ليونهارت أويلر

ولد **ليونهارد أويلر** (بالإنجليزية: **Leonhard Euler**) في 15 أبريل عام 1707م في بازل في سويسرا وتوفي في 18 سبتمبر عام 1783م في سانت بطرسبرغ. هو رياضي وفيزيائي سويسري من الرياضيين الذين تركوا أثرا في تاريخ العلوم.
أمضى أويلر معظم حياته البالغة في سانت بطرسبرغ، روسيا وبرلين، بروسيا. و يتعبر أبرز الرياضياتيين في القرن الثامن عشر، ومن أعظم الرياضياتيين في التاريخ, و هو من أكثر الرياضياتيين إنتاجًا، حيث ألف ما يتراوح ما بين الستين و الثمانين مؤلفا.[2]

١ حياته

١٠١ نشأته

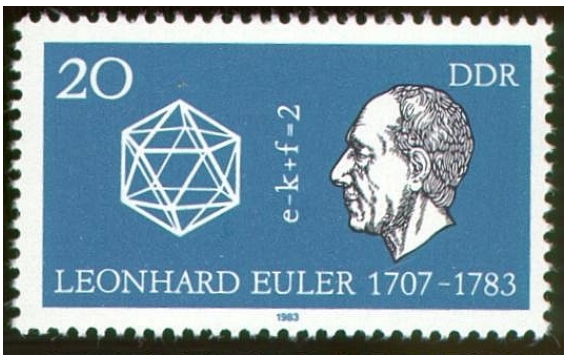
ورقة مالية سويسرية قديمة بقيمة عشر فرنكات تكرم أويلر

وُلد في الخامس عشر من أبريل عام 1707 في بازل لباول أويلر. و كان أبوه قسا. أما أمه مارجاريت بروكر فهي ابنة قس آخر. كان لديه أختان صغيرتان، الأولى تدعى آنا ماريا والثانية تدعى ماريا مجدلينا. بعد فترة قصيرة من ولادته انتقلت عائلة أويلر من بلدة بازل إلى بلدة ريهن بها أمضى ليونهارد معظم طفولته. كان الوالد باول أويلر صديقا لعائلة برنولي - يوهان بيرنولي، الذي اعتُبر حينها من أعظم الرياضياتيين في أوروبا، ولاحقًا كان له تأثير عظيم على الابن ليونهارد أويلر. تلقّن أويلر تعليمه الابتدائي في بازل حيث أرسله أهله إلى جدته، أم أمه. عندما بلغ الثالثة عشر من عمره, التحق بجامعة بازل. وفي سنة 1723 تلقى لقب الماستر في الفلسفة بعد كتابته لمقال قارن فيه فلسفة دكارت بفلسفة نيوتن. في هذه الفترة، تلقى أويلر دروسا من قبل يوهان برنولي الذي أعجب بالموهبة الخارقة لدى طالبه ليونهارد.[3] و في هذه الفترة أيضًا, درس أويلر علم اللاهوت واليونانية والعبرية بعد أن حثه أبوه على ذلك من أجل أن يصبح قسًا. ولكن يوهان برنولي استطاع إقناع والده أن ليونهارد ولد ليصبح رياضياتيا عظيما. في سنة 1726، أتم أولر مقالته عن انتشار الصوت[4] بعنوان *De Sono*. في هذه الفترة حاول ليونهارد (دون جدوى) التقدم والحصول على منصب في جامعة بازل.

٢٠١ سانت بطرسبرغ

طابع بريدي طبع عام 1957 في الاتحاد السوفيتي سابقا، لإحياء الذكرى المائتين واخمسين لميلاد أويلر. كتب عليه ما يلي: 250 عاما بعد ميلاد عالم الرياضيات الكبير والأكاديمي ليونهارد أويلر.

٣٠١ برلين



طابع بريدي طبع في الجمهورية الألمانية الديموقراطية سابقا، تكريما لأويلر عند الذكرى المائتين لوفاته. في وسطه جاءت صيغة المخطط المستوي $V-E+F=2$.

