Travaux Dirigés Probabilités

Permutations

Exercice 1

1. Combien de nombres peut-on écrire en utilisant une fois chacun des chiffres de 1 à 5 ?
2. De combien de manières différentes peut-on placer 4 photos l'une à côté de l'autre ?

1. Permutations sans répétitions: il y a n! choix

il y a $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ chiffre.

2. il y a $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ manières différentes pour placer ces 5 photos.

Analyse combinatoire : Exemples

Exercice 2

Dans une organisation, deux postes différents doivent être nommés à partir de 5 candidats.
Déterminer le nombre de dispositions?

Réponse

5 candidats Pour occuper le poste 1 et 4 candidats pour nommer le poste 2.

5 X 4 = 20 façons différentes.

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 5\times4 = 20$$

3

Analyse combinatoire : Exemples

Exercice 2

Dans une organisation, deux postes différents doivent être nommés à partir de 5 candidats.
Déterminer le nombre de dispositions?

Réponse

5 candidats Pour occuper le poste 1 et 4 candidats pour nommer le poste 2.

5 X 4 = 20 façons différentes.

Poste 1 : 5 choix

Poste 2: 4 choix

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 5\times4 = 20$$

3

Exercice 3

Pour une compétition de 15 chevaux. Combien de possibilités de tiercés dans l'ordre existe-t-il ?

Pas de répétition pour les trois podiums

$$A_{15}^{3} = \frac{15!}{(15-3)!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$$

Exercice 4

Dans une compétition artistique, trois médailles (or, argent, bronze) sont intéressées par douze candidates. De combien de façons l'attribution de ces médailles peut-elle se faire?

Réponse

Méthode 1 : principe de multiplication

$$12 \times 11 \times 10 = 1320$$

Méthode 2 : Arrangement

$$A_{3}^{12} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 1320$$

Exercice 5 Pour utiliser, une valise on a besoin d'un code de 3 chiffres. Combien de codes peut-on générer ?

1. les 3 chiffres sont déférents ?
2. les 3 chiffres peuvent être les mêmes ?

Solution:

1. Chaque code est de 3 **chiffres déférents** $\in \{0, 1, ..., 9\}$.

$$A_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$$

2. Chaque code est un nombre de **3 chiffres** $\in \{0, 1, ..., 9\}$.
Ainsi le nombre de codes possibles est $10 \times 10 \times 10 = 10^3$ codes. $A_n^p = n^p \qquad A_{10}^3 = 10^3 = 1000$

Exercice 6 De combien de façons peut-on distribuer **deux prix** différents parmi **dix enfants** si les **deux prix peuvent être accordés à un même enfant** ?

Réponse

Pour le prix 1, il y a 10 enfants candidats.
Pour le prix 2, il y a 10 enfants candidats: le même enfant peut gagner deux prix.

Donc, il existe 10 X 10 = 100 façons différentes.

Arrangement avec répétition

$$A_n^p = n^p$$

$$A_{10}^2 = 10^2 = 100$$

Combinaison sans répétition

Exercice 7:

- Le joueur de LOTO doit faire une sélection de 6 numéros parmi les nombres de 1 à 49. De combien de façons peut-il choisir?

Réponse

Le choix de 6 parmi 49 sans ordre ---→ Combinaison sans répétition

$$C_6^{49} = \frac{49!}{6! \times (49-6)!} = 13\ 983\ 816$$

Combinaison sans répétition

Exercice 7:

- Le joueur de LOTO doit faire une sélection de 6 numéros parmi les nombres de 1 à 49. De combien de façons peut-il choisir?

Réponse

Le choix de 6 parmi 49 sans ordre ---→ Combinaison sans répétition

$$C_6^{49} = \frac{49!}{6! \times (49-6)!} = 13\ 983\ 816 \quad \text{façons différentes}$$

Analyse combinatoire : Combinaison sans répétition

Exercice 8 Dans une université, il y a 5 profs d'économies et 6 probabilités. On doit former un comité composé de 3 économistes et de 3 sociologues. Combien de comités différentes pourrait-on former si :

a) Tous peuvent participer à la comité?
b) Un économiste ne peut à la comité?

