Développements limités, équivalents et calculs de limites

Exercice 1.
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\frac{e^x}{(1+x)^3}$ $n=2$
2. $g(x)=\frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}$ $n=3$
3. $h(x)=e^{\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}}$ $n=1$
4. $i(x)=\sin(x^2)$ $n=6$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.
3. Soit $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de f pour $x\to+\infty$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de :
$$f(x)=\ln(1+x)\sin(x)$$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, de :
$$f(x)=\frac{e^x}{\cos(x)}$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.
Soient u,v et f définies par :
$$u(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}, v(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$
$$f(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{x^2+x+1}$$

1. Donner le développement limité de u,v et f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $+\infty$.
3. En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par rapport à cette asymptote.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.
Soit f la fonction pour tout $x\in\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$

1. Déterminer le développement limité de f, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x=0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit f l'application de $U =]-1,1[\cup]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in U$ par :

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

1. Donner le développement limité de f, à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.
   En déduire que le graphe de f admet une tangente (T) au point d'abscisse 0. Donner une équation cartésienne de (T) et préciser la position du graphe par rapport à (T).
2. En utilisant un développement asymptotique de f en $+\infty$, démontrer que le graphe de f admet une asymptote (A).
   Donner une équation cartésienne de (A) et préciser la position du graphe de f par rapport à (A).

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction :

$$f(x) = \arccos(x^2)$$

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)\ln(1+x)}{\cos(x)}$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Déterminer le développement limité en $x = a$ à l'ordre n de

1. $f(x) = e^{\cos(x)}$, $a = \frac{\pi}{2}$, $n = 2$.
2. $g(x) = \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}{\ln(x)}$, $a = 1$, $n = 1$.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, de la fonction :

$$f(x) = \cos(x)$$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Déterminer le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 1 de la fonction définie par :

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, de :
$$f(x) = e^{\sin(x)}$$
2. Donner un équivalent de $f(x) - e$, en $\frac{\pi}{2}$.
3. En déduire

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 3, relatif à $\frac{\pi}{2}$, des applications suivantes :

1.
$$f(x) = \ln(\sin(x))$$

2.
$$f(x) = (1 + \cos(x))^{\frac{1}{x}}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

1. Calculer un développement limité à l'ordre 2 en $x = 2$ de $f(x) = \ln(x)$ et de $g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
2. En déduire

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2}$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

1. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

2. En déduire qu'on peut prolonger cette fonction par continuité en $x = 0$ et que la fonction ainsi prolongée admet une dérivée première en $x = 0$.
3. Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x = 0$ de :

$$g(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre 4, relatif à 0, de l'application suivante :

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x\ln(1 + x)}$$

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{x\ln(1 - x)}$$

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x)=\frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)\,\mathrm{sh}(x)}$$

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de :
$$f(x)=\ln(1+\mathrm{sh}(x))$$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :
$$g(x)=\frac{\ln(1+\mathrm{sh}(x))}{\sin(x)}$$
3. Montrer que g est prolongeable par continuité en $x=0$.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Soit f la fonction réelle définie par :

$$f(x)=9\sin(x)-11x\cos(x)+2x\cos(2x)$$

1. Donner les développements limités en 0, à l'ordre 5, des fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\cos(2x)$.
2. En déduire la limite, lorsque x tend vers 0 ($x\neq 0$), de l'expression $\frac{f(2x)}{f(x)}$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par :
$$h(x)=\frac{\sin(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\sin(x^2)}$$
2. En déduire un équivalent de $h(x)-1$ au voisinage de 0.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre n, relatif à 0, des applications suivantes :

1.
$$f(x)=\frac{x}{\sin(x)}\qquad n=4$$
2.
$$f(x)=\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}\qquad n=3$$
3.
$$f(x)=(\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}\qquad n=4$$

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

1. Donner le développement limité à l'ordre 1, en 0 de $\sqrt{1+3X+2X^2}-1$

2. Calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$$

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Déterminer le développement limité à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x)=\sin^3(x)\left(e^{x^2}-1\right)$$

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Ecrire le développement limité à l'ordre 3, en 0, de $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}$ et en déduire sa limite en 0.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de : $(1+h)^{\frac{1}{h}}$.
2. En déduire le développement généralisé à l'ordre 2 de $\left(1+\frac{1}{X}\right)^X$ lorsque $X\to+\infty$.
3. En déduire

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}+3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$$

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Calculer

1.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$$

2.

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

3.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$$

4.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2(x)}$$

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{\tan(2x)};\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)};\quad \lim_{x\to0}\frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3};\quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos(x)-x}{\ln(1+\sin(x))-x}.$$

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Déterminer la limite suivante, sans préjugée qu'elle existe :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x)-\operatorname{ch}(x)}$$

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Calculer les limites

1.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}$$

2.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}}$$

On pourra poser $X=\frac{x-\sin(x)}{\sin(x)}$

3.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{\sin(x)}-e^{\tan(x)}}{\sin(x)-\tan(x)}$$

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit f l'application définie par $f(x)=2x+\sin(x)$

1. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 en $x=0$.
2. Montrer que f est une bijection et que sa bijection réciproque f^{-1} est de classe C^3, en déduire que f^{-1} a un développement limité à l'ordre 3.

   On note $f^{-1}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)$ le développement limité de f^{-1} en 0.
3. En déduire le développement limité de f^{-1} en exploitant la relation $f^{-1}\big(f(x)\big)=x$.

Allez à : Correction exercice 32

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1.

$$f(x)=e^x(1+x)^{-3}=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-3x+\frac{(-3)(-4)}{2}x^2+o(x^2)\right)$$
$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-3x+6x^2+o(x^2)\right)$$
$$=1+(-3+1)x+\left(6-3+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2)=1-2x+\frac{7}{2}x^2+o(x^2)$$

2.

$$g(x)=\frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$$

$$\begin{array}{l|l}
x \qquad -\frac{x^3}{6}+o(x^3) & 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \\ \cline{2-2}
x+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3) & x-x^2+\frac{4}{3}x^3 \\ \cline{1-1}
\quad -x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3) & \\
\quad -x^2-x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
\qquad \frac{4}{3}x^3+o(x^3) & \\
\qquad \frac{4}{3}x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
\qquad \quad o(x^3) &
\end{array}$$

Donc

$$g(x)=x-x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

3.

$$h(x)=e^{\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}}=e^{\frac{x+o(x^2)}{x}}=e^{1+o(x)}=e\times e^{o(x)}=e\big(1+o(x)\big)=e+o(x)$$

4.

$$i(x)=\sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o(x^3)$$

2.