٤٠١ تدهور حالة بصره

تدهور بصر أويلر عبر مساره المهني في الرياضيات حيث أصيب عام 1735 بحمى كادت أن تؤدي بحياته، وبعد ذلك بثلاث سنوات، صار

لوحة رسمها إيمانويل هاندمان عام 1753. تبين هاته اللوحة مشاكل صحية في العين اليمنى. قد يتعلق الأمر بمرض الحول. تبدو العين اليسرى بصحة جيدة ولكنها أصيبت فيما بعد بمرض الساد.[5]

شبه أعمى بعينه اليمنى.

٥٠١ رجوعه إلى روسيا

٢ إسهاماته في الرياضيات والفيزياء

عمل أويلر في جميع فروع الرياضيات تقريبا كالهندسة و التكامل و حساب المثلثات و الجبر و نظرية الاعداد وأيضا في الفيزياء المتصلة ونظرية لينر وفي فروع أخرى من الفيزياء. فهو علامة مميزة في تاريخ الرياضيات والكثير من أعماله موقع اهتمام أساسي والتي تشغل ما بين الستين و الثمانين مجلداً. وقد اقترن اسم أويلر بعدد هائل من الموضوعات في الرياضيات والفيزياء.

وكان أويلر من الرياضيين النشيطين جدًا حيث أن له أكثر من 886 إصدارا. ويرجع العديد من الرموز المستعملة اليوم في الرياضيات إليه كما يعتبره البعض مؤسس علم التحليل الرياضي. في سنة 1748 قام بنشر كتاب بعنوان Introductio in analysin infinitorum اكتسى في مفهوم الدالة صيغة محورية.

١٠٢ التعبيرات الرياضية

قدم أويلر وعمم الكثير من التعبيرات الرياضية من خلال كتبه العديدة. و قدم مفهوم الدالة وكان أول من كتب f(x) والتي تعنى أن دالة f مطبقة على المتغير x. وقد قدم تعبيرا جديدا للدوال المثلثية، وأيضا يسمى العدد الطبيعي (e) أو ما يسمى بالإنجليزية (e) بعدد أويلر. وهذا العدد هو الأساس للوغاريتم الطبيعي وأيضا أول من عبر عن المجموع بالحرف الاغريقي (Σ) والعدد (i) لتمثيل العدد التخيلي (ت) والذي يساوي جذر سالب الواحد الصحيح. كما استخدم الحرف الاغريقي π للتعبير عن النسبة بين محيط الدائرة وقطرها وقد قام بتعميمه على الرغم من أن أصلها لا يرجع إلى أويلر، بل أن أول من اكتشف النسبة بين محيط الدائرة إلى قطرها هو العالم العبقرى السويسرى الجنسية الالمانى المولد الفيزيائى الفذ يوهان لامبرت[بحاجة لمصدر].

٢٠٢ التحليل

في القرن الثامن عشر كان تطوير التفاضل والتكامل على رأس البحوث الرياضية. و كان بيرنولي صديق عائلة أويلر, مسؤولا عن كثير من التقدم في هذا المجال. وتقديرا لجهوده جعل أويلر دراسة التفاضل والتكامل موضع اهتماماته الرئيسية , وإن كانت بعض إثباتات أويلر غير مقبولة بقياسات الرياضيات وخصوصا اعتماده على مبدأ عمومية الجبر.

و قد أدت أفكاره إلى تطورات عظيمة حيث اشتهر نتيجة استعماله المكثف للمتسلسلات الأسية والتي هي عبارة عن مجموع عدد لا نهائى من الحدود لتمثيل دالة معينة ما. مثل :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

و الجدير بالذكر أن أويلر أثبت مباشرة المتسلسة الأسية للدالة الأسية هس و دالة الظل العكسية.

قام نيوتن و لايبنز باختراع الأساليب غير المباشرة لمعرفة المتسلسلة الأسية لدالة ما في ما بين عامي 1670 و 1680 م. وقد مكنه استخدام المتسلسة الأسي في حل الكثير من مشاكل بازل المشهورة "Basel Problem" في عام 1735 م. وقدم إثباتاً أكثر تفصيلا في عام 1741 م.

