%*	*16,50%*	*15,50%*	*15%*

C) Maxima valables à partir du 9 avril 1996.
Termes de paiement exprimés en mois.

Montant du crédit.	*Jusqu'à 12 mois.*	*De 13 à 24 mois.*	*De 25 à 48 mois.*	*Plus de 48 mois.*
Jusqu'à	*25,50%*	*24,00%*	-	-

20.000frs				
De 20.001 à 100.000frs	***22,00%***	***21,50%***	***-***	***-***
De 100.001 à 400.000frs	***18,00%***	***17,00%***	***16,50%***	***-***
plus de 400.000frs	***14,50%***	***14,50%***	***13,50%***	***13,00%***

D)Maxima valables à partir du 11 avril 1997.
Termes de paiement exprimés en mois.

Montant du crédit.	***jusqu'à 12 mois.***	***de 13 à 24 mois.***	***de 25 à 48 mois.***	***plus de 48 mois.***
jusqu'à 20.000frs	***25,50%***	***24,00%***	***-***	***-***
de 20.001 à 100.000frs	***21,00%***	***20,50%***	***-***	***-***
de 100.001 à 400.000frs	***17,00%***	***16,50%***	***15,50%***	***-***
plus de 400.000frs	***14,00%***	***13,50%***	***12,50%***	***12,00%***

D)Maxima valables à partir du 1er janvier 2002.
Termes de paiement exprimés en mois.

Montant du crédit.	***jusqu'à 12 mois.***	***de 13 à 24 mois.***	***de 25 à 48 mois.***	***plus de 48 mois.***
jusqu'à 500 euros	***25,50%***	***24,00%***	***-***	***-***
plus de 500 euros à 2500 euros	***21,00%***	***20,50%***	***-***	***-***
plus de 2500 à 10.000 euros	***17,00%***	***16,50%***	***15,50%***	***-***
plus de 10.000 euros	***14,00%***	***13,50%***	***12,50%***	***12,00%***

-3-

TAUX ANNUELS EFFECTIF GLOBAUX MAXIMA FIXE POUR LE CREDIT BAIL.

A) Maxima valables à partir du 15 juillet 1994.

Termes de paiement exprimés en mois.

montant du crédit.	*jusqu'à 12 mois.*	*de 13 à 24 mois.*	*de 25 à 48 mois.*	*plus de 48 mois.*
jusqu'à 20.000frs	*28,50%*	*27,00%*	-	-
de 20.001 à 100.000frs	*25,00%*	*24,50%*	-	-
de 100.001 à 400.000frs	*21,00%*	*20,50%*	*19,50%*	-
plus de 400.000frs	*18,00%*	*18,00%*	*17,00%*	*16,50%*

B) Maxima valables à partir du 15 avril 1995.

Termes de paiement exprimés en mois.

montant du crédit.	*jusqu'à 12 mois.*	*de 13 à 24 mois.*	*de 25 à 48 mois.*	*plus de 48 mois.*
jusqu'à 20.000frs	*26,00%*	*24,50%*	-	-
de 20.001 à 100.000frs	*23,00%*	*22,50%*	-	-
de 100.001 à 400.000frs	*18,75%*	*18,25%*	*17,75%*	-
plus de 400.000frs	*15,00%*	*14,00%*	*14,00%*	*13,50%*

-4-

C) Maxima valables à partir du 9 avril 1996.

Termes de paiement exprimés en mois.

montant du crédit.	*jusqu'à 12 mois.*	*de 13 à 24 mois.*	*de 25 à 48 mois.*	*plus de 48 mois.*
jusqu'à 20.000frs	*18,00%*	*17,50%*	-	-
de 20.001 à 100.000frs	*16,00%*	*15,50%*	-	-
de 100.001 à 400.000frs	*14,00%*	*13,50%*	*13,00%*	-
plus de 400.000frs	*12,50%*	*12,00%*	*11,50%*	*11,00%*

D) Maxima valables à partir du 1er janvier 2002.

Termes de paiement exprimés en mois.

montant du crédit.	*jusqu'à 12 mois.*	*de 13 à 24 mois.*	*de 25 à 48 mois.*	*plus de 48 mois.*
jusqu'à 500 euros	*18,00%*	*17,50%*	-	-
plus de 500 euros à 2500 euros	*16,00%*	*15,50%*	-	-
plus de 2500 à 10.000 euros	*14,00%*	*13,50%*	*13,00%*	-
plus de10.000 euros	*12,50%*	*12,00%*	*11,50%*	*11,00%*

TAUX ANNUELS EFFECTIFS GLOBAUX MAXIMA FIXES POUR LES OUVERTURES DE CREDIT ET TOUS LES AUTRES CONTRAT DE CREDIT A L'EXCLUSION DE CEUX FIXES DANS LES ANNEXES II ET III.

Maxima valables à partir du 15 juillet 1994.

montant du crédit.	*ouvertures de crédit avec une carte de paiement ou de légitimation qui ont une fonction dans l'octroi du crédit.*	*autres ouvertures de crédit.*
jusqu'à 50.000frs	*28,00%*	*24,00%*
plus de 50.000frs	*26,00%*	*22,00%*

(*)Uniquement les ouvertures de crédit pour lesquelles les coûts de la carte doivent être repris dans le coût total du crédit et donc dans le T.A.E.G. repris dans l'offre conformément à l'article 2 § 3, 4 , a contrario de l'arrêté royal du 4 août 1992 relatif aux coûts, aux taux, à la durée et aux modalités de remboursement du crédit à la consomation.

B) Maxima valables à partir du 15 novembre 1994.

montant du crédit.	*ouvertures de crédit avec support carte ayant une fonction dans l'octoi du crédit.(*)*	*autres ouvertures de crédit*	
		à durée déterminée	*à durée indéterminée.*
jusqu'à 50.000frs	*27,00%*	*20,00%*	*21,00%*
plus de 50.000frs	*24,00%*	*19,50%*	*20,50%*

(*)Uniquement les ouvertures de crédit pour lesquelles les coûts de la carte doivent être repris dans le coût total du crédit et donc dans le T.A.E.G. repris dans l'offre conformément à l'article 2 § 3, 4, a contrario de l'arrêté royal du 4 août 1992 relatif aux coûts, aux taux, à la durée et aux modalités de renboursement du crédit à la consommation.

C)Maxima valables à partir du 15 avril 1995.

montant du crédit.	*ouvertures de crédit avec support carte ayant une fonction dans l'octroi du crédit.(*)*	*autres ouvertures de crédit.*	
		durée déterminée.	*à durée indéterminée.*
jusqu'à 50.000frs	*26,00%*	*18,50%*	*20,00%*
plus de 50.000frs	*23,00%*	*18,00%*	*19,50%*

(*)Uniquement les ouvertures de crédit pour lesquelles les coûts de la carte doivent être repris dans le coût total du crédit et donc dans le T.A.E.G.repris dans l'offre conformément à l'article 2 § 3, 4 a contrario de l'arrêté royal du 4 août 1992 relatif aux coûts,aux taux,à la durée et aux modalités de remboursement du crédit à la consommation.En d'autres termes,il s'agit uniquement des ouvertures pour lesquelles la carte est imposée par le prêteur comme moyen de prélèvement et qui représente un coût significatif à reprendre dans le T.A.E.G.et à mentionner dans le contrat de crédit.

D) Maxima valables à partir du 9 avril 1996.

montant du crédit.	*ouvertures de crédit avec support carte ayant une fonction dans l'octroi du*	*autres ouvertures de crédit.*	

	crédit.		
		durée déterminée.	***à durée indéterminée.***
jusqu'à 50.000frs	***22,00%***	***15,00%***	***16,00%***
plus de 50.000frs	***19,00%***	***14,50%***	***15,50%***

(*) Uniquement les ouvertures de crédit pour lesquelles les coûts de la carte doivent être repris dans le coût total du crédit et donc dans le T.A.E.G. repris dans l'offre conformément à l'article 2 § 3, 4, a contrario de l'arrêté royal du 4 août 1992 relatif aux coûts ,aux taux,à la durée et aux modalités de remboursement du crédit à la consommation.En d'autre termes,il s'agit uniquement des ouvertures de crédit por lesquelles la carte est imposée par le prêteur comme moyen de prélèvement de crédit et qui représente un coût significatif à reprendre dans le T.A.E.G. et à mentionner dans le contrat de crédit.

E) Maxima valables à partir du 11 avril 1997.

montant du crédit.	***ouvertures de crédit avec support carte ayant une fonction dans l'octroi du crédit.(*)***	***autres ouvertures de crédit.***	
		durée déterminée.	***à durée indéterminée.***
jusqu'à 50.000frs	***19,00%***	***13,50%***	***14,00%***
plus de 50.000frs	***16,00%***	***13,00%***	***13,50%***

(*)Uniquement les ouvertures de crédit pour lesquelles les coûts de la carte doivent être repris dans le coût total du crédit et donc dans le T.A.E.G. repris dans l'offre conformément à l'article 2 § 3, 4, a contrario de l'arrêté royal du 4 août 1992 relatif aux coûts,aux taux,à la durée et aux modalités de remboursement du crédit à la consommation.En d'autres termes,il s'agit uniquement des ouvertures pour lesquelles la carte est imposée par le prêteur comme moyen de prélèvement de crédit et qui représente un coût significatif à reprendre dans le T.A.E.G. et à mentionner dans le contrat de crédit.

F) Maxima valables à partir du 1er janvier 2002

montant du crédit.	***ouvertures de crédit avec support carte ayant une fonction dans l'octroi du crédit.(*)***	***autres ouvertures de crédit.***	
		durée déterminée.	***à durée indéterminée.***
jusqu'à 1250 euros	***19,00%***	***13,50%***	***14,00%***
plus de 1250 euros	***16,00%***	***13,00%***	***13,50%***

(*)Uniquement les ouvertures de crédit pour lesquelles les coûts de la carte doivent être repris dans le coût total du crédit et donc dans le T.A.E.G. repris dans l'offre conformément à l'article 2 § 3, 4, a contrario de l'arrêté royal du 4 août 1992 relatif aux coûts,aux taux,à la durée et aux modalités de remboursement du crédit à la consommation.En d'autres termes,il s'agit uniquement des ouvertures pour lesquelles la carte est imposée par le prêteur comme moyen de prélèvement de crédit et qui représente un coût significatif à reprendre dans le T.A.E.G. et à mentionner dans le contrat de crédit.

Bijlage V

De hierna vermelde voorbeelden worden gegeven in euro, maar dezelfde berekeningswijzen worden toegepast wanneer de kredietovereenkomst in frank werd afgesloten.

Voorbeeld 1

Verkoop op afbetaling van een goed ter waarde van 2.500 euro. De kredietovereenkomst voorziet een voorschot van 500 euro en 24 maandelijkse termijnbedragen van 100 euro. Het jaarlijkse kostenpercentage bedraagt 19,75 %. Vervroegde terugbetaling juist na de 10e betalingstermijn.

In dat geval :

T = 100;
m' = 24;
f = 10;
n = 12;
x = 19,75 %

$$r = \frac{100}{4}\left(3 * \frac{1- 1,1975^{(10-24)/12}}{1,1975^{1/12} - 1} + 24 - 10\right)$$

= 1.289,86 euro

M = (24 - 10) * 100 - 1.289,86 = 110,14

Op de vervaldag van de 10e betalingstermijn (S^{10} = 10/12), zal de consument zijn schuld kunnen kwijten door maximaal te storten :

T + r = 100 + 1.289,86 = 1.389,86 euro

Annexe V

Les exemples ci-après sont donnés en euros, mais les mêmes principes de calcul sont d'application lorsque le contrat de crédit est conclu en francs.

Exemple 1

Vente à tempérament d'un bien d'une valeur de 2.500 euros. Le contrat de crédit prévoit un acompte de 500 euros et 24 montants de terme mensuels de 100 euros. Le taux annuel effectif global est de 19,75 %. Remboursement anticipé juste après le 10ème terme de paiement.

Dans ce cas :

T = 100;
m' = 24;
f = 10;
n = 12;
x = 19,75 %

$$r = \frac{100}{4}\left(3 * \frac{1- 1,1975^{(10-24)/12}}{1,1975^{1/12} - 1} + 24 - 10\right)$$

= 1.289,86 euros

M = (24 - 10) * 100 - 1.289,86 = 110,14

A la date d'échéance du 10ème terme de paiement (S^{10} = 10/12), le consommateur pourra se libérer de sa dette en versant au maximum :

T + r = 100 + 1.289,86 = 1.389,86 euros

Voorbeeld 2

Lening op afbetaling van een bedrag van 3.750 euro terugbetaalbaar in 12 trimesteriële betalingstermijnen van 375 euro. Het jaarlijkse kostenpercentage bedraagt 12,21 %. Vervroegde terugbetaling na 4 betalingstermijnen.

In dat geval :

T = 375;
m' = 12;
f = 4;
n = 4;
x = 12,21 %

$$r = \frac{375}{4}\left(3* \frac{1- 1{,}1221^{(4-12)/4}}{1{,}1221^{1/4} - 1} + 12 - 4\right)$$

= 2.730,81 euro

M = (12 - 4) * 375 - 2.730,81 = 269,19 euro

Op de vervaldag van de 4e betalingstermijn (S^4 = 4/4 = 1), zal de consument zijn schuld kunnen kwijten door maximaal te storten :

T + r = 375 + 2.730,81 = 3.105,81 euro.

Exemple 2

Prêt à tempérament d'une somme de 3.750 euros remboursable en 12 montants de terme trimestriels de 375 euros. Le taux annuel effectif global est de
12,21 %. Remboursement anticipé après 4 termes de paiement.

Dans ce cas :

T = 375;
m' = 12;
f = 4;
n = 4;
x = 12,21 %

$$r = \frac{375}{4}\left(3* \frac{1- 1{,}1221^{(4-12)/4}}{1{,}1221^{1/4} - 1} + 12 - 4\right)$$

= 2.730,81 euros

M = (12 - 4) * 375 - 2.730,81 = 269,19 euros

A la date d'échéance du 4ème terme de paiement (S^4= 4/4 = 1), le consommateur pourra se libérer de sa dette en versant au maximum :

T + r = 375 + 2.730,81 = 3.105,81 euros.

Voorbeeld 3

Financieringshuur van een goed ter waarde van 15.000 euro. De kredietovereenkomst voorziet 48 maandelijkse termijnbedragen van 365 euro; het eerste termijnbedrag dient betaald te worden vanaf de terbeschikkingstelling van het goed. De residuele waarde op het einde van de 48 maanden is 1.000 euro. Het jaarlijkse kostenpercentage bedraagt 11,17 %.

Vervroegde terugbetaling 3 jaar na de terbeschikkingstelling van het goed en dus bij het verstrijken van de 36e betalingstermijn (de eerste betalingstermijn komt niet in aanmerking voor de berekening van het aantal termijnen).

In dat geval :

T = 365;
S = 1000;
m' = 48;
f = 36;
n = 12;

Exemple 3

Crédit-bail d'un bien d'une valeur de 15.000 euros. Le contrat de crédit prévoit 48 montants de terme mensuels de 365 euros ; le premier montant de terme est payable dès la mise à disposition du bien. La valeur résiduelle à la fin des 48 mois est de 1.000 euros. Le taux annuel effectif global est de 11,17 %.

Remboursement anticipé 3 ans après la mise à disposition du bien, soit à l'échéance du 36ème terme de paiement (le premier terme de paiement n'intervenant pas dans le calcul du nombre de termes de paiement).

Dans ce cas :

T = 365;
S = 1000;
m' = 48;
f = 36;
n = 12;

$x = 11{,}17\ \%$

$$r = \frac{365}{4}\left(3 * \frac{1 - 1{,}1117^{-(48-1-36)/12}}{1{,}1117^{1/12} - 1} + 48 - 1-36\right)$$

$$+ \frac{1000}{4}\left(1+ 3 * (1{,}1117)^{-(48-36)/12}\right)$$

$= 4.785{,}47$ euro

$M = (48 - 1 - 36) * 365 + 1000 - 4.785{,}47 = 229{,}53$ euro

Op de vervaldag van de 36e termijn ($S_{36} = 36/12 = 3$, de eerste betalingstermijn is niet inbegrepen) zal de consument zijn schuld kunnen kwijten door maximaal te storten :

$T + r = 365 + 4.785{,}47 = 5.150{,}47$ euro.

Gezien om te worden gevoegd bij Ons besluit van

$x = 11{,}17\ \%$

$$r = \frac{365}{4}\left(3 * \frac{1 - 1{,}1117^{-(48-1-36)/12}}{1{,}1117^{1/12} - 1} + 48 - 1-36\right)$$

$$+ \frac{1000}{4}\left(1+ 3 * (1{,}1117)^{-(48-36)/12}\right)$$

$= 4.785{,}47$ euros

$M = (48 - 1 - 36) * 365 + 1000 - 4.785{,}47 = 229{,}53$ euros

A la date d'échéance du 36ème terme de paiement ($S_{36} = 36/12 = 3$, le premier terme de paiement n'étant pas compris), le consommateur pourra donc se libérer de sa dette en versant au maximum :

$T + r = 365 + 4.785{,}47 = 5.150{,}47$ euros.

Vu pour être annexé à Notre arrêté du

Van Koningswege :

Par le Roi :

De Minister van Financiën,

Le Ministre des Finances,

Didier REYNDERS

De Minister van Economie,

Le Ministre de l'Economie,

Charles PICQUÉ

LES CONTRATS DE LOCATION-FINANCEMENT (LEASING).

1. DEFINITIONS ET CARACTERISTIQUES.

A. LE LEASING.

Selon l'AR du 10 novembre 1967, le leasing est un contrat entre deux personnes, le donneur (ou bailleur) et le preneur (ou locataire). Ce contrat a les caractéristiques suivantes :

- Il porte sur des biens d'équipement affectés par le preneur à des fins professionnelles.
- Ces biens sont achetés par le donneur selon les spécifications fournies par le preneur.
- La durée du bail correspond à la durée de vie économique du bien.
- Les redevances permettent de couvrir les intérêts, les charges du contrat et la reconstitution du capital investi par le donneur.
- Un transfert de propriété de plein droit au preneur ou une option d'achat en faveur de ce dernier doivent être prévus en fin de contrat.

Ces caractéristiques, relativement précises, permettent, en droit comptable, de distinguer le leasing d'autres contrats comme par exemple le contrat de location.

Exemple.

L'entreprise de travaux publics X… désire prendre en leasing une machine dont elle spécifie les caractéristiques techniques ; elle s'adresse à l'entreprise de leasing L… qui acquiert ce matériel pour la somme de 5.000.000 €.
L'entreprise de leasing établit alors un contrat de leasing d'une durée de 4 ans, durée de vie économique présumée de la machine. L'option d'achat en fin de bail est de 200.000 €. Les 16 redevances trimestrielles ajoutées à l'option d'achat doivent avoir un montant égal au capital investi (5.000.000 €) auquel il faut ajouter les intérêts et les charges de l'opération.
Supposons que les charges de l'opération ainsi que l'intérêt au taux annuel de 9 % soient, pour une période de 4 ans, de 3.000.000 € ; les redevances trimestrielles doivent atteindre le total de (5.000.000 – 200.000 + 3.000.000) = 7.800.000 €.

Le droit comptable fait également une distinction entre le leasing financier (« full pay out ») et le leasing opérationnel (« non full pay out ») :

- ***Leasing financier*** : le contrat de leasing financier prévoit la reconstitution intégrale du capital investi (voir conditions ci-dessus) ; dans ce cas, les biens financés par leasing sont repris à l'actif du bilan du preneur et sont en outre amortis.
- ***Leasing opérationnel*** : le contrat de leasing opérationnel ne prévoit pas la reconstitution intégrale du capital ; le traitement comptable de ce contrat (qui ressemble davantage à un contrat de location) consiste uniquement à imputer les redevances au compte de résultats au fur et à mesure de leur paiement.

AR du 3 décembre 1993.

La définition comptable du leasing a été modifiée par l'AR du 3 décembre 1993 ; cette définition s'applique depuis lors aux opérations conclues à partir du 1er janvier 1994.

Cet AR confirme que le critère déterminant d'un contrat de leasing reste la reconstitution intégrale du capital investi par le donneur. En revanche, la présence dans un contrat d'un option d'achat ou d'une clause de transfert de propriété à l'échéance n'est plus considérée comme un élément déterminant d'un contrat de leasing.
Le texte nouveau détermine de façon plus précise les éléments à prendre en considération pour apprécier s'il y a ou non reconstitution intégrale du capital. S'il y a option d'achat en fin de contrat, le prix de cette option est pris en considération en tant qu'élément de la reconstitution du capital à condition qu'il soit hautement probable que l'option soit effectivement levée (payée) à ce moment.
Le législateur a considéré que la probabilité de levée de l'option diminue lorsque son prix augmente ; aussi a-t-il estimé que lorsque le prix de l'option dépasse 15 % du capital investi par le donneur, l'opération ne peut plus être considérée comme une opération de leasing. Il est en effet permis de penser que si le prix de levée de l'option est élevé, le donneur ne transférera pas au preneur l'essentiel des risques afférents au bien et que dès lors, l'opération ne sera plus une opération de crédit.

<u>Exemples.</u>

- Un bien de 1.000.000 € est pris en leasing ; l'option est de 50.000 € en fin de bail ; le contrat d'une durée de 5 ans prévoit la reconstitution de 950.000 € de capital.
- Un bien de 1.000.000 € est pris en location ; l'option est de 200.000 € en fin de bail ; le contrat d'une durée de 5 ans prévoit la reconstitution de 800.000 € de capital ; ce contrat n'est pas un contrat de leasing.