Réponse

a) $$C_3^5 \times C_3^6 = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} \times \frac{6!}{3! \times (6-3)!} = 200$$

b) $$C_3^4 \times C_3^6 = \frac{4!}{3! \times (4-3)!} \times \frac{6!}{3! \times (6-3)!} = 80$$

Probabilités

Exercice 9 :

On lance un dé truqué. Après un relevé statistique, on a pu déterminer que les probabilités d'apparition de chaque face sont telles que :

$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5)$ *et* $p(6) = 3 \times p(1)$

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face

2) On donne les probabilités suivantes pour les événements *A et B :*

$P(A) = 0,3$, $p(A \cup B) = 0,7$ *et* $p(A \cap B) = 0,2$

Calculer $P(\overline{B})$

Probabilités

1) la probabilité d'apparition de chaque face

Il n'y a que deux probabilités à déterminer : p(1) et p(6).

On a :

$$\sum P = 1$$

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$$

✓On ramplace : p(6) par 3 × p(1).

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + 3 \times p(1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 8\, p(1) = 1$$

✓On obtient donc : p(1) = 1/8

$$\mathbf{p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 1/8}$$

$$\mathbf{et\ p(6) = 3 \times p(1) = 3/8}$$

Probabilités

2) $P(B)$ et $P(\overline{B})$ sont incompatibles ⇔ $P(B) + P(\overline{B}) = 1$

On a: et

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$

On calcule d'abord P(B) :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$

P(A) = 0, 3, p(A ∪ B) = 0, 7 et p(A ∩ B) = 0, 2

On obtient alors : P(B) = 0, 7 − 0, 3 + 0, 2 = 0, 6

On calcule ensuite :

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,6 = 0,4$$

.

La probabilité

Exercice 10 : Soit 2 événement A et B. On a:

$P(A\cup B)=\frac{1}{2}, P(A\cap B)=\frac{3}{10}$

$P(\overline{A})=\frac{2}{5}$

$$P(\overline{A})=\frac{2}{5} \qquad P(A\cup B)=\frac{1}{2} \qquad P(A\cap B)=\frac{3}{10}$$

Calculer $P(B)$

ON $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

$$P(B)=P(A\cup B)-1+P(\overline{A})+P(A\cap B)$$

$P((A\cup B))-1+P(\overline{A})+P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$$P(B)=\frac{1}{2}-1+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{5-10+4+3}{10}$$

$$P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

Probabilités

Exercice 11

A , B et A ∪ B sont trois événements de probabilités 0.4, 0.5 et 0.6 .

Calculer la probabilité de l'événement : A ∩ B et B − A.

- ***p(A ∪ B) = p(A) + p(B) - p(A∩B).***

  p(*A*∩*B*) = *p*(*A*) + *p*(*B*) - *p*(*A* ∪ *B*)

  p(*A*∩*B*) = = 0.4 + 0.5 - 0.6 = 0.3

- ***P(B−A)=P(B)−P(B∩A)=*** 0.4 - 0.3

  ***P(B−A)*=0.1**

Exercice 12 On lance deux dés, quelle est la probabilité d'avoir une somme égale à 8 sachant que les deux dés donnent des résultats différents ?

Réponse

A : Obtenir une somme égale à 8
B : Les deux dés indiquent des résultats différents

$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\}$ 36 résultats

$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ 5 résultats

$B = \{(1,2),(1,3)\ldots,(1,6),(2,1),(2,3),\ldots,(2,6),\ldots\}$ 30 résultats

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{(4/36)}{(30/36)} = 0.133$$

Indépendance en probabilité

Lorsque la réalisation d'un événement B ne modifie pas la probabilité de la réalisation d'un événement A, on dit alors que B est indépendant de A.

Définition

Les événements A et B sont dit indépendants en probabilité si et seulement si :

$$P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

Événements indépendants

Exercice 13 : Une association de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents dont Le foot et le tennis. 12 membres s'inscrivent pour le foot, 32 pour le tennis dont 4 pour les deux.
On prend au hasard la fiche d'un adhérent.