عرض أويلر استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمات في التحاليل الرياضية. كما اكتشف طرقا للتعبير عن الدوال اللوغاريتمية المختلفة باستخدام المتسلسلات الأسية. و نجح في تعريف اللوغاريتم للأعداد السالبة والمركبة, مما وسع مجال التطبيقات الرياضية للوغاريتميات. وقد عرف الدالة الأسية الطبيعية للأعداد المركبة واكتشف علاقتها بالدوال المثلثية وحيث تتحق علاقة أويلر لأي عدد حقيقي θ.

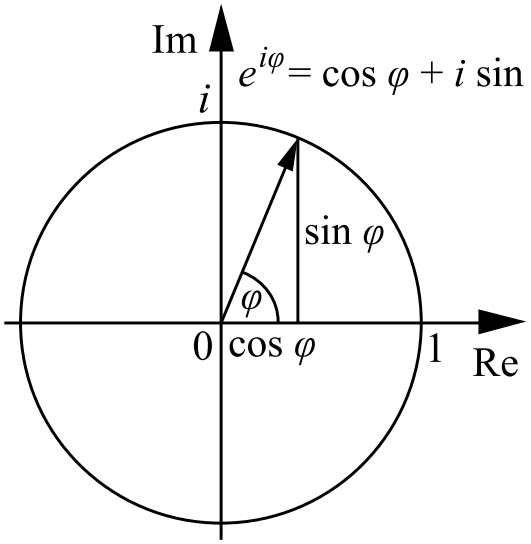
$$e^{ix} = cos(x) + i \cdot sin(x)$$

حيث x هي الزاوية.

الحالة الخاصة لهذه الصيغة هي المتطابقة الرياضية المعروفة باسم متطابقة أويلر،

$e^{i\pi} + 1 = 0$ وتحدث عندما x=π.

تسمى هاته المتطابقة بمتطابقة أويلر وهي أكثر العلاقات بروزا في الرياضيات, كما نعتها ريتشارد فينمان. والتي تستخدم في التعبير عن الجمع والضرب والمتطابقات , وقد استخدمت مفردة للتعبير عن بعض



تفسير هندسي لصيغة أويلر

الثوابت المهمة مثل (صفر, ه, ت , ط)

و قد صوت قارؤو مجلة الذكاء الرياضي بأنها أجمل العلاقات الرياضية على الإطلاق. و مجملاً, يرجع الفضل إلى أويلر في ثلاث من أهم خمس علاقات في هذا المجال.

أدت علاقة أويلر مباشرة إلى صيغة دي موافر. بالأضافة إلى ذلك, وضع أويلر نظرية الدوال المتسامية العليا وقدم دالة غاما , وعرض طرقا جديدة لحل المعادلة التربيعية, و وجد طرقا لحساب التكامل والنهايات للدوال المركبة واخترع التكاملات المتغيرة والتي أدت إلى معادلة أويلر لاغرانج.

أسس أويلر طرقا تحليلية لحل مشاكل نظرية الأعداد. وبهذا قد جمع فرعين مختلفين وجعلهما فرعا واحدا جديدا هو نظرية المتسلسلات الهندسية العليا والمتسلسلات والدوال المثلثية العليا ونظرية التحليل للكسور المستمرة. وكمثال, فقد أثبت لا نهائية الأعداد الأولية باستخدام تباعد سلسلة المتوافق و قد استخدم طرقا تحليلية لمعرفة توزيع الأعداد الأولية. عمل أويلر في هذا المجال أدى إلى تطوير نظرية الأعداد الأولية.