Est aussi assimilée à l'option d'achat, et dans les mêmes conditions, la possibilité pour le preneur de poursuivre le contrat moyennant redevance. Ainsi, le contrat qui prévoit que le preneur peut prolonger le contrat de quelque temps moyennant le paiement d'une redevance de 10 % de la valeur du capital investi par le donneur, est un contrat de leasing. Si la redevance était, par exemple, de 20 %, il ne pourrait être considéré comme un contrat de leasing.

La nouvelle législation maintient la distinction faite précédemment entre le leasing immobilier et le leasing mobilier.

- <u>***Leasing immobilier***</u> : dans un contrat de leasing immobilier, les redevances échelonnées prévues au contrat doivent au moins couvrir, outre les intérêts et les charges de l'opération, la reconstitution du capital investi par le donneur dans la seule construction.

  Exemple.

  Un immeuble de 2.000.000 € construit sur un terrain de 100.000 € est donné en leasing pour une durée de 20 ans. Les redevances échelonnées dues en vertu du contrat doivent couvrir un montant de 2.000.000 € ainsi que les intérêts et les charges liées à l'opération.

- <u>***Leasing mobilier***</u> : dans un contrat de leasing mobilier, les redevances dues, majorées éventuellement du montant à payer en cas de levée de l'option, doivent être au moins égales (outre les intérêts et les charges liées à l'opération) au montant du capital investi par le donneur dans le bien meuble faisant l'objet du contrat.

Exemple.

Un matériel de 5.000.000 € a été donné en leasing pour une durée de 5 ans ; l'option d'achat est de 100.000 €. Les redevances échelonnées doivent reconstituer 4.900.000 € de capital plus les intérêts et autres charges liées à l'opération.

Selon le même AR, un élément supplémentaire est à prendre en considération pour la détermination de la reconstitution du capital investi : il s'agit de l'**option de vente à un tiers** dont peut bénéficier le donneur. Celle-ci doit être prise en compte au même titre que l'option d'achat au bénéfice du preneur de leasing ; toutefois la règle des 15 % ne s'applique pas dans ce cas.

B. LE SALE AND LEASE BACK.

La convention de "sale and lease back" est une opération par laquelle une entreprise, propriétaire d'une immobilisation corporelle, vend celle-ci et, simultanément, en retrouve l'usage par la conclusion d'un contrat de leasing.

Exemple.

La société A, propriétaire d'un matériel depuis 5 ans, le cède pour 300.000 € à la société LEASBACK, spécialisée en location-financement.
La société LEASBACK rétrocède ce même bien à la société A sous forme d'un contrat de location-financement d'une durée de 3 ans et moyennant un loyer annuel de 120.000 €.

2. LES REGLES D'ENREGISTREMENT DU LEASING.

CHEZ LE PRENEUR.

- Les droits résultant du contrat sont portés à l'actif (sous déduction des amortissements) à concurrence de la partie des versements échelonnés représentant la reconstitution du capital, à l'exclusion de la partie « intérêts ».
- L'amortissement du bien doit être calculé sur la valeur d'utilisation probable. Il peut cependant faire l'objet d'amortissements progressifs de telle sorte que les amortissements et les intérêts correspondent aux versements contractuels périodiques (puisque les remboursements du capital sont progressifs).

CHEZ LE DONNEUR.

- Lorsque le donneur acquiert un bien dans la perspective d'un contrat de leasing, il ne peut l'enregistrer comme une immobilisation corporelle (Avis de la Commission des Normes Comptables, 1988). La Commission recommande d'utiliser le compte 604 « Achats de marchandises destinés à la location-financement » lors de l'acquisition du bien ainsi que le compte 6094 « Variation de stock de marchandises ».

604	Achats de marchandises destinées à la location-financement
A	
440	Fournisseurs

340	Marchandises (valeur d'acquisition)
A	
6094	Variation de stock de marchandises

- Lorsque le donneur concède le droit d'usage du bien, il l'enregistre dans son chiffre d'affaires ainsi qu'en variation de stock.

290	Créances commerciales à plus d'un an
A	
700	Chiffre d'affaires

6094	Variation de stock de marchandises
A	
340	Stock de marchandises (valeur d'acquisition)

3. LA TVA ET LE LEASING.

LE LEASING IMMOBILIER.

<u>Le leasing immobilier est soumis à la TVA sous certaines conditions</u> :

<u>Conditions concernant le les biens.</u>

- Les biens doivent être bâtis.
- Ils doivent être construits ou acquis avec application de la TVA.
- Ils doivent être utilisés par le preneur dans le cadre de son activité d'assujetti.
- Ils doivent être construits ou acquis selon les spécifications du preneur.

<u>Conditions concernant le contrat.</u>

- Le contrat ne peut être résiliable.
- Il ne peut être translatif de propriété.
- Il doit prévoir une option d'achat.
- Le montant des redevances majoré du prix de l'option doit permettre de reconstituer le capital investi par le donneur y compris les intérêts et les charges du contrat.

<u>Base imposable.</u>

- La TVA est due sur le total de la redevance.
- Le taux est de 21 %.
- <u>Remarque</u> : lors de la levée de l'option, un droit d'enregistrement de 12,5 % est dû sur le prix d'exercice de l'option, avec, comme base minimale, la valeur vénale.

LE LEASING MOBILIER.

Conditions.

Le leasing mobilier est considéré comme une prestation de services. Lorsque cette prestation est faite par un assujetti, en Belgique et à titre onéreux, elle est soumise à la TVA.

Base imposable.

La redevance de leasing et le prix d'exercice de l'option sont soumis à la TVA.

4. LA COMPTABILISATION DU « SALE AND LEASE BACK ».

Lors de la cession du bien, il peut y avoir une plus-value ou une moins-value, le bien étant vendu à un prix supérieur ou inférieur à sa valeur comptable.
S'il s'agit d'une plus-value, il faut considérer qu'elle a en contrepartie une charge accrue au cours d'exercices ultérieurs et que dès lors il n'y a pas réellement de plus-value réalisée.
Etant donné que la plus-value constatée lors de la cession sera finalement annulée par les charges d'amortissement, l'article 19bis (AR du 08 octobre 1976) prévoit de porter en compte de régularisation de passif (493 : produits à reporter) le montant de la plus-value de cession et d'incorporer chaque année au compte de résultats (741 : plus-values sur réalisations courantes d'immobilisations corporelles) une partie de ce montant calculée en fonction de l'amortissement de l'immobilisation détenue en leasing.
S'il s'agit d'une moins-value, elle doit être portée en compte de régularisation d'actif (490 : charges à reporter) ; le cas échéant, une partie du montant sera incorporée au compte de résultats (641 : moins-values sur réalisations courantes d'immobilisations corporelles), au rythme des amortissements de l'immobilisation détenue en leasing.

5. LE TABLEAU DES REMBOURSEMENTS.

Dès l'instant où il remplit les conditions d'un contrat de location-financement, le contrat donne lieu à la détermination du montant d'une annuité constante et à l'établissement d'un tableau de remboursement qui ventile la redevance (annuité) entre le remboursement du principal et les intérêts sur le solde restant dû.

Application.

La société X acquiert, en leasing, une machine dont la valeur d'acquisition est de 10.000 € ; le contrat de leasing est établi pour une durée de 5 ans ; le taux d'intérêt annuel est de 6 % ; le preneur a la possibilité d'acquérir, en fin de bail, la machine pour un montant de 1.000 €.

Calcul de l'annuité constante.

$$\mathbf{A = VA \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}$$

$$A = (10.000 - 1.000) \times \frac{0{,}06 \times (1 + 0{,}06)^5}{(1 + 0{,}06)^5 - 1} = 9000 \times \frac{0{,}06 \times 1{,}338225578}{0{,}338225578} = 2136{,}57\ €$$

Année	Principal	Intérêts	Annuité	Solde restant dû
1	1596,57	540	2136,57	7403,43
2	1692,36	444,21	2136,57	5711,07
3	1793,91	342,66	2136,57	3917,16
4	1901,54	235,03	2136,57	2015,62
5	2015,62	120,92	2136,57	0
Total	**9000**	**1682,85**	**10682,85**	**-**

Remarquons que, à la date d'acquisition par le preneur, le bien est inscrit parmi les immobilisations corporelles pour le montant de 9000 €.
Si le bien est amorti durant 5 ans (durée de vie économique du bien) selon la méthode de l'amortissement linéaire, le montant amorti est, durant les 3 premières années, inférieur au remboursement en principal ; sous cette hypothèse, le total des charges (amortissements + intérêts) est inférieur à ce qui est effectivement décaissé. C'est la raison pour laquelle il est autorisé de pratiquer un amortissement progressif de telle sorte que le total des charges corresponde, du point de vue comptable, aux décaissements réels.

Exercices.

La société Y acquiert, en leasing, une machine dont la valeur d'acquisition est de 20.000 € ; le contrat de leasing est établi pour une durée de 5 ans ; le taux d'intérêt annuel est de 8 % ; le preneur a la possibilité d'acquérir, en fin de bail, la machine pour un montant de 2.000 €.

La société Z acquiert, en leasing, une machine dont la valeur d'acquisition est de 30.000 € ; le contrat de leasing est établi pour une durée de 5 ans ; le taux d'intérêt annuel est de 5 % ; le preneur a la possibilité d'acquérir, en fin de bail, la machine pour un montant de 10.000 €.

RESOLUTION.

Exercice n° 1.

Calcul de l'annuité constante.

$$\mathbf{A = VA\ .\ \frac{i\ .\ (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}$$

$$A = (20.000 - 2.000) \times \frac{0{,}08 \times (1 + 0{,}08)^5}{(1 + 0{,}08)^5 - 1} = 18.000 \times \frac{0{,}08 \times 1{,}469328077}{0{,}469328077} = 4.508{,}22\ €$$

Tableau des remboursements.

Année	**Principal**	**Intérêts**	**Annuité**	**Solde restant dû**
1	3.068,22	1440	4.508,22	14.931,78
2	3.313,68	1.194,54		11.618,10
3	3.578,77	929,45		8.039,33
4	3.865,07	643,15		4.174,26
5	4174,26	333,96		0
Total	**18.000**	**4.541,10**	**22.541,10**	**-**

Exercice n° 2.

Calcul de l'annuité constante.

$$\mathbf{A = VA\ .\ \frac{i\ .\ (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}$$

$$A = (30.000 - 10.000) \times \frac{0{,}05 \times (1 + 0{,}05)^5}{(1 + 0{,}05)^5 - 1} = 20.000 \times \frac{0{,}05 \times 1{,}276281562}{0{,}276281562} = 4.619{,}50\ €$$

Tableau des remboursements.

Il n'y a pas lieu d'établir un tableau de remboursement : le montant de l'option d'achat étant supérieur à 15 % de la valeur d'acquisition, il ne s'agit pas d'un contrat de leasing ; en conséquence, la totalité des redevances est à imputer au compte de résultats.

Les pensions complémentaires.

Le système de pension en Belgique repose sur trois piliers. Le premier pilier est la pension légale, payée par l'Etat et financée par **répartition**, selon le principe de la solidarité : les actifs cotisent pour les non-actifs. Le deuxième pilier est la pension dite extralégale ou complémentaire, dont le but est de compenser une partie de la différence pouvant exister entre la rémunération d'un travailleur et sa pension légale : il n'y a pas de solidarité, et le financement doit se faire par **capitalisation**, c'est-à-dire que des réserves doivent être constituées tout au long de la vie active afin de payer les prestations au moment de la pension ou de la cessation d'activité (décès, invalidité). Enfin, depuis 1987, existe le troisième pilier ou épargne-pension qui permet la constitution d'une réserve de pension personnelle via l'**épargne individuelle**.

Les entreprises sont, depuis le 1er janvier 1986, confrontées à un choix puisque la loi les oblige à constituer des réserves de pension via des dotations à une entité juridique distincte, ceci afin de protéger les droits des futurs pensionnés en cas de faillite (les fonds internes sont prohibés). Or, deux systèmes sont surtout utilisés : l'**assurance-groupe** et le **fonds de pension**, qui sont radicalement différents dans leur mise en œuvre et dans la philosophie qui les sous-tend.

En schématisant, on peut dire que l'assurance groupe offre les avantages d'une gestion administrative facile et d'une plus grande prévisibilité à court terme des coûts grâce à la garantie d'un rendement minimum.
Le fonds de pension, lui, doit normalement générer de meilleures performances à long terme, ce qui a pour conséquence d'abaisser les coûts des entreprises, au prix d'une certaine incertitude à court terme.

En vertu de la législation en vigueur (AR du 6 novembre 1981 ; AR du 14 mai 1985), ce sont donc les entreprises d'assurance sur la vie ou les fonds de pension autonomes (sous forme d'ASBL) qui constituent les provisions techniques nécessaires.
Par conséquent, les obligations qui résultent pour toute entreprise belge des réglementations en matière de pensions de retraite et de survie se traduisent dans le compte de résultats (primes) et éventuellement en une dette au bilan (prime non encore payée).
Un régime transitoire a été mis en place pour la partie des engagements non couverts relative aux prestations afférentes aux années antérieures au 1er janvier 1986. ainsi pour les engagements concernant des prestations des membres du personnel entrés en service avant le 31 décembre 1985, aucune provision ne doit être constituée. En revanche, des provisions doivent être constituées par l'intermédiaire du fonds de pension ou de l'assurance groupe pour les membres du personnel entrés en service depuis le 31 décembre 1985.
L'arrêté royal sur les comptes annuels (8 octobre 1976) se limite à demander d'indiquer dans le point de l'Annexe consacré aux droits et engagements les mentions suivantes :

> *« Si les membres du personnel ou les dirigeants de l'entreprise bénéficient d'un régime complémentaire de pension de retraite ou de survie, une description succincte de ce régime et des mesures prises par l'entreprise pour couvrir la charge qui en résultera. En ce qui concerne les pensions dont le service incombe à l'entreprise elle-même, le montant des engagements qui résultent pour elle de prestations déjà effectuées fait l'objet d'une estimation dont les bases et méthodes sont énoncées de manière succincte. »*

la commission des normes comptables a été interrogée sur le point de savoir s'il convenait d'indiquer le montant nominal ou actualisé de la provision. La réponse a été la suivante :

> *« Le montant de la provision à constituer doit de toute évidence tenir compte du risque de mortalité d'une part, du facteur intérêt d'autre part. quant à ce dernier, il est évident que la date à laquelle la charge devra être payée et son échelonnement interviendront nécessairement par voie d'actualisation dans l'évaluation directe de la provision à constituer, si cette date est éloignée de plus d'un an. »*
> *(Avis 107/9, Bulletin n° 23, décembre 1988)*

Quel que soit le choix effectué par l'entreprise entre l'assurance groupe et le fonds de pension, la nature des engagements est différente :

- L'assurance groupe garantit le taux légal sur les dotations nettes versées. Il s'agit d'un engagement de résultat.
- Le fonds de pension peut avoir un engagement de moyen, c'est-à-dire qu'il se borne à gérer le mieux possible les réserves qui lui sont confiées ou un engagement de résultat en échange de versements déterminés.

Aspects comptables : utilisation du compte 160.

La doctrine comptable a adopté le principe selon lequel les provisions pour prépensions doivent être comptabilisées à la date à laquelle naît, dans le chef de l'entreprise, l'obligation de verser l'indemnité de prépension, c'est-à-dire le moment où le congé est notifié au travailleur. Dans la pratique, il conviendra donc d'actualiser le montant des versements échelonnés des prépensions afin de constituer ou d'ajuster les provisions concernées. Dans ce cadre, il est de pratique courante de se baser sur le rendement des fonds d'état pour l'échéance concernée.

Remarque : en ce qui concerne le risque de mortalité, il est manifeste que, pratiquement, l'entreprise doit obtenir des informations auprès d'un actuaire ; les probabilités de survie étant un élément statistique basé sur la notion de population suffisante, il va de soi que les probabilités disponibles sont inégalement fiables, notamment en fonction des secteurs d'activité. Ainsi on a utilisé jusqu'en 1993 les tables de mortalité 1968-72 ; celles-ci ont conduit à une sous-estimation des provisions à constituer pour pensions et prépensions échelonnées dans le temps. L'exemple décrit ci-dessous ne tient pas compte de la probabilité de survie.

Exemple.

Prenons le cas d'un homme prépensionné, âgé de 55 ans et ayant droit, à charge de l'entreprise, à une rente annuelle indexée de 100.000 jusqu'à l'âge légal de la pension, à savoir 65 ans.
L'obligation de l'entreprise naît au 31 décembre 1992, le premier versement devant être fait le 31 décembre 1993. Supposons que l'entreprise anticipe que le taux d'inflation annuel futur s'élèvera à 2,5 %. Par ailleurs, le taux d'intérêt nominal des fonds d'Etat à long terme s'élève à 8 %.

Au 31 décembre 1992, l'entreprise estimera la valeur actualisée des décaissements futurs de la manière suivante :

Date	**Rente annuelle**	**Rente nominale**	**Rente actualisée**
31/12/1993	100.000	102.500	94.907
31/12/1994	100.000	105.063	90.075
31/12/1995	100.000	107.689	85.487
31/12/1996	100.000	110.381	81.133
31/12/1997	100.000	113.141	77.002
31/12/1998	100.000	115.969	73.080
31/12/1999	100.000	118.869	69.359
31/12/2000	100.000	121.840	65.826
31/12/2001	100.000	124.886	62.474
31/12/2002	100.000	128.008	59.292
		TOTAL :	**758.635**

(Rente nominale)$_t$ = (Rente annuelle)$_t$ * $(1 + 0{,}08)^t$
(Rente actualisée)$_t$ = (Rente nominale)$_t$ / $(1 + 0{,}08)^t$

Le 31 décembre 1992, on passe l'écriture suivante :

6350	Dotation aux provisions pour pensions	758.635	
	A		
160	Provisions pour pensions		758.635

Le 31 décembre 1993, l'entreprise verse la rente avec un coefficient d'indexation de 2,76 % :

624	Pensions de retraite et survie	102.760	
	A		
550	Banques		102.760

160	Provisions pour pensions	102.760	
	A		
6351	Utilisations de provisions pour pensions		102.760

Si le bénéficiaire est toujours vivant après le paiement de la première rente, la provision nécessaire au 31 décembre 1993 s'établira de la manière suivante (on suppose que toutes choses demeurent égales en ce qui concerne le taux d'inflation anticipé de 2,5 % et le taux d'intérêt long terme de 8 %) :

Date	Rente annuelle	Rente nominale	Rente actualisée
31/12/1994	100.000	105.063	97.281
31/12/1995	100.000	107.689	92.326
31/12/1996	100.000	110.381	87.630
31/12/1997	100.000	113.141	83.162
31/12/1998	100.000	115.969	78.927
31/12/1999	100.000	118.869	74.908
31/12/2000	100.000	121.840	71.092
31/12/2001	100.000	124.886	67.472
31/12/2002	100.000	128.008	64.036
		TOTAL :	**716.834**

On passe en conséquence l'écriture suivante :

6350	Dotations aux provisions pour pensions	60.959	
	A		
160	Provisions pour pensions		60.959*

60.959* = (758.635 – 102.760) – 716.834

il faut en effet tenir compte du facteur d'actualisation sur les rentes non échues. Cet ajustement se fera à chaque fin d'exercice.

La C.N.C. a admis que, dans le cas des pensions et prépensions indexées, les montants devaient être évalués à leur valeur actuelle et non à leur valeur nominale ; on peut en outre constater que les principales normes existantes en la matière à l'étranger ont toutes consacré le principe de l'actualisation.

Les normes IAS.

La norme IAS 19 de l'IASB, appelée à l'origine « Comptabilisation des prestations de retraite dans les états financiers », fut adoptée en janvier 1983, révisée en 1993, puis en 1998 et 2000, et est maintenant intitulée « Avantages du personnel ». Elle traite de toutes formes de contrepartie donnée par une entreprise au titre des services rendus par son personnel.
Si elle évoque la comptabilisation et l'évaluation des avantages à court terme, c'est-à-dire les avantages du personnel (autres que les indemnités de fin de contrat de travail et les avantages sur capitaux propres) qui sont dus intégralement dans les 12 mois suivant la fin de l'exercice (salaires, cotisations sociales, congés, intéressement, avantages non monétaires comme le logement ou les services gratuits), elle reste consacrée, pour l'essentiel, aux avantages postérieurs à l'emploi (retraites notamment).
Il faut noter que la norme IAS 26 traite, quant à elle, de la comptabilité et des rapports financiers présentés par les régimes de retraite.

Typologie des différents régimes de retraite.

Selon la norme IAS 19, un régime de retraite est une convention par laquelle une entreprise s'engage à fournir à ses salariés des prestations au moment de leur départ à la retraite (capital ou indemnité) ou pendant la période de retraite (pension ou rente).

- **Les régimes à cotisations définies :** il s'agit de régimes dans lesquels le montant des prestations futures à servir est assis sur le niveau des cotisations qui ont été versées par l'entreprise ou l'employé à un organisme tiers augmenté, le cas échéant, des revenus des placements correspondants.

- **Les régimes à prestations définies :** dans ce type de régimes, l'engagement de l'entreprise consiste à assurer à ses employés en activité ou à ses retraités un niveau prédéfini de prestations déterminé par application d'une formule prévue par le régime et dont les paramètres de base sont habituellement le niveau de salaire et / ou le nombre d'années de service. Ce régime peut faire l'objet d'une couverture financière totale ou partielle ou ne faire l'objet d'aucune couverture. La norme distingue deux types de couverture différents :

    - Soit la constitution d'un fonds spécial, séparé de l'entreprise ;
    - Soit le fonds se présente sous la forme d'un contrat d'assurance.

  La comptabilisation des régimes de retraite est indépendante du mode de couverture.