On note A et B les événements :
- A « l'adhérent est inscrit pour le foot » ;
- B « l'adhérent est inscrit pour le tennis ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants?

Événements indépendants

96 membres

On calcule les probabilités suivantes :

Douze membres s'inscrivent pour le foot $P(A)=\frac{12}{96}=\frac{1}{8}$

Trente-deux pour le tennis. $P(B)=\frac{32}{96}=\frac{1}{3}$

quatre pour les deux $P(A\cap B)=\frac{4}{96}=\frac{1}{24}$

On calcule:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{8}=P(A)$$

$$P(A)\times P(B)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{24}=P(A\cap B)$$

On a bien $P(A\cap B)=P(B)\times P(A)$ *, les événements A et B sont donc indépendants.*

Loi de Bayes

Exercice 14

Trois machines produisent des pièces. La machine M1 produit 40 % des pièces, la machine M2 produit 25 % et la machine M3 produit le restre.

En moyenne, les pourcentages des pièces **défectueuses** sont de 10% pour la machine M1, de 5 % pour la machine M2 et de 1 % pour la machine M3.

1. **Quelle est la probabilité de l'événement D « la pièce est défectueuse» ?**

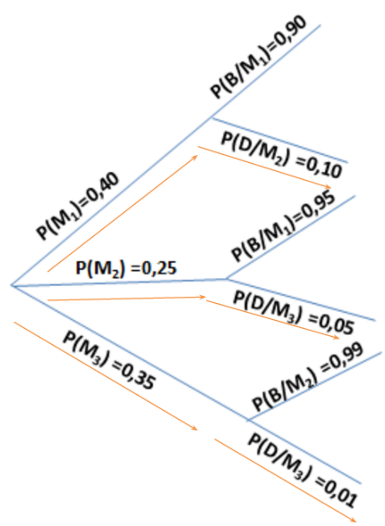
2. **Une pièce choisie au hasard, n'est pas conforme aux critères imposés*:* Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine *M1* ?**

Pr(M1/D)

Loi de Bayes

1. **la probabilité de l'événement D « la pièce est défectueuse» ?**

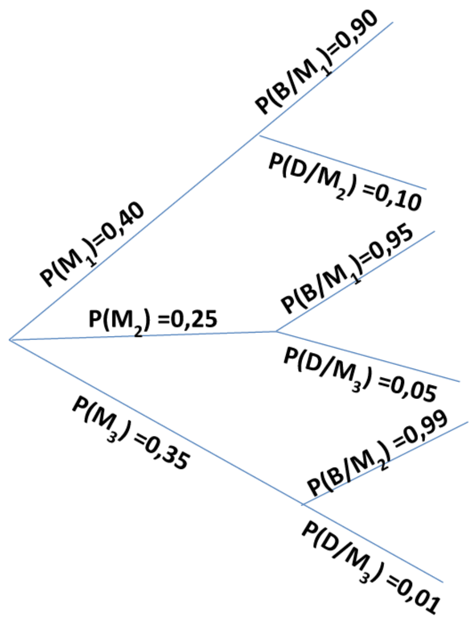
Soit **B l'événement « la pièce est bonne »**
et **D l'événement « la pièce est défectueuse».**
Les trois causes possibles de réalisation de l' événement D sont les trois machines.



$$P(D)=\sum_{i=1}^{n}P(D\,|\,M_i)P(M_i)$$

$$P(D)=P(D\,|\,M_1)P(M_1)+P(D\,|\,M_2)P(M_2)+P(D\,|\,M_3)P(M_3)$$

$$P(D)=\Pr\,(\mathrm{D})=0{,}4\text{ x }0{,}10+0{,}25\text{ x }0{,}05+0{,}35\text{ x }0{,}01=0{,}056$$



On peut appliquer directement le théorème de Bayes.
On connaît les probabilités de ces causes par exemple P(*M1*) ***= 0,40 ainsi que les*** probabilités conditionnelles P(D/*M1*)=***0,10.***

$$P(M_1 \mid D) = \frac{P(D \mid M_1)P(M_1)}{P(D)}$$

$$P(M_1 \mid D) = \frac{0,4 \text{ x } 0,10}{0,056} = 0,714$$

Variables aléatoires

Exercice 15 On tire au hasard une boule dans l'urne qui contient 7 boules vertes, 5 boules jaunes et 3 bleues.
On définit une variable aléatoire X de la façon suivante :
- Si la boule tirée est verte on gagne 3 points.
- Si jaune on gagne 1 point.
- Si bleue on perd 2 points.