٣٠٢ نظرية الأعداد

يرجع اهتمام أويلر بنظرية الأعداد إلى تأثير أعمال صديقه كريستيان غولدباخ. و قد كانت معظم بدايات عمله في هذا المجال قائمة على أعمال بيير دي فيرما. وقد طور أويلر بعض أفكار بيير دي فيرما و أثبت خطأ بعض من حدسياته. ربط أويلر دراسة توزيع الأعداد الأولية بأفكار في التحليل. في هذا الاتجاه برهن على تباعد مجموع مقلوبات الأعداد الأولية. كما اكتشف العلاقة بين دالة زيتا لريمان والأعداد الأولية. يعرف ذلك ببرهان صيغة جداء أويلر بالنسبة لدالة زيتا لريمان.

برهن أويلر على متطابقات نيوتن وعلى مبرهنة فيرما الصغرى وعلى مبرهنة فيرما حول مجموع مربعين كما ساهم بشكل متميز في مبرهنة المربعات الأربع للاغرانج. اخترع أيضا الدالة المعروفة باسم مؤشر أويلر $\varphi(n)$، (عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من n والأولية معه). باستعمال خصائص هاته الدالة، عمم مبرهنة فيرما الصغرى لِما يعرف حاليا بمبرهنة أويلر. ساهم بشكل أساسي في نظرية الأعداد المثالية اللائي أبهرن علماء الرياضيات منذ أقليدس.

في عام 1772، برهن أويلر على أن العدد $2^{31} - 1 =$ 2,147,483,647 هو عدد أولي لميرسين. يُعتقد أن هذا العدد بقي حتى عام 1867 أكبر عدد أولي معروف.

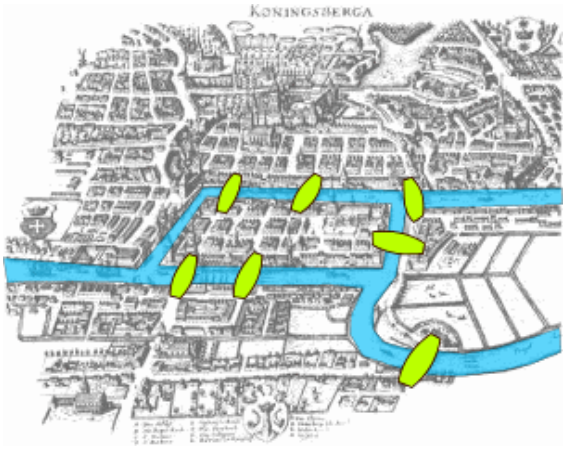
٤٠٢ الهندسة

برهن أويلر أنه في أي مثلث, النقط التسع التالية تنتمي إلى نفس الدائرة :

- نقاط تقاطع الارتفاعات الثلاثة بالأضلع المقابلة,
- منتصفات الأضلع الثلاثة.
- منتصفات القطع الثلاث اللائي يربطن مركز تقاطع الارتفاعات برؤوس المثلث الثلاثة.

تسمى هذه الدائرة بدائرة أويلر.

٥٠٢ نظرية المخططات



Map of كونيغسبرغ in Euler's time showing the actual layout of the جسور كونيغسبرغ السبعة, مبينة النهر بريغل والجسور.

في عام 1736، حل أويلر المعضلة المعروفة باسم جسور كونيغسبرغ السبعة. في مدينة كونيغسبرغ في بروسيا، الواقعة على نهر بريغوليا، كان يوجد جزيرتان كبيرتان، ترتبطان ببعضهما وباليابسة بواسطة سبعة جسور. تتمثل المعضلة في الإجابة على السؤال التالي : **هل من الممكن ايجاد طريق يمر بالجسور السبعة، مرة واحدة، لا أقل ولا أكثر، بكل جسر، ثم الرجوع بعد ذلك إلى نقطة الانطلاق ؟.** الجواب على هذا السؤال هو النفي لأن هذا المخطط لا يحتوي على أي دارة أويلرية. يعتبر هذا الحل أول مبرهنة في نظرية المخططات، وبالتحديد في نظرية المخططات المستوية.

انظر إلى مميزة أويلر.