Distinction entre les 2 sortes de régimes : le facteur déterminant dans la distinction de ces 2 régimes est le fait de savoir si l'entreprise est, ou n'est pas, tenue par les clauses d'une convention, ou par les usages, d'assurer les prestations de retraite convenues.

Evaluation des engagements de retraite.

Pour les régimes à cotisations définies, l'évaluation de l'engagement est en principe sans objet.
S'agissant des régimes à prestations définies, une évaluation doit être établie en distinguant :

- Les droits correspondant aux services rendus au cours de l'exercice concerné
- Les droits correspondant aux services rendus au cours des exercices antérieurs

On distingue 2 grandes familles de méthodes : les méthodes rétrospectives et les méthodes prospectives.

Les méthodes rétrospectives : ces méthodes déterminent le coût des prestations attribuables aux bénéficiaires du fait de leurs années de service effectuées jusqu'à la date d'évaluation de l'engagement.

Les méthodes prospectives : ces méthodes reflètent les prestations de retraite déterminées d'après les services tant rendus qu'à rendre par les salariés à la date d'évaluation actuarielle. Ces méthodes répartissent uniformément le coût des prestations par part annuelle égale sur la période totale du service du salarié dans l'entreprise. Il existe différents types de méthodes prospectives : méthode normale de l'âge d'entrée ; méthode de la prime individuelle régulière ; méthode de groupe ; méthode normale de l'âge atteint.

Tableau récapitulatif.

	Méthodes rétrospectives	**Méthodes prospectives**
Droits acquis	Somme des droits acquis à la date d'évaluation de l'engagement	Somme des droits acquis à la date de départ à la retraite
Modalités de répartition de l'engagement dans le temps	Montée en charge progressive de l'engagement au fur et à mesure de l'acquisition des droits	Etalement linéaire (en valeur absolue ou en pourcentage des rémunérations) de la charge globale sur la durée de vie active du salarié

Les méthodes rétrospectives.

Ces méthodes déterminent donc le coût des prestations attribuables aux bénéficiaires du fait de leurs années de service effectuées jusqu'à la date d'évaluation de l'engagement.

- Le coût annuel des services rendus est égal à la valeur actuelle des prestations de retraite qui seront payées au titre des services rendus pendant l'année.
- Le coût des services passés est égal à la valeur actuelle, lors de la première mise en place (ou lors de la modification) du régime, des prestations de retraite qui seront payées au titre des services rendus jusqu'à cette mise en place.
- La dette actuarielle rétrospective est la valeur actuelle des prestations qui seront payées lors du départ à la retraite et relatives à l'ensemble des services rendus à la date d'évaluation.

Le coût des droits acquis est modulé par :

- La probabilité que les bénéficiaires perçoivent effectivement une rente ou une indemnité (probabilité liée à la survie).
- La probabilité d'espérance de survie après l'âge de départ à la retraite.
- Un coefficient d'actualisation pour tenir compte du décalage existant dans le temps entre la date d'évaluation de l'engagement, celle du départ à la retraite et celle du dernier versement des prestations.

Le calcul peut être effectué en tenant compte :

- Soit des salaires de fin d'exercice (méthode rétrospective pure).
- Soit des salaires de fin de carrière (méthode rétrospective avec salaires de fin de carrière).

La méthode des unités de crédit projetées (« projected unit credit method »).

Selon cette méthode, on considère que chaque année de service donne droit à une unité de prestation de retraite supplémentaire et on évalue chaque unité séparément pour constituer une obligation de retraite totale.

Application.

Considérons un régime de retraite dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Rente annuelle de 0,2 % par année d'ancienneté assise sur le dernier salaire annuel.
- Date de mise en place du régime : 31/12/n
- Dernier salaire annuel au 31/12/n : 100.000 €
- Age de départ à la retraite : 65 ans
- Age du salarié au 31/12/n : 35 ans
- Ancienneté du salarié au 31/12/n : 5 ans
- Taux d'actualisation : 5 %
- Probabilité au 31/12/n de présence du salarié dans l'entreprise à l'âge de 65 ans (survie et rotation) : 70 % (71 % au 31/12/n+1).
- Espérance de vie après l'âge de la retraite exprimée en nombre d'années et actualisée : 15 ans (table de rentes viagères : TV 88/90 ; taux d'actualisation de 5 %, revalorisation des rentes de 3 %).

<u>Montant des droits acquis au 31/12/n (calculé avec salaire de fin de carrière ; revalorisation des rémunérations de 3 %)</u> :

$$100.000\text{ €} \times (1 + 0{,}03)^{30} \times 5 \text{ ans} \times 0{,}2\ \% \times 15 \text{ ans} \times 70\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}05)^{30}} = 5.896\text{ €}$$

<u>Montant des droits acquis au 31/12/n+1 (calculé avec salaire de fin de carrière ; revalorisation des rémunérations de 3 %)</u> :

$$100.000\text{ €} \times (1 + 0{,}03)^{30} \times 6 \text{ ans} \times 0{,}2\ \% \times 15 \text{ ans} \times 71\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}05)^{29}} = 7.536\text{ €}$$

<u>Le coût des services rendus pendant l'exercice n+1 est obtenu par différence</u> :

7.536 – 5.896 = 1.640 €

<u>La méthode des unités de crédit projetées.</u>

<u>Montant total de la pension annuelle à laquelle aura droit le salarié lors de son départ à la retraite (avec 35 ans d'ancienneté)</u> :

100.000 € x $(1 + 0{,}03)^{30}$ x 0,2 % x 35 ans = 16.990 €

<u>Montant total de l'engagement calculé à la date de départ à la retraite</u> :

16.990 € x 15 ans = 254.850 €

<u>Valeur actuelle de l'unité de prestation annuelle correspondant à l'année n</u> :

(1 / 35) x 254.850 x 70 % x $[1 / (1 + 0{,}05)^{30}]$ = 1.179 €

Remarque : ce montant ne représente qu'une partie de la charge de retraite de l'exercice ; il faut y ajouter l'impact des facteurs actuariels (taux d'actualisation, taux de rotation et taux de mortalité) sur les unités de crédit des exercices antérieurs.

Montant des droits acquis au 31/12/n :

$$254.850 \text{ €} \times (5 / 35) \times 70\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}05)^{30}} = 5.896 \text{ €}$$

Montant des droits acquis au 31/12/n+1 :

$$254.850 \text{ €} \times (6 / 35) \times 71\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}05)^{29}} = 7.536 \text{ €}$$

Le coût des services rendus pendant l'exercice n+1 est obtenu par différence :

7.536 – 5.896 = 1.640 €

Exercice.

Soit un régime de retraite dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Rente annuelle de 0,25 % par année d'ancienneté assise sur le dernier salaire annuel.
- Date de mise en place du régime : 31/12/n
- Dernier salaire annuel au 31/12/n : 40.000 €
- Age de départ à la retraite : 65 ans
- Age du salarié au 31/12/n : 45 ans
- Ancienneté du salarié au 31/12/n : 10 ans
- Taux d'actualisation : 4 %
- Probabilité au 31/12/n de présence du salarié dans l'entreprise à l'âge de 65 ans (survie et rotation) : 80 % (81 % au 31/12/n+1).
- Espérance de vie après l'âge de la retraite exprimée en nombre d'années et actualisée : 15 ans (table de rentes viagères : TV 88/90 ; taux d'actualisation de 4 %, revalorisation des rentes de 2,5 %).

Evaluer, en utilisant (a) la méthode rétrospective avec salaire de fin de carrière et (b) la méthode des unités de crédit projetées, les engagements de retraite au 31/12/n et au 31/12/n+1 ; calculer le coût des services rendus durant l'année n+1.

La méthode des unités de crédit projetées : variante.

Dans « Pratique des normes IAS / IFRS » (2003), R. OBERT présente, aux pages 317-319, une variante de la méthode présentée ci-dessus ; la méthode a l'avantage, en corrigeant la probabilité liée au taux de mortalité et au taux de survie (coefficient de probabilité), de faire coïncider le coût des services rendus et le montant de l'unité de crédit projetée ; en revanche les facteurs postérieurs au départ à la retraite (revalorisation de la rente, espérance de vie) sont pris en considération au moyen d'une formule qui vient corriger le montant des unités de crédit projetées ; rappelons que, dans la méthode présentée ci-dessus, ces facteurs sont intégrés dans le calcul de la valeur actualisée de l'engagement total.

Illustration.

La société Thêta prévoit pour son personnel une retraite d'entreprise calculée sur le dernier salaire. Cette retraite est accordée à tous les salariés à l'âge de 60 ans, même s'ils ont quitté l'entreprise. Elle est égale à 0,5 % du dernier salaire par année d'ancienneté dans l'entreprise. Elle n'est cependant pas versée aux salariés qui n'ont pas effectué 5 années de présence et est limitée à 15 % du dernier salaire (ce qui correspond à 30 années de service).

Supposons que le salarié Lambda est entré dans l'entreprise à 54 ans, ce qui donnera un maximum de 6 années à 60 ans ; considérons un taux annuel moyen d'augmentation des salaires de 5 % et un taux d'actualisation de 6 %.
Si 2000 € par mois est le salaire de l'employé Lambda lors de son embauche, son salaire sera de 2000 x $(1 + 0,05)^6$ = 2680 € au moment de ses 60 ans. On tient compte d'un taux de départ (ou de décès) avant la fin des 6 années à venir de :

N	N + 1	N + 2	N + 3	N + 4	N + 5
0,11	0,08	0,05	0,03	0,01	0

On peut établir le tableau suivant :

	N	N + 1	N + 2	N + 3	N + 4	N + 5
Coefficient de probabilité à prendre en compte (1)	0,89	0,95	1,01	1,03	1,07	1,05
Prestations affectées :						
A l'exercice : 0,5 % du salaire de fin de carrière x coefficient de probabilité (2)	11,926	12,730	13,534	13,802	14,338	14,070
Aux exercices antérieurs	-	11,926	24,656	38,190	51,992	66,330
Cumul	11,926	24,656	38,190	51,992	66,330	80,400
Obligation à l'ouverture	-	8,912	19,530	32,065	46,273	62,575
Intérêts calculés au taux de 6 % (3)	-	0,535	1,172	1,924	2,776	3,755
Coût des services rendus au cours de l'exercice (4)	8,912	10,083	11,363	12,284	13,526	14,070
Obligation à la clôture	8,912	19,530	32,065	46,273	62,575	80,400

Justifications.

(1)	Ce coefficient est égal à la probabilité d'atteindre l'âge de 60 ans en étant dans l'entreprise majorée du différentiel de probabilité par rapport à l'exercice précédent multiplié par le nombre d'années	
	N	1 – 0,11 = 0,89
	N + 1	1 – 0,08 + 1 x (0,11 – 0,08) = 0,95
	N + 2	1 – 0,05 + 2 x (0,08 – 0,05) = 1,01
	N + 3	1 – 0,03 + 3 x (0,05 – 0,03) = 1,03
	N + 4	1 – 0,01 + 4 x (0,03 – 0,01) = 1,07
	N + 5	1 – 0,00 + 5 x (0,01 – 0,00) = 1,05
(2)	Par exemple, pour N : 2680 x 0,5 % x 0,89	
(3)	Par exemple, pour N + 1 : 8,912 x 6 % ; pour N + 2 : 19,530 x 6 %	
(4)	8,912 = 11,926 x $(1 + 0,06)^{-5}$; 10,083 = 12,730 x $(1 + 0,06)^{-4}$; …	

L'auteur suggère d'établir à l'aide d'un autre tableau les obligations à la clôture en s'inspirant du tableau de la recommandation 23 de l'ordre des experts-comptables (France) « Méthodes d'évaluation actuarielle des engagements de retraite « (1990) ; cette recommandation présente un mode de calcul de la dette actuarielle, définie comme étant « la somme des coûts normaux capitalisés pour les services déjà rendus par une personne », à partir de la formule suivante :

DA = EF x AA / DT x Pr x FA

DA	Dette actuarielle
EF	Engagement futur
AA	Ancienneté actuelle
DT	Durée totale
Pr	Probabilité à l'âge actuel d'atteindre l'âge de la retraite
FA	Facteur d'actualisation

<u>On obtient dès lors le tableau suivant</u> :

	N	**N + 1**	**N + 2**	**N + 3**	**N + 4**	**N + 5**
Salaire estimé fin d'année	2100	2205	2315	2431	2553	2680
Coefficient de majoration des salaires	$(1,05)^{-5}$	$(1,05)^{-4}$	$(1,05)^{-3}$	$(1,05)^{-2}$	$(1,05)^{-1}$	1
Salaire fin de carrière	2680					
Droits en fin de carrière	3 %					
Engagement futur EF	80,400*					
Ancienneté actuelle AA	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans
Durée totale DT	6 ans					
AA / DT	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
Probabilité Pr	0,89	0,92	0,95	0,97	0,99	1
Facteur d'actualisation FA	$(1,06)^{-5}$	$(1,06)^{-4}$	$(1,06)^{-3}$	$(1,06)^{-2}$	$(1,06)^{-1}$	1
Dette actuarielle (unités de crédit)	8,912	19,530	32,065	46,273	62,575	80,400

80,400* = 2680 x 0,005 x 6

Ces unités de crédit doivent ensuite être multipliées par un coefficient qui tienne compte de l'espérance de vie du salarié après la retraite et d'un taux de revalorisation des retraites.

Exemple.

Si on considère que l'espérance de vie du salarié Lambda est de 82 ans (soit 22 ans après 60 ans) et que le taux moyen d'augmentation des retraites sera de 3 % ; si, en outre, on prend en compte un taux d'actualisation évalué à 6 %, l'unité de crédit doit être multipliée, pour obtenir une évaluation annuelle, par :

$$12 \text{ (mois) x } \frac{1{,}03 / (1{,}06)^{22} - 1}{1{,}03 / 1{,}06 - 1} = 198{,}547$$

Ainsi les unité de crédit de N + 1 seront multipliées par ce coefficient pour être converties en dette actuarielle, soit 19,530 x 198,547 = 3877,62.

RESOLUTION DE L'EXERCICE.

La méthode rétrospective avec salaire de fin de carrière.

Montant des droits acquis au 31/12/n (calculé avec salaire de fin de carrière ; revalorisation des rémunérations de 3 %) :

$$40.000 \text{ €} \times (1 + 0{,}025)^{20} \times 10 \text{ ans} \times 0{,}25\ \% \times 15 \text{ ans} \times 80\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}04)^{20}} = 8.974{,}12 \text{ €}$$

Montant des droits acquis au 31/12/n+1 (calculé avec salaire de fin de carrière ; revalorisation des rémunérations de 3 %) :

$$40.000 \text{ €} \times (1 + 0{,}025)^{20} \times 11 \text{ ans} \times 0{,}25\ \% \times 15 \text{ ans} \times 81\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}04)^{19}} = 10.394{,}72 \text{ €}$$

Le coût des services rendus pendant l'exercice n+1 est obtenu par différence :

10.394,72 – 8.974,12 = 1420,60 €

La méthode des unités de crédit projetées.

Montant total de la pension annuelle à laquelle aura droit le salarié lors de son départ à la retraite (avec 30 ans d'ancienneté) :

40.000 € x $(1 + 0{,}025)^{20}$ x 0,25 % x 30 ans = 4.915,85 €

Montant total de l'engagement calculé à la date de départ à la retraite :

4.915,85 € x 15 ans = 73.737,75 €

Valeur actuelle de l'unité de prestation annuelle correspondant à l'année n :

(1 / 30) x 73.737,75 x 80 % x [1 / $(1 + 0{,}04)^{20}$] = 897,41 €

Montant des droits acquis au 31/12/n :

$$73.737{,}75 \text{ €} \times (10 / 30) \times 80\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}04)^{20}} = 8.974{,}12 \text{ €}$$

Montant des droits acquis au 31/12/n+1 :

$$73.737{,}75 \text{ €} \times (11 / 30) \times 81\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}04)^{19}} = 10.394{,}72 \text{ €}$$

Le coût des services rendus pendant l'exercice n+1 est obtenu par différence :

10.394,72 – 8.974,12 = 1420,60 €

Les engagements de retraite : résolution d'exercice.

Evaluer, selon la méthode rétrospective avec salaire de fin de carrière et selon la méthode des unités de crédit projetées, les engagements d'un régime de retraite dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Rente annuelle de 0,3 % par année d'ancienneté assise sur le dernier salaire annuel.
- Date de mise en place du régime : 31/12/n
- Dernier salaire annuel au 31/12/n : 20.000 €
- Age de départ à la retraite : 65 ans
- Age du salarié au 31/12/n : 30 ans
- Ancienneté du salarié au 31/12/n : 10 ans
- Taux d'actualisation : 4,5 %
- Probabilité au 31/12/n de présence du salarié dans l'entreprise à l'âge de 65 ans (survie et rotation) : 65 % (66 % au 31/12/n+1).
- Espérance de vie après l'âge de la retraite exprimée en nombre d'années et actualisée : 20 ans (table de rentes viagères : TV 88/90 ; taux d'actualisation de 5 %, revalorisation des rentes de 2,5 %).

Méthode rétrospective avec salaire de fin de carrière.

Montant des droits acquis au 31/12/n (calculé avec salaire de fin de carrière ; revalorisation des rémunérations de 2,5 %) :

$$20.000 \text{ €} \times (1 + 0{,}025)^{35} \times 10 \text{ ans} \times 0{,}30\ \% \times 20 \text{ ans} \times 65\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}045)^{35}} = 396.606{,}41 \text{ €}$$

Montant des droits acquis au 31/12/n+1 (calculé avec salaire de fin de carrière ; revalorisation des rémunérations de 2,5 %) :

$$20.000 \text{ €} \times (1 + 0{,}025)^{35} \times 11 \text{ ans} \times 0{,}30\ \% \times 20 \text{ ans} \times 66\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}045)^{34}} = 462.912{,}90 \text{ €}$$

Le coût des services rendus pendant l'exercice n+1 est obtenu par différence :

462.912,90 – 396.606,41 = 66.306,50 €

La méthode des unités de crédit projetées.

Montant total de la pension annuelle à laquelle aura droit le salarié lors de son départ à la retraite (avec 45 ans d'ancienneté) :

$$20.000 \text{ €} \times (1 + 0{,}025)^{35} \times 0{,}30\ \% \times 45 \text{ ans} = 640.765{,}40 \text{ €}$$

<u>Montant total de l'engagement calculé à la date de départ à la retraite</u> :

640.765,40 € x 20 ans = 12.815.308 €

<u>Montant des droits acquis au 31/12/n</u> :

$$12.815.308 \text{ €} \times (10 / 45) \times 65\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}045)^{35}} = 396.606{,}41 \text{ €}$$

<u>Montant des droits acquis au 31/12/n+1</u> :

$$12.815.308 \text{ €} \times (11 / 45) \times 66\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}045)^{34}} = 462.912{,}90 \text{ €}$$

<u>Le coût des services rendus pendant l'exercice n+1 est obtenu par différence</u> :

462.912,90 – 396.606,41 = 66.306,50 €

L'IMMUNISATION DES OBLIGATIONS PAR LA DURATION

Les fluctuations des taux d'intérêt futurs sont des sources de risques ; si les taux augmentent, il est possible de replacer les sommes payées (intérêts de placement) dans des conditions avantageuses (l'inverse est naturellement valable).
Imaginons que Monsieur K. DUBLEZ ait décidé d'acquérir, avec les 500.000 € dont il dispose, des obligations à 5 ans, 10 ans ou plus. Si ces obligations sont régulièrement cotées en bourse, il pourra les revendre dans 3 ans lorsqu'il aura besoin de ses fonds. Cependant le cours d'une obligation fluctue en fonction des taux d'intérêt ; aussi, en cas de hausse des taux, par exemple, de 8 % à 9 %, une obligation qui valait 1000 € à l'émission et qui arrive à échéance dans 5 ans vaudra, dans 3 ans, 982,40 €.

Coupon dans 4 ans : 80 : valeur actuelle dans 3 ans	80 / (1 +0,09)	73,39 €
Coupon dans 5 ans de 80 et remboursement dans 5 ans de 1000 : valeur actuelle dans 3 ans	$1080 / (1 + 0,09)^2$	909,01 €
	Total :	982,40 €

De ce fait Monsieur K. DUBLEZ perd : 1000 – 982,40 = 17,60 € par obligation ; si le taux d'intérêt était resté de 8 % dans 3 ans, le prix de revente de l'obligation serait de 1.000 € et il n'y aurait donc pas eu de perte.

Si le taux d'intérêt augmente à 9 %, Monsieur K. DUBLEZ tire cependant un revenu supplémentaire de cette hausse qui s'élève à 182,25 € – 179,71 € = 2,54 € ; ce gain de 2,54 € vient réduire la perte qui s'élève dorénavant à 17,60 – 2,54 = 15,06 €.

Coupon de 80 € dans 1 an replacé, pendant 2 ans, au taux de 8 %	93,31 €
Coupon de 80 € dans 2 ans replacé, pendant 1 an, au taux de 8 %	86,40 €
Total :	**179,71 €**
Coupon de 80 € dans 1 an replacé, pendant 2 ans, au taux de 9 %	95,05 €
Coupon de 80 € dans 2 ans replacé, pendant 1 an, au taux de 9 %	87,20 €
Total :	**182,25 €**

On constate donc que une hausse du taux d'intérêt est à l'origine de deux résultats différents : le prix de revente baisse mais les coupons encaissés sont replacés dans de meilleures conditions.

Il existe en fait une durée telle que les deux effets s'annulent parfaitement et, dans ce cas, la position est immunisée contre les risques de fluctuation des taux d'intérêts dans l'avenir.

