Université AbdelMalek Essaâdi
F.S.J.É.S.T.
Département de sciences économiques et gestion

Année universitaire : 2013/2014
Cours : Microéconomie 2

Rappels mathématiques : Solutionnaire

Prof. : M. Drissi Bakhkhat - modrissi.org

Exercice 1 *Quel est le degré des fonctions polynomiales :*

1. $f_1(x) = x^3 + 2x^2 - x$;
2. $f_2(x) = x^2 - x^3 + 4$;
3. $f_3(x) = 5x^5 + 4x^3 - x^2 + 2$?

Réponse : f_1 et f_2 sont de degré 3 alors que f_3 est de degré 5.

Exercice 2 *Quel est le degré des quatre fonctions rationnelles :*

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}, \quad y = \frac{x^5+7x}{5}, \quad y = \frac{x-1}{x^2+3x+2}, \quad y = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Réponse : $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ est de degré $(2-1) = 1$; $y = \frac{x^5+7x}{5}$ est de degré $(5-0) = 5$; $y = \frac{x-1}{x^2+3x+2}$ est de degré $(1-2) = -1$; $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ est de degré $(2-2) = 0$.

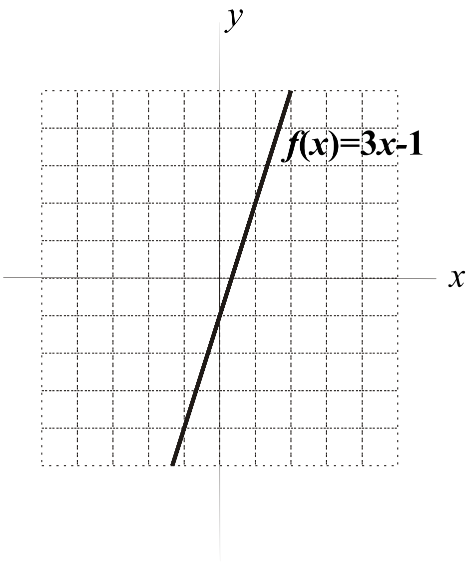
Exercice 3 *Représenter les graphes des fonctions $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = -x + 1$.(voir la Figure 1).*

Exercice 4 *Les domaines de définition des fonctions :*

1. *pour la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$;*
2. *pour la fonction $f(x) = \sqrt{1-x}$, $D_f =]-\infty, 1]$;*
3. *pour la fonction $f(x) = \sqrt{x^3}$, $D_f = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.*

Exercice 5 *La pente de la droite passant les points $(-1, 1)$ et $(2, -3)$ est :*

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-3-1}{2-(-1)} = -\frac{4}{3}.$$



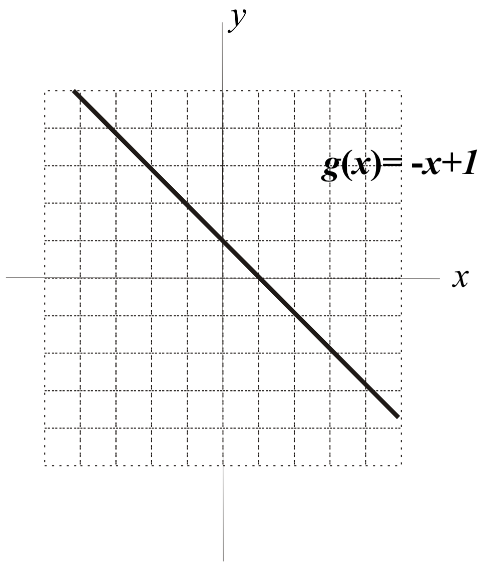


FIG. 1 – Graphes des fonctions $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = -x + 1$.

Exercice 6 *Quelle est l'équation de :*

1. *la droite qui a une pente de* -2 *et qui passe le point* $(0, 1)$?
2. *la droite passant les points* $(1, 1)$ *et* $(3, 0)$?