٦.٢ الرياضيات التطبيقية

انظر إلى عدد بيرنولي وإلى متسلسلة فوريه وإلى مخطط فن وإلى عدد أويلر وإلى الثابتتين e و وإلى طريقة أويلر وإلى صيغة أويلر-ماكلورين.

ثابتة أويلر-ماسكيروني

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right).$$

٧.٢ الفيزياء والفلك

ساهم أويلر في تطوير معادلة شعاع أويلر-بيرنولي.

٨.٢ المنطق

أويلر هو أول من استعمل المنحنيات المغلقة للتعبير عن المنطق ...

انظر إلى الرسم البياني لأويلر.

٣ فلسفته واعتقاداته الدينية

٤ إحياء ذكراه

وضعت صورة أويلر في الأوراق المالية السويسرية من فئة عشر فرنكات، كما وضعت في طوابع بريدية سويسرية وألمانية وروسية تكريما له.

٥ كتبه

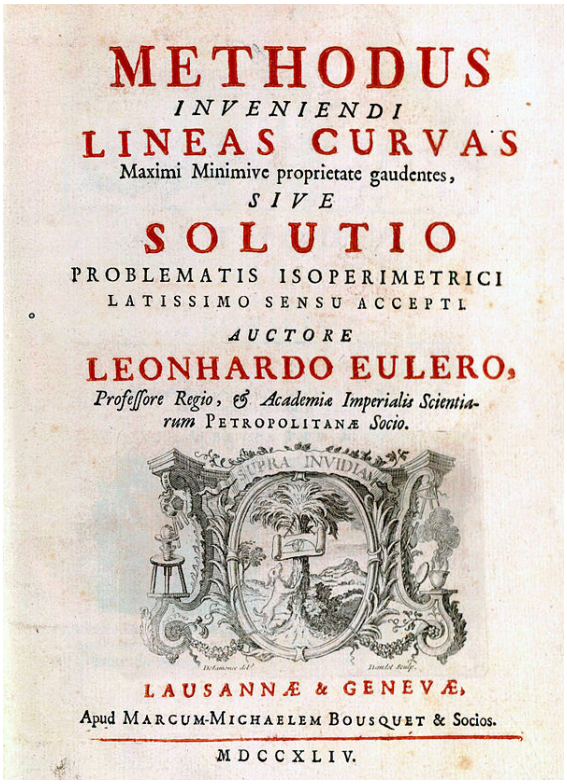
- عناصر من الجبر، يبتدأ هذا الكتاب في الجبر الأساسي بنقاش حول طبيعة الأعداد ويعطي مقدمة يسيرة الفهم إلى الجبر، متضمنا صيغا لحلول متعددات الحدود.
- *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (1744). العنوان اللاتيني يترجم إلى طريقة إيجاد الخطوط المنحنية التي تتمتع بخصائص القيم القصوى أو الدنيا، أو الحلول لمسائل ذات محيط ثابت في المعنى المقبول الواسع.[6]

٦ انظر أيضًا

- قائمة المواضيع المنسوبة إلى ليونهارد أويلر.

٧ مراجع

[1] *A Short History of Astronomy* — 1898



الصفحة الأولى لكتاب لأويلر عنوانه Methodus inveniendi lineas curvas والذي قد يترجم إلى : طريقة إيجاد الخطوط المنحنية.

[2] Finkel، B.F. (1897). "Biography- Leonard Euler". *The American Mathematical Monthly* **4** (12): 300. doi:10.2307/2968971. JSTOR 2968971.

[3] James، Ioan (2002). *Remarkable Mathematicians: From Euler to von Neumann*. Cambridge. صفحة. ISBN 0-2 521-52094-0.

[4] Translation of Euler's dissertation in English by Ian Bruce

[5] Calinger, Ronald (1996). "Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741)". *Historia Mathematica* **23** (2): 154–155. doi:10.1006/hmat.1996.0015.

[6] E65 — Methodus... entry at Euler Archives. Math.dartmouth.edu. Retrieved on 2011-09-14.