Première méthode

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1+\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}=\frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$=\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+X}=\frac{1}{2}\big(1-X+X^2-X^3+o(X^3)\big)$$

Avec

$$X=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)$$

$$X^2=\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^3}{8}+o(x^3)=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}+o(x^3)$$

$$X^3=\frac{x^3}{8}+o(x^3)$$

Et

$$o(X^3)=o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{2}\big(1-X+X^2-X^3+o(X^3)\big)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)-\left(\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)+o(x^3)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)x^3+o(x^3)\right)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{48}+o(x^3)$$

Allez à : Exercice 2

Deuxième méthode

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\ \cline{2-2}
1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3) & \frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{48} \\ \hline
-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o(x^3) & \\
-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3) & \\ \hline
\frac{x^3}{24}+o(x^3) & \\
-\frac{x^3}{24}+o(x^3) & \\ \hline
o(x^3) &
\end{array}
$$

3. On pose $X=\frac{1}{x}$, $X\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

$$f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{X(1+e^X)}=\frac{1}{X}\left(\frac{1}{2}-\frac{X}{4}-\frac{X^3}{48}+o(X^3)\right)=\frac{1}{2X}-\frac{1}{4}-\frac{X^2}{48}+o(X^2)$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$-\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Donc $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ est asymptote au graphe en $+\infty$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+o(x^5)=x(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+o(x^4))$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)=x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)$$

Donc

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)$$

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{18}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+o(x^4)\right)$$

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2\left(1-\frac{x}{2}+x^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)+x^3(\frac{1}{12}-\frac{1}{4})+x^4(\frac{1}{120}-\frac{1}{18}+\frac{1}{5})+o(x^4)\right)$$

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{11}{72}x^4+o(x^4)\right)$$

$$\ln(1+x)\sin(x)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{6}+\frac{11x^6}{72}+o(x^6)$$

2.

$$\begin{array}{r|l}
1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) \\
1 \qquad -\frac{x^2}{2} \qquad +\frac{x^4}{24}+o(x^4) & \\
\hline
x+x^2+\frac{x^3}{6} \qquad +\ o(x^4) & 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4) \\
x \qquad -\frac{x^3}{2} \qquad +o(x^4) & \\
\hline
x^2+\frac{2}{3}x^3 \qquad +o(x^4) & \\
x^2 \qquad -\frac{x^4}{2}+o(x^4) & \\
\hline
\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4) & \\
\frac{2}{3}x^3 \qquad +o(x^4) & \\
\hline
\frac{x^4}{2}+o(x^4) & \\
\frac{x^4}{2}+o(x^4) & \\
\hline
o(x^4) &
\end{array}$$

Donc $\frac{e^x}{\cos(x)}=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1.

$$u(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}=(1+X)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$
$$=1+\frac{1}{3}X-\frac{1}{9}X^2+o(X^2)$$

Avec

$$X=x+x^2+x^3=x+x^2+o(x^2)$$
$$X^2=x^2+o(x^2)$$
$$o(X^2)=o(x^2)$$
$$u(x)=1+\frac{1}{3}\big(x+x^2+o(x^2)\big)-\frac{1}{9}\big(x^2+o(x^2)\big)=1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+o(x^2)$$
$$v(x)=\sqrt{x^2+x+1}=(1+X)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+o(X^2)$$

Avec

$$X=x+x^2$$
$$X^2=x^2+o(x^2)$$
$$o(X^2)=o(x^2)$$
$$v(x)=1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}\big(x^2+o(x^2)\big)+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$$

Donc

$$f(x)=1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2-\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2\right)+o(x^2)=-\frac{1}{6}x-\frac{11}{72}x^2+o(x^2)$$

La courbe admet une tangente d'équation $y=-\frac{1}{6}x$ à l'origine

2. On pose $X=\frac{1}{x}\to 0^+$, donc $X>0$.

$$f(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{x^2+x+1}=\left(\frac{1}{X^3}+\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X}+1\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X}+1}$$

$$=\left(\frac{1+X+X^2+X^3}{X^3}\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1+X+X^2}{X^2}}=\frac{(1+X+X^2+X^3)^{\frac{1}{3}}}{X}-\frac{(1+X+X^2)^{\frac{1}{2}}}{X}$$

$$=\frac{f(X)}{X}=\frac{-\frac{1}{6}X-\frac{11}{72}X^2+o(X^2)}{X}=-\frac{1}{6}-\frac{11}{72}X+o(X)=-\frac{1}{6}-\frac{11}{72x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=-\frac{1}{6}$ en $+\infty$

3. On pose $X=\frac{1}{x}\to 0^-$ donc $X<0$.

$$f(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{x^2+x+1}=\left(\frac{1}{X^3}+\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X}+1\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X}+1}$$

$$=\left(\frac{1+X+X^2+X^3}{X^3}\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1+X+X^2}{X^2}}=\frac{(1+X+X^2+X^3)^{\frac{1}{3}}}{X}-\frac{(1+X+X^2)^{\frac{1}{2}}}{-X}$$

$$=\frac{u(X)+v(X)}{X}=\frac{1+\frac{1}{3}X+\frac{2}{9}X^2+o(x^2)+1+\frac{1}{2}X+\frac{3}{8}X^2+o(X^2)}{X}$$

$$=\frac{2+\frac{5}{6}X+\frac{43}{72}X^2+o(X^2)}{X}=\frac{2}{X}+\frac{5}{6}+\frac{43}{72}X+o(X)=2x+\frac{5}{6}+\frac{43}{72x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La courbe admet une asymptote d'équation $y=\frac{5}{6}+2x$ en $-\infty$, comme au voisinage de $-\infty$

$$f(x)-\left(2x+\frac{5}{6}\right)=\frac{43}{72x}+o\left(\frac{1}{x}\right)<0$$

La courbe est au-dessous de l'asymptote.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$$f(x)=\sqrt{1+X}=1+\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{X^2}{2}+o(X^2)=1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+o(X^2)$$

Avec $X=x+x^2$, $X^2=x^2+o(x^2)$ et $o(X^2)=o(x^2)$

$$f(x)=1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}\left(x^2+o(x^2)\right)+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$$

2. Une équation de la tangente en 0 est $y=1+\frac{1}{2}x$

$$f(x)-\left(1+\frac{1}{2}x\right)=\frac{3}{8}x^2+o(x^2)=x^2\left(\frac{3}{8}+o(x^2)\right)$$

Cette expression est positive dans un voisinage de 0 donc la courbe est au-dessus de la tangente dans un voisinage de 0.

3. On pose $X=\frac{1}{x}\to 0$ lorsque $x\to+\infty$.

$$f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}}=\sqrt{\frac{X^2+X+1}{X^2}}=\frac{\sqrt{X^2+X+1}}{|X|}=\frac{\sqrt{1+X+X^2}}{X}$$

Car $X>0$.

En utilisant le développement limité du 1. on en déduit que

$$f(x)=\frac{1+\frac{1}{2}X+\frac{3}{8}X^2+o(X^2)}{X}=\frac{1}{X}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}X+o(X)=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Une équation de l'asymptote en $+\infty$ est $y=x+\frac{1}{2}$

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{3}{8}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Cette expression est positive lorsque que $x\to+\infty$ donc la courbe est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.

$$f(x)=(x^2-1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=(x^2-1)[\ln|1+x|-\ln|1-x|]$$

Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-1)[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\&=(x^2-1)\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right]\\&=(x^2-1)\left[2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right]=2x^3-2x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)=-2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

Une équation de la tangente en 0 est $y=-2x$, et comme $f(x)-(-2x)=\frac{4}{3}+o(x^3)$ est du signe de $\frac{4}{3}x^3$ lorsque x est proche de 0.

