Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques & Sociales
-Tanger -

جامعة عبد المالك السعدي
كلية العلوم القانونية والاقتصادية والاجتماعية
-طنجة-

$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.

Module: Méthodes Quantitatives
Examen: Analyse Mathématique I
Filière: Sciences Economiques et Gestion
S1 (Groupe A et Groupe C) Durée: 1h30min
Prof. Koceyl Salim MOHSINE

Exercice 1 (05 points)

Soient $I = \int_0^{\pi} x\cos^2(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} x\sin^2(x)\,dx$

1- Calculer I et $I - J$. (02 et 02 points)

2- En déduire J. (01 point)

Exercice 2 (04 points)

Calculer les limites suivantes:

(02 points) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x^x}\ln(x)}{x^x - 1}$ et $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)}$

Exercice 3 (05 points)

Calculer la primitive suivante:

$$\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 1}\,dx$$

Exercice 4 (06 points)

Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.
On suppose que $g'(x) \neq 0$, pour tout $x \in]a,b[$.

1,5 points 1- Montrer que $g(x) \neq g(a)$, pour tout $x \in]a,b[$. (Indication: Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle)

1,5 point 2- Posons $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - \alpha g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.
Montrer que la fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que:

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3- On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, où $l \in \mathbb{R}$.

1,5 points Montrer que $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = l$

1,5 point 4- Application: Calculer $\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{Arccos}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

0539393970 ☎ 0539393932/18 كلية العلوم القانونية والاقتصادية والاجتماعية ص.ب 1373 - البريد الرئيسي طنجة-المغرب
Facultes des Sciences Juridiques Economiques et Sociales BP 1373 Poste Principale – Tanger – Maroc- ☎: 0539393932/18 ✆ 0539393970

CORRIGE DE L'EXAMEN
ANALYSE MATHEMATIQUE I
S1 (Groupe A et Groupe C)

EXERCICE 1 (05 point)

1- ⊛ Calcul de $I = \int_0^{\pi} x \cos^2(x)\, dx$

par intégration par partie en posant :

$u'(x) = x \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2} x^2$

$v(x) = \cos^2(x) \Rightarrow v'(x) = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2$

Donc $I = \int_0^{\pi} x \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x^2 \cos^2(x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin(2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[x^2 \cos^2(x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin(2x)\, dx$

Posons : $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$

$v'(x) = \sin(2x) \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

Donc $\int_0^{\pi} x^2 \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}\left[x^2 \cos(2x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \cos(2x)\, d$

Posons $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos(2x) \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

Donc $\int_0^{\pi} x \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x \sin(2x)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2x)\, dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} x^2 \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}\left[x^2 \cos(2x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[x \sin(2x)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(2x)$

d'où $I = \frac{1}{2}\left[x^2 \cos^2(x)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\left[x^2 \cos(2x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\left[x \sin(2x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{8}\left[\cos(2x\right.$

$I = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{4}$

⊛ Calcul de $I - J = \int_0^{\pi} x \cos^2(x)\, dx - \int_0^{\pi} x \sin^2(x)\, d$

(D1) $\Rightarrow I - J = \int_0^{\pi} x \cos(2x)\, dx$

Faisons une intégration par partie :

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \cos(2x) \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

donc
$$I - J = \frac{1}{2}\left[x\sin(2x)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x\sin(2x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\left[\cos(2x)\right]_0^{\pi} = 0$$

Ainsi : $I = \frac{1}{4}\pi^2$ et $I - J = 0 \Rightarrow I = J$

② On en déduit que $J = \frac{1}{4}\pi^2$

EXERCICE ② (04 points)

⊛ Calcul de la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{x^x}\ln(x)}{x^x - 1}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x^x}\ln(x)}{x^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(x^{x^{x^x}}\right)}{x^x - 1} = \lim_{y\to 1^+} \frac{y\ln(y)}{y-1}$$

$$\overset{RH}{=} \lim_{y\to 1^+} \left(\ln(y) + 1\right) = 1.$$

$y = x^x$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$, $\lim \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim -x = 0^-$ $\Rightarrow e^{0} = 1^+$, $y \to 1^+$

⊛ Calcul de la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)}$

$$x^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\cdot\ln(x)} = e^{\frac{\sin(x)}{x}\cdot x\ln(x)}$$

or $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = 1$

ou bien $\sin(x)\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} \overset{RH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2(x)}{x\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+}\Big(-\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1}\Big) = 0$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sin(x)\ln(x)} = e^0 = 1$

* Calcul de la primitive $\int \frac{x^3+2x+1}{x^3-1}\,dx$

$$\frac{x^3+2x+1}{x^3-1} = \frac{x^3+2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = A + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow x^3+2x+1 = A(x^3-1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x-1)$$
$$= Ax^3 - A + Bx^2 + Bx + B + Cx^2 - Cx + Dx - D$$
$$= Ax^3 + (B+C)x^2 + (B-C+D)x + (B-A-D)$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} A=1 \\ B+C=0 \\ B-C+D=2 \\ B-A-D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 & (\mathrm{I}) \\ B+C=0 & (\mathrm{II}) \\ B-C+D=2 & (\mathrm{III}) \\ B-D=2 & (\mathrm{IV}) \end{cases}$$

$(\mathrm{III}) \Rightarrow C = B+D-2$

$(\mathrm{II}) \Rightarrow 2B+D=2$ et $(\mathrm{IV}) \Rightarrow B-D=2$

$$\begin{cases} 2B+D=2 \ ① \\ B-D=2 \ ② \end{cases} \overset{①+②}{\Rightarrow} 3B=4 \Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

Donc $D = B-2 = \frac{4}{3}-2 = -\frac{2}{3}$

et donc $C = B+D-2 = \frac{4}{3}-\frac{2}{3}-2 = \frac{2}{3}-2 = -\frac{4}{3}$

Ainsi : $\boxed{A=1}$; $\boxed{B=\frac{4}{3}}$; $\boxed{C=-\frac{4}{3}}$; $\boxed{D=-\frac{2}{3}}$

D'où $\frac{x^3+2x+1}{x^3-1} = 1 + \frac{4}{3}\,\frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}$

$$= 1 + \frac{4}{3}\,\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Donc $\int \frac{x^3+2x+1}{x^3-1}\,dx = \int dx + \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

$$= x + \frac{4}{3}\ln(|x-1|) - \frac{2}{3}\ln(x^2+x+1),$$

où $C = cte$.

① Supposons que $g(x) = g(a)$

Alors d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a$

tel que $g'(c) = 0$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse

$[g'(x) \neq 0, \forall x \in]a,b[]$

Donc $g(x) \neq g(a), \forall x \in]a,b[$.

② Soient $\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et $h(x) = f(x) - \alpha g(x)$

Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a$ et dérivables sur $]a,b[$, Alors $h = f - \alpha g$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

De plus $h(a) = f(a) - \alpha g(a) = f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a)$

$$\Rightarrow h(a) = \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\Rightarrow h(a) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

Et $h(b) = f(b) - \alpha g(b) = \dfrac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$

Donc $h(a) = h(b)$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$

(i.e) $f'(c) - \alpha g'(c) = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Donc $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

D④

On suppose que $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = l$

En effet $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = $ « $\frac{0}{0}$ » qui est une forme indéterminée, on applique la règle de l'Hospital on aura :

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

④ Application : Calculons $\lim_{x \to 1^-} \frac{\operatorname{Arccos}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\boxed{\operatorname{Arccos}(x)}}{\sqrt{1-x^2}} \overset{RH}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{\boxed{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1$$