Le calcul de cette date particulière, appelée **duration**, est donné par la formule suivante :

$$\mathbf{D = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{F_J / (1 + r)^J}{P}}$$

D	La duration
P	La valeur actuelle du titre
r	Le taux d'intérêt actuel
F_J	Le flux de trésorerie de l'année J

1 x (74,1 / 1000) + 2 x (68,6 / 1000) + 3 x (63,5 / 1000) + 4 x (58,8 / 1000) + 5 x (735 / 1000)

= 4,312 années = 4 ans et 114 jours.

Exemple (R. COBBAUT, Théorie Financière »).

Soit une obligation, d'une valeur nominale de 100 € à 5 ans dont le taux de coupon est de 13,52 % ; la structure temporelle des taux d'intérêt (« Yeld Curve ») est plate, avec une valeur de 11 % pour toutes les échéances. Le calcul de la duration s'établit :

Période (j)	**Flux (F_J)**	**$V_J = F_J / (1 + r)^J$**	**J x V_J**
1	13,52	12,18	12,18
2	13,52	10,97	21,94
3	13,52	9,89	29,67
4	13,52	8,91	35,64
5	113,52	67,37	336,85
		P = 109,32	436,28

D = 436,28 / 109,32 = 3,9909 = 4 ans

Calculons à présent, dans diverses hypothèses de taux, la valeur de l'obligation au temps (j = 4) correspondant à la duration. Cette valeur résulte d'une part du réinvestissement des coupons perçus aux temps j = 1, j = 2 et j = 3 et, d'autre part, de la valeur actualisée du revenu qui sera perçu au temps j = 5.

Période (j)	**Flux (F_J)**	**Valeur au temps j = 4**		
		r = 10 %	**r = 11 %**	**r = 12 %**
1	13,52	13,52 x $(1,10)^3$	13,52 x $(1,11)^3$	13,52 x $(1,12)^3$
2	13,52	13,52 x $(1,10)^2$	13,52 x $(1,11)^2$	13,52 x $(1,12)^2$
3	13,52	13,52 x $(1,10)^1$	13,52 x $(1,11)^1$	13,52 x $(1,12)^1$
4	13,52	13,52 x$(1,10)^0$	13,52 x$(1,11)^0$	13,52 x$(1,12)^0$
5	113,52	113,52 x $(1,10)^{-1}$	113,52 x $(1,11)^{-1}$	113,52 x $(1,12)^{-1}$
		165,95	165,95	165,95

Comme on peut le constater, quel que soit le taux d'intérêt r, la valeur de l'obligation, au temps j = 4, demeure identique.

Remarque : cette valeur de 165,95 n'est évidemment pas la valeur de marché de l'obligation à ce moment !

Application.

Calculer la duration d'une obligation d'une valeur nominale de 2000 € venant à échéance dans 5 ans, sachant que cette obligation donne droit à la perception annuelle d'un coupon de 16 % et que le taux d'intérêt est actuellement de 5,5 %.

Période (j)	**Flux (F_J)**	**$V_J = F_J / (1 + r)^J$**	**J x V_J**
1			
2			
3			
4			
5			

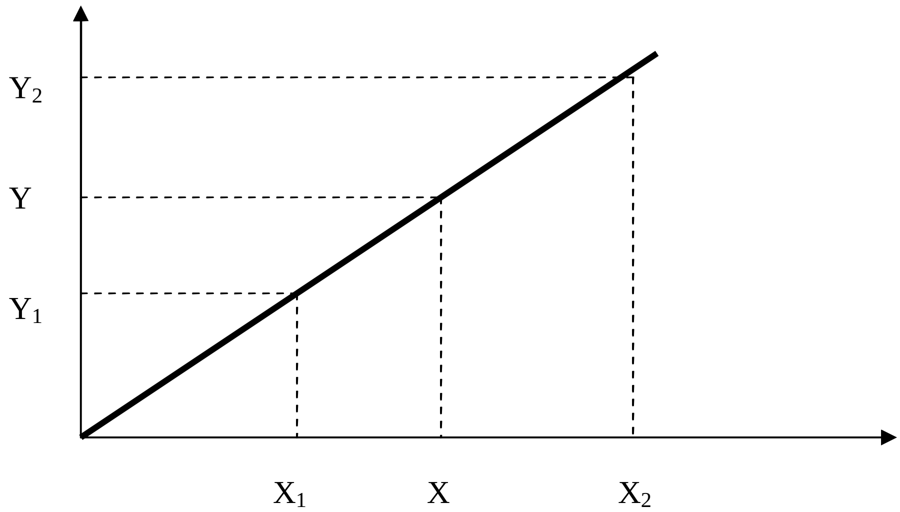
<u>DURATION</u> : D =

Après avoir arrondi la duration (nombre entier d'années), calculer la valeur de l'obligation, au temps j correspondant à la duration, dans les hypothèses de taux d'intérêt reprises au tableau ci-dessous :

Période (j)	**Flux (F_J)**	**Valeur au temps j = 4**		
		r = 6 %	**r = 8 %**	**r = 10 %**
1				
2				
3				
4				
5				

L’INTERPOLATION LINEAIRE

L’interpolation linéaire est une méthode par approximation qui consiste à résoudre une équation en utilisant deux valeurs approchées (une valeur inférieure et une valeur supérieure) de manière à déterminer la valeur recherchée en résolvant l’équation décrite ci-dessous.
La méthode s’avère particulièrement précieuse quand l’inconnue figure dans une équation de degré > 4 puisque de telles équations n’ont pas de solution algébrique.



$$\boldsymbol{\frac{Y - Y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{X - X_2}{X_1 - X_2}}$$

Exemple.

Soit la droite d’équation 2X + 1 = 0

	Y_1	**Y**	**Y_2**
X_1 = 3	7	-	-
X = 4	-	**9**	-
X_2 = 5	-	-	11

$$\frac{Y - 11}{7 - 11} = \frac{4 - 5}{3 - 5} \Rightarrow Y = 9$$

Application.

$$\boxed{\mathbf{A = VA \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}}}$$

$$A = 1.000.000 \text{ x } \frac{0{,}08 \text{ x } (1 + 0{,}08)^4}{(1 + 0{,}08)^4 - 1} = 301.920{,}80 \text{ €}$$

$$i_1 = 0{,}07 \Rightarrow A_1 = 1.000.000 \text{ x } \frac{0{,}07 \text{ x } (1 + 0{,}07)^4}{(1 + 0{,}07)^4 - 1} = 295.228{,}12$$

$$i_2 = 0{,}09 \Rightarrow A_2 = 1.000.000 \text{ x } \frac{0{,}09 \text{ x } (1 + 0{,}09)^4}{(1 + 0{,}09)^4 - 1} = 308.668{,}66$$

$$\boxed{\mathbf{\frac{Y - Y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{X - X_2}{X_1 - X_2}}}$$

$$\frac{A - A_2}{A_1 - A_2} = \frac{i - i_2}{i_1 - i_2}$$

$$\frac{301.920{,}80 - 308.668{,}66}{295.228{,}12 - 308.668{,}66} = \frac{i - 0{,}09}{0{,}07 - 0{,}09} \Rightarrow \frac{-6.747{,}86}{-13.440{,}54} = \frac{i - 0{,}09}{-0{,}02}$$

On a donc : $i - 0{,}09 = 0{,}50205 \text{ x } (-0{,}02) \Rightarrow i = (-0{,}01) + 0{,}09 \Rightarrow i = 0{,}08$.

LES PRINCIPES D'EVALUATION DU COÛT DES DETTES.

Les endettements à moyen et à long terme peuvent être obtenus, soit sur le marché financier, soit auprès des banques. Quelle que soit leur forme, les dettes partagent un certain nombre de caractéristiques communes qui permettent de dégager une méthodologie générale de calcul de leur coût.

LE COÛT ACTUARIEL D'UN EMPRUNT.

Un emprunt peut être caractérisé par plusieurs paramètres : son montant, sa durée, l'intérêt qui doit être payé et son plan d'amortissement (ou de remboursement). En outre la mise en place d'un emprunt et sa gestion peuvent occasionner un certain nombre de charges annexes.

La mesure des flux de trésorerie caractéristiques d'un emprunt.

Le montant emprunté est égal à la valeur nominale de l'emprunt qui figure au passif du bilan. L'intérêt peut être fixe ou variable. Dans le premier cas, la rémunération du prêteur s'effectue en fonction d'un taux facial qui ne sera pas soumis à la renégociation. Tout naturellement, si les taux d'intérêt augmentent dans l'économie, cette clause rendra le prêt très attrayant pour l'emprunteur et l'inverse est tout aussi vrai en cas de baisse des taux.
Dans le second cas, la rémunération est calculée pour chaque période, en fonction d'une référence acceptée par chaque partie, par exemple le taux moyen de rendement des obligations émises par l'Etat ou le taux moyen mensuel du marché monétaire. Dans ce dernier cas, l'entreprise emprunteuse ne connaît pas à l'avance le montant des frais financiers qu'elle aura à supporter.
La rémunération du prêteur peut s'effectuer également par le paiement d'une prime de remboursement au moment du remboursement : c'est la différence entre le prix payé par l'emprunteur et la valeur nominale de l'emprunt. Par ailleurs, pour faciliter la souscription, l'entreprise peut décider d'émettre son emprunt (s'il est obligataire) à un prix inférieur à sa valeur nominale : il y a alors une prime d'émission. Tous ces éléments doivent être pris en compte dans l'estimation des flux de trésorerie, et donc du coût de l'emprunt.

Le remboursement de la dette peut être effectué de différentes manières :

- Si la dette est remboursée en totalité à son échéance, on dira que l'emprunt est « in fine ».
- L'amortissement peut se faire également par tranches égales ; par exemple, une entreprise qui a emprunté 10 millions sur 10 ans, remboursera 1 million à la fin de chaque année. Comme l'illustre le tableau ci-dessous, un emprunt à remboursement par tranches égales fait supporter un poids décroissant sur la trésorerie de l'entreprise : les premières années, les charges financières portent sur des montants prêtés importants qui décroissent ensuite au fur et à mesure des remboursements ; les décaissements diminuent en conséquence dans le temps.
- Afin de répartir la charge sur la trésorerie, certains emprunts se présentent sous la forme d'un amortissement par annuités constantes. Le tableau ci-dessous montre qu'un même emprunt de 10 millions sur 10 ans nécessite un décaissement régulier de 1.627.454 ; cette annuité se décompose la première année en 1.000.000 d'intérêts et 627.454 de remboursement. Plus les années passent, plus la part des intérêts diminue puisque le capital est amorti partiellement et progressivement. A l'année 10, il n'y a

plus que 147.950 de charges financières, ce qui permet de rembourser les 1.479.504 restant dus. Pour rappel, l'annuité constante se calcule à l'aide de la formule :

$$A = E \times \frac{I}{1 - (1 + i)^{-n}} \quad \text{ou encore} \quad A = E \times \frac{i \cdot (1 + i)^{n}}{(1 + i)^{n} - 1}$$

A	L'annuité constante recherché
E	Le montant emprunté
i	Le taux facial d'intérêt
n	Le nombre d'années jusqu'à l'échéance

Amortissement par tranches égales			**Amortissement par annuités constantes**	
Années	**Charges financières (10 %)**	**Remboursements**	**Charges financières (10 %)**	**Remboursements**
1	1.000.000	1.000.000	1.000.000	627.454
2	900.000	1.000.000	937.255	690.199
3	800.000	1.000.000	868.235	759.219
4	700.000	1.000.000	792.313	835.141
5	600.000	1.000.000	708.799	918.655
6	500.000	1.000.000	616.933	1.011.521
7	400.000	1.000.000	515.881	1.111.573
8	300.000	1.000.000	404.724	1.222.730
9	200.000	1.000.000	282.451	1.345.003
10	100.000	1.000.000	147.950	1.479.504

La réalisation d'un emprunt est souvent onéreuse. Ainsi, pour un emprunt émis directement auprès du marché financier, il faut compter les frais de publicité, les commissions versées aux banques,… Dans le cas d'un emprunt auprès d'une banque, des frais de dossier sont le plus souvent facturés ; tout au long de l'opération, diverses commissions sont comptées pour la gestion de la dette.

La détermination du coût actuariel.

Le coût total à l'émission d'un emprunt est apprécié par son coût actuariel. Pour le calculer, il est nécessaire, d'abord, de construire le tableau récapitulatif des flux de trésorerie associés à l'opération et, ensuite, de rechercher le taux d'actualisation qui donne une valeur actuelle de la somme de tous les flux égale à zéro.

Application.

Si on reprend l'exemple utilisé précédemment : un emprunt de 10.000.000 remboursable, par annuités constantes, au taux d'intérêt annuel de 10 %, pendant 10 ans. Les charges annexes sont les suivantes : 350.000 la première année et 16.000 pour chacune des 9 autres années.
Le tableau des flux de trésorerie se présente conformément au tableau ci-dessous :

Date en fraction d'années		Principal	Annuité constante	Autres frais	Flux de trésorerie
d_j					FT_j
	0	10.000.000		350.000	+ 9.650.000
Dans 1 an	1		1.627.454	16.000	– 1.643.454
Dans 2 ans	2		1.627.454	16.000	– 1.643.454
Dans 3 ans	3		1.627.454	16.000	– 1.643.454
Dans 4 ans	4		1.627.454	16.000	– 1.643.454
Dans 5 ans	5		1.627.454	16.000	– 1.643.454
Dans 6 ans	6		1.627.454	16.000	– 1.643.454
Dans 7 ans	7		1.627.454	16.000	– 1.643.454
Dans 8 ans	8		1.627.454	16.000	– 1.643.454
Dans 9 ans	9		1.627.454	16.000	– 1.643.454
Dans 10 ans	10		1.627.454	16.000	– 1.643.454

Le coût actuariel r est tel que :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \frac{FT_j}{(1 + r)^{dj}} = 0}$$

On trouve : r = 11,07 %.

Il faut observer que ce taux actuariel (et donc le coût de l'emprunt à l'émission) de 11,07 % est supérieur au taux d'intérêt facial de 10 % ; l'écart est dû à l'existence des autres frais dans notre exemple numérique.
Il faut également remarquer que ce taux actuariel de 11,07 % ne désigne pas le coût effectif de l'emprunt pour l'entreprise puisqu'on n'a pas pris en considération la déductibilité fiscale de certaines charges (notamment ici les charges financières et les autres frais), dans l'hypothèse où l'entreprise est bénéficiaire et est donc assujettie à l'impôt des sociétés. Ainsi, en prenant un taux d'imposition de 40 %, le coût actuariel effectif de l'emprunt serait de 6,6 % (ou encore 6,9 % si on tient compte du décalage de 1 an dans le paiement des impôts).

Remarque : le calcul du taux actuariel à l'aide de la formule ci-dessus implique l'utilisation de l'interpolation linéaire.

LA VALEUR ACTUELLE NETTE (VAN) D'UN EMPRUNT.

Au lieu de déterminer le coût actuariel, on aurait pu calculer la valeur actuelle nette de l'emprunt. Pour cela, il suffit de connaître le taux d'emprunt de référence de l'entreprise et de l'utiliser comme taux d'actualisation des flux de trésorerie de l'emprunt.

$$\mathbf{VAN} = \sum_{j=0}^{n} \frac{FT_j}{(1 + i)^{dj}}$$

Pour un taux d'emprunt de référence de 8 %, on obtient :

Date en fraction d'années		Flux de trésorerie	Facteur d'actualisation	Valeur actualisée
d_j		FT_j	$1 / (1 + i)^{dj}$	$FT_j \times [1 / (1 + i)^{dj}]$
	0	+ 9.650.000	1	9.650.000
Dans 1 an	1	– 1.643.454	0,925925925	(1.521.717)
Dans 2 ans	2	– 1.643.454	0,85733882	(1.408.997
Dans 3 ans	3	– 1.643.454	0,793832241	(1.304.627)
Dans 4 ans	4	– 1.643.454	0,735029852	(1.207.988)
Dans 5 ans	5	– 1.643.454	0,680583196	(1.118.507)
Dans 6 ans	6	– 1.643.454	0,630169626	(1.035.655)
Dans 7 ans	7	– 1.643.454	0,583490395	(958.940)
Dans 8 ans	8	– 1.643.454	0,540268884	(887.907)
Dans 9 ans	9	– 1.643.454	0,500248967	(822.136)
Dans 10 ans	10	– 1.643.454	0,463193488	(761.237)
			VAN :	**(1.377.711)**

Exercice.

Soit un emprunt de 20.000.000 € remboursable, par annuités constantes, en 10 ans ; le taux d'intérêt annuel est de 8 %. Les charges d'emprunt se présentent de la manière suivante : 500.000 € au moment de la signature et 20.000 € à chaque échéance annuelle.
Si le taux d'emprunt de référence est 6 %, déterminer la VAN de l'emprunt.

L'UTILISATION DU TAUX ACTUARIEL : LA DURATION & LE POINT MORT ACTUARIEL.

Dans l'exemple du tableau précédent, l'emprunt de 10.000.000 a un coût actuariel à son émission de 11,07 %. Ce taux est une mesure du coût de cet emprunt et le responsable financier, à la recherche de l'argent le moins cher, pourra, bien entendu, le prendre en considération.
Toutefois il ne faut pas abuser des comparaisons entre taux actuariels : ces comparaisons ne sont en effet justifiées que pour des financements de durée voisine. Comme le capital est remboursé progressivement, il est nécessaire de calculer la durée de vie moyenne de l'emprunt ; la duration D fournit à cet égard la mesure adéquate, selon la formule suivante :

$$D = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{FT_j / (1 + r)^j}{E}$$

Date	Flux de trésorerie	Valeur actuelle des flux à 11,07 %	Pourcentages par rapport à l'encaissement	Contributions à la durée (en années)
0	9.650.000	9.650.000	100 %	-
1	1.643.454	1.479.656	15,3 %*	0,153*
2	1.643.454	1.332.183	13,8 %	0,276
3	1.643.454	…	…	…
4	1.643.454	…	…	…
5	1.643.454	…	…	…
6	1.643.454	…	…	…
7	1.643.454	…	…	…
8	1.643.454	…	…	…
9	1.643.454	…	…	…
10	1.643.454	575.161	5,96 %	0,596
			DURATION =	4,649 ans

15,33 % = (1.479.656) / (9.650.000)
0,153 = 0,153 x 1 ; 0,276 = 0,138 x 2 ; … ; 0,596 = 0,0596 x 10

Si la même entreprise se voit proposer un prêt de 10.000.000 pour une durée de 1 an à un taux actuariel de 9 %, cela ne veut pas dire nécessairement que cette offre est supérieure au crédit précédent à 11,07 %.
Dans un an, si le prêt à 10 ans est réalisé, l'entreprise disposera toujours de plus de 9.000.000 pour les années à venir, à un coût déjà déterminé. Le prêt à court terme n'est intéressant que si, dans un an, on obtient un financement à un taux plus avantageux. Pour étudier ce problème, il faut effectuer une analyse de point mort actuariel.

Si l'entreprise emprunte 9.650.000 à 1 an à 9 % (on cherche à rendre les montants comparables), elle devra rembourser 9.650.000 et régler 868.500 d'intérêts, soit un total de 10.518.500. Dans le cas de l'emprunt à 10 ans, le décaissement sera de 1.643.454 à l'année 1, soit 8.875.046 de moins. Pour disposer de ces fonds, elle devra payer dans les 9 ans à venir 1.643.454 chaque année.
Ce financement revient à un coût actuariel implicite de 11,65 % et la duration pour cet endettement résiduel est alors de 5,277 ans. Si l'entreprise pense pouvoir s'endetter à un taux inférieur au point mort de 11,65 % pour une durée moyenne de 4,277 ans, elle a intérêt à retarder la mise en place de son financement à long terme. En revanche, si elle craint une hausse (même limitée) des taux, elle a tout avantage à refuser le crédit à court terme à 9 % pour saisir l'opportunité présente de financement à 10 %.