Si $x>0$ la tangente est au dessous de la courbe.

Si $x<0$ la tangente est au dessus de la courbe.

Remarque :

Attention au raisonnement suivant, si $f(x)=-2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$ alors $f'(x)=-2+4x^2+o(x^2)$, si $f'(x)$ admet un développement limité à l'ordre 2, par exemple parce que f' est de classe C^3 dans un voisinage de 0, alors ce développement est celui-là, autrement dit on ne peut pas dériver un développement limité sans justifier que la fonction dérivée admet un développement limité. Par contre on peut toujours intégrer un développement limité.

2. On pose $t=\frac{1}{x}$,

$$f(t)=\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\ln\left|\frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}\right|=\frac{1-t^2}{t^2}\ln\left|\frac{\frac{t+1}{t}}{\frac{t-1}{t}}\right|=\frac{1-t^2}{t^2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$$

Lorsque $x\to+\infty$, $t\to0$ et au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}\frac{1-t^2}{t^2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|&=-\frac{t^2-1}{t^2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|=-\frac{1}{t^2}\left(-2t+\frac{4}{3}t^3+o(t^3)\right)=\frac{2}{t}-\frac{4}{3}t+o(t)\\&=2x-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

On trouve le développement limité en 0 de $\frac{t^2-1}{t^2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$ à l'aide du 1.

$\lim_{x\to+\infty}-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=0$ donc la droite d'équation $y=-2x$ est asymptote à la courbe.

Comme $f(x)-2X=-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ est strictement négatif lorsque $x\to+\infty$, la courbe est au dessus de l'asymptote.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

$$f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}=2x(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1-X)^{-\frac{1}{2}}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)X+o(X)=1+\frac{1}{2}X+o(X)$$

Donc

$$f'(x)=-2x(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}=-2x\left(1+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right)=-2x-x^5+o(x^5)$$

Donc

$$f(x)=f(0)-x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)=\frac{\pi}{2}-x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)$$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

$$\operatorname{ch}(x)\ln(1+x)=\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=x+\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)x^3+o(x^3)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\begin{array}{l|l}
x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3) & 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3) \\ \cline{2-2}
x \qquad\quad -\frac{x^3}{2}+o(x^3) & x-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^3 \\ \cline{1-1}
-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^3+o(x^3) & \\
-\frac{x^2}{2} \qquad\quad +o(x^3) & \\ \cline{1-1}
\frac{4}{3}x^3+o(x^3) & \\
\frac{4}{3}x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
o(x^3) &
\end{array}$$

$$\frac{\operatorname{ch}(x)\ln(1+x)}{\cos(x)}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. On pose $t=x-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=t+\frac{\pi}{2}$, $\cos(x)=\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(t)$

   $f(x)=e^{-\sin(t)}=e^{-t+o(t^2)}=e^T=1+T+\dfrac{T^2}{2!}+o(T^2)=1+\left(-t+o(t^2)\right)+\dfrac{t^2+o(t^2)}{2!}+o(t^2)$

   En posant $T=-t+o(t^2)$, $T^2=t^2+o(t^2)$ et $o(T^2)=o(t^2)$

$$f(x)=1+\left(-t+o(t^2)\right)+\frac{t^2+o(t^2)}{2!}+o(t^2)=1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$=1-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

2. On pose $t=x-1\Leftrightarrow x=1+t$

$$g(x)=\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan(1+t)}{\ln(1+t)}$$

   Le dénominateur et le numérateur s'annulent en $t=0$. Il faut trouver un développement limité à l'ordre 2 (au moins) du numérateur et du dénominateur. Pour le dénominateur il n'y a pas de problème, par contre le développement limité de $h(t)=\frac{\pi}{4}-\arctan(1+t)$ ne fait pas parti des formules connues, pour cela on va chercher un développement à l'ordre 1 de sa dérivée.

$$h'(t)=-\frac{1}{1+(1+t)^2}=-\frac{1}{1+1+2t+t^2}=-\frac{1}{2+2t+t^2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+t+\frac{t^2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\big(1-t+o(t)\big)=-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}+o(t)$$

Donc

$$h(t)=h(0)-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)=\frac{\pi}{4}-\arctan(1)-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)=-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)$$

$$g(x)=\frac{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+o(t^2)}{t-t^2+o(t^2)}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{t}{4}+o(t)}{1-t+o(t)}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{4}+o(t)\right)\big(1+t+o(t)\big)$$

$$=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)t+o(t)=-\frac{1}{2}-\frac{t}{4}+o(t)=-\frac{1}{2}-\frac{x-1}{4}+o\big((x-1)\big)$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

Première méthode :

f est $C^{+\infty}$ donc f admet un développement limité à n'importe quel ordre, on peut appliquer la formule de Taylor-Young

$$f(0)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-\sin(x)\Rightarrow f'(0)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x)=-\cos(x)\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$f^{(3)}(x)=\sin(x)\Rightarrow f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(4)}(x)=\cos(x)\Rightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\cos(x)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

Allez à : Exercice 10

Deuxième méthode

On pose $t=x-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=t+\frac{\pi}{3}$

$$f(x)=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+o(t^4)\right)\times\frac{1}{2}-\left(t-\frac{t^3}{3!}+o(t^4)\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{4}t^2+\frac{\sqrt{3}}{12}t^3+\frac{1}{48}t^4+o(t^4)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

On pose $t = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + t$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x-1}} = (1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + o(t)$$

$$f(x) = e^{1-t+o(t)} = ee^{-t+o(t)} = e\left(1 - \frac{t}{2} + o(t)\right) = e - e\frac{t}{2} + o(t) = e - e\frac{(x-1)}{2} + o\big((x-1)\big)$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. On pose $= x - \frac{\pi}{2}$, soit $x = t + \frac{\pi}{2}$,

$$f(x) = e^{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\cos(t)} = e^{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)} = ee^{-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)} = ee^X = e(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Avec $X = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$, $X^2 = \frac{t^4}{4} + o(t^4)$ et $o(X^2) = o(t^4)$

$$f(x) = e\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) + \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{4} + o(t^4)\right) + o(t^4)\right) = e - \frac{e}{2}t^2 + \frac{e}{6}t^4 + o(t^4)$$

$$= e - \frac{e}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{e}{6}(x - \frac{\pi}{2})^4 + o\left((x - \frac{\pi}{2})^4\right)$$

2.

$$f(x) - e = -\frac{e}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + o\left((x - \frac{\pi}{2})^2\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{e}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2$$

3.

$$\frac{f(x) - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{\frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{e}{2}$$

donc

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - e}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{e}{2}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et ln est $C^{+\infty}$ au voisinage de 1, donc f admet un développement limité à n'importe quel ordre.

