

## **La loi Binomiale**

### **Epreuve de Bernoulli**

Considérons une expérience dont l'univers ne contient que deux événements élémentaires. On appelle succès la réalisation de A et échec la réalisation de son contraire  $\bar{A}$ .

Posons  $P(A) = p$  la probabilité de l'événement A et  $P(\bar{A}) = q$  la probabilité de l'événement  $\bar{A}$ . p et q sont liés par la relation  $p + q = 1$

Exemple : Un joueur lance un dé non pipé et on s'intéresse à l'obtention du six.

Soit A l'événement «on obtient un trois ». Nous avons  $P(A) = 1/6$  et  $P(\bar{A}) = 5/6$ .

Lorsqu'on s'intéresse ainsi à un événement A ou à son contraire  $\bar{A}$ , la réalisation de l'expérience est appelée épreuve de Bernoulli.

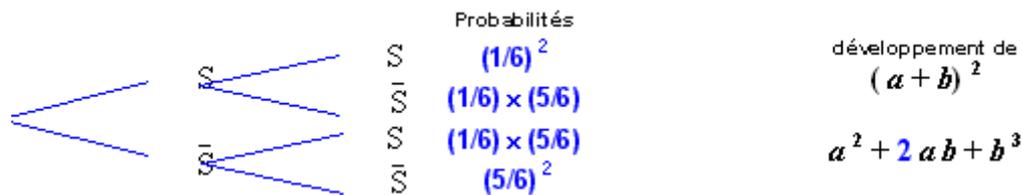
### **Loi Binomiale**

Considérons une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On note p la probabilité commune de succès. On dit alors qu'on est dans un schéma de Bernoulli caractérisé par p la probabilité de succès à chaque épreuve et n le nombre d'épreuves.

Soit n un entier tel que  $n \geq 1$  et soit  $p \in [0, 1]$ . Par définition la variable aléatoire X qui désigne le nombre de succès de probabilité commune p dans un schéma de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée

$$B(n ; p)$$

Exemple : On lance plusieurs fois un dé et on s'intéresse au nombre d'apparitions du six. On lance le dé deux fois :



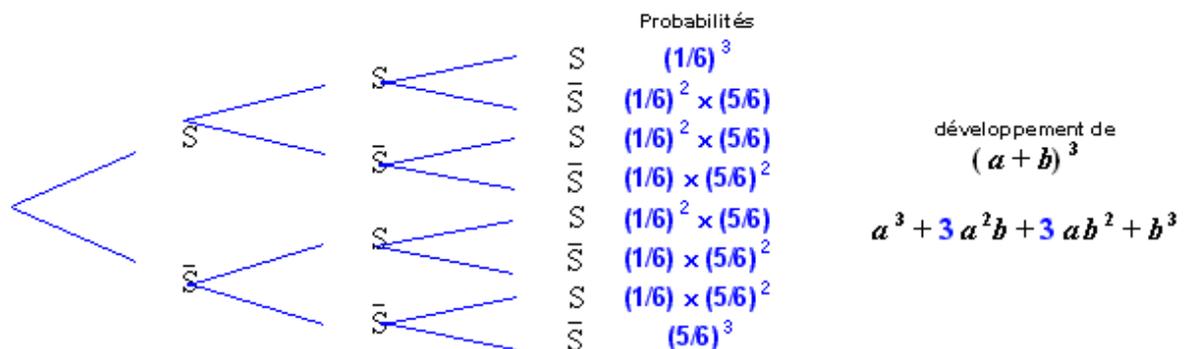
La loi de probabilité de la variable  $X$  qui compte le nombre de succès est :

$x_i$	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

L'espérance mathématique  $E(X) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

La variance est  $V(X) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$

- on lance le dé trois fois



La loi de probabilité de la variable  $X$  qui compte le nombre de succès est :

$x_i$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

L'espérance mathématique  $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

La variance est  $V(X) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

Ainsi  $E\{X\} = n p$  et  $V(X) = n p \bar{p}$

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple jeu pile ou face pour  $n = 5$  et  $p = 1/2$  pour avoir face