Date	**Crédit à court terme**	**Crédit à long terme**	**Crédit implicite dans un an**
0	**+ 9.650.000**	**+ 9.650.000**	**-**
1	**– 10.518.500**	**– 1.643.454**	**+ 8.891.046**
2	**-**	**– 1.643.454**	**– 1.643.454**
3	**-**	**– 1.643.454**	**– 1.643.454**
4	**-**	**– 1.643.454**	**– 1.643.454**
5	**-**	**– 1.643.454**	**– 1.643.454**
6	**-**	**– 1.643.454**	**– 1.643.454**
7	**-**	**– 1.643.454**	**– 1.643.454**
8	**-**	**– 1.643.454**	**– 1.643.454**
9	**-**	**– 1.643.454**	**– 1.643.454**
10	**-**	**– 1.643.454**	**– 1.643.454**
		Point mort actuariel =	**11,65 %**
		Duration =	**5,277 ans**

Date	**Flux de trésorerie**	**$(1 + 0,1165)^{Date}$**	**Facteur d'actualisation : $1 / (1 + 0,1165)^{Date}$**	**Valeur actuelle des flux à 11,65 %***
0	**+ 8.875.046**	1	1	8.875.046
1	**– 1.643.454**	1,1165	0,895656068	1.471.969,55
2	**– 1.643.454**	1,24657225	0,802199792	1.318.378,46
3	**– 1.643.454**	1,391797917	0,718495111	1.180.813,66
4	**– 1.643.454**	1,553942374	0,643524506	1.057.602,92
5	**– 1.643.454**	1,734976661	0,576376629	947.248,48
6	**– 1.643.454**	1,937101442	0,516235225	848.408,85
7	**– 1.643.454**	2,16277376	0,462369212	759.882,53
8	**– 1.643.454**	2,414736903	0,41412379	680.593,40
9	**– 1.643.454**	2,696053752	0,370912486	609.577,61
10	**– 1.643.454**	3,010144014	0,332210019	545.971,88
Valeur actuelle* = (Flux de trésorerie) * $[1 / (1 + 0,1165)^{Date}]$, en valeur absolue				

Date	Flux de trésorerie	Valeur actuelle des flux à 11,65 %	Pourcentages par rapport à l'encaissement	Contributions à la durée (en années)
1	**+ 8.875.046**	8.875.046	100 %	-
2	**– 1.643.454**	1.471.969,55	16,5855	0,33171
3	**– 1.643.454**	1.318.378,46	14,8549	0,445647
4	**– 1.643.454**	1.180.813,66	13,3049	0,532196
5	**– 1.643.454**	1.057.602,92	11,9166	0,59583
6	**– 1.643.454**	947.248,48	10,6732	0,640392
7	**– 1.643.454**	848.408,85	09,5595	0,669165
8	**– 1.643.454**	759.882,53	08,5620	0,68496
9	**– 1.643.454**	680.593,40	07,6686	0,690174
10	**– 1.643.454**	609.577,61	06,8684	0,68684
			DURATION =	5,277

Une autre solution pourrait consister à comparer les VAN de la somme de tous les flux de trésorerie ; dans cette perspective, les flux seraient actualisés au moyen du taux d'emprunt de référence de l'entreprise. Cette solution, plus simple à mettre en œuvre, pose néanmoins un problème de taille : comment déterminer ce taux d'emprunt.
Généralement le taux de référence est le taux accordé par l'organisme prêteur, compte tenu ders risques encourus. A côté de ce taux de référence, on trouve des taux préférentiels ou encore bonifiés. Ce type de taux est notamment accordé par certains organismes publics dans le cadre d'investissements réalisés, par exemple, dans des régions reconnues comme économiquement prioritaires. La rentabilité de tels investissements, dès lors qu'ils bénéficient d'un taux préférentiel, donne lieu à une méthode quelque peu différente d'évaluation (on utilise la VANA, valeur actuelle nette ajustée, plutôt que la VAN, valeur actuelle nette).
La VAN se détermine de la façon suivante :

$$\mathbf{VAN = E_0 - \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{(1+i)^t}}$$

E_0	Le montant emprunté au temps 0
D_t	Les décaissements au temps t
i	Le taux d'emprunt de référence de l'entreprise
T	Taux d'imposition des sociétés

Si on souhaite prendre en compte l'économie fiscale réalisée par une entreprise bénéficiaire :

$$\mathbf{VAN = E_0 - \sum_{t=1}^{n} \frac{D_t}{[1 + i\,(1-T)]^t}}$$

Application.

Si on reprend notre exemple précédent et que l'on considère que le taux d'emprunt de référence de l'entreprise est 8 %, on obtient les VAN décrites au tableau ci-dessous.

Année t	**Emprunt de 10.000.000 à 1 an à 9 %**			**Emprunt de 10.000.000 à 10 ans à 10 %**		
	Flux de trésorerie	**Facteur d'actualisation 1/ (1 + 0,08)^t**	**Flux actualisés**	**Flux de trésorerie**	**Facteur d'actualisation 1 / (1 + 0,08)^t**	**Flux actualisés**
0	9.650.000	1	9.650.000	9.650.000	1	9.650.000
1	(10.518.500)	0,925925925	(9.739.352)	(1.643.454)	0,925925925	(1.521.717)
2	-	-	-	(1.643.454)	0,85733882	(1.408.997)
3	-	-	-	(1.643.454)	0,793832241	(1.304.627)
4	-	-	-	(1.643.454)	0,735029852	(1.207.988)
5	-	-	-	(1.643.454)	0,680583196	(1.118.507)
6	-	-	-	(1.643.454)	0,630169626	(1.035.655)
7	-	-	-	(1.643.454)	0,583490395	(958.940)
8	-	-	-	(1.643.454)	0,540268884	(887.907)
9	-	-	-	(1.643.454)	0,500248967	(822.136)
10	-	-	-	(1.643.454)	0,463193488	(761.237)
VAN	**-**	**-**	**(89.352)**	**-**	**-**	**(1.377.711)**

t	**(1 + 0,08)^t**	**1 / (1 + 0,08)^t**
1	1,08	0,925925925
2	1,1664	0,85733882
3	1,259712	0,793832241
4	1,36048896	0,735029852
5	1,469328077	0,680583196
6	1,586874323	0,630169626
7	1,713824269	0,583490395
8	1,85093021	0,540268884
9	1,999004627	0,500248967
10	2,158924997	0,463193488

Comme on peut le constater, la VAN de l'emprunt à court terme est sensiblement meilleure que la VAN de l'emprunt à long terme. Il est évident que ces deux emprunts seraient équivalents si, pour un même taux d'actualisation, les deux VAN étaient égales. En d'autres termes :

$$-89.352 = 9.650.000 - \sum^{10} \frac{F_t}{(1 + 0,08)^t} \text{ , avec } F_t = 9.650.000 \text{ x } \frac{i\,(1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}$$

Autrement dit le financement à long terme n'est intéressant que s'il est consenti à un taux inférieur au taux i qui vérifie l'équation ci-dessus.

EXERCICE.

La société X a la possibilité de souscrire auprès de sa banque un emprunt de 1.000.000 € remboursables en 5 ans au taux de 8 %. Calculer le coût actuariel et la duration de cet emprunt. Les frais encourus sont les suivants : 10.000 € à la souscription et 1.000 € à chaque échéance annuelle pour les frais de gestion de la dette.
La banque propose par ailleurs un emprunt de 1.000.000 € remboursables après 1 an au taux de 6 % ; calculer le point mort actuariel et la duration de l'emprunt implicite. Les frais encourus s'élèvent à 10.000 € payables à la réception du montant emprunté et à 20.000 € payables à l'échéance..
Par la méthode de la VAN, comparer le coût des 2 emprunts avec un taux d'emprunt de référence de 7,5 %.

Résolution.

Calcul de l'annuité constante.

$$\boxed{\mathbf{A = VA \times \frac{i \times (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}}$$

$$A = 1000.000 \times \frac{0,08 \times (1 + 0,08)^5}{(1 + 0,08)^5 - 1} = 1.000.000 \times \frac{0,08 \times 1,469328077}{0,469328077} = 250.456,45 \text{ €}$$

Date en fraction d'années		**Principal**	**Annuité constante**	**Autres frais**	**Flux de trésorerie**
d_j					**FT_j**
	0	1.000.000	-	10.000	990.000
Dans 1 an	1	-	250.456,45	1.000	(251.456,45)
Dans 2 ans	2	-	250.456,45	1.000	(251.456,45)
Dans 3 ans	3	-	250.456,45	1.000	(251.456,45)
Dans 4 ans	4	-	250.456,45	1.000	(251.456,45)
Dans 5 ans	5	-	250.456,45	1.000	(251.456,45)

Calcul du coût actuariel.

Le coût actuariel r est tel que :

$$\boxed{\mathbf{\sum_{j=0}^{n} \frac{FT_j}{(1 + r)^{dj}} = 0}}$$

Il s'agit dont de trouver le coût actuariel r qui vérifie l'équation suivante :

$$\frac{990.000}{1} - \frac{251.456,45}{(1 + r)^1} - \frac{251.456,45}{(1 + r)^2} - \frac{251.456,45}{(1 + r)^3} - \frac{251.456,45}{(1 + r)^4} - \frac{251.456,45}{(1 + r)^5} = 0$$

Année	Formules	0,06	0,07	0,08
0	$990.000 / (1 + i)^0$	990.000	990.000	990.000
1	$(1 + i)^1$	1,06	1,07	1,08
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(237.223,07)	(235.006,03)	(232.830,05)
2	$(1 + i)^2$	1,1236	1,1449	1,1664
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(223.795,35)	(219.631,80)	(215.583,38)
3	$(1 + i)^3$	1,191016	1,225043	1,259712
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(211.127,68)	(205.263,37)	(199.614,24)
4	$(1 + i)^4$	1,26247696	1,31079601	1,36048896
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(199.177,06)	(191.834,92)	(184.828,00)
5	$(1 + i)^5$	1,338225578	1,402551731	1,469328077
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(187.902,89)	(179.284,97)	(171.137,03)
Total	**-**	**(69.226,05)**	**(41.021,09)**	**(13.992,70)**

Année	Formules	0,09
0	$990.000 / (1 + i)^0$	990.000
1	$(1 + i)^1$	1,09
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(230.693,99)
2	$(1 + i)^2$	1,1881
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(211.645,86)
3	$(1 + i)^3$	1,295029
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(194.170,52)
4	$(1 + i)^4$	1,41158161
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(178.138,09)
5	$(1 + i)^5$	1,538623955
	$251.456,45 / (1 + i)^1$	(163.429,44)
Total	**-**	**11.922,10**

Interpolation linéaire :

$$\frac{Y - Y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{X - X_2}{X_1 - X_2}$$

	Y_1	Y	Y_2
$X_1 = 0,08$	**(13.992,70)**	-	-
$X = ?$	-	0	-
$X_2 = 0,09$	-	-	**11.922,10**

$$\frac{0 - 11.922,10}{- 13.992,70 - 11.922,10} = \frac{X - 0,09}{0,08 - 0,09}$$

$(- 11.922,10) / (- 25.914,80) = (X - 0,09) / (- 0,01)$

$X - 0,09 = (0,460049855) * (- 0,01) \Rightarrow X = - 0,004600498557 + 0,09 \Rightarrow X = 0,085399501 = 8,54\ \%$

Coût actuariel : X = 8,54 %

Calcul de la duration.

$$D = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{FT_j / (1 + r)^j}{E}$$

Année t	Flux de trésorerie	Facteur d'actualisation		Flux de trésorerie
	FT_j	$(1 + 0{,}0854)^t$	$1 / [(1 + 0{,}0854)^t]$	FT_j
0	990.000	1	1	990.000
1	(251.456,45)	1,0854	0,921319329	(231.671,69)
2	(251.456,45)	1,17809316	0,848829306	(213.443,60)
3	(251.456,45)	1,278702316	0,782042847	(196.649,72)
4	(251.456,45)	1,387903494	0,720511191	(181.177,17)
5	(251.456,45)	1,506430452	0,663820887	(166.922,04)

Date	Flux de trésorerie	Valeur actuelle des flux à 8,54 %	Pourcentages par rapport à l'encaissement	Contributions à la durée (en années)
0	990.000	990.000	100 %	-
1	(251.456,45)	(231.671,69)	0,2340	0,2340
2	(251.456,45)	(213.443,60)	0,2156	0,4312
3	(251.456,45)	(196.649,72)	0,1986	0,5958
4	(251.456,45)	(181.177,17)	0,1830	0,7320
5	(251.456,45)	(166.922,04)	0,1686	0,8430
			DURATION =	**2,836**

Point mort actuariel et duration de l'emprunt implicite.

Date	Crédit à court terme	Crédit à long terme	Crédit implicite dans un an	
0	990.000	990.000		-
1	(1.080.000)	(251.456,45)	**0**	828.543,55
2	-	(251.456,45)	**1**	(251.456,45)
3	-	(251.456,45)	**2**	(251.456,45)
4	-	(251.456,45)	**3**	(251.456,45)
5	-	(251.456,45)	**4**	(251.456,45)
		Point mort actuariel =		**8,24 %**
		Duration =		**2,4**

<u>Conclusion</u> : si l'entreprise peut obtenir un financement à un taux inférieur au point mort actuariel de 8,24 % pour une duration de 2,4, elle a tout intérêt à bénéficier de la solution à court terme.

Le point mort actuariel est le taux qui annule la VAN des flux de trésorerie :

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\mathbf{FT_j}}{\mathbf{(1 + r)^{dj}}} = \mathbf{0}$$

Il s'agit dont de trouver le coût actuariel r qui vérifie l'équation suivante :

$$\frac{828.543,55}{1} - \frac{251.456,45}{(1+r)^1} - \frac{251.456,45}{(1+r)^2} - \frac{251.456,45}{(1+r)^3} - \frac{251.456,45}{(1+r)^4} = 0$$

Année	FLUX	0,08		0,09	
		Facteur d'actualisation	Flux actualisés	Facteur d'actualisation	Flux actualisés
0	828.543,55 €	1	828.543,55 €	1	828.543,55 €
1	-251.456,45 €	0,925925926	-232.830,05 €	0,917431193	-230.693,99 €
2	-251.456,45 €	0,85733882	-215.583,38 €	0,841679993	-211.645,86 €
3	-251.456,45 €	0,793832241	-199.614,24 €	0,77218348	-194.170,52 €
4	-251.456,45 €	0,735029853	-184.828,00 €	0,708425211	-178.138,09 €
		TOTAL :	**-4.312,11 €**	**TOTAL :**	**13.895,09 €**

Interpolation linéaire :

$$\frac{Y - Y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{X - X_2}{X_1 - X_2}$$

	$\mathbf{Y_1}$	**Y**	$\mathbf{Y_2}$
$X_1 = 0,08$	**(4.312,11)**	-	-
X = ?	-	0	-
$X_2 = 0,09$	-	-	**13.895,09**

$$\frac{0 - 13.895,09}{-4.312,11 - 13.895,09} = \frac{X - 0,09}{0,08 - 0,09}$$

$\Rightarrow$ (– 13.895,09) x (– 0,01) = (X – 0,09) x (– 4.312,11 – 13.895,09)

$\Rightarrow$ 138,95 = (X – 0,09) x (– 18.207,20) $\Rightarrow$ X – 0,09 = 138,95 / (– 18.207,20)

$\Rightarrow$ X = 0,09 – 0,0076316 = 0,0823684 $\Rightarrow$ X = 8,24 %

Date	Flux de trésorerie	$(1 + 0,0824)^{Date}$	Facteur d'actualisation : $1 / (1 + 0,0824)^{Date}$	Valeur actuelle des flux à 8,24 %*
0	828.543,55	1	1	828.543,55
1	(251.456,45)	1,0824	0,923872875	(232.313,79)
2	(251.456,45)	1,17158976	0,853541089	(214.628,41)
3	(251.456,45)	1,2681128756	0,78856346	(198.289,37)
4	(251.456,45)	1,372622566	0,728532391	(183.194,17)
Valeur actuelle* = (Flux de trésorerie) * $[1 / (1 + 0,0824)^{Date}]$				

Date	Flux de trésorerie	Valeur actuelle des flux à 8,24 %	Pourcentages par rapport à l'encaissement	Contributions à la durée (en années)
	828.453,55	828.453,55	100 %	-
1	**(251.456,45)**	(232.313,79)	0,28038815	0,28038815
2	**(251.456,45)**	(214.628,41)	0,259043007	0,518086013
3	**(251.456,45)**	(198.289,37)	0,239322807	0,717968422
4	**(251.456,45)**	(183.194,17)	0,22110385	0,8844154
			DURATION =	**2,40086**

<u>Comparaison des VAN des 2 emprunts.</u>

Date	Crédit à court terme	Crédit à long terme	Crédit implicite dans un an
0	990.000	990.000	-
1	(1.080.000)	(251.456,45)	828.543,55
2	-	(251.456,45)	(251.456,45)
3	-	(251.456,45)	(251.456,45)
4	-	(251.456,45)	(251.456,45)
5	-	(251.456,45)	(251.456,45)

Année t	Emprunt de 10.000.000 à 1 an à 6 %			Emprunt de 10.000.000 à 5 ans à 8 %		
	Flux de trésorerie	Facteur d'actualisation $1/ (1 + 0,075)^t$	Flux actualisés	Flux de trésorerie	Facteur d'actualisation $1 / (1 + 0,075)^t$	Flux actualisés
0	990.000	1	990.000	990.000	1	990.000
1	(1.080.000)	0,930232558	(1.004.651,16)	(251.456,45)	0,930232558	(233.912,98)
2	-	-	-	(251.456,45)	0,865332612	(217.593,47)
3	-	-	-	(251.456,45)	0,804960569	(202.412,53)
4	-	-	-	(251.456,45)	0,748800529	(188.290,72)
5	-	-	-	(251.456,45)	0,696558632	(175.154,16)
VAN	-	-	**(14.651,16)**	-	-	**(27.363,86)**

<u>Conclusion</u> : il est manifeste, en comparant les VAN, que l'emprunt à 5 ans est sensiblement plus coûteux…

DETERMINATION DU COÛT ACTARIEL POUR UNE DURATION DONNEE.

On sait que, pour une duration de 2,4 ans (duration de l'emprunt implicite), le financement à long terme n'est préférable que si son coût actuariel est supérieur au point mort actuariel de 8,24 % (plus précisément l'emprunt à long terme ne sera différé que si on peut bénéficier, pour une duration de 2,4 ans, d'un taux actuariel inférieur à 8,24 %). Pour calculer le coût actuariel (r'), nous allons nous servir de la formule de la duration :

$$\mathbf{D = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{FT_j / (1 + r)^j}{E}}$$

$$\frac{\dfrac{251.456,45}{(1 + r')^1}}{990.000} \times 1 + \frac{\dfrac{251.456,45}{(1 + r')^2}}{990.000} \times 2 + \frac{\dfrac{251.456,45}{(1 + r')^3}}{990.000} \times 3 + \frac{\dfrac{251.456,45}{(1 + r')^4}}{990.000} \times 4 + \frac{\dfrac{251.456,45}{(1 + r')^5}}{990.000} \times 5 = 2,4$$

$$\frac{251.456,45}{(1 + r')} + \frac{502.912,90}{(1 + r')^2} + \frac{754.369,35}{(1 + r')^3} + \frac{1.005.825,80}{(1 + r')^4} + \frac{1.257.282,25}{(1 + r')^5} = 2.376.000$$

<u>Pour 14 %, on obtient</u> :

$$\frac{251.456,45}{(1,14)} + \frac{502.912,90}{(1,14)^2} + \frac{754.369,35}{(1,14)^3} + \frac{1.005.825,80}{(1,14)^4} + \frac{1.257.282,25}{(1,14)^5} = 2.365.251,43 < 2.376.000$$

<u>Pour 13 %, on obtient</u> :

$$\frac{251.456,45}{(1,13)} + \frac{502.912,90}{(1,13)^2} + \frac{754.369,35}{(1,13)^3} + \frac{1.005.825,80}{(1,13)^4} + \frac{1.257.282,25}{(1,13)^5} = 2.438.492,44 > 2.376.000$$

Conclusion.

On peut dès lors conclure que, pour une duration donnée de 2,4 ans, le coût actuariel de l'emprunt à long terme se situe entre 13 % et 14 % ; ce taux est naturellement supérieur au point mort actuariel de 8,24 %. L'emprunt à long terme ne sera différé que si, pour une duration de 2,4 ans, on peut bénéficier d'un taux actuariel inférieur à 8,24 % ; ce n'est précisément pas le cas et, à moins de spéculer sur une baisse sensible et rapide des taux d'emprunt à long terme, l'emprunt à CT doit être rejeté au profit de l'emprunt à 5 ans.

Pour un taux d'emprunt à 5 ans de 1,7 %, le taux actuariel correspondant à une duration de 2,4 ans est supérieur au point mort actuariel de 8,24 % ; en d'autres termes (ce taux est en réalité compris entre 8.32 % et 8,33 %), pour que l'emprunt à long terme soit différé et qu'on lui préfère, provisoirement, la solution à court terme, il faut que l'on puisse espérer obtenir, dans un délai de 1 an, un taux d'emprunt à 5 ans inférieur à 1,7 %, ce qui est tout à fait utopique…

LA MESURE DE LA CREATION DE VALEUR
EVA ET FCF

1. L'EVA comme indicateur de création de valeur.

L'EVA se propose d'être l'indicateur de performance du management ; selon certains consultants, « elle permet de mesurer la qualité de l'équipe en place ». Selon ses promoteurs, l'EVA est égale au résultat opérationnel de l'entreprise après impôts diminué de la rémunération du capital utilisé pour son activité.
Déjà en 1890, A. MARSHALL définissait le profit économique comme le bénéfice qui reste disponible pour les actionnaires après déduction de la rémunération du capital employé.
Cela signifie que la valeur créée par une entreprise pendant une période de temps doit prendre en compte non seulement les charges enregistrées en comptabilité mais également le coût d'opportunité des capitaux propres.
Par définition, le profit économique (EVA) est égal à :

EVA = capital investi x (ROIC – WACC)

ROIC	Rentabilité sur les capitaux investis
WACC	Coût moyen pondéré du capital

<u>Calcul de l'EVA de MGX Systems SA.</u>

En millions Euros	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**
CAHT	2.300	2.490	2.642	2.760	2.980
EBIT	300	336	370	400	431
EBIT / CAHT	13 %	13,5 %	14 %	14,5 %	14,5 %
Impôt sur EBIT	120	134	148	160	172
$NOPAT_t$	180	202	222	240	259
AIN	700	771	795	831	888
BFR	370	350	380	415	455
Capital investi : CI_t	1.070	1.121	1.175	1.246	1.343
$R_{e,t} = NOPAT_t / CI_{t-1}$	18,0 %	18,9 ù	19,8 %	20,4 %	20,8 %
$R_{p,t}$ = WACC	10 %	10 %	10 %	10 %	10 %
Spread = $R_{e,t} - R_{p,t}$	8,0 %	8,9 %	9,8 %	10,4 %	10,8 %
$EVA_t = (R_{e,t} - R_{p,t})\ CI_{t-1}$	80	95	110	122	134

Note : montant des capitaux investis en 1997 = 1.000 millions Euros (600 millions d'AIN et 400 millions de BFR)

Calcul de l'EVA à partir de la différence entre le NOPAT et la RCI

L'EVA peut également se calculer par différence entre le bénéfice d'exploitation net d'impôt ajusté (NOPAT) et la rémunération des capitaux investis (RCI).

En millions Euros	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**
$NOPAT_t$	180	202	222	240	259
Capital investi : CI_t	1.070	1.121	1.175	1.246	1.343
$RCI_t = R_{p,t}\ CI_{t-1}$	100	107	112	118	125
$EVA_t = NOPAT_t - RCI_t$	80	95	110	122	134

Notations et définitions.