Réponse :

$$\begin{array}{lrcl} 1. & y & = & -2x + 1; \\ 2. & y & = & -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \end{array}$$

Exercice 7 *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = x^3 + 2x^2 - x;$
2. $f_2(x) = x^2 - x^3 + 4;$
3. $f_3(x) = 5x^5 + 4x^3 - x^2 + 2.$

Réponse : $f_1'(x) = 3x^2 + 4x - 1; \quad f_2'(x) = 2x - 3x^2; \quad f_3'(x) = 25x^4 + 12x^2 - 2x.$

Exercice 8 *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = x\sqrt{x};$
2. $f_2(x) = \frac{x^2+1}{x-1};$
3. $f_3(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2};$

4. $f_4(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Réponse :

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}};\\
f_2'(x) &= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{2}{(x-1)^2};\\
f_3'(x) &= \frac{-x^2+2x+5}{(x^2+3x+2)^2};\\
f_4'(x) &= \frac{4x}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 9 *Quelle est la dérivée seconde des fonctions de l'Exercice 7 ?*

Réponse : $f_1''(x) = 6x+4;\quad f_2''(x) = 2-6x;\quad f_3''(x) = 100x^3+24x-2.$

Exercice 10 *Soit les fonctions de demande* $q_1 = 3p_1^{-1}p_2^2$ *et* $q_2 = 4p_1p_2^{-1}$. *Calculer les dérivées partielles premières de* q_1 *et de* q_2.

Réponse :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_1}{\partial p_1} &= -3p_1^{-2}p_2^2;\\
\frac{\partial q_1}{\partial p_2} &= 6p_1^{-1}p_2;\\
\frac{\partial q_2}{\partial p_1} &= 4p_2^{-1};\\
\frac{\partial q_2}{\partial p_2} &= -4p_1p_2^{-2}.
\end{aligned}$$

Exercice 11 *Calculer les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes des trois fonctions :*

$$f_1(x_1,x_2) = x_1+x_2;\quad f_2(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2};\quad f_3(x_1,x_2) = x_1^2x_2 - x_2^2.$$

Réponse :

$\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = x_2$	$\frac{\partial^2 f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = 0$ $\frac{\partial^2 f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$
$\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = x_1$	$\frac{\partial^2 f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$ $\frac{\partial^2 f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = 0$
$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}$	$\frac{\partial^2 f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = 0$ $\frac{\partial^2 f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{1}{x_2^2}$
$\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}$	$\frac{\partial^2 f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{1}{x_2^2}$ $\frac{\partial^2 f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{2x_1}{x_2^3}$
$\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 x_2$	$\frac{\partial^2 f_3(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = 2x_2$ $\frac{\partial^2 f_3(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 2x_1$
$\frac{\partial f_3(x_1,x_2)}{\partial x_2} = x_1^2 - 2x_2$	$\frac{\partial^2 f_3(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = 2x_1$ $\frac{\partial^2 f_3(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} - 2$

Exercice 12 *Calculer les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de la fonction de production de type Cobb-Douglas :*

$$Q = 4K^{3/4}L^{1/4}.$$

Réponse :

$\frac{\partial Q}{\partial K} = 3K^{-1/4}L^{1/4}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\frac{3}{4}K^{-5/4}L^{1/4}$ $\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = \frac{3}{4}K^{-1/4}L^{-3/4}$
$\frac{\partial Q}{\partial L} = K^{3/4}L^{-3/4}$	$\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = \frac{3}{4}K^{-1/4}L^{-3/4}$ $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\frac{3}{4}K^{3/4}L^{-7/4}$

Exercice 13 *Résoudre les problèmes d'optimisation suivants :*

1. $\max_x 10x - x^2$;

2. $\min_x x^2 - 6x + 10$;

3. $\min_{x,y} (x-1)^2 + (y+2)^2$.

Réponse :

$$1.\ x^* = 5; \quad 2.\ x^* = 3; \quad 3.\ (x^*, y^*) = (1, -2).$$