

La loi Binomiale

Epreuve de Bernoulli

Considérons une expérience dont l'univers ne contient que deux événements élémentaires. On appelle succès la réalisation de A et échec la réalisation de son contraire \bar{A} .

Posons $P(A) = p$ la probabilité de l'événement A et $P(\bar{A}) = q$ la probabilité de l'événement \bar{A} . p et q sont liés par la relation $p + q = 1$

Exemple : Un joueur lance un dé non pipé et on s'intéresse à l'obtention du six.

Soit A l'événement «on obtient un trois ». Nous avons $P(A) = 1/6$ et $P(\bar{A}) = 5/6$.

Lorsqu'on s'intéresse ainsi à un événement A ou à son contraire \bar{A} , la réalisation de l'expérience est appelée épreuve de Bernoulli.

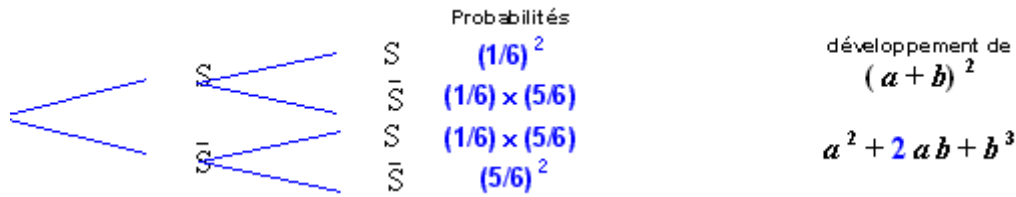
Loi Binomiale

Considérons une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On note p la probabilité commune de succès. On dit alors qu'on est dans un schéma de Bernoulli caractérisé par p la probabilité de succès à chaque épreuve et n le nombre d'épreuves.

Soit n un entier tel que $n \geq 1$ et soit $p \in [0, 1]$. Par définition la variable aléatoire X qui désigne le nombre de succès de probabilité commune p dans un schéma de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée

$$B(n ; p)$$

Exemple : On lance plusieurs fois un dé et on s'intéresse au nombre d'apparitions du six. On lance le dé deux fois :



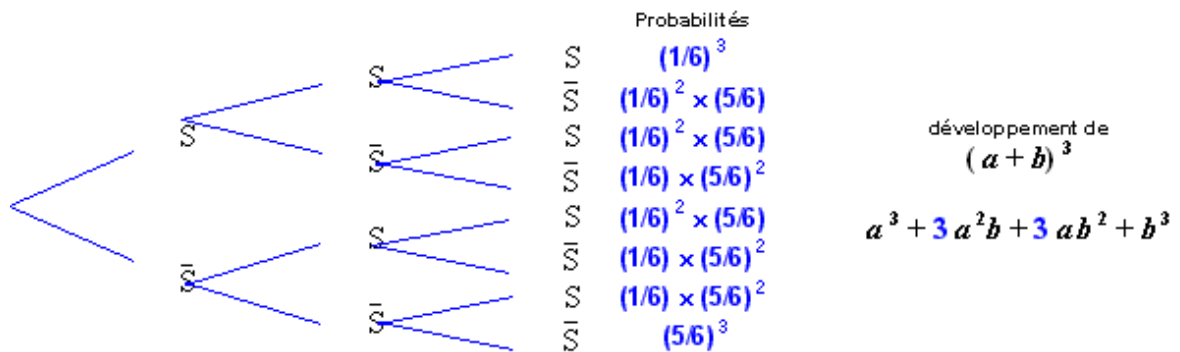
La loi de probabilité de la variable X qui compte le nombre de succès est :

| | | | |
|------------|-----------------|----------------|----------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 |
| $p(X=x_i)$ | $\frac{25}{36}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

L'espérance mathématique $E(X) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

La variance est $V(X) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$

- on lance le dé trois fois



La loi de probabilité de la variable X qui compte le nombre de succès est :

| | | | | |
|------------|-------------------|-----------------|----------------|-----------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $p(X=x_i)$ | $\frac{125}{216}$ | $\frac{25}{72}$ | $\frac{5}{72}$ | $\frac{1}{216}$ |