On pose $t = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \ln\left(\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln(\cos(t)) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) = \ln(1 + T) = T - \frac{T^2}{2} + o(T^2)$$

Avec

$$T = -\frac{t^2}{2} + o(t^3), \quad T^2 = o(t^3) \quad et \quad o(T^2) = o(t^3)$$

$$f(x) = T - \frac{T^2}{2} + o(T^2) = -\frac{t^2}{2} + o(t^3) = -\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

2. On pose $t = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(1+\cos(x))}=e^{\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)}=e^{\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin(t))}=g(t)$$

g est une fonction $C^{+\infty}$ au voisinage de 0 donc elle admet un développement limité à n'importe quel ordre. On fait d'abord un développement limité à l'ordre 3 de $\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin(t))$

$$\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{1+\frac{2t}{\pi}}=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{1+T}=\frac{2}{\pi}\left(1-T+T^2-T^3+o(T^3)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2t}{\pi}+\left(\frac{2t}{\pi}\right)^2-\left(\frac{2t}{\pi}\right)^3+o(t^3)\right)=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2t}{\pi}+\frac{4t^2}{\pi^2}-\frac{8t^3}{\pi^3}+o(t^3)\right)$$

$$\ln(1-\sin(t))=\ln\left(1-t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)=\ln(1+T)=T-\frac{T^2}{2}+\frac{T^3}{3}+o(T^3)$$

Avec $T=-t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)$, $T^2=\left(-t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)\left(-t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)=t^2+o(t^3)$, $T^3=t^3+o(t^3)$ et $o(T^3)=o(t^3)$

$$\ln(1-\sin(t))=T-\frac{T^2}{2}+\frac{T^3}{3}+o(T^3)=-t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)-\frac{t^2+o(t^3)}{2}+\frac{t^3+o(t^3)}{3}+o(t^3)$$

$$=-t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}+o(t^3)$$

Cette fois il fallait bien faire un développement limité à l'ordre 3 en T parce que le premier terme de T est en t.

$$\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin(t))=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{\left(1+\frac{2t}{\pi}\right)}\ln\left(1-t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2t}{\pi}+\frac{4t^2}{\pi^2}-\frac{8t^3}{\pi^3}+o(t^3)\right)\left(-t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}+o(t^3)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-t+\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)t^2+\left(-\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)t^3+o(t^3)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)$$

$$f(x)=e^{\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\ln(1-\sin(t))}=e^{\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)}=e^T=1+T+\frac{T^2}{2}+\frac{T^3}{6}+o(T^3)$$

Avec

$$T=\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)$$

$$T^2=\left(\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)\right)\left(\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)\right)=\frac{4}{\pi^2}t^2-\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{\pi}+1\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{4}{\pi}+1\right)\right)t^3+o(t^3)$$

$$=\frac{4}{\pi^2}t^2-\left(\frac{16}{\pi^2}+\frac{4}{\pi}\right)t^3+o(t^3)$$

$$T^3=\frac{8}{\pi^3}t^3+o(t^3)\quad et\quad o(T^3)=o(t^3)$$

$$f(x)=1+T+\frac{T^2}{2}+\frac{T^3}{6}+o(T^3)$$

$$=1+\frac{2}{\pi}t-\left(\frac{4}{\pi}+1\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)+\frac{\frac{4}{\pi^2}t^2-\left(\frac{16}{\pi^2}+\frac{4}{\pi}\right)t^3+o(t^3)}{2}$$

$$+\frac{\frac{8}{\pi^3}t^3+o(t^3)}{6}+o(t^3)$$

$$=1+\frac{2}{\pi}t+\left(-\frac{4}{\pi}-1+\frac{2}{\pi^2}\right)t^2+\left(-\frac{8}{\pi^3}+\frac{2}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}-\frac{8}{\pi^2}-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{3\pi^3}\right)t^3+o(t^3)$$

$$=1+\frac{2}{\pi}t+\left(\frac{2}{\pi^2}-\frac{4}{\pi}-1\right)t^2+\left(-\frac{20}{3\pi^3}-\frac{6}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}\right)t^3+o(t^3)$$

$$=1+\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{2}{\pi^2}-\frac{4}{\pi}-1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\left(-\frac{20}{3\pi^3}-\frac{6}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3$$

$$+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. On pose $t=x-2\Leftrightarrow x=t+2$

$$f(x)=\ln(t+2)=\ln\left(2\left(1+\frac{t}{2}\right)\right)=\ln(2)+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)=\ln(2)+\frac{t}{2}-\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2}+o(t^2)$$

$$=\ln(2)+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)=\ln(2)+\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{8}+o((x-2)^2)$$

On peut utiliser la même méthode ou utiliser la formule de Taylor pour les polynômes de degré 3

$$g(x)=x^3-x^2-x-2=g(2)+g'(2)(x-2)+g''(2)\frac{(x-2)^2}{2!}+g'''(2)\frac{(x-2)^3}{3!}$$

$$g(2)=2^3-2^2-2-2=0$$

$$g'(x)=3x^2-2x-1\Rightarrow g'(2)=7$$

$$g''(x)=6x-2\Rightarrow g''(2)=10$$

$$g'''(x)=6\Rightarrow g'''(2)=6$$

$$g(x)=7(x-2)+5(x-2)^2+(x-2)^3=7(x-2)+5(x-2)^2+o((x-2)^2)$$

2.

$$\frac{\ln(x)-\ln(2)}{x^3-x^2-x-2}=\frac{\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{8}+o((x-2)^2)}{7(x-2)+5(x-2)^2+o((x-2)^2)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{x-2}{8}+o(x-2)}{7+5(x-2)+o(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x)-\ln(2)}{x^3-x^2-x-2}=\frac{1}{14}$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. Comme on va diviser par x, il faut faire un d.l. de $\sin(x)$ à l'ordre 5.

$$f(x)=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$$

2.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)=1$$

On peut prolonger f par continuité en posant $f(0)=1$.

f admet un d.l. à l'ordre 1, donc $f'(0)$ existe et $f'(0)=-\frac{1}{6}$ (le coefficient de x dans le d.l. de $f(x)$).
On rappelle que l'on ne peut pas conclure des résultats identiques sur les dérivées d'ordre supérieures si on n'a pas montré auparavant que la fonction admettait une dérivée à l'ordre voulue.