Determier la loi de probabilité de la variable aléatoire?
L'univers est l'ensemble:

$$\Omega = \{V1, V2, V3, V4, V, V6, V7, J1, J2, J3, J4, J5, B1, B2, B3\}$$

Variables aléatoires

La variable aléatoire est donc définie par :

$$X(v_1)=3,\ X(v_2)=3,\ ...,\ X(v_7)=3$$
$$X(j_1)=1,\ X(j_2)=1,\ ...,\ X(j_5)=1$$
$$X(b_1)=-2,\ X(b_2)=-2,\ X(b_3)=-2$$

Valeur x_i	3	1	-2
$P(X = x_i)$	7/15	5/15	3/15

Loi de Bernoulli

Exercice 16 : Un lot de pièces mécaniques contient 5% de pièces défectueuses. On tire au hasard une pièce on définit la variable aléatoire X par: $X = \begin{cases} 0 & \text{si la pièce est défectueuse} \\ 1 & \text{si la pièce est normale} \end{cases}$.

Determiner la loi de probabilité , l'espérance mathématique , la variance et l écart type?

x_i	1	0
p_i	*0,95*	*0,05*

la variable aléatoire prend les 2 Valeurs 1 pour le succès 0 pour pour l'échec donc elle suit la **Loi de Bernoulli** B(0,95)
E(X)=p=0,95 et V(X)=pq=0,95x0,05=0,0475.

$$\sigma_X = \sqrt{0{,}0475} \approx 0{,}218.$$

Exercice 17 On lance un dé équilibré à six faces, les faces étant numérotés de 1 à 6. On considère qu'il y a un succès lorsque le résultat du lancer est un 5, un échec sinon.
Determiner la loi de probabilité , l'espérance mathématique , la Sa variance et l écart type?
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre 1/ 6 . En effet, P(*S*) = 1/6 . L'échec E est donc l'événement « le 5 ne sort pas » et P(E) = 1 - P(*S*) =5/6 .
La loi de Bernoulli associée est résumée par le tableau :

x_i	1	0
p_i	1/6	5/6

Son espérance mathématique : $E = p = \frac{1}{6}$
Sa variance vaut: $V = pq = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

loi binomiale

- **Exercice 18 :** On lance 4 fois de suite un dé bien équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le chiffre 6 ?
  On a un schéma de Bernoulli de paramètres *n*=4 et *p*=16. Notons :
  X=nombre de succès=nombre de fois où l'on obtient 6

1. Calculer p(X=3)?
2. Calculer p(X=2)?
3. Determiner l'espérance mathématique , la Sa variance et l écart type?

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

On cherche $p(X=3)$:

$$p(X=3) = \binom{4}{3} \times p^3 \times (1-p)^1$$
$$= \binom{4}{3} \times (\frac{1}{6})^3 \times \frac{5}{6}$$

$$p(X=3) = 4 \times \frac{1}{6^3} \times \frac{5}{6}$$

$$p(X=3) = \frac{20}{6^4} \approx 0,015$$

La probabilité d'obtenir 3 fois la valeur 6 est d'environ 0,015.

E(X)=*np* V(X)=*npq*

Commentaire : $E(X) = 4 \times 1 = 2$ et $\sigma(X) = \sqrt{4 \times 1 \times 5} = \sqrt{5}$

Exercice 19 **Déterminer les paramètres d'une loi binomiale d'espérance mathématique et d'écart type donnés $B(n,p)$:**

loi binomiale $B(n,p)$ d'espérance mathématique E égale à 40 et d'écart type σ égal à $\sqrt{20}$.

E=40 équivaut à np=40.