٨ وصلات خارجية

- بوابة الولايات المتحدة
- بوابة رياضيات
- بوابة تاريخ العلوم
- بوابة الفيزياء

- بوابة أعلام
- بوابة سويسرا

في كومنز صور وملفات عن: ليونهارت أويلر

٩ مصادر النص والصور، والمساهمون والتراخيص

١.٩ النص

- **ليونهارت أويلر** المصدر: https://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%84%D9%8A%D9%88%D9%86%D9%87%D8%A7%D8%B1%D8%AA_%D8%A3%D9%88%D9%8A%D9%84%D8%B1?oldid=19988367 المساهمون: Jak، مبتدئ، Charlie، Scorpix، Zwobot، Marquez، Murtasa، YurikBot، Red dawn، محمود 81، Meno25، Escarbot، JhsBot، Thijs!bot، Jo NaHaL، محمد أحمد عبد الفتاح، LordAnubisBOT، Bot-Schafter، Ali Obeid، AlleborgoBot، Loveless، أحمد محمد بسيوني، YonaBot، Synthebot، OKBot، Athkalani، TXiKiBoT، SieBot، VolkovBot، Ciphers، AlnoktaBOT، Yonidebot، Nallimbot، Rami.shinnawi، Luckas-bot، Amirobot، Numbo3-bot، Darkicebot، PipepBot، MenoBot، Jobas، Idioma-bot، EmausBot، خالد، TjBot، Rameshngbot، TobeBot، Muslim-Researcher، MaraBot، RibotBOT، Xqbot، حسن علي البط، M. Amin، CipherBot، ZéroBot، Avocato، السيد كامل، AvocatoBot، Manubot، Aiman titiBot، محمد مختاري، Ahmed A.Amer، Mr.Ibrahembot، ZkBot، ElphiBot، AsaifmBot، مصعب، Beqaya، SHBot، Matsievsky، JarBot و مجهولون: 19

٢.٩ الصور

- **ملف:CPA_2000.jpg_1957** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/aa/Euler-USSR-1957-stamp.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: ? الفنان الأصلي: ?
- **ملف:Commons-logo.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Commons-logo.svg الترخيص: Public domain المساهمون: This version created by Pumbaa, using a proper partial circle and SVG geometry features. (Former versions used to be slightly warped.) الفنان الأصلي: SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.
- **ملف:Euler's_formula.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/71/Euler%27s_formula.svg الترخيص: CC-BY-SA-3.0 المساهمون: This file was derived from Euler's formula.png:
Original: Gunther الفنان الأصلي:
Derivative work: Wereon
- **ملف:Euler's_signature.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d3/Euler%27s_signature.svg الترخيص: Public domain المساهمون:
- Euler's_signature.pngالفنان الأصلي :
- derivative work: Pbroks13 (talk)
- **ملف:Euler-10_Swiss_Franc_banknote_(front).jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b9/Euler-10_Swiss_Franc_banknote_%28front%29.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: ? الفنان الأصلي: User:Pascal.Tesson
- **ملف:Euler_GDR_stamp.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Euler_GDR_stamp.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: scan du timbre الفنان الأصلي: Deutsche Post der DDR
- **ملف:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: http://www.newton.cam.ac.uk/art/portrait.html الفنان الأصلي: Sir Godfrey Kneller
- **ملف:Gregor_Mendel_2.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/Gregor_Mendel_2.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: http://0.tqn.com/d/biology/1/0/l/e/3244238.jpg الفنان الأصلي: غير معروف
- **ملف:Gtk-dialog-info.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Gtk-dialog-info.svg الترخيص: LGPL المساهمون: http://ftp.gnome.org/pub/GNOME/sources/gnome-themes-extras/0.9/gnome-themes-extras-0.9.0.tar.gz الفنان الأصلي: David Vignoni
- **ملف:Hunayn_ibn-Ishaq_al-'Ibadi_Isagoge.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/14/Hunayn_ibn-Ishaq_al-%27Ibadi_Isagoge.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: ? الفنان الأصلي: ?
- **ملف:Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei,_1636.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d4/Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei%2C_1636.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: http://www.nmm.ac.uk/mag/pages/mnuExplore/PaintingDetail.cfm?ID=BHC2700 الفنان الأصلي: Justus Sustermans
- **ملف:Konigsberg_bridges.png** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Konigsberg_bridges.png الترخيص: CC-BY-SA-3.0 المساهمون: Public domain (PD), based on the image:
- <img alt='Image-Koenigsberg, Map by Merian-Erben 1652.jpg' src='https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/15/Image-Koenigsberg%2C_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg/120px-Image-Koenigsberg%2C_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg' width='120' height='84' srcset='https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/15/Image-Koenigsberg%2C_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg/180px-Image-Koenigsberg%2C_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg 1.5x, https:

//upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/15/Image-Koenigsberg%2C_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg/
240px-Image-Koenigsberg%2C_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg 2x' data-file-width='628' data-file-height='437' />

الفنان الأصلي: Bogdan Giuşcă

- **ملف:Lemaitre.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/52/Lemaitre.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: ? الفنان الأصلي: ?
- **ملف:Leonhard_Euler.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d7/Leonhard_Euler.jpg الترخيص: Public domain المساهمون:
  2. Kunstmuseum Basel
  الفنان الأصلي: Jakob Emanuel Handmann
- **ملف:Leonhard_Euler_2.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Leonhard_Euler_2.jpg الترخيص: Public domain المساهمون:
  - 2011-12-22 (upload, according to EXIF data)

  الفنان الأصلي: Jakob Emanuel Handmann
- **ملف:Medeleeff_by_repin.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b3/Medeleeff_by_repin.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: http://www.picture.art-catalog.ru/picture.php?id_picture=4318 الفنان الأصلي: إيليا ريبين
- **ملف:Methodus_inveniendi_-_Leonhard_Euler_-_1744.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bc/Methodus_inveniendi_-_Leonhard_Euler_-_1744.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/pages.cgi?call=517.4_E88M_1744&layout=vol0/part0/copy0&file=0004 الفنان الأصلي: Unknown, assumed that Euler himself didn't draw this.
- **ملف:Nuvola_Swiss_flag.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d1/Nuvola_Swiss_flag.svg الترخيص: Public domain المساهمون: عمل شخصي الفنان الأصلي: Min's
- **ملف:Nuvola_USA_flag.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/53/Nuvola_USA_flag.svg الترخيص: CC-BY-SA-3.0 المساهمون: عمل شخصي الفنان الأصلي: Niouniou46
- **ملف:Nuvola_apps_edu_mathematics-ar.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Nuvola_apps_edu_mathematics-ar.svg الترخيص: GPL المساهمون: Own work, based on Image:Nuvola_apps_edu_mathematics-p.svg الفنان الأصلي: Khaled Hosny
- **ملف:P_physics.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/P_physics.svg الترخيص: CC-BY-SA-3.0 المساهمون: Based on Image:P physics.png الفنان الأصلي: ?
- **ملف:P_vip.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/P_vip.svg الترخيص: Public domain المساهمون: ? الفنان الأصلي: ?
- **ملف:Science_history_icon.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/df/Science_history_icon.svg الترخيص: CC BY-SA 3.0 المساهمون: Science history icon.png الفنان الأصلي: own work based on: **Angelus** (*talk*)
- **ملف:Tesla3.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/56/Tesla3.jpg الترخيص: Public domain المساهمون: cropped from: image:Tesla2.jpg الفنان الأصلي: Napoleon Sarony
- **ملف:Twemoji_270f.svg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f4/Twemoji_270f.svg الترخيص: CC BY 4.0 المساهمون: https://github.com/twitter/twemoji الفنان الأصلي: Twitter
- **ملف:William_D._Phillips.jpg** المصدر: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/William_D._Phillips.jpg الترخيص: CC BY-SA 3.0 المساهمون: عمل شخصي الفنان الأصلي: Markus Pössel (User name: Mapos)

٣٠٩ ترخيص المضمون

- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0