CAHT	Chiffre d'affaires hors taxes
EBIT	« Earning Before Interest ans Taxes » : bénéfice avant intérêts et impôt
NOPAT	« Net Operating Profit After Taxes » : bénéfice d'exploitation diminué de l'impôt ajusté, c'est-à-dire de l'impôt que devrait payer la firme si elle n'avait pas de dettes financières : $NOPAT = EBIT\ (1 - \tau)$, avec τ = taux d'imposition des bénéfices
AIN	Actifs immobilisés nets d'amortissement
BFR	Besoin en Fonds de Roulement
CI_t	Capitaux investis dans l'exploitation de l'entreprise (invested capital), année t : AI = AIN + BFR $CI_t = CI_{t-1} + I_t - A_t$
FCF_t	Free cash flow, ou flux de fonds disponibles pour les apporteurs de capitaux (actionnaires & créanciers financiers), année t FCF_t = cash flow d'exploitation + Δ CI

A_t	Dotations aux amortissements de l'exercice t
I_t	Montant des investissements (actifs immobilisés et BFR) réalisés dans l'exercice t
R_e	Rentabilité économique ou rentabilité des capitaux investis (ROIC)
$R_{e,t}$	$R_{e,t} = NOPAT_t / CI_{t-1}$
R_a	Rentabilité pour les actionnaires ou rentabilité des fonds propres, nette d'impôts (ROE)
R_d	Coût des dettes financières (avant impôt
R_p	Coût moyen pondéré du capital (WACC) : $R_p = [1 / (1 + \lambda)]\ R_a + [\lambda / (1 + \lambda)]\ R_d\ (1 - \tau)$ Avec λ = dettes financières / fonds propres
RCI	Rémunération des capitaux investis = $R_{p,t}\ CI_{t-1}$
EVA	Economic Value Added = $(R_{e,t} - R_{p,t})\ CI_{t-1}$
MVA	Market Value Added

2. **L'évaluation par les free cash flow.**

Selon la théorie financière moderne, la valeur de la firme est égale à la somme actualisée des flux de fonds allant aux actionnaires et créanciers financiers, c'est-à-dire les cash flow d'exploitation diminués des investissements de la période nécessaire à l'exploitation. Par investissement il faut considérer les acquisitions d'actifs immobilisés (AI) comme les éventuelles augmentations du besoin en fonds de roulement (BFR).

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{FCF_t}{(1 + R_p)^t} + \frac{V_n}{(1 + R_p)^n}$$

Avec V_n = valeur résiduelle de la firme à la date n.

Calcul des free cash flow de MGX Systems SA.

En millions Euros	1998	1999	2000	2001	2002
CAHT	2.300	2.490	2.642	2.760	2.980
EBIT	300	336	370	400	431
EBIT / CAHT	13 %	13,5 %	14 %	14,5 %	14,5 %
Impôt sur EBIT	120	134	148	160	172
NOPAT	180	202	222	240	259
Dotation aux amortissements	60	69	76	84	93
Cash flow d'exploitation	240	271	298	324	352
Δ BFR	(30)	(20)	30	35	40
Investissement brut	160	140	100	120	150
Free cash flow : FCF_t	110	151	168	169	162

En actualisant au coût moyen pondéré du capital (R_p = WAVV) la chronique des FCF, on obtient la valeur actuelle de la firme. Comme il est impossible en pratique de faire des prévisions à l'infini, on borne la période de prévisions sur 5 ou 7 ans et on remplace les FCF futurs par la valeur à terme de l'entreprise (V_n = valeur résiduelle). Cette valeur à l'horizon peut se calculer en capitalisant le dernier FCF au coût du capital diminué d'un éventuel taux de croissance (g).

$$\mathbf{V_n = [\, FCF_{n-1}\,] / [R_p - g]}$$

Pae exemple, si on considère que le FCF de l'année 2003 sera de 170 millions Euros avec un coût du capital de 10 % et un taux de croissance infini de 4 %, la valeur à terme (2002) de MGX Systems sera de 2.833 millions Euros :

$$V_n = 170 / [0{,}10 - 0{,}04] = 2.833$$

La valeur globale de MGX Systems en 1997 est donc égale à la somme actualisée des free cash flow de 1998 à 2002 augmentée de la valeur actualisée de sa valeur résiduelle, soit au total 2.326 millions Euros.

$$V_0 = \frac{110}{1,10} + \frac{151}{(1,10)^2} + \frac{168}{(1,10)^3} + \frac{169}{(1,10)^4} + \frac{162 + 2.833}{(1,10)^5} = 2.326$$

Pour calculer la valeur du capital des actionnaires, il suffit de retrancher de la valeur globale de la firme, la valeur de marché des dettes financières. Ainsi, maximiser la valeur globale de la firme (et donc celle des free cash flow) revient, pour une valeur de dettes données, à maximiser la richesse des actionnaires.

LA THEORIE DES OPTIONS.

INTRODUCTION.

Les contrats d'options font partie de ces produits qui se sont amplement multipliés ces dernières années sur les marchés financiers. Concrètement les innovations, élaborées grâce aux techniques utilisées dans les bourses de commerce et sur les marchés à terme de marchandises ou de matières premières, ont porté sur la création de marchés à terme de contrats de devises et de taux d'intérêts par exemple. Les contrats d'options ne sont finalement qu'une variété ou encore une extension des contrats à terme ; toutefois leurs marchés ont pris une extension considérable.
Les options sont des actifs financiers qui permettent un arbitrage particulier entre la rentabilité et le risque. Au sens strict, un contrat d'option sur actions donne le droit à son détenteur d'acheter (option d'achat ou « call ») ou de vendre (option de vente ou « put ») ultérieurement une ou plusieurs actions à un prix déterminé à l'avance ; ce type de contrat est « valorisé » sur le marché financier.

Les options (que l'on appelle encore « actifs conditionnels ») peuvent prendre des formes multiples ; outres qu'elles sont d'achat ou de vente, on distingue également les options de deux autres manières.

Américaines ou européennes.

Les options « européennes » ne permettent l'exercice du droit d'option qu'à des dates prédéterminées d'expiration (avec une échéance de 9 mois, par exemple) ; les « américaines » permettent d'exercer le droit à n'importe quelle date avant l'échéance.

Elémentaires et de stellage.

Les options « élémentaires » sont des contrats simples limités à un seul droit (celui d'acheter ou celui de vendre ; les options de « stellage » peuvent être des combinaisons de contrats séparés (« straps » : deux options d'achat et une option de vente ; « strips : une option d'achat et deux options de vente) ou des combinaisons incluses dans un seul contrat (« straddles : des options d'achat et de vente avec des prix d'exercice et des dates d'échéance identiques pour les 2 types ; « spreads » : options d'achat et de vente avec un prix d'exercice des premières qui est supérieur à celui des secondes). Les stellages présentent de multiples variantes mais ce sont principalement des combinaisons d'options simples.

Les options sont donc caractérisées par leurs formes, par le nombre de titres prévus dans les contrats, par leurs durées ou dates d'exercice, par le prix d'exercice des actions (c'est-à-dire les prix attribués aux actions au moment de la négociation des contrats) et par leurs prix ou leurs valeurs : appelés « avec » à Paris, « premiums » à Chicago et à New York.

Par exemple, un contrat d'option peut être représenté par l'exemple suivant :

Le 10 janvier, une option d'achat sur une action Y est négociée en bourse aux échéances de février, mars et avril au prix d'exercice de 500 F, pour des prix « avec » égaux respectivement à 30,88 F, 55,32 F et 70,44 F.

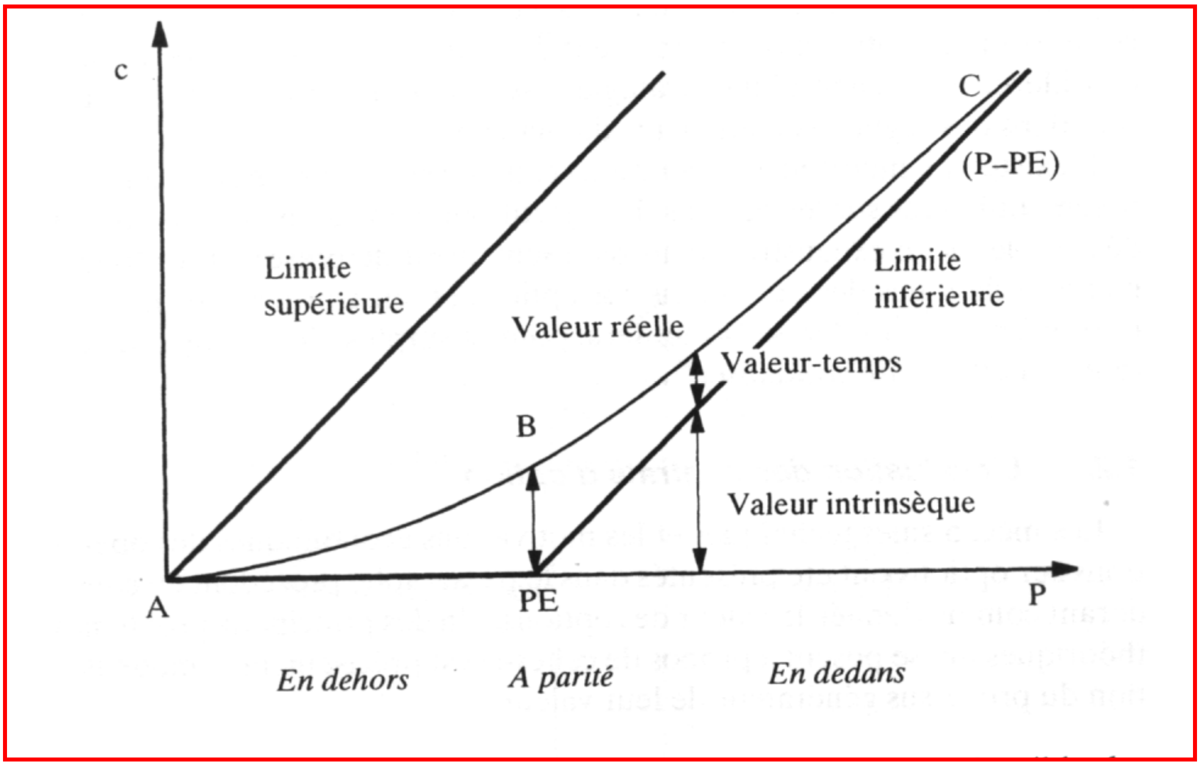
LES VARIABLES INFLUENÇANT LA VALEUR D'UNE OPTION D'ACHAT.

La valeur d'une option d'achat s'exprime fondamentalement comme une fonction de 5 variables :

$W = f(C, E, T, \sigma^2, r_s)$

W	**La valeur de l'option**
C	**La valeur espérée du cours de l'action (le sous-jacent)**
E	**Le prix d'exercice**
T	**La durée de l'option = temps qui doit s'écouler jusqu'à la date d'exercice**
σ^2	**Volatilité de l'action sous-jacente = variance de la rentabilité du sous-jacent**
r_s	**Le taux d'intérêt sans risque**

EVALUATION GRAPHIQUE D'UN CALL.



LES MODELES D'EVALUATION DES OPTIONS.

On reconnaît principalement **trois modèles** d'évaluation des options sur actions ; le 3ème modèle est en réalité une extension du modèle de BLACK & SCHOLES (prise en compte des dividendes omis par le modèle initial).

- **L'approche binomiale (COX, ROSS & RUBINSTEIN, 1979)** : principes,duplication (« spanning »), treillis binomial

- **Le modèle de BLACK et SCHOLES (1973)** : technique de la diffusion.

- **Autres modèles d'évaluation** : variantes et prolongement du modèle de diffusion (WIENER, MERTON, COX & ROSS, RUBINSTEIN) ; prise en compte du paiement d'un dividende (BLACK)

Le modèle de BLACK & SCHOLES (1973) reconnaît 5 paramètres pour l'évaluation des options :

- Le prix d'exercice
- Le prix au comptant (premium)
- La volatilité du cours de l'action
- Le taux d'intérêt sans risque (supposé constant)
- La date d'exercice de l'option

La formule de BLACK & SCHOLES qui donne la valeur d'une option d'achat (call) sur une option est la suivante :

$$C\ (S, T, EX) = S.\ N\ .\ (d1) - EX\ .\ e^{-rT}\ .\ N\ .\ (d1 - \sigma\ .\ \sqrt{T})$$

S	Le cours de l'action
EX	Le prix d'exercice
T	La durée de l'option jusqu'à l'échéance
N . ()	La valeur de la distribution normale cumulée
r	Le taux d'intérêt sans risque
σ	L'estimation de l'écart-type du taux de rendement du titre

Outre la constance du taux sans risque, le modèle admet que le cours de l'action suit un cheminement aléatoire en continu dans le temps. La variance de la rentabilité, supposée connue, est constante pendant toute la durée de l'option. Plus précisément, la distribution de probabilité des cours à un moment donné suit une loi log-normale, ce qui signifie que les accroissements de cours suivent une loi normale. En conséquence la variance du cours est proportionnelle au carré du cours.

Calcul de σ.

On l'estime généralement sur base de la série des cours historiques en calculant le rendement $r_t = \ln(C_t) - \ln(C_{t-1})$ et en déterminant l'écart-type de cette série.

Calcul de d_1.

$$d_1 = \frac{\ln \dfrac{S}{EX} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) . T}{\sigma\ .\ \sqrt{T}}$$

Remarque : dans de nombreuses présentations, on trouve $d_2 = (d_1 - \sigma \, . \sqrt{T})$

La valeur de l'option de vente (put) s'obtient par la formule :

$$\mathbf{P\ (S, T, EX) = - S \,.\, N \,.\, (- d_1) + EX \,.\, e^{-rT} \,.\, N \,.\, (- d_1 + \sigma \,.\, \sqrt{T})}$$

NOTE POUR LE CALCUL DE N (D) [R. GOFFIN, « PRINCIPES DE FINANCE MODERNE », 2001].

N (d) est la probabilité qu'une variable normale centrée réduite x ait une valeur inférieure ou égale à d. C'est donc la fonction de répartition d'une variable x qui suit une loi normale centrée réduite N (0, 1).

Lorsque $d \to + \infty$, $N(d) \to 1$
Lorsque $d = 0$, $N(d) = 0{,}5$
Lorsque $d \to - \infty$, $N(d) \to 0$

Par symétrie, on a : $N(-d) = 1 - N(d)$

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite figure dans les tables ci-jointes ; cependant lorsque la précision donnée par ces tables est insuffisante, on peut alors utiliser l'approximation polynomiale suivante :

Si d > 0.

$$N(d) = 1 - \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, e^{-d^2/2} \right] . (a_1 \,.\, k + a_2 \,.\, k^2 + a_3 \,.\, k^3 + a_4 \,.\, k^4 + a_5 \,.\, k^5)$$

$$\text{Avec } k = \frac{1}{1 + 0{,}2316419 \,.\, d}$$

a_1	0,319381530
a_2	– 0,356563782
a_3	1,781477937
a_4	- 1,821255978
a_5	1,330274429

Rappelons que π = 3,141592654

Si d < 0.

On utilise la relation N (– d) = 1 – N (d)

(si d = 0, on a N (d) = 0,5)

Probabilités cumulées d'une distribution normale centrée réduite.

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bullet e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

Avec X ≥ 0

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,98,30	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Remarque : en statistique, la valeur centrée réduite t est communément désignée par z_0

APPLICATION : LES CONTRATS DE LOCATION – FINANCEMENT.

Illustration.

Supposons un contrat de location – financement présentant les caractéristiques suivantes :

- Montant de l'actif financé (amortissable sur 5 ans) : 500.000 €
- Loyer annuel payable à la fin de chaque année : L = 130.000 €
- Valeur de l'option de rachat à terme : R = 50.000 €, soit 10 % de la valeur initiale du bien
- Taux d'imposition des résultats : $\tau = 40$ %

Approche classique (calcul du coût actuariel du contrat).

$$I_0 = \sum_{T=1}^{N} \frac{L_T * (1 - \tau) + A_T * \tau}{(1 + i)^T} + \frac{R_N}{(1 + i)^N}$$

$$500 = \sum_{T=1}^{N} \frac{130 * (1 - 0{,}4) + 100 * 0{,}4}{(1 + i)^T} + \frac{50}{(1 + i)^5} \Rightarrow i = 8{,}37 \%$$

Cette approche ignore en réalité que le preneur a la faculté de ne pas exercer son option de rachat à terme. En effet, si l'actif à l'échéance vaut moins que la valeur de rachat, il est fort possible qu'il n'exerce pas son droit.
Si, à l'échéance, la valeur résiduelle de l'actif est supérieure à sa valeur de rachat, le preneur du contrat fera un gain qu'il convient de valoriser. Ce gain potentiel aura pour conséquence de faire baisser le coût du financement par leasing.

Approche par la théorie des options.

Pour valoriser ce gain potentiel, on peut recourir à la théorie des options : supposons que l'actif en question fasse l'objet d'un marché secondaire actif (par exemple l'automobile) permettant de connaître le risque mesuré par la volatilité.
Supposons les données suivantes :

- Volatilité annualisée : 15 %
- Prix d'exercice lié à l'option d'achat : $P_X = 50.000$ €
- Valeur de marché d'un actif équivalent de 5 ans d'âge : $P_0 = 55.000$ €

A l'aide de ces données, on peut calculer, en utilisant le modèle de Black & Scholes, la valeur de l'option de rachat du contrat :

$D_1 = 1{,}34629$ et $N(d_1) = 0{,}910896$
$D_2 = 1{,}01088$ et $N(d_2) = 0{,}843964$

Valeur de l'option : $W_0 = 55.000 \times 0{,}910896 - 50.000 \times (e^{-0{,}06 \times 5}) \times 0{,}843964 = 18.838$ €

Cette valeur de l'option de rachat augmente la valeur initiale de l'actif et fait, du même coup, baisser le coût actuariel du contrat :

$$I_0 + W_0 = \sum_{T=1}^{N} \frac{L_T * (1 - \tau) + A_T * \tau}{(1 + i)^T} + \frac{R_N}{(1 + i)^N}$$

$$500 + 18{,}84 = \sum_{T=1}^{N} \frac{130 * (1 - 0{,}4) + 100 * 0{,}4}{(1 + i)^T} + \frac{50}{(1 + i)^5} \Rightarrow i = 7{,}04\ \%$$

SYNTHESE D'EXERCICES DE REVISION : RESOLUTIONS.

Exercice n° 1.

$$\mathbf{VF_t = VA \cdot (1 + i)^t}$$

VF_t = 20.000 x $(1 + 0{,}075)^8$ = 35.669,56 €

$(1 + 0{,}075)^t$ = 35.669,56 / 20.000

$(1{,}075)^t$ = 1,783478

t x log (1,075) = log (1,783478)

t = log (1,783478) / log (1,075)

t = 0,251267756 / 0,031408464

t = 8 ans

Exercice n° 2.

$$\mathbf{VA = VF_t \cdot \frac{1}{(1 + i)^t}}$$

VA = 100.000 x [1 / $(1 + 0{,}08)^{10}$] = 100.000 x (1 / 2,158924997) = 46.319,35 €

$$\mathbf{(1 + i)^t = VF_t / VA}$$

$(1 + 0{,}08)^t$ = 100.000 / 46.319,35

$(1{,}08)^t$ = 2,158924942

t x log (1,08) = log (2,158924942)

t = log (2,158924942) / log (1,08) = 0,334237543 / 0,033423755 = 9,9999… = 10 ans

Exercice n° 3.

Annuité = (20.000 / 5) + (0,005 x 12 x 20.000) = 4.000 + 1.200 = 5.200

$$\mathbf{i_A = \frac{r \cdot 24 \cdot n}{n + 1}}$$

$$i_A = \frac{0,005 \times 24 \times 5}{5 + 1} = 0,6 / 6 = 0,10 = 10\ \%$$

$$\mathbf{i = \left(\frac{1}{n} + r\right) \cdot [1 - (1 + i)^{-n}]}$$

$i = (1 / 5 + 0,005) \cdot [1 - (1 + 0,005)^{-8}] = 0,205 \times [1 - (1 / 1,040707044)]$

$i = 0,205 \times (1 - 0,960885203) = 0,205 \times 0,039114796 = 0,00801853 = 8,02\ \%$

Exercice n° 4.

<u>Escompte rationnel.</u>

$\mathbf{C_0 = C_n / (1 + i \cdot n)}$

$C_0 = 20.000 / [1 + (0,02 \times (4/12))] = 20.000 / (1 + 0,01) = 19.801,98$ €

$E_R = 20.000 - 19.801,98 = 198,02$ €

<u>Escompte commercial.</u>

$\mathbf{E_C = C_n \cdot d \cdot n}$

$E_C = 20.000 \times 0,03 \times (4/12) = 20.000 \times 0,01 = 200$ €

$C_0 = C_n - E_C -$ TVA – Frais = 20.000 – 200 – 210 – 1.000 = 18.590 €

<u>Taux d’intérêt effectif (escompte commercial).</u>

18.590 x (4/12) x i = EC + Frais

18.590 x (4/12) x i = 200 + 1.000

i = 1.200 / [18.590 x (4/12)] = 1.200 / 6.196,666667 = 0,193652 = 19,37 %

Exercice n° 5.

$$\mathbf{A = VA \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}}$$

VA = 20.000 – 2.000 = 18.000 €

$$A = 18.000 \times \frac{0{,}075 \times (1 + 0{,}075)^5}{(1 + 0{,}075)^5 - 1} = 18.000 \times \frac{0{,}075 \times 1{,}435629326}{0{,}435629326}$$

A = 18.000 x 0,247164717 = 4.448,96 €

Année	Annuité	Capital	Intérêts	Solde restant dû
1	4.448,96	3.098,96	1.350	14.901,04
2	4.448,96	3.331,38	1.117,58	11.569,66
3	4.448,96	3.581,24	867,72	7.988,42
4	4.448,96	3.849,83	599,13	4.138,59
5	4.448,96	4138,57	310,39	0
Total	**-**	**18.000**	**4.244,82**	**-**

Exercice n° 6.