3.

$$g(x)=\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+o(X^4)$$

Avec $X=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$, $X^2=\frac{x^4}{36}+o(x^4)$ et $X^3=X^4=o(X^4)=o(x^4)$

Donc

$$g(x)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+o(X^4)=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{\left(\frac{x^4}{36}\right)}{2}+o(x^4)=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^4}{72}+o(x^4)$$
$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4)$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

$f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, donc f est prolongeable par continuité 0, x et $\sin(x)$ sont $C^{+\infty}$ donc ces fonctions admettent des développement limité à n'importe quelle ordre, leur quotient aussi.
Il va y avoir une simplification par x, donc il faut faire un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 5, x est un polynôme de degré inférieur à 5, son développement limité est lui-même.

$$f(x)=\frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)}$$

Là, il y a deux techniques, soit la division suivant les puissances croissantes ou utiliser la formule $\frac{1}{1+X}$.
Je vais faire une division

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4) \\ \cline{2-2}
1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4) & 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4 \\ \cline{1-1}
\quad\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+o(x^4) & \\
\quad\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{36}+o(x^4) & \\ \cline{1-1}
\qquad\frac{7}{360}x^4+o(x^4) & \\
\qquad\frac{7}{360}x^4+o(x^4) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad o(x^4) &
\end{array}$$

$$f(x)=\frac{x}{\sin(x)}=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+o(x^4)$$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

$$\ln(\operatorname{ch}(x))=\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$

Avec $X=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, $X^2=\frac{x^4}{4}+o(x^4)$ et $o(X^2)=o(x^4)$

Donc

$$\ln(\operatorname{ch}(x))=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)+o(x^4)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

$$x\ln(1+x)=x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

$$f(x)=\frac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x\ln(1+x)}=\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$\begin{array}{r|l}
\frac{1}{2}\qquad -\frac{x^2}{12}+o(x^2) & 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3} \\
\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{6} & \\
\hline
\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}+o(x^2) & \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8} \\
\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+o(x^2) & \\
\hline
-\frac{x^2}{8}+o(x^2) & \\
-\frac{x^2}{8}+o(x^2) & \\
\hline
o(x^2) &
\end{array}$$

Donc $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

$$\ln(\cos(x))=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+o(X^2)$$

Avec $X=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, $X^2=\frac{x^4}{4}+o(x^4)$ et $o(X^2)=o(x^4)$

Donc

$$\ln(\cos(x))=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)+o(x^4)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

$$x\ln(1-x)=x\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=-x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

$$f(x)=\frac{\ln(\cos(x))}{x\ln(1-x)}=\frac{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}{-1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o(x^2)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$\begin{array}{r|l}
\frac{1}{2}\qquad +\frac{x^2}{12}+o(x^2) & 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3} \\
\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{6} & \\
\hline
-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{12}+o(x^2) & \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{24} \\
-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+o(x^2) & \\
\hline
\frac{x^2}{24}+o(x^2) & \\
\frac{x^2}{24}+o(x^2) & \\
\hline
o(x^2) &
\end{array}$$

Donc $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{24}+o(x^2)$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

$$\ln(1+x)\,\mathrm{sh}(x) \sim_0 x^2$$

Et

$$\cos(x)-1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$$

Donc on pourra mettre x^2 en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier par x^2, il faut donc faire des développements limités à l'ordre $2+3=5$ pour finalement obtenir un développement limité à l'ordre 3.

$$\cos(x)-1 = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)-1 = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5) = x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)\right)$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\,\mathrm{sh}(x) &= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\\ &= x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\end{aligned}$$

Je me suis contenter de faire des développements à l'ordre 4 parce que les deux factorisations par x (donc par x^2) permettent d'obtenir le produit de x^2 par un produit de développements limités à l'ordre 3 (qui donne un développement limité à l'ordre 3) c'est-à-dire un développement limité à l'ordre 5.

Si on avait fait des développements limités de $\ln(1+x)$ et de $\mathrm{sh}(x)$ à l'ordre 5, on aurait juste constaté que les deux termes de degré 5 n'auraient servi à rien (donc rien de bien grave).

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\,\mathrm{sh}(x) &= x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\\ &= x^2\left(1-\frac{x}{2}+\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right]x^2+\left[-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right]x^3+o(x^3)\right)\\ &= x^2\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)\end{aligned}$$

Donc

$$f(x)=\frac{x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^3)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$$

Il reste à faire une division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{r|l}
-\frac{1}{2} \qquad +\frac{1}{24}x^2 \qquad +o(x^3) & 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3) \\ \cline{2-2}
-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3) & -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3) \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{4}x+\frac{7}{24}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3) & \\
-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^3+o(x^3) & \\
\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{12}x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
\frac{1}{24}x^3+o(x^3) & \\
\frac{1}{24}x^3+o(x^3) & \\ \cline{1-1}
+o(x^3) &
\end{array}$$

Et finalement

$$f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

1.

$$\ln\big(1+\mathrm{sh}(x)\big)=\ln\left(1+x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)$$

Avec $X=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $X^2=\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=x^2+o(x^3)$, $X^3=x^3+o(x^3)$ et $o(X^3)=o(x^3)$

$$\ln\big(1+\mathrm{sh}(x)\big)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\frac{x^2+o(x^3)}{2}+\frac{x^3+o(x^3)}{3}+o(x^3)$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

2.

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Donc

$$f(x)=\frac{\ln\big(1+\mathrm{sh}(x)\big)}{\sin(x)}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$
$$=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$
$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}=\frac{1}{1+X}=1-X+o(X)$$

Avec $X=-\frac{x^2}{6}+o(x^2)$ et $o(X)=o(x^2)$

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}=1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)$$

On aurait aussi pu faire une division suivant les puissances croissantes

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)=1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^2+o(x^2)$$
$$=1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$$

3.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)\right)=1$$

donc f est prolongeable par continuité par la fonction définie par : $\begin{cases}f(x) & \text{si} \quad x\neq0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

1.

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$
$$\cos(2x)=1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o(x^5)=1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5)$$

2.

$$f(x)=9\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-11x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)+2x\left(1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5)\right)$$
$$=(9-11+2)x+\left(-\frac{9}{6}+\frac{11}{2}-4\right)x^3+\left(\frac{9}{120}-\frac{11}{24}+\frac{4}{3}\right)x^5+o(x^5)=\frac{19}{20}x^5+o(x^5)$$
$$f(2x)=\frac{19}{20}(2x)^5+o(x^5)=\frac{19\times 8}{5}x^5+o(x^5)=\frac{152}{5}x^5+o(x^5)$$

Donc

$$\frac{f(2x)}{f(x)}=\frac{\frac{19}{20}x^5+o(x^5)}{\frac{152}{5}x^5+o(x^5)}=\frac{\frac{19}{20}+o(1)}{\frac{152}{5}+o(1)}\sim\frac{19}{20}\times\frac{5}{19\times 8}=\frac{1}{32}$$

Et

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{f(x)}=\frac{1}{32}$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1.

$$\sin(x)\,\mathrm{sh}(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)$$
$$=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)$$
$$=x^2\left(1+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)x^4+o(x^4)\right)$$
$$=x^2\left(1-\frac{1}{90}x^4+o(x^4)\right)=x^2-\frac{1}{90}x^6+o(x^6)$$

Donc

Il faut faire un développement limité au même ordre du dénominateur

$$h(x)=\frac{x^2-\frac{1}{90}x^6+o(x^6)}{x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)}=\frac{1-\frac{1}{90}x^4+o(x^4)}{1-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}=\left(1-\frac{1}{90}x^4+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{90}\right)x^4+o(x^4)=1+\frac{7}{45}x^4+o(x^4)$$

2.

$$h(x)-1=\frac{7}{45}x^4+o(x^4)\sim\frac{7}{45}x^4$$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1. $f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, donc f est prolongeable par continuité 0, x et $\sin(x)$ sont $C^{+\infty}$ donc ces fonctions admettent des d.l. à n'importe quelle ordre, leur quotient aussi.