$\sigma = \sqrt{20}$

équivaut à $n(1-p)p$=20.

$(40/p)(1-p)p=20$

$40(1-p) =25$ $40(1-p) =20$ $40p =40 -20$

$p =1/2$

np=40 n=40/p n=80

On en déduit que n=80 et p=1/2 .

Exercice 20

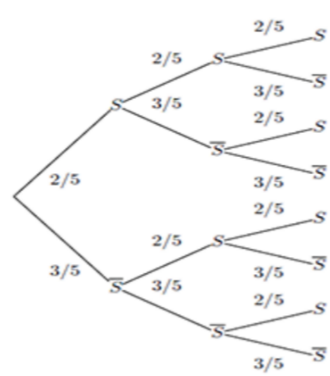
Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire 3 boules au hasard avec remise en considérant que les tirages sont identiques et indépendants. On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules rouges obtenues.

Determiner la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

On a donc bien, dans ce cas, un schéma de Bernoulli

La variable X suit une loi binomiale de paramètres n=3 et p=2/5: $B(3, 2/5)$

Ce schéma peut être représenté par l'arbre suivant :



$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\,(1-p)^{n-k}$$

- la probabilité d'avoir 3 succès (c'est à dire 3 boules rouges) est $p(X=3)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$
- il y a 3 chemins qui correspondent à 2 succès ($SS\overline{S}, S\overline{S}S, \overline{S}SS$). La probabilité d'obtenir 2 boules rouges est donc :
  $p(X=2)=\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=3\times\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}\right]=\frac{36}{125}$
- il y a également 3 chemins qui correspondent à un unique succès ($S\overline{S}\overline{S}, \overline{S}S\overline{S}, \overline{S}\overline{S}S$). La probabilité d'obtenir une unique boule rouge est donc :
  $p(X=1)=\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=3\times\left[\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]=\frac{54}{125}$
- la probabilité de n'avoir aucune boule rouge est $p(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$

La loi de X est donc donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

On vérifie bien que $\frac{27}{125}+\frac{54}{125}+\frac{36}{125}+\frac{8}{125}=1$

Exercice 21

Soit la fonction $F(\mathrm{x})$ définit par :

$$F(\mathrm{x})=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \mathrm{ax}^2 & 0<x\leq 1 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

1. **Déterminer a pour que $F(\mathrm{x})$ soit une fonction de répartition**
2. **Calculer la densité f(x)**
3. **Calculer la probabilité**

$$\mathrm{P}(0{,}25\leq \mathrm{X}\leq 0{,}5)$$

$F(\mathrm{x})$ une fonction de répartition si $F'(\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)}$ est une densité de probabilité de la variable aléatoire X :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(\mathrm{x})\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} f(\mathrm{x})\mathrm{dx} + \int_{1}^{+\infty} f(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} 2\,\mathrm{axdx} + \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{dx} = 1$$

$$\int_{0}^{1} 2\,\mathrm{axdx} = 1$$

$$\left[\mathrm{ax}^2\right]_0^1 = 1$$

$$\mathrm{a} \times 1 - \mathrm{a} \times 0 = 1$$

$$\mathrm{a} = 1$$

1. La fonction de répartition $F(\mathrm{x})$

$$F(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{x} f(x) = 0$$

Par définition $\int_{-\infty}^{x} f(x) = 0$ Si $x \le 0$

Si $x \le 0$ $F(\mathrm{x}) = 0$

Par définition $\int_{x}^{+\infty} f(x) = 1$

Si $x > 1$ $F(\mathrm{x}) = 1$

Si $0 < x \le 1$

$$\int f(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int_0^x 2x = x^2\Big]_0^x$$

$$F(\mathrm{x}) = x^2$$

$$F(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & x > 10 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \\ 0 & x > 10 \end{cases}$$

La probabilité

$$P(0{,}25 \leq X \leq 0{,}5) = F(0{,}5) \ - F(0{,}25)$$

$$P(0{,}25 \leq X \leq 0{,}5) = (0{,}5)^2 - (0{,}25)^2$$

$$P(0{,}25 \leq X \leq 0{,}5) = 0{,}1875$$