Méthode rétrospective avec salaire de fin de carrière.

Montant des droits acquis au 31/12/n (calculé avec salaire de fin de carrière ; revalorisation des rémunérations de 2,5 %) :

$$20.000\ € \times (1 + 0{,}025)^{35} \times 10 \text{ ans} \times 0{,}30\ \% \times 20 \text{ ans} \times 65\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}045)^{35}} = 396.606{,}41\ €$$

Montant des droits acquis au 31/12/n+1 (calculé avec salaire de fin de carrière ; revalorisation des rémunérations de 2,5 %) :

$$20.000\ € \times (1 + 0{,}025)^{35} \times 11 \text{ ans} \times 0{,}30\ \% \times 20 \text{ ans} \times 66\ \% \times \frac{1}{(1 + 0{,}045)^{34}} = 462.912{,}90\ €$$

Le coût des services rendus pendant l'exercice n+1 est obtenu par différence :

462.912,90 – 396.606,41 = 66.306,50 €

La méthode des unités de crédit projetées.

Montant total de la pension annuelle à laquelle aura droit le salarié lors de son départ à la retraite (avec 45 ans d'ancienneté) :

$20.000 \text{ €} \times (1 + 0,025)^{35} \times 0,30 \% \times 45 \text{ ans} = 640.765,40 \text{ €}$

Montant total de l'engagement calculé à la date de départ à la retraite :

640.765,40 € x 20 ans = 12.815.308 €

Montant des droits acquis au 31/12/n :

$$12.815.308 \text{ €} \times (10 / 45) \times 65 \% \times \frac{1}{(1 + 0,045)^{35}} = 396.606,41 \text{ €}$$

Montant des droits acquis au 31/12/n+1 :

$$12.815.308 \text{ €} \times (11 / 45) \times 66 \% \times \frac{1}{(1 + 0,045)^{34}} = 462.912,90 \text{ €}$$

Le coût des services rendus pendant l'exercice n+1 est obtenu par différence :

462.912,90 – 396.606,41 = 66.306,50 €

Exercice n° 7.

Calcul de l'annuité.

$$A = VA \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

$$A = 5.000.000 \times \frac{0{,}08 \times (1+0{,}08)^5}{(1+0{,}08)^5 - 1} = 5.000.000 \times \frac{0{,}08 \times 1{,}469328077}{0{,}469328077}$$

A = 5.000.000 x 0,250456454 = 1.252.282,27 €

Tableau des flux de trésorerie.

Années	Flux de trésorerie		
	Flux hors frais	Frais	Total
0	+ 5.000.000	– 500.000	+ 4.500.000
1	– 1.252.282,27	– 10.000	– 1.262.282,27
2	– 1.252.282,27	– 10.000	– 1.262.282,27
3	– 1.252.282,27	– 10.000	– 1.262.282,27
4	– 1.252.282,27	– 10.000	– 1.262.282,27
5	– 1.252.282,27	– 10.000	– 1.262.282,27

Calcul du coût actuariel.

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{FT_j}{(1+r)^{dj}} = 0$$

Interpolation linéaire.

$$\frac{Y - Y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{X - X_2}{X_1 - X_2}$$

X	Inconnue
X_1	0,12
X_2	0,13
Y	0
Y_1	– 50.245,09
Y_2	60.261,34

$$\frac{0 - 60.261{,}34}{-50.245{,}09 - 60.261{,}34} = \frac{X - 0{,}13}{0{,}12 - 0{,}13}$$

(X – 0,13) / (– 0,01) = (– 60261,34) / (– 110.506,43)

(X – 0,13) / (– 0,01) = 0,545319761

X – 0,13 = – 0,00545319761 $\Rightarrow$ X = 0,13 – 0,00545319761 = 0,124546806 = 12,45 %

Calcul de la duration.

Date	**Flux de trésorerie**	**Valeur actuelle des flux à 12,45 %**	**Pourcentages par rapport à l'encaissement**	**Contributions à la durée (en années)**
0	+ 4.500.000	+ 4.500.000	100 %	-
1	– 1.262.282,27	– 1.122527,59	0,249450575	0,24945
2	– 1.262.282,27	– 998.245,96	0,221832435	0,44366
3	– 1.262.282,27	– 887.724,59	0,197272131	0,59182
4	– 1.262.282,27	– 789.439,12	0,175430915	0,70172
5	– 1.262.282,27	– 702.035,68	0,156007928	0,78004
			DURATION =	2,767

Date	**Flux de trésorerie**	**Facteur d'actualisation $1/(1 + 0{,}1245)^t$**	**Valeur actuelle des flux à 12,45 %**
0	+ 4.500.000	1	+ 4.500.000
1	– 1.262.282,27	1,1245	– 1.122527,59
2	– 1.262.282,27	1,26450025	– 998.245,96
3	– 1.262.282,27	1,421930531	– 887.724,59
4	– 1.262.282,27	1,598960882	– 789.439,12
5	– 1.262.282,27	1,798031512	– 702.035,68

Exercice n° 8.

$i = (1 + j_{(m)} / m)^m - 1$ et $j_{(m)} = 0,06$

	m	i
(1)	12	$[1 + (0,06 / 12)]^{12} - 1 = 0,061677811 = 6,17\ \%$
(2)	360	$[1 + (0,06 / 360)]^{360} - 1 = 0,061831212 = 6,18\ \%$

$j_{(m)} = m \cdot [(1 + i)^{1/m} - 1]$, $i = 0,06$

	m	i
(1)	2	$2 \times [(1 + 0,06)^{1/2} - 1] = 2 \times [(1 + 0,06)^{0,5} - 1] = 0,059126028 = 5,91\ \%$
(2)	24	$24 \times [(1 + 0,06)^{1/24} - 1] = 24 \times [(1 + 0,06)^{0,041666} - 1] = 0,058338763 = 5,83\ \%$

MATHEMATIQUES FINANCIERES
SYNTHESE D'EXERCICES DE REVISION

1°. Intérêts composés : la capitalisation.

Monsieur G. DUFRIC a gagné 20.000 € à un jeu de loterie ; il décide de placer cet argent sur un livret d'épargne durant 8 ans ; le taux d'intérêt annuel constant est de 7,5 %. Chaque année, les intérêts perçus sont versés sur le livret et produisent à leur tour un intérêt.

- Combien Monsieur Durand recevra-t-il au terme de la 10ème année ?
- A partir de la réponse à la question précédente et des données de l'énoncé, retrouver la durée du placement.

2°. Intérêts composés : l'actualisation.

Monsieur Jean NEZPAT recevra, dans 10 ans, la somme de 100.000 € ; il est désespéré à l'idée que s'il disposait actuellement de cette somme d'argent, il pourrait la placer au taux d'intérêt annuel constant de 8 %

- Combien valent actuellement les 100.000 € à recevoir dans 10 ans ?
- A partir de la réponse à la question précédente et des données de l'énoncé, retrouver le nombre d'années à attendre avant de percevoir la somme.

3°. L'escompte rationnel et l'escompte commercial.

Une entreprise escompte auprès de sa banque un effet de commerce d'une valeur nominale de 200.000 € ; la traite vient à échéance dans 4 mois. La banque pratique un taux d'escompte de 3 % ; les divers frais de commission s'élèvent à 1.000 € HTVA de 21 %.

- Calculer, selon les méthodes de l'escompte rationnel et de l'escompte commercial, le montant de l'escompte et la valeur actuelle.
- Dans le cas de l'escompte commercial, calculer le taux d'intérêt effectivement pratiqué par la banque.

4°. Le leasing financier.

L'entreprise souhaite acquérir, en leasing, une machine d'une valeur de 20.000 € ; le contrat est établi pour une durée de 5 ans ; le taux d'intérêt annuel pratiqué est de 7,5 % ; le contrat prévoit une option d'achat de la machine pour un montant de 2.000 €.

- Calculer le montant de l'annuité.
- Etablir le tableau des remboursements.

5°. Les engagements de retraite.

Evaluer, selon la méthode rétrospective avec salaire de fin de carrière et selon la méthode des unités de crédit projetées, les engagements d'un régime de retraite dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Rente annuelle de 0,3 % par année d'ancienneté assise sur le dernier salaire annuel.
- Date de mise en place du régime : 31/12/n
- Dernier salaire annuel au 31/12/n : 20.000 €
- Age de départ à la retraite : 65 ans
- Age du salarié au 31/12/n : 30 ans
- Ancienneté du salarié au 31/12/n : 10 ans
- Taux d'actualisation : 4,5 %
- Probabilité au 31/12/n de présence du salarié dans l'entreprise à l'âge de 65 ans (survie et rotation) : 65 % (66 % au 31/12/n+1).
- Espérance de vie après l'âge de la retraite exprimée en nombre d'années et actualisée : 20 ans (table de rentes viagères : TV 88/90 ; taux d'actualisation de 5 %, revalorisation des rentes de 2,5 %).

6°. Le coût actuariel de l'endettement et la duration.

Une société a la possibilité de souscrire auprès de sa banque un emprunt de 5.000.000 € remboursables en 5 ans ; le taux annuel proposé est de 8 %. Les frais de gestion sont les suivants : 500.000 € à l'ouverture du crédit et 10.000 € à chaque échéance.

- Déterminer le taux actuariel de cet emprunt, sachant qu'il est compris entre 12 et 13 %
- Calculer la duration.

MATHEMATIQUES FINANCIERES

REVISIONS DU 22 FEVRIER 2011

PROBLEME N° 1 : ANNUITE & TABLEAU DE REMBOURSEMENTS.

Une entreprise souhaite financer l'acquisition d'un bien quelconque d'une valeur de 50.000,00 € HTVA au moyen d'un crédit d'investissement. Les conditions proposées par la banque sont les suivantes : remboursement, en 3 ans, par « quadrimestrialité » constante, au taux annuel nominal (capitalisé tous les quadrimestres) de 6 %.
Veuillez calculer le montant de la « quadrimestrialité » et établir le tableau des remboursements.

ECHEANCE	SEMESTRIALITE	CAPITAL	INTERÊTS	SOLDE DÛ
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

QUESTION SUBSIDIAIRE : TAUX EQUIVALENTS.

Quel est le taux annuel réel correspondant au taux nominal utilisé ?

PROBLEME N° 2 : PENSIONS COMPLEMENTAIRES.

Evaluer, selon la **méthode rétrospective avec salaire de fin de carrière**, les engagements d'un régime de retraite dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Rente annuelle de 0,25 % par année d'ancienneté assise sur le dernier salaire annuel.
- Date de mise en place du régime : 31/12/n
- Dernier salaire annuel au 31/12/n : 40.000 €
- Age de départ à la retraite : 65 ans
- Age du salarié au 31/12/n : 40 ans
- Ancienneté du salarié au 31/12/n : 10 ans
- Probabilité au 31/12/n de présence du salarié dans l'entreprise à l'âge de 65 ans (survie et rotation) : 50 %.
- Espérance de vie après l'âge de la retraite exprimée en nombre d'années et actualisée : 20 ans (table de rentes viagères : TV 88/90 ; taux d'actualisation de 5 %, revalorisation des rentes de 3,5 %).

Il est demandé d'établir :

- Le montant des prestations au 31/12/N ;
- Le montant des prestations au 31/12/N+1 ;
- Le montant de l'engagement pour l'exercice N+1.

PROBLEME N° 3 : IMMUNISATION DES OBLIGATIONS PAR LA DURATION.

Soit une obligation d'échéance 5 ans et présentant un taux de coupon brut de 6 % (pour rappel : le taux de précompte mobilier est de 15 %). Les obligations ont une valeur nominale de 95,00 € et sont remboursables, à l'échéance, à leur valeur nominale. Le prix d'émission a été fixé à 100,00 €.

- Veuillez, en utilisant la méthode de l'**interpolation linéaire**, déterminer le taux de rendement actuariel de cette obligation, sachant qu'il est compris entre 3,5 % et 4 %. A ces taux correspondent des valeurs actualisées de l'obligation de respectivement 1,86 € et – 0,35 €.
- Veuillez déterminer la duration de cette obligation.

ECHEANCE	FLUX	FLUX ACTUALISES	Rapport au décaissement initial P	Calcul de la duration
0				
1				
2				
3				
4				
5				
5				
			DURATION :	

***QUESTION SUBSIDIAIRE*.**

Que se passerait-il si le taux de coupon était de 8 % et non de 6 % ?

	Le taux de rendement actuariel serait plus élevé et la duration plus longue
	Le taux de rendement actuariel serait plus élevé et la duration plus courte
	Le taux de rendement actuariel serait moins élevé et la duration plus courte

Cocher la bonne réponse

PROBLEME N° 4 : LE RISQUE DE CHANGE.

Un entrepreneur anglais a reçu le 01 juillet 2008 une facture de son fournisseur australien ; le montant de la facture s'élève à 50.000,00 AUD et l'entrepreneur bénéficie d'un délai de paiement de 6 mois. Il craint tout naturellement que la livre anglaise se déprécie par rapport au dollar australien et s'attend donc, s'il ne fait rien, à devoir supporter une perte de change relativement importante.
Il décide de couvrir sa position mais hésite entre deux solutions : soit acquérir des options d'achat sur devises AUD (avec prix d'exercice : GBP/AUD = 2,15) soit nouer avec sa banque un contrat d'achat de devises AUD à terme. Il vous demande de l'aider à trancher cet épineux dilemme.
Nous disposons des informations suivantes :

- Le 01/07/2008, le taux de change GBP/AUD = 2,088633
- Le 101/07/2008, le taux LIBOR 6 mois est, sur le marché des GBP, de 6,155 %
- Le 15/09/2008, le taux LIBOR 6 mois (marché des AUD) est de 8,05 %
- Les taux de change GBP/AUD présentent une volatilité annuelle (hypothèse) de 10 %.

Couverture n° 1 : option d'achat.

Couverture n° 2 : contrat d'achat à terme.

<u>Vos recommandation justifiées à l'entrepreneur.</u>

PROBLEME N° 1

Montant	50.000,00 €
Taux annuel	0,06
Durée (années)	3

Quadrimestrialité **6.125,77 €**

Échéances	Quadrimestrialité	Capital	Intérêts	Solde dû
1	6.125,77 €	5.125,77 €	1.000,00 €	44.874,23 €
2	6.125,77 €	5.228,29 €	897,48 €	39.645,94 €
3	6.125,77 €	5.332,85 €	792,92 €	34.313,09 €
4	6.125,77 €	5.439,51 €	686,26 €	28.873,58 €
5	6.125,77 €	5.548,30 €	577,47 €	23.325,28 €
6	6.125,77 €	5.659,27 €	466,51 €	17.666,01 €
7	6.125,77 €	5.772,45 €	353,32 €	11.893,56 €
8	6.125,77 €	5.887,90 €	237,87 €	6.005,66 €
9	6.125,77 €	6.005,66 €	120,11 €	0,00 €

QUESTION SUBSIDIAIRE

$$i = (1 + j_{(m)} / m)^m - 1$$
$$j_{(m)} = 0,06$$
$$m = 3$$

Taux i : 0,0612

PROBLEME N° 2

$$N = 40000 * (1 + 0,035)^{25} * 10 * 0,0025 * 20 * 0,50 * \frac{1}{(1 + 0,05)^{25}}$$
$$N + 1 = 40000 * (1 + 0,035)^{25} * 11 * 0,0025 * 20 * 0,52 * \frac{1}{(1 + 0,05)^{24}}$$

PROBLEME N° 3

$$\frac{Y - Y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{X - X_2}{X_1 - X_2}$$
$$\frac{0 - (-0,35)}{1,86 - (-0,35)} = \frac{X - 0,04}{0,035 - 0,04}$$

X1	**0,035**
Y1	**1,86**
X2	**0,04**
Y2	**-0,35**
X	**?**
Y	**0**

$$0,35*(-0,005) = 2,21*(X - 0,04)$$
$$-0,00175 = 2,21X - 0,0884$$
$$2,21X = 0,0884 - 0,00175 = 0,08665$$
$$X = 0,08665 / 2,21 = 0,039208145 = 0,039 = 3,9\%$$

Échéance	Flux	Flux actualisés	Rapport à P	Duration
0	-100,00 €	-100,00 €		
1	4,85 €	4,66 €	0,0466	0,04663138
2	4,85 €	4,49 €	0,0449	0,08976203
3	4,85 €	4,32 €	0,0432	0,12958908
4	4,85 €	4,16 €	0,0416	0,16629974
5	4,85 €	4,00 €	0,0400	0,20007188
5	95,00 €	78,46 €	0,7846	3,92297799
			Duration :	**4,5553321**

PROBLEME N° 4

$$D = C * \frac{T_1 - T_2}{1 + T_2}$$

T1	0,06155
T2	0,0805
C	0,47878206
D	-0,00436093
Taux à terme	0,47442112

$$C = S_0 * e^{-rfT} * N(d_1) - K * e^{-rT} * N(d_2)$$
$$P = K * e^{-rT} * N(-d_2) - S_0 * e^{-rfT} * N(-d_1)$$
$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - rf + \frac{\sigma^2}{2}) * T}{\sigma * \sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - rf - \frac{\sigma^2}{2}) * T}{\sigma * \sqrt{T}} = d_1 - \sigma * \sqrt{T}$$

S0	0,47878206
K	0,46511628
T	1
R	0,030775
Rf	0,04025

$$D1 = \frac{\ln(\frac{0,47878206}{0,46511628}) + (0,030775 - 0,04025 + \frac{0,10^2}{2}) * 1}{0,10 * 1}$$

	D	N(D)
D1	**0,24483065**	**0,59670622**
D2	**0,14483065**	**0,55757771**

$$C = 0,47878206 * 0,59670622 - 0,46511628 * e^{-0,030775} * 0,55757\,771$$

CALL : **0,022942578**

Taux de change réel : **0,48805886**

VAN D'UN PROJET D'INVESTISSEMENT : METHODE DES SCENARIOS

La société "LA VIERGE DE FER SA" commercialise des vierges de fer qui sont un instrument de torture dont le Moyen-âge a fait largement usage ;
elle entend accroître sa production en investissant dans l'acquisition d'une chaîne supplémentaire de production.
Le directeur financier a construit 5 scénarios (du plus pessimiste au plus optimiste) auxquels ils a associé des probabibilités.

Capital investi :	1.000.000,00 €
Taux d'actualisation :	0,1

Vierge de fer et autres instruments…

LES DIFFERENTS SCENARIOS

Scénario	Prob	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5
1	0,1	100.000,00 €	200.000,00 €	200.000,00 €	300.000,00 €	200.000,00 €
2	0,2	200.000,00 €	300.000,00 €	300.000,00 €	400.000,00 €	200.000,00 €
3	0,4	400.000,00 €	500.000,00 €	600.000,00 €	600.000,00 €	400.000,00 €
4	0,2	500.000,00 €	600.000,00 €	700.000,00 €	700.000,00 €	500.000,00 €
5	0,1	800.000,00 €	800.000,00 €	800.000,00 €	800.000,00 €	600.000,00 €

LA SEQUENCE DES FLUX

Scénario	Prob	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5
1	0,1	10.000,00 €	20.000,00 €	20.000,00 €	30.000,00 €	20.000,00 €
2	0,2	40.000,00 €	60.000,00 €	60.000,00 €	80.000,00 €	40.000,00 €
3	0,4	160.000,00 €	200.000,00 €	240.000,00 €	240.000,00 €	160.000,00 €
4	0,2	100.000,00 €	120.000,00 €	140.000,00 €	140.000,00 €	100.000,00 €
5	0,1	80.000,00 €	80.000,00 €	80.000,00 €	80.000,00 €	60.000,00 €
	TOTAUX :	390.000,00 €	480.000,00 €	540.000,00 €	570.000,00 €	380.000,00 €

L'ACTUALISATION DES FLUX

Années	Flux	Flux actualisés
1	390.000,00 €	354.545,45 €
2	480.000,00 €	396.694,21 €
3	540.000,00 €	405.709,99 €
4	570.000,00 €	389.317,67 €
5	380.000,00 €	235.950,10 €
	Total :	1.782.217,43 €
	2.360.000,00 €	

CALCUL DE LA VAN DU PROJET

Capital investi (-)	1.000.000,00 €
Total des flux actualisés (+)	1.782.217,43 €
VAN du projet	**782.217,43**

MATRICES STOCHASTIQUES & CHAÎNES DE MARKOV

Andreï MARKOV (1856-1922)

Une matrice stochastique (également appelée matrice de Markov) est une matrice carrée dont chaque élément est un réel compris entre 0 et 1 et dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1. Cela correspond, en probabilité, à la matrice de transition d'une chaîne de Markov finie.

Un processus de Markov à temps discret est un processus stochastique possédant la propriété de Markov : la prédiction du futur, connaissant le présent, n'est pas rendue plus précise par des éléments d'informations supplémentaires concernant le passé. Les processus de Markov constituent le cas le plus courrant des mouvements browniens. Une matrice est dite doublement stochastique si la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne vaut 1.

Exemple de matrice stochastique.

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Matrices stochastiques régulières et irréductibles.

Une matrice stochastique est dite régulière s'il existe un nombre entier k tel que la matrice P^k ne contient que des réels strictement positifs.