Déterminer la loi de probabilité pour  $k = 6$

Réponse

$$P(x=0) = 1/32$$

$$P(x=1) = 5/32$$

$$P(x=2) = 5/16$$

$$P(x=3) = 5/16$$

$$P(x=4) = 5/32$$

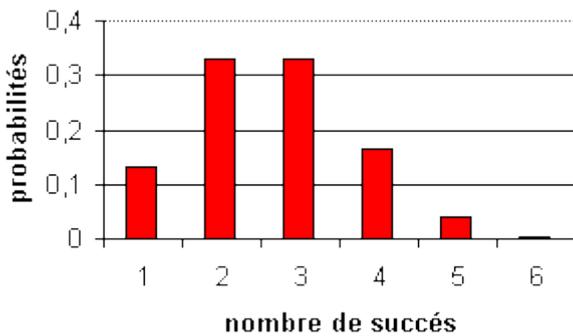
$$P(x=5) = 1/32$$

$$E(x) = 5/2 \quad V(x) = 5/4$$

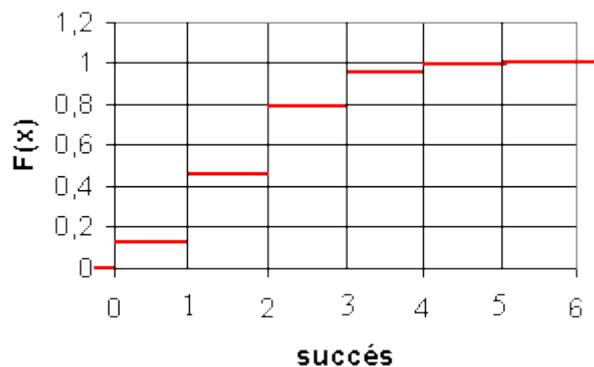
Exemple 2

Loi de probabilité représentée

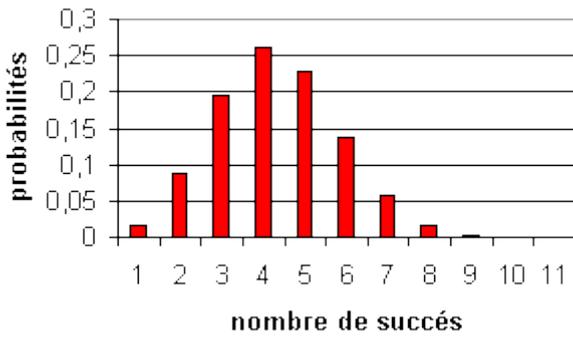
pour  $p = 1/3$  pour  $n = 5$



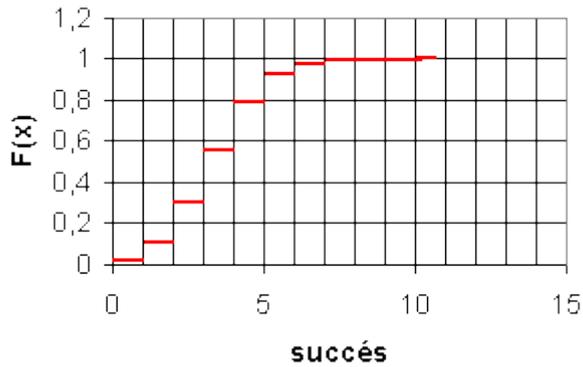
Fonction de répartition représentée pour  $p = 1/3$   $n = 5$



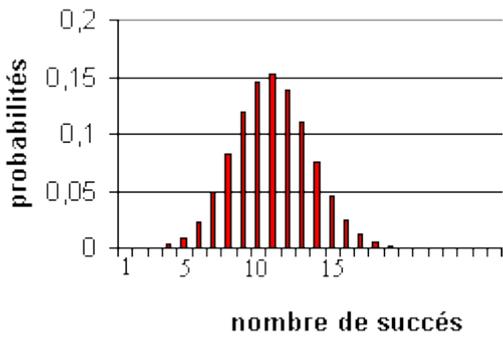
**pour n = 10**



**pour n = 10**



**pour n = 30**



**pour n = 30**

