Calcul des probabilités

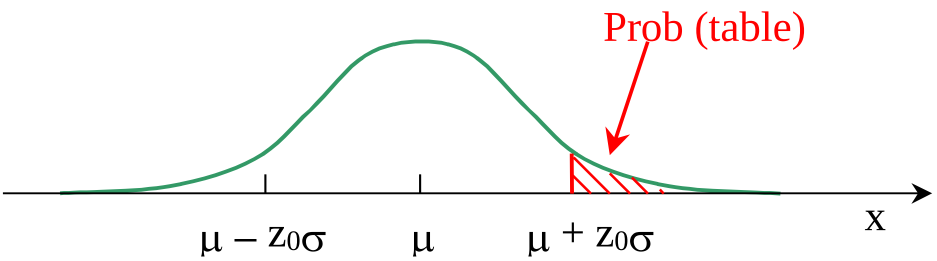
Pour calculer les probabilités associées à la loi normale, on utilise généralement la loi normale réduite : c'est une loi normale pour laquelle $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.
La table suivante permet de déterminer la probabilité que la variable *x* s'écarte de la moyenne μ de plus de $z_0 \times \sigma$ vers le haut.
Pour obtenir z_0, on calcule l'écart par rapport à la moyenne : $\delta = x - \mu$, puis on divise par l'écart type : $z_0 = \frac{\delta}{\sigma}$

	2ème décimale de z_0									
Z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.496	.492	.488	.484	.480	.476	.472	.468	.464
0.1	.460	.456	.452	.448	.444	.440	.436	.433	.429	.425
0.2	.421	.417	.413	.409	.405	.401	.397	.394	.390	.386
0.3	.382	.378	.374	.371	.367	.363	.359	.356	.352	.348
0.4	.345	.341	.337	.334	.330	.326	.323	.319	.316	.312
0.5	.309	.305	.302	.298	.295	.291	.288	.284	.281	.278
0.6	.274	.271	.268	.264	.261	.258	.255	.251	.248	.245
0.7	.242	.239	.236	.233	.230	.227	.224	.221	.218	.215
0.8	.212	.209	.206	.203	.200	.198	.195	.192	.189	.187
0.9	.184	.181	.179	.176	.174	.171	.169	.166	.164	.161
1.0	.159	.156	.154	.152	.149	.147	.145	.142	.140	.138
1.1	.136	.133	.131	.129	.127	.125	.123	.121	.119	.117
1.2	.115	.113	.111	.109	.107	.106	.104	.102	.100	.099
1.3	.097	.095	.093	.092	.090	.089	.087	.085	.084	.082
1.4	.081	.079	.078	.076	.075	.074	.072	.071	.069	.068
1.5	.067	.066	.064	.063	.062	.061	.059	.058	.057	.056
1.6	.055	.054	.053	.052	.051	.049	.048	.047	.046	.046
1.7	.045	.044	.043	.042	.041	.040	.039	.038	.038	.037
1.8	.036	.035	.034	.034	.033	.032	.031	.031	.030	.029
1.9	.029	.028	.027	.027	.026	.026	.025	.024	.024	.023
2.0	.023	.022	.022	.021	.021	.020	.020	.019	.019	.018
2.1	.018	.017	.017	.017	.016	.016	.015	.015	.015	.014
2.2	.014	.014	.013	.013	.013	.012	.012	.012	.011	.011
2.3	.011	.010	.010	.010	.010	.009	.009	.009	.009	.008
2.4	.008	.008	.008	.008	.007	.007	.007	.007	.007	.006
2.5	.006	.006	.006	.006	.006	.005	.005	.005	.005	.005
2.6	.005	.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004
2.7	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003
2.8	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002
2.9	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001

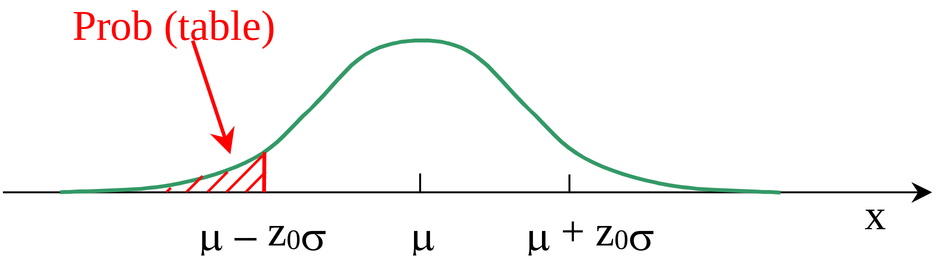
Lorsque l’on doit déterminer une probabilité à partir de la loi normale, on essaie de se ramener à une probabilité considérée dans la table.

Quelques cas concrets sont illustrés ci-dessous.