L'espérance mathématique $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

La variance est $V(X) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

Ainsi $E\{X\} = n p$ et $V(X) = n p \bar{p}$

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple jeu pile ou face pour $n = 5$ et $p = 1/2$ pour avoir face

Déterminer la loi de probabilité pour $k = 6$

Réponse

$$P(x=0) = 1/32$$

$$P(x=1) = 5/32$$

$$P(x=2) = 5/16$$

$$P(x=3) = 5/16$$

$$P(x=4) = 5/32$$

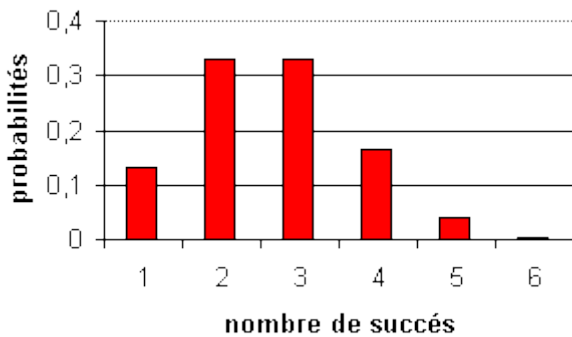
$$P(x=5) = 1/32$$

$$E(x) = 5/2 \quad V(x) = 5/4$$

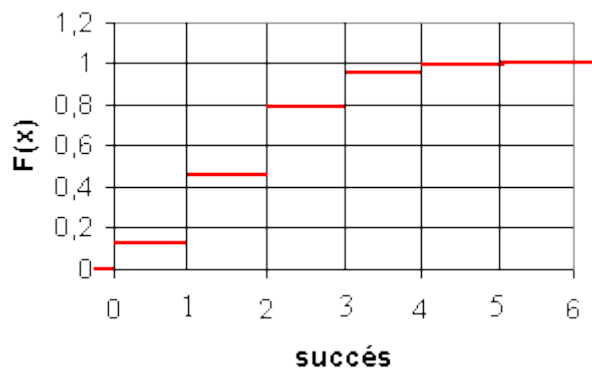
Exemple 2

Loi de probabilité représentée

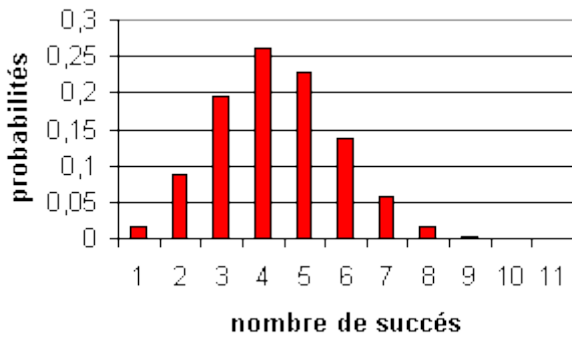
pour $p = 1/3$ pour $n = 5$



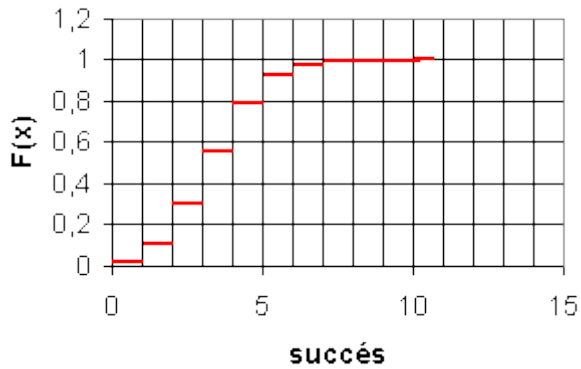
Fonction de répartition représentée pour $p = 1/3$ $n = 5$



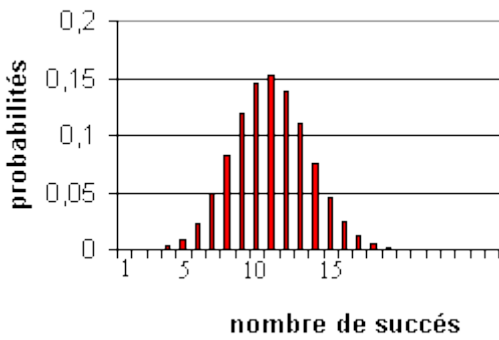
pour n = 10



pour n = 10



pour n = 30



pour n = 30