Il va y avoir une simplification par x, donc il faut faire un d.l. du numérateur et du dénominateur à l'ordre 5, x est un polynôme de degré inférieur à 5, son d.l. est lui-même.

$$f(x)=\frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)}$$

Là, il y a deux techniques, soit la division suivant les puissances croissantes ou utiliser la formule $\frac{1}{1+X}$.
Je vais faire une division

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4) \\ \cline{2-2}
1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4) & 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4 \\ \cline{1-1}
\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+o(x^4) & \\
\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{36}+o(x^4) & \\ \cline{1-1}
\frac{7}{360}x^4+o(x^4) & \\
\frac{7}{360}x^4+o(x^4) & \\ \cline{1-1}
o(x^4) &
\end{array}$$

$$f(x)=\frac{x}{\sin(x)}=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+o(x^4)$$

2. Il faut évidemment réduire au même dénominateur

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}=\frac{\operatorname{sh}^2(x)-\sin^2(x)}{\sin^2(x)\operatorname{sh}^2(x)}$$

Le terme de plus petit degré du dénominateur est x^4 car $\sin^2(x)\operatorname{sh}^2(x)\sim_0 x^2\times x^2=x^4$
Pour que cette fonction admette un développement limité il faut que le terme de plus bas degré du numérateur soit en x^4.
$\operatorname{sh}^2(x)-\sin^2(x)$ est paire, cette fonction est nulle en 0, le terme en x^2 est $x^2-x^2=0$ car

$$\operatorname{sh}^2(x)-\sin^2(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right)^2-\left(x+\frac{x^3}{6}+\cdots\right)^2=x^2+\cdots-(x^2+\cdots)$$

Tout va bien, le terme de plus bas degré de cette fonction est en x^4 (le terme en x^3 est nul car la fonction est paire. Donc cette fonction admet un développement limité en 0 et il y aura une simplification par x^4. Pour faire un développement limité à l'ordre 4, il faut faire un développement limité à l'ordre $4+3=7$ du numérateur et du dénominateur.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}^2(x)&=\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)^2=x^2\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)^2\\
&=x^2\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\\
&=x^2\left(1+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{36}+\frac{1}{120}\right)x^4+o(x^5)\right)\\
&=x^2\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{90}x^4+o(x^5)\right)=x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{90}x^6+o(x^7)
\end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité à l'ordre 6 de $\operatorname{sh}(x)$ permet de trouver le développement limité à l'ordre 7 de $\operatorname{sh}^2(x)$

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^2 = x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)^2$$
$$= x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)$$
$$= x^2\left(1 + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{36} + \frac{1}{120}\right)x^4 + o(x^5)\right)$$
$$= x^2\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{90}x^4 + o(x^5)\right) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^7)$$
$$\mathrm{sh}^2(x) - \sin^2(x) = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^7) - \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^7)\right) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^7)$$
$$\sin^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x) = \left(x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)$$
$$= x^4\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) = x^4\big(1 + o(x^3)\big) = x^4 + o(x^7)$$
$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}^2(x) - \sin^2(x)}{\sin^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^7)}{x^4 + o(x^7)} = \frac{\frac{2}{3} + o(x^3)}{1 + o(x^3)} = \frac{2}{3} + o(x^3)$$

3. $f(x) = (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = e^{\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))}$

Il faut déjà faire un développement limité à l'ordre 4 de $\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))$

On va diviser par x^2 donc il faut faire un développement limité de $\ln(\cos(2x))$ à l'ordre 6.

$$\ln(\cos(2x)) = \ln\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \frac{(2x)^6}{720} + o(x^6)\right) = \ln\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)\right)$$
$$= \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$$

Avec

$$X = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)$$
$$X^2 = \left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^6 + o(x^6)\right)\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^6 + o(x^6)\right)$$
$$= 4x^4 + \left(-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right)x^6 + o(x^6) = 4x^4 - \frac{8}{3}x^6 + o(x^6)$$
$$X^3 = -8x^6 + o(x^6)$$
$$o(X^3) = o(x^6)$$

Donc il était bien inutile de faire un développement limité à l'ordre 6 de $\ln(1 + X)$, l'ordre 3 suffit car le terme de plus bas degré de X est x^2.

$$\ln(\cos(2x)) = \ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$$
$$= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6) - \frac{4x^4 - \frac{8}{3}x^6 + o(x^6)}{2} + \frac{-8x^6 + o(x^6)}{3} + o(x^6)$$
$$= -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{124}{45}x^6 + o(x^6)$$
$$\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x)) = \frac{3}{x^2}\left(-2x^2 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{124}{45}x^6 + o(x^6)\right) = -6 - 4x^2 - \frac{124}{45}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x)=e^{\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))}=e^{-6-4x^2-\frac{19}{5}x^4+o(x^4)}=e^{-6}e^{-4x^2-\frac{124}{45}x^4+o(x^4)}=e^{-6}e^{X}$$
$$=e^{-6}\left(1+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)\right)$$

Avec

$$X=-4x^2-\frac{124}{45}x^4+o(x^4)$$
$$X^2=16x^4+o(x^4)\ \ et\ o(X^2)=o(x^4)$$
$$f(x)=e^{-6}\left(1+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)\right)=e^{-6}\left(1-4x^2-\frac{124}{45}x^4+o(x^4)+\frac{16x^4+o(x^4)}{2}+o(x^4)\right)$$
$$=e^{-6}\left(1-4x^2+\frac{236}{45}x^4+o(x^4)\right)=e^{-6}-4e^{-6}x^2+\frac{236e^{-6}}{45}x^4+o(x^4)$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. $1+\frac{1}{2}\times 3X+o(X)-1=\frac{3}{2}X+o(X)$
2. On pose $X=\frac{1}{x}$, X tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

$$\sqrt{x^2+3x+2}-x=\sqrt{\frac{1}{X^2}+\frac{3}{X}+2}-\frac{1}{X}=\sqrt{\frac{1+3X+2X^2}{X^2}}-\frac{1}{X}=\frac{\sqrt{1+3X+2X^2}}{X}-\frac{1}{X}$$

Car $X>0$

$$\sqrt{x^2+3x+2}-x=\frac{\sqrt{1+3X+2X^2}-1}{X}=\frac{\frac{3}{2}X+o(X)}{X}=\frac{3}{2}+o(1)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)=\lim_{X\to 0}\left(\frac{3}{2}+o(1)\right)=\frac{3}{2}$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

$$f(x)=\sin^3(x)\left(e^{x^2}-1\right)=\left(x+o(x)\right)^3\left(1+x^2+o(x^2)-1\right)=\left(x^3+o(x^3)\right)\left(x^2+o(x^2)\right)$$
$$=x^3\left(1+o(1)\right)x^2\left(1+o(1)\right)=x^5\left(1+o(1)\right)=x^5+o(x^5)$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

Ni $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ ni $\frac{1}{x^2}$ n'admettent de développement limité en 0, il faut absolument réduire au même dénominateur.

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2\cos(x)-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$$

Le dénominateur s'annule en 0, il faut faire attention ! Le terme de plus bas degré est x^4, cela se voit. Si le terme de plus bas degré du numérateur est x^p avec $p<4$, la fonction n'admet pas de développement limité en 0.

Etudions brièvement $x^2\cos(x)-\sin^2(x)$, cette fonction s'annule en 0, il n'y a pas de terme constant, elle est paire donc il n'y a pas de terme en x et x^3, il reste à regarder le terme en x^2 : $x^2\cos(x)=x^2(1-\frac{x^2}{2}+\cdots)$ le premier terme est x^2, $(\sin(x))^2=\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right)^2$ donc le premier terme est aussi x^2, il n'y a pas de terme en x^2. Cette étude justifie le fait que cette fonction admet un développement limité en 0. De plus il y aura une simplification par x^4 il faut donc faire des développement limité à l'ordre $4+3=7$ pour pouvoir obtenir un développement limité à l'ordre 3.

$$x^2\cos(x)=x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+o(x^7)$$

On notera qu'un développement limité à l'ordre 5 de $\cos(x)$ suffit pour obtenir un développement limité à l'ordre 7 de $x^2\cos(x)$.

$$\sin^2(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)^2=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)^2$$

$$=x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)$$

$$=x^2(1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{1}{120}+\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{120}\right)x^4+o(x^5)$$

$$=x^2\left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{45}x^4+o(x^5)\right)=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^7)$$

On notera qu'un développement limité à l'ordre 6 de $\sin(x)$ suffit pour obtenir un développement limité à l'ordre 7 de $\sin^2(x)$. Cela vient du fait que le développement limité de $\sin(x)$ commence par x.

On en déduit que :

$$x^2\cos(x)-\sin^2(x)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+o(x^7)-\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^7)\right)$$

$$=-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{360}x^6+o(x^7)$$

$$x^2\sin^2(x)=x^2\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)\right)=x^4-\frac{1}{3}x^6+o(x^7)$$

En faisant une troncature du développement limité de $\sin^2(x)$ trouver ci-dessus.

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\frac{-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{360}x^6+o(x^7)}{x^4-\frac{1}{3}x^6+o(x^7)}=\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

La première (et plus délicate) partie est finie, il faut trouver le développement limité d'un quotient de fonction dont le dénominateur ne s'annule pas. On peut faire une division suivant les puissance croissante mais ici on peut appliquer la formule $\frac{1}{1+X}$, cela me parait plus simple.

$$\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\frac{1}{1+X}=1-X+X^2+o(X^2)$$

Avec $X=-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)$, $X^2=o(x^3)$ et $o(X^2)=o(x^3)$. On remarquera qu'un d.l. à l'ordre 1 du d.l. de $\frac{1}{1+X}=1-X+o(X)$ pose un problème parce que $o(X)=o(x^2)$ or on souhaite obtenir un d.l. à l'ordre 3.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\frac{1}{1+X}=1-X+X^2+o(X^2)$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=1-\left(-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)\right)+o(x^3)+o(x^3)=1+\frac{1}{3}x^2+o(x^3)$$

On en déduit que :

$$\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

$$=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)\right)\times\left(1+\frac{1}{3}x^2+o(x^3)\right)=-\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{18}-\frac{1}{360}\right)x^2+o(x^3)$$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{7}{120}x^2+o(x^3)$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{6}-\frac{7}{120}x^2+o(x^3)$$

Et enfin

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}-\frac{7}{120}x^2+o(x^3)\right)=-\frac{1}{6}$$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1.

$$(1+h)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}=e^{\frac{h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)}{h}}=e^{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)}=ee^X=e\left(1+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)\right)$$

Avec $X=-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)$, $X^2=\frac{h^2}{4}+o(h^2)$ et $o(X^2)=o(h^2)$.

Donc

$$(1+h)^{\frac{1}{h}}=e\left(1+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)\right)=e\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^2)+\frac{h^2}{8}+o(h^2)+o(h^2)\right)$$

$$=e-\frac{e}{2}h+\frac{11}{24}h^2+o(h^2)$$

2. On pose $h=\frac{1}{X}$,

$$\left(1+\frac{1}{X}\right)^X=(1+h)^{\frac{1}{h}}=e-\frac{e}{2}h+\frac{11}{24}h^2+o(h^2)=e-\frac{e}{2X}+\frac{11e}{24X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)$$

3.

$$x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}+3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$$

$$=x^2\left[e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-4\left(e-\frac{e}{2\times 2x}+\frac{11e}{24\times(2x)^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\right.$$
$$\left.+3\left(e-\frac{e}{2\times 3x}+\frac{11e}{24\times(3x)^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\right]$$

$$=x^2\left[e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-4\left(e-\frac{e}{4x}+\frac{11e}{24\times 4x^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\right.$$
$$\left.+3\left(e-\frac{e}{6x}+\frac{11e}{24\times 9x^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\right]$$

$$=x^2\left[e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-4e+\frac{e}{x}-\frac{11e}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+3e-\frac{e}{2x}+\frac{11e}{24\times 3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=x^2\left[+\frac{11e}{24\times 3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{11e}{72}+o(1)$$

Donc

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}+3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]=\frac{11e}{72}$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1.

$$\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}=\frac{1+x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}+o(1)$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}+o(1)=\frac{3}{2}$$

2. On pose $t=x-1\Leftrightarrow x=1+t$

$$\frac{\ln(x)}{x^2-1}=\frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2-1}=\frac{\ln(1+t)}{1+2t+t^2-1}=\frac{\ln(1+t)}{t(2+t)}=\frac{t+o(t)}{t(2+t)}=\frac{1+o(1)}{2+t}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1+o(1)}{2+t}=\frac{1}{2}$$

3. On pose $X=\frac{1}{x}$, X tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

$$\sqrt{x^2+3x+2}-x=\sqrt{\frac{1}{X^2}+\frac{3}{X}+2}-\frac{1}{X}=\sqrt{\frac{1+3X+2X^2}{X^2}}-\frac{1}{X}=\frac{\sqrt{1+3X+2X^2}}{X}-\frac{1}{X}$$

Car $X>0$

$$\sqrt{x^2+3x+2}-x=\frac{\sqrt{1+3X+2X^2}-1}{X}=\frac{1+\frac{1}{2}\times 3X+o(X)-1}{X}=\frac{\frac{3}{2}X+o(X)}{X}=\frac{3}{2}+o(1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)=\lim_{X\to 0}\left(\frac{3}{2}+o(1)\right)=\frac{3}{2}$$

4.

$$e^x-1-x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)\sim_0\frac{x^2}{2}$$

$$\sin^2(x)\sim_0 x^2$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sin^2(x)}=\frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

$$\frac{\sin(3x)}{\tan(2x)}=\frac{3x+o(x)}{2x+o(x)}=\frac{x\big(3+o(1)\big)}{x\big(2+o(1)\big)}=\frac{3+o(1)}{2+o(1)}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{3}{2}$$

$$\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}=\frac{3x+o(x)}{x\big(2x+o(x)\big)}=\frac{x\big(3+o(1)\big)}{x^2\big(2+o(1)\big)}=\frac{3+o(1)}{x\big(2+o(1)\big)}$$

Si $x\to 0^+$, $\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}\to+\infty$ et si $x\to 0^-$, $\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}\to-\infty$.