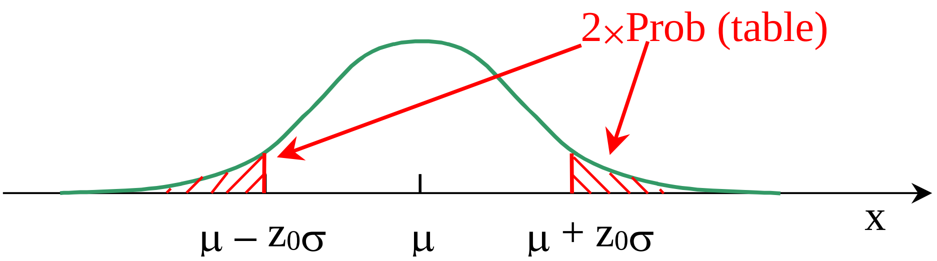
1) $x > \mu + z_0\sigma$



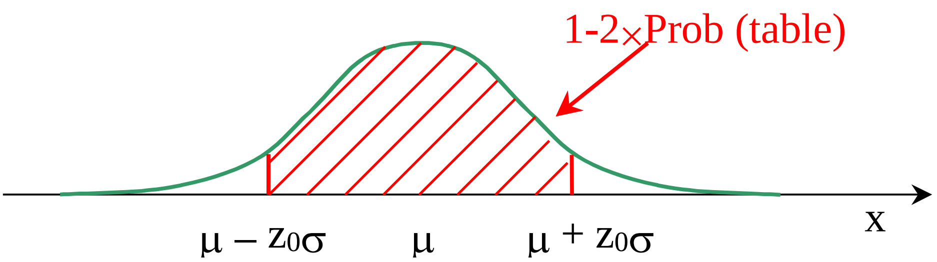
2) $x < \mu - z_0\sigma$



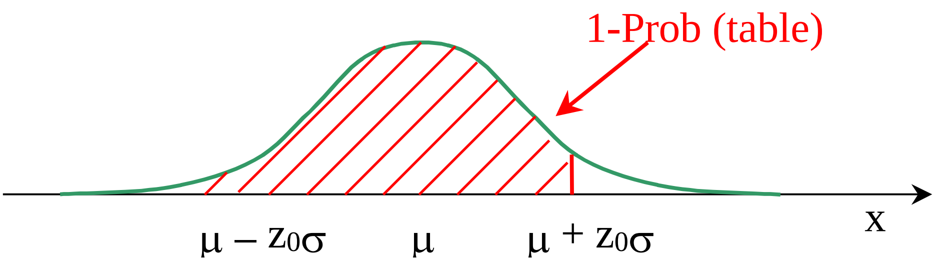
3) x plus éloigné de μ que $z_0\sigma$



4) x plus proche de μ que $z_0\sigma$



5) $x < \mu + z_0\sigma$



Exemples :

Le poids des tomates produites par un jardinier obéit à une loi normale de moyenne 200 gr et d'écart type 40 gr.

a. Calculez la probabilité que le poids d'une tomate excède 250 gr.

Solution: $\delta = 250 - 200 = 50\ \text{gr}$

$$z_0 = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{50}{40} = 1{,}25$$

$\text{Prob} = 0{,}106 = 10{,}6\ \%$

b. Calculez la probabilité que le poids d'une tomate soit inférieur à 100 gr.

Solution: $\delta = 100 - 200 = -100\ \text{gr}$

la loi normale est symétrique → on ne s'occupe pas du signe

$$z_0 = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{100}{40} = 2{,}5$$

moins de 100 gr: on s'écarte donc de la valeur moyenne μ = 200 gr de plus de $z_0 \times \sigma$

$\text{Prob} = 0{,}006 = 0{,}6\ \%$

c. Calculez la probabilité que le poids d'une tomate soit inférieur à 230 gr.

Solution: $\delta = 230 - 200 = 30\ \text{gr}$

$$z_0 = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{30}{40} = 0{,}75$$

L'intervalle (< 230 gr) considéré contient la valeur moyenne (200 gr) → on prend 1 – Prob(table):

$\text{Prob} = 1 - 0{,}227 = 0{,}773 = 77{,}3\ \%$

d. Calculez la probabilité que le poids d'une tomate ne s'écarte pas de la valeur moyenne de plus de 20 gr.

Solution: on calcule d'abord la probabilité que le poids s'écarte de plus de 20 gr, vers le haut ou vers le bas :

$\delta = 20\ \text{gr} \qquad \sigma = 40$

$$z_0 = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{20}{40} = 0{,}5$$

$\text{Prob} = 0{,}309 = 30{,}9\ \%$

On doit multiplier par 2 car on considère les deux côtés → Prob = 2 × 0,309 = 0,618

On a donc une prob. de 0,618 que le poids s'écarte de μ de plus de 20 gr, et donc une prob. 1-0,618 que le poids ne s'écarte pas de plus de 20 gr.

Réponse: 0,382 = 38,2 %