Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques & Sociales
Tanger

جـامعة عبد المالك السعدي
كلية العلوم القانونية والاقتصادية والاجتماعية
-طنجـة-

Module: Méthodes Quantitatives
Examen: Analyse Mathématique I
Filière: Sciences Economiques et Gestion
S1 (Groupe B) Durée: 1h30min
Prof. Koceyl Salim MOHSINE

Exercice 1 (05 points)

01 points 1- Sans calculer les dérivées et en utilisant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation:

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$

déterminer les développements limités d'ordre 1, au point 0, des fonctions:

01 point $$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1+x}$$ 01 point

01 point 2- En déduire les nombres dérivées de f et de g en 0.

02 points 3- Donner les expressions des dérivées $n^{ème}$ $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$.

Exercice 2 (04 points)

Calculer les intégrales suivantes:

02 point $$\int_{-1}^{62} \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx$$ 02 points

Exercice 3 (05 points)

Calculer la primitive suivante:

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$$ 05 points

Exercice 4 (06 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1 point 1- Etudier la dérivabilité de f au point 0.

point 2- Etudier l'existence de $f''(0)$ (Indication: utiliser la définition de la dérivée)

On veut écrire pour $x < 0$, la dérivée $n^{ème}$ de f sous la forme:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}, \text{ où } P_n \text{ est un polynôme.}$$

point 3- Calculer f', f'' et $f^{(3)}$ puis déduire P_1, P_2 et P_3

point 4- Trouver une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'

0539393970 : 0539393932/ 18 : ☎ ص.ب 1373 طنجة المغرب

CORRIGE DE L'EXAMEN
ANALYSE MATHEMATIQUE (I)
S1 (Groupe B)

EXERCICE ① (05 points)

① on a : $1 - x^2 = (1+x)(1-x)$

$\Rightarrow 1 = (1+x)(1-x) + x^2$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{1-x} \\ \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x} \end{cases}$ $\varepsilon_1(x) = \dfrac{x}{1-x}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{1-x} = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon_1(x) \\ g(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x} = g(0) + g'(0)x + x\varepsilon_2(x) \end{cases}$ $\varepsilon_2(x) = \dfrac{x}{1+x}$

② les nombres dérivées de f et de g en 0

$f'(0) = 1$ et $g'(0) = -1$

③ les expressions de dérivées n-ième de f et de g

$f(x) = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

$f'(x) = +(1-x)^{-2} = 1!\,(1-x)^{-2}$

$f''(x) = +2(1-x)^{-3} = 2!\,(1-x)^{-3}$

$f'''(x) = +6(1-x)^{-4} = 3!\,(1-x)^{-4}$

$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}$

$f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

$g(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$g'(x) = -(1+x)^{-2} = -1\cdot 1!\,(1+x)^{-2}$

$g''(x) = 2(1+x)^{-3} = (-1)^2 \cdot 2!\,(1+x)^{-3}$

$g'''(x) = -6(1+x)^{-4} = (-1)^3\, 3!\,(1+x)^{-4}$

$g^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\,(1+x)^{-(n+1)}$

$g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$

EXERCICE ② (04 point)

Calcul de l'intégrale : $\int_{-1}^{62} \frac{dx}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}$

Par un changement de variable : $t = \sqrt[6]{2+x} = (2+x)^{\frac{1}{6}}$

$\Rightarrow dt = \frac{1}{6}(2+x)^{\frac{1}{6}-1}dx = \frac{1}{6(2+x)^{+5/6}}dx$

$\Rightarrow dx = 6.(2+x)^{\frac{5}{6}}dt = 6t^5 dt$

* pour $x=-1 \to t=1$
* pour $x=62 \to t=2$

$t=\sqrt[6]{2+x} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2+x} = t^3 \\ \sqrt[3]{2+x} = t^2 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{62} \frac{dx}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}} = \int_1^2 \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int_{+1}^{2} \frac{t^3}{t+1}dt$$

$$= 6\int_1^2 (t^2-t+1)dt - 6\int_1^2 \frac{dt}{1+t}$$

$$= \frac{6}{3}\left[t^3\right]_1^2 - \frac{6}{2}\left[t^2\right]_1^2 + 6\left[t\right]_1^2 - 6\left[\ln(1+t)\right]_1^2$$

$$= 2\left[t^3\right]_1^2 - 3\left[t^2\right]_{+1}^{2} + 6\left[t\right]_1^2 - 6\left[\ln(1+t)\right]_1^2$$

$$= 2(8-1) - 3(4-1) + 6(2-1) - 6(\ln(3) - \ln(2))$$

$$= \frac{7}{2} - 1 + 6 - 6\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{2} - 6\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{62} \frac{dx}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}} = \frac{17}{2} - 6\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Calcul de l'intégrale $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}\,dx$

Par un changement de variable $t = \sqrt{e^x-1} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\ln(2) \Rightarrow t=1 \end{cases}$

$\Rightarrow dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}.e^x dx \Rightarrow dt = \frac{1}{2t}(t^2+1)dx$

$\Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$

$$\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}\,dx = \int_0^1 t\frac{2t}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}$$

Exercice ③ : (05 points)

Calcul de la primitive $\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$

$$\frac{x^3+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{x^3+1}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$\frac{x^3+1}{(x-1)(x+1)^2} = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow x^3+1 = A(x^3+x^2-x-1) + B(x+1)^2 + C(x^2-1) + D(x-1)$$

$$= Ax^3 + Ax^2 - Ax - A + Bx^2 + 2Bx + B + Cx^2 - C + Dx - D$$

$$= Ax^3 + (A+B+C)x^2 + (2B-A+D)x + (-A+B-C-D)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A+B+C=0 \\ 2B-A+D=0 \\ B-A-C-D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B+C=-1 \\ 2B+D=1 \\ B-C-D=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-\frac{3}{2} \\ D=0 \end{cases}$$

Donc $\frac{x^3+1}{x^3+x^2-x-1} = 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{2(x+1)}$

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln(|x-1|) - \frac{3}{2}\ln(|x+1|) + C$$

Exercice ④ : (06 points)

① Etude de la dérivabilité de $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to -\infty} x e^{x} = 0 = f'_g(0)$$

donc : f est dérivable au point 0.

② L'existence de $f''(0)$

$$f''(0) = \lim \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{x} = -\lim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

Donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{e^{x}}{x^3} = -\lim\limits_{y\to -\infty} y^3 e^{y} = \lim\limits_{y\to +\infty} y^3 e^{-y} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = -\lim\limits_{y\to +\infty} y^3 e^{y} = -\infty \end{cases}$

d'où $f''_g(0) = 0$ et $f''_d(0) = -\infty$

3) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow P_1(x) = -1$

$$f''(x) = \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} + 2\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 2x+1$$

$$f'''(x) = -\frac{2x+1}{x^6} e^{\frac{1}{x}} + \frac{2}{x^4} e^{\frac{1}{x}} - 4\frac{2x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x(2x+1) - (2x+1)}{x^6} e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x^2 - 8x^2 - 4x - 2x - 1}{x^6} e^{\frac{1}{x}}$$

Donc $f'''(x) = -\dfrac{6x^2+6x+1}{x^6} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow P_3(x) = -6x^2 - 6x - 1$

4) On a $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{P_n'(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}} - 2n\frac{P_n(x)}{x^{2n+1}} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \frac{-P_n(x) + x^2 P_n'(x) - 2nx P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{\frac{1}{x}}$$

d'où $P_{n+1}(x) = -2nx P_n(x) - P_n(x) + x^2 P_n'(x)$

(i.e) $\boxed{P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - (2nx+1) P_n(x)}$