Mais $\frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}$ n'admet pas de limite en 0.

$$\frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3}=\frac{\Big(1-\big(1-x+o(x)\big)\Big)\big(x+o(x)\big)}{x^2(1+x)}=\frac{\big(x+o(x)\big)\big(x+o(x)\big)}{x^2(1+x)}$$

$$=\frac{x^2\big(1+o(1)\big)\big(1+o(1)\big)}{x^2(1+x)}=\frac{\big(1+o(1)\big)\big(1+o(1)\big)}{(1+x)}\xrightarrow[x\to 0]{}1$$

$$\frac{e^x-\cos(x)-x}{\ln(1+\sin(x))-x}=\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x}{\ln\left(1+\left(x+o(x^2)\right)\right)-x}=\frac{x^2+o(x^2)}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}$$

$$=\frac{x^2\left(1+o(1)\right)}{x^2\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}=\frac{1+o(1)}{-\frac{1}{2}+o(1)}\xrightarrow[x\to 0]{}-2$$

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

$$\cos(x)-\operatorname{ch}(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=-x^2+o(x^2)=x^2\left(-1+o(1)\right)$$

$$e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}=e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}-e^{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=ee^{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}-ee^{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$=e\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-e\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=e\left(-x^2+o(x^2)\right)=x^2\left(-e+o(1)\right)$$

$$\frac{e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x)-\operatorname{ch}(x)}=\frac{x^2\left(-e+o(1)\right)}{x^2\left(-1+o(1)\right)}=\frac{-e+o(1)}{-1+o(1)}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}}{\cos(x)-\operatorname{ch}(x)}=e$$

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1. On pose $X=\frac{1}{2x}\to 0$ lorsque $x\to +\infty$.

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}=\left(\frac{\frac{1}{X}+1}{\frac{1}{X}-1}\right)^{\frac{1}{X}}=\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{1}{X}}=e^{\frac{1}{X}\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)}=e^{\frac{1}{X}(\ln(1+X)-\ln(1-X))}$$

$\frac{1}{X}(\ln(1+X)-\ln(1-X))$ est une forme indéterminée lorsque $X\to 0$ car le numérateur et le dénominateur tende vers 0. Le terme de plus bas degré du dénominateur est X (c'est le seul), il faut donc faire un d.l. à l'ordre 1 du numérateur.

$$\ln(1+X)-\ln(1-X)=X+o(X)-\left(-X+o(X)\right)=2X+o(X)$$

Donc

$$\frac{1}{X}(\ln(1+X)-\ln(1-X))=\frac{2X+o(X)}{X}=2+o(1)$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}=\lim_{X\to 0}e^{\frac{1}{X}(\ln(1+X)-\ln(1-X))}=\lim_{X\to 0}e^{2+o(1)}=e^2$$

2.

$$\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}}=e^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}\ln\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)}$$

On peut toujours vérifier, il s'agit d'une forme indéterminée.

Il faut faire apparaître $X=\frac{x-\sin(x)}{\sin(x)}$,

$$X=\frac{x-\sin(x)}{\sin(x)}=\frac{x}{\sin(x)}-1\Leftrightarrow X+1=\frac{x}{\sin(x)}$$

Donc

$$\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = e^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}\ln\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)} = e^{\frac{1}{X}\ln(1+X)}$$

Là on est forcément tenter d'utiliser la formule $\ln(1+X) = X + o(X)$ mais attention, il faut vérifier que $X \to 0$ lorsque $x \to 0$.

$$X = \frac{x - \sin(x)}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} - 1$$

Soit on sait que la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ tend vers 1 lorsque $x \to 0$, donc $\frac{x}{\sin(x)}$ tend aussi vers 1, soit on ne le sait pas et on cherche un équivalent de X.

$$x - \sin(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}$$

Donc

$$X = \frac{x - \sin(x)}{\sin(x)} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x} = \frac{x^2}{6} \to 0$$

C'est bon $X \to 0$

$$\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = e^{\frac{1}{X}\ln(1+X)} = e^{\frac{1}{X}(X+o(X))} = e^{1+o(1)}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = \lim_{X\to 0} e^{\frac{1}{X}\ln(1+X)} = \lim_{X\to 0} e^{1+o(1)} = e^1 = e$$

3.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$$

Bien sûr, il s'agit d'une forme indéterminée, il va falloir faire un développement limité, mais à quel ordre ?

Regardons le dénominateur, manifestement les termes en x s'annulent, il n'y a pas de terme en x^2, on va faire un développement limité du dénominateur à l'ordre 3.

$$\sin(x) - \tan(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

On va faire alors un développement limité du numérateur à l'ordre 3.

$$e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)} = e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} - e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$$

$e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$ avec

$u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $u^2 = x^2 + o(x^3)$ et $u^3 = x^3 + o(x^3)$ et $o(u^3) = o(x^3)$ donc

$$e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$ avec

$v = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $v^2 = x^2 + o(x^3)$ et $v^3 = x^3 + o(x^3)$ et $o(v^3) = o(x^3)$ donc

$$e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{x^2 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Donc

$$e^{\sin(x)}-e^{\tan(x)}=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

Et

$$\frac{e^{\sin(x)}-e^{\tan(x)}}{\sin(x)-\tan(x)}=\frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=\frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{-\frac{1}{2}+o(1)}=\frac{1+o(1)}{1+o(1)}=1+o(1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{e^{\sin(x)}-e^{\tan(x)}}{\sin(x)-\tan(x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}(1+o(1))=1$$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1.

$$f(x)=2x+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

2.

$$f'(x)=2+\cos(x)\geq 1>0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

Donc f est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, c'est une bijection.

Si f est une fonction strictement croissante donc f^{-1} est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (les $\mathbb{R}$ s'inversent), comme la dérivée de f n'est jamais nulle, $f^{-1'}$ est dérivable et

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$f^{-1'}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ car f' est continue. Par une récurrence quasi immédiate, on en déduit que f^{-1} est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc admet un développement limité à n'importe quel ordre.

3. $f(0)=0$ on peut appliquer la formule du développement limité de f^{-1} à $f(x)$ au voisinage de $x=0$.

$f^{-1}\left(f(x)\right)=x$

$$\Leftrightarrow a_0+a_1\left(3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+a_2\left(3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+a_3\left(3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3$$

$$+o\left(\left(3x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3\right)=x\Leftrightarrow a_0+a_1\left(3x-\frac{x^3}{6}\right)+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)=x$$

$$\Leftrightarrow a_0+3a_1x+a_2x^2+\left(-\frac{a_1}{6}+a_3\right)x^3+o(x^3)=x\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a_0=0\\3a_1=1\\a_2=0\\-\frac{a_1}{6}+a_3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a_0=0\\a_1=\frac{1}{3}\\a_2=0\\a_3=\frac{1}{18}\end{array}\right.$$

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}x^3+o(x^3)$$

Allez à : Exercice 32