La matrice ci-dessus est régulière car :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,37 & 0,45 & 0,18 \\ 0,26 & 0,70 & 0,04 \\ 0,33 & 0,45 & 0,22 \end{pmatrix}$$

Une chaîne de Markov est irréductible si tout état est accessible à partir de n'importe quel état de la chaîne.

<u>**Théorème**</u> **:** une matrice régulière est nécessairement irréductible.

APPLICATION : DOUDOU LE HAMSTER.

Doudou, le hamster paresseux, ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation *processus sans mémoire* n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou.

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatigant ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.

Diagrammes (voir illustration ci-dessous).

Les diagrammes peuvent montrer toutes les flèches, chacune représentant une probabilité de transition. Cependant, c'est plus lisible si :

- on ne dessine pas les flèches de probabilité zéro (transition impossible) ;
- on ne dessine pas les boucles *(flèche d'un état vers lui-même)*. Cependant elles existent ; leur probabilité est sous-entendue car on sait que la somme des probabilités des flèches partant de chaque état doit être égale à 1.

Matrice de transition.

La matrice de transition de ce système est la suivante (les lignes et les colonnes correspondent dans l'ordre aux états représentés sur le graphe par *copeaux*, *mangeoire*, *roue*) :

$$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Prévisions.

Prenons l'hypothèse que Doudou dort lors de la première minute de l'étude.

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Au bout d'une minute, on peut prédire :

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \end{bmatrix}$$

Ainsi, après une minute, on a 90 % de chances que Doudou dorme encore, 5 % qu'il mange et 5 % qu'il coure.

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} P = \mathbf{x}^{(0)} P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0,885 & 0,045 & 0,07 \end{bmatrix}$$

Après 2 minutes, il y a 4,5 % de chances que le hamster mange.

De manière générale, pour n minutes :

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n-1)} P$$
$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(0)} P^n$$

La théorie montre qu'au bout d'un certain temps, la loi de probabilité est indépendante de la loi initiale. Notons la q :

$$\mathbf{q} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{x}^{(n)}$$

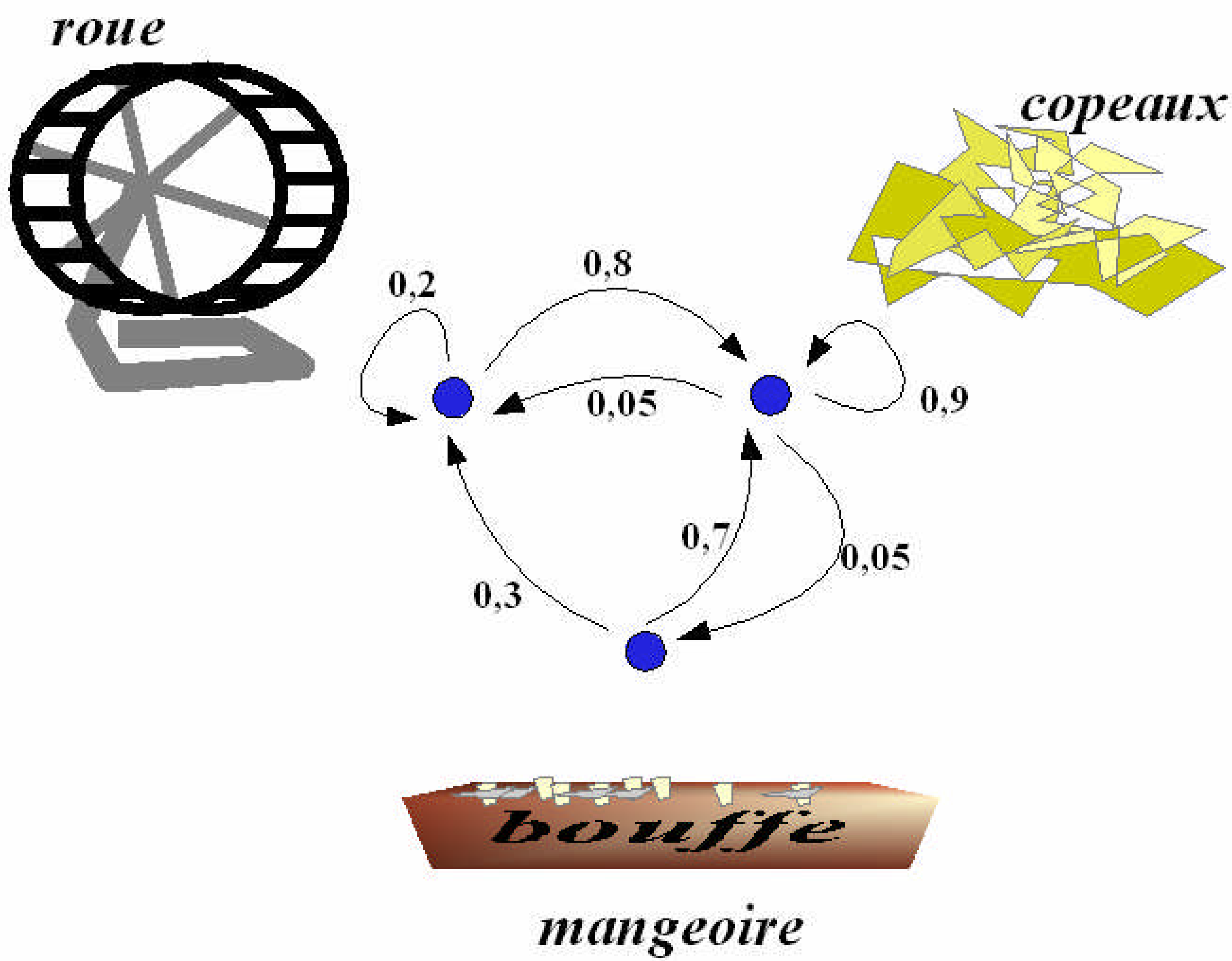
On obtient la convergence si et seulement si la chaîne est apériodique et irréductible. C'est le cas dans notre exemple, on peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{q}P &= \mathbf{q} \qquad (\mathbf{q} \text{ est la loi invariante par rapport a } P.) \\
&= \mathbf{q}I \\
\mathbf{q}(I-P) &= \mathbf{0} \\
&= \mathbf{q}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathbf{q}\begin{bmatrix} 0,1 & -0,05 & -0,05 \\ -0,7 & 1 & -0,3 \\ -0,8 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,1 & -0,05 & -0,05 \\ -0,7 & 1 & -0,3 \\ -0,8 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Sachant que $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, on obtient :

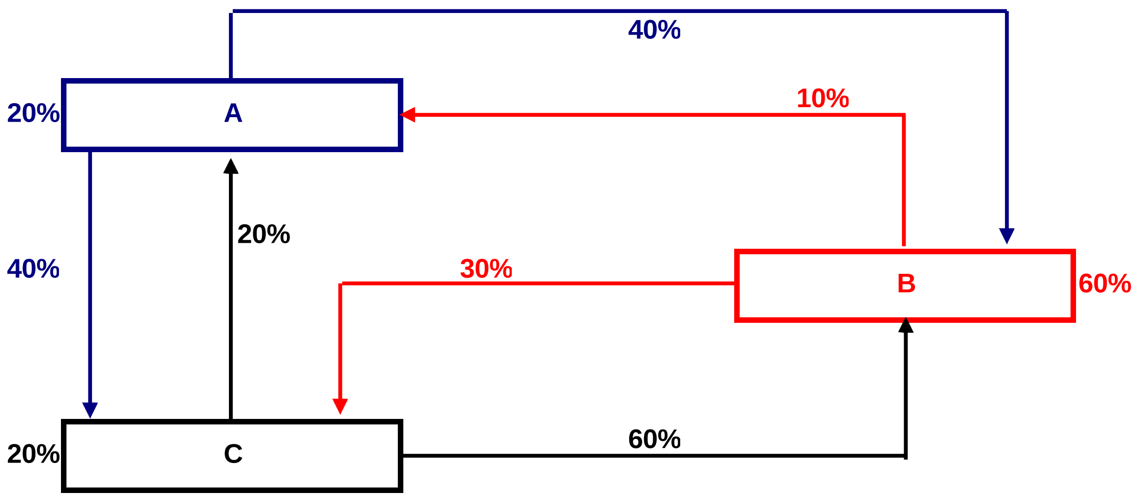
$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,884 & 0,0442 & 0,0718 \end{bmatrix}$$

Doudou passe 88,4 % de son temps à dormir !


roue
copeaux
0,2
0,8
0,05
0,9
0,7
0,05
0,3
bouffe
mangeoire

VAN D'UN PROJET D'INVESTISSEMENT ET PROCESSUS DE MARKOV

Les flux constatés au terme de l'année 1 constituent la situation initiale correspondant à l'état A dans le processus de Markov à 3 états A, B et C.



A	**Situation stationnaire**
B	**Hausse de 20 %**
C	**Diminution de 20 %**

<u>On demande</u> :

1. **De déterminer la matrice de transition**
2. **De déterminer les probabilités relatives aux flux des années 2 à 5**
3. **De déterminer les flux des années 2 à 5**
4. **De calculer la VAN du projet**

ANNEE 1	ANNEE 2			ANNEE 3			ANNEE 4		
FLUX	Scenario	PROB	FLUX	Scenario	PROB	FLUX	Scenario	PROB	FLUX
€ 390.000,00	IDEM	0,2	€ 78.000,00	IDEM	0,16	€ 62.400,00	IDEM	0,144	€ 59.304,96
	+ 20 %	0,4	€ 187.200,00	+ 20 %	0,56	€ 262.080,00	+ 20 %	0,568	€ 280.710,14
	- 20 %	0,4	€ 124.800,00	- 20 %	0,28	€ 87.360,00	- 20 %	0,288	€ 94.887,94
			€ 390.000,00			€ 411.840,00			€ 434.903,04

MATRICE STOCHASTIQUE

0,2	**0,4**	**0,4**
0,1	**0,6**	**0,3**
0,2	**0,6**	**0,2**

ANNEE 5		
Scenario	PROB	FLUX
IDEM	0,1432	€ 62.278,12
+ 20 %	0,5712	€ 298.099,94
- 20 %	0,2856	€ 99.366,65
		€ 459.744,70

PROBABILITES INITIALES

1	**0**	**0**

Années	Flux	Flux actualisés
1	€ 390.000,00	€ 354.545,45
2	€ 390.000,00	€ 322.314,05
3	€ 411.840,00	€ 309.421,49
4	€ 434.903,04	€ 297.044,63
5	€ 459.744,70	€ 285.465,29
	Total :	**€ 1.568.790,91**

PROBABILITES ANNEE 2

0,2	**0,4**	**0,4**

VAN : **€ 568.790,91**

PROBABILITES ANNEE 3

Matrice stochastique puissance 2

0,16	**0,56**	**0,28**
0,14	**0,58**	**0,28**
0,14	**0,56**	**0,3**

Probabilités année 3

0,16	0,56	0,28

PROBABILITES ANNEE 4

Matrice stochastique puissance 3

0,144	**0,568**	**0,288**
0,142	**0,572**	**0,286**
0,144	**0,572**	**0,284**

Probabilités année 4

0,144	**0,568**	**0,288**

PROBABILITES ANNEE 5

0,1432	0,5712	0,2856
0,1428	0,5716	0,2856
0,1428	0,5712	0,286

0,1432	0,5712	0,2856

<u>Soit un projet d'investissement présentant les caractéristiques</u> : **CMPC : 12,00%**

FLUX		A	B	α	β	A-α	B+β	E		Flux actualisés
Prix exercice	**X**	400,00 €	600,00 €	100,00 €	120,00 €	300,00 €	720,00 €	503,33 €		-503,33 €
Flux attendus	**F1**	200,00 €	300,00 €	40,00 €	60,00 €	160,00 €	360,00 €	253,33 €	*1*	226,19 €
	F2	300,00 €	400,00 €	40,00 €	60,00 €	260,00 €	460,00 €	353,33 €	*2*	281,68 €
	F3	400,00 €	500,00 €	50,00 €	50,00 €	350,00 €	550,00 €	450,00 €	*3*	320,30 €
								VAN :		**324,83 €**

EVALUATION DES OPTIONS REELLES A L'AIDE DES NOMBRES FLOUS

Les Flux		A	B	α	β	A-α	B+β
Flux attendus	**F1**	200,00 €	300,00 €	40,00 €	60,00 €	160,00 €	360,00 €
	F2	300,00 €	400,00 €	40,00 €	60,00 €	260,00 €	460,00 €
	F3	400,00 €	500,00 €	50,00 €	50,00 €	350,00 €	550,00 €

Les Flux Actualisés		A	B	α	β	A-α	B+β
Flux attendus	**F1**	178,57 €	267,86 €	35,71 €	53,57 €	142,86 €	321,43 €
	F2	239,16 €	318,88 €	31,89 €	47,83 €	207,27 €	366,71 €
	F3	284,71 €	355,89 €	35,59 €	35,59 €	249,12 €	391,48 €
	Totaux :	**702,44 €**	**942,62 €**	**103,19 €**	**136,99 €**	**599,25 €**	**1.079,62 €**

Espérance	**828,17 €**
Variance	**26.440,30 €**
Ecart-type	**162,60 €**
Volatilité	**0,20**

X = (400 ; 600 ; 100 ; 120)
S_0 = (702,44 ; 942,62 ; 103,19 ; 136,99)

$$E(A) = \frac{a+b}{2} + \frac{\beta-\alpha}{6}$$

$$\sigma(S_0) = \sqrt{\frac{(s_2-s_1)^2}{4} + \frac{(s_2-s_1)*(\alpha+\beta)}{6} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{24}}$$

EVALUATION DE L'OPTION REELLE

	A	B	α	β	Moyenne
X	400,00 €	600,00 €	100,00 €	120,00 €	503,33 €
S_0	702,44 €	942,62 €	103,19 €	136,99 €	828,17 €

Taux sans risque : **0,04** **Durée T** **0,25**

Volatilité des flux : **0,20** *C'est-à-dire 3 mois*

Perte de valeur δ : **0,00**

$$FROV = S_0 * e^{-\delta T} * N(d_1) - X0 * N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E(S_0)}{E(X)}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma * \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma * \sqrt{T}$$

$$FROV = (s_1, s_2, \alpha, \beta) * e^{-\delta T} * N(d_1) - (x_1, x_2, \alpha', \beta') * N(d_2)$$

$$FROV = (s_1 * e^{-\delta T} * N(d_1) - x_2 * N(d2), s_2 * e^{-\delta T} * N(d_1) - x_1 * N(d2), \alpha * e^{-\delta T} * N(d_1) + \beta' * N(d2), \beta * e^{-\delta T} * N(d_1) + \alpha' * N(d2))$$

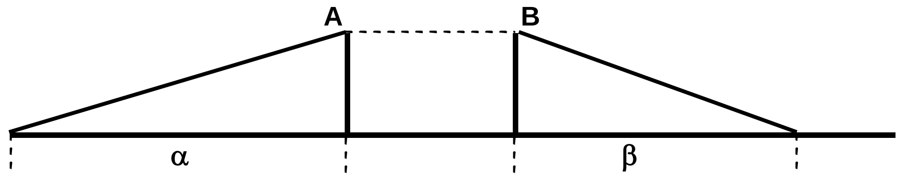
	A	B	α	β	Moyenne
FROV	**102,44 €**	**542,62 €**	**223,19 €**	**236,99 €**	**324,83 €**

NUM 0,54278071

DENOM 0,0981715

		N(d)
d1	5,52890313	0,99999998
d2	5,43073163	0,99999997

LES NOMBRES FLOUS TRAPEZOÏDAUX



δ : Perte de valeur (ou coûts encourus) durant la durée de l'option (exemple : frais fixes à décaisser même si l'investissement est en stand by)
C'est l'équivalent (pour les options réelles) du même delta relatif aux dividendes versés dans l'adaptation du modèle de BLACK & SCHOLES

Flux	SCENARIOS											
	1				2				3			
	A	B	α	β	A	B	α	β	A	B	α	β
F1	200,00 €	300,00 €	50,00 €	50,00 €	250,00 €	350,00 €	40,00 €	60,00 €	300,00 €	400,00 €	30,00 €	60,00 €
F2	250,00 €	300,00 €	50,00 €	50,00 €	300,00 €	350,00 €	40,00 €	60,00 €	350,00 €	400,00 €	30,00 €	60,00 €
F3	300,00 €	350,00 €	50,00 €	50,00 €	350,00 €	400,00 €	40,00 €	60,00 €	400,00 €	450,00 €	30,00 €	60,00 €
F4	350,00 €	450,00 €	50,00 €	50,00 €	400,00 €	500,00 €	40,00 €	60,00 €	450,00 €	550,00 €	30,00 €	60,00 €
F5	300,00 €	400,00 €	50,00 €	50,00 €	350,00 €	450,00 €	40,00 €	60,00 €	400,00 €	500,00 €	30,00 €	60,00 €
∑	**1.400,00 €**	**1.800,00 €**	**250,00 €**	**250,00 €**	**1.650,00 €**	**2.050,00 €**	**200,00 €**	**300,00 €**	**1.900,00 €**	**2.300,00 €**	**150,00 €**	**300,00 €**

E(1) : **1.600,00 €** **E(2) :** **1.866,67 €** **E(3) :** **2.125,00 €**

Flux	SCENARIOS							
	4				5			
	A	B	α	β	A	B	α	β
F1	350,00 €	450,00 €	30,00 €	70,00 €	400,00 €	500,00 €	25,00 €	70,00 €
F2	400,00 €	450,00 €	30,00 €	70,00 €	450,00 €	500,00 €	25,00 €	70,00 €
F3	450,00 €	500,00 €	30,00 €	70,00 €	500,00 €	550,00 €	25,00 €	70,00 €
F4	500,00 €	600,00 €	30,00 €	70,00 €	550,00 €	650,00 €	25,00 €	70,00 €
F5	450,00 €	550,00 €	30,00 €	70,00 €	500,00 €	600,00 €	25,00 €	70,00 €
∑	**2.150,00 €**	**2.550,00 €**	**150,00 €**	**350,00 €**	**2.400,00 €**	**2.800,00 €**	**125,00 €**	**350,00 €**

E(1)	1.600,00 €
E(2)	1.866,67 €
E(3)	2.125,00 €
E(4)	2.383,33 €
E(5)	2.637,50 €
Moyenne	**2.122,50 €**

E(4) : **2.383,33 €** **E(5) :** **2.637,50 €**

$$E(A) = \frac{a+b}{2} + \frac{\beta - \alpha}{6}$$

$$\sigma(S_0) = \sqrt{\frac{(s_2 - s_1)^2}{4} + \frac{(s_2 - s_1) * (\alpha + \beta)}{6} + \frac{(\alpha + \beta)^2}{24}}$$

Scenarios	A	B	α	β
1	1.400,00 €	1.800,00 €	250,00 €	250,00 €
2	1.650,00 €	2.050,00 €	200,00 €	300,00 €
3	1.900,00 €	2.300,00 €	150,00 €	300,00 €
4	2.150,00 €	2.550,00 €	150,00 €	350,00 €
5	2.400,00 €	2.800,00 €	125,00 €	350,00 €
Moyennes :	**1.900,00 €**	**2.300,00 €**	**175,00 €**	**310,00 €**

E(T) : **2.122,50 €**

CALCUL DE LA VOLATILITE DU PROJET

APPROCHE : LOI NORMALE

	E(x)	E(x) - μ	(E(x) - μ)²	
E(1)	1.600,00 €	-522,50 €	273.006,25 €	
E(2)	1.866,67 €	-255,83 €	65.450,69 €	
E(3)	2.125,00 €	2,50 €	6,25 €	
E(4)	2.383,33 €	260,83 €	68.034,03 €	
E(5)	2.637,50 €	515,00 €	265.225,00 €	
μ	**2.122,50 €**	Σ :	**671.722,22 €**	
		Variance :	**167.930,56 €**	**d.d.l. = 5 - 1 = 4**
		Ecart type :	**409,79 €**	
		En % :	**0,19**	

APPROCHE : NOMBRES FLOUS

S2 - S1	400,00 €
A + B	485,00 €
Variance :	**82.134,38 €**
Ecart type :	**286,59 €**
En % :	**0,14**

COMMENT CALCULER LE β SPECIFIQUE DU PROJET ?

1. On commence par imaginer 5 scenarios pour le return futur du portefeuille de marché : on utilise, de préférence, des nombres flous, comme pour les flux du projet d'investissement.
2. Il faut ensuite rendre les données du projet compatibles : les VAN sont converties en TRI.
3. On dispose de deux distributions : l'une pour les moyennes des TRI et l'autre pour les moyennes des return du portefeuille de marché : ces moyennes sont calculées à l'aide des formules valables pour les nombres flous.
4. La variance du return du portefeuille de marché peut être calculée à l'aide de la formule spécifique aux nombres flous.
5. La covariance des TRI avec les return du portefeuille de marché est calculée de manière classique ; simplement comme on ne dispose pas de probabilités la somme des produits des écarts est divisée par le degré de liberté (8 puisque deux échantillons de taille 5 chacun).
   L'utilisation des d.d.l. a l'avantage de pondérer la covariance calculée selon l'approche statistique traditionnelle.
6. Le β est obtenu en divisant la covariance par la variance du portefeuille de marché.

PASSER PAR LA REGRESSION LINEAIRE ?

En principe le coefficient β correspond à la droite d'ajustement linéaire pour laquelle le return du portefeuille de marché serait la variable indépendante ; on sait néanmoins que l'ajustement par les MCO repose sur une hypothèse de normalité et qu'en conséquence, au vu de la différence constatée entre les approches par les statistiques et par les nombres flous, la pente de la droite risquerait fort d'être surestimée.
Une solution consisterait à passer par les moindres carrés pondérés (MCP) mais sur quelle base fonder une telle